technic-didact 9/4, 257 (1984).

Zur Gleichgewichtsproblematik beim Fahrradfahren

Hans Joachim Schlichting

Gleichgewicht halten
ist die erfolgreichste Bewegung des Lebens.

Beutelrock

1. Einleitung

Die physikalische Beschreibung eines fahrenden Zweirads hat Mathematiker und Physiker immer wieder herausgefordert. WHIPPLE /10/ und Mc GAW /7/ dürften die ersten gewesen sein, die eine Theorie des Fahrradfahrens vorgelegt haben. Später befaßten sich TIMOSHENKO und YOUNG /9/ erneut mit der Problematik. Die Ergebnisse wurden kaum akzeptiert, weil viele vertraute Aspekte des Fahrradfahrens nicht erklärt werden konnten, Allenfalls spezielle, mathematisch leicht zu behandelnde Detailprobleme flossen in einige Lehr- und Fachbücher /8, 3/ ein. In jüngster Zeit hat man sich dieser Problematik sowohl experimentell als auch theoretisch erneut angenommen /6, 4/, vermutlich als eine Folge des Comebacks des Fahrrads.

Dabei wurden zwar einige frühere Hypothesen widerlegt, insgesamt aber keine konstruktive Alternative geboten. Es scheinen zu viele Einflußfaktoren zu berücksichtigen zu sein, vor allem solche, die vom unterschiedlichen individuellen Fahrverhalten des jeweiligen Fahrers abhängen, daß eine geschlossene Theorie überhaupt illusorisch erscheint. Erfolgsversprechender sind demgegenüber Versuche, das Fahrradfahren auf dem Computer zu simulieren /1/. Jedenfalls zeigten erste Versuche verwertbare praktische Ergebnisse, insbesondere auch im Hinblick auf sicherheitstechnische Verbesserungen des Fahrraddesigns /11, S. 180/.

Wir wollen uns daher auf eine mathematische Diskussion nicht einlassen. Stattdessen beschränken wir uns im folgenden auf eine weitgehend qualitative Darstellung des Gleichgewichtsverhaltens eines sich "normal" verhaltenden Durchschnittsfahrers auf einem handelsüblichen Zweirad. Dadurch wird ein Verständnis der wesentlichen Mechanismen des Gleichgewichtsverhaltens auf relativ einfache Weise zugänglich. Mit Hilfe einiger quantitativer Abschätzungen sollen Vorstellungen über die auftretenden Größenordnungen entwickelt werden.

2. Gleichgewicht im statischen und dynamischen Fall

Die Verwunderung vieler Menschen darüber, daß man auf zwei Rädern überhaupt fahren kann, beruht vermutlich darauf, daß die Anschauung des Menschen weitgehend geprägt ist vom Gleichgewichtsverhalten ruhender Objekte. So haben beispielsweise Tische und Stühle mindestens drei Beine (Unterstützungspunkte), um stabil zu stehen. Das Zweirad mit nur zwei Unterstützungspunkten (Berührpunkt von Vorderrad und Hinterrad mit dem Boden) ist statisch gesehen labil. Bereits kleine Störungen (die praktisch stets vorhanden sind) genügen, um das Fahrrad zu kippen, d.h. in eine unerwünschte stabile Lage zu bringen. Jeder Radler kennt die Bemühungen, ein Rad durch einen Ständer oder durch Anlehnen an eine Hauswand vor dem Umkippen geschützt abzustellen. Auf einem ruhenden Rad sitzend das Gleichgewicht zu hallen, erfordert in der Tat akrobatische Fähigkeiten. Diese Erfahrungen werden jedoch zu Unrecht zur Beurteilung eines fahrenden Radlers herangezogen. Bewegte Objekte, seien es rotierende Kreisel oder fliegende Bälle, verhalten sich völlig verschieden von ruhenden.

3. Zur Technik des Radfahrens

3.1. Ein Radier ist ständig am Umkippen

Die primäre Vertrautheit mit ruhenden Objekten macht es erforderlich, daß man das Radfahren, d.h. die Beherrschung eines bewegten Objekts, erlernt. Die Technik, die man sich dabei mehr unbewußt als bewußt zu eigen macht, ist völlig verschieden von der Technik des Balancierens, mit der man labile ruhende Objekte im Gleichgewicht hält.

Auch ein fahrendes Fahrrad würde umkippen, wenn sich der Schwerpunkt nicht mehr senkrecht über der Verbindungslinie der beiden Berührpunkte $\overline{AB}$ mit dem Boden befände (vgl. **Bild 1**). Denn die am Schwerpunkt S angreifende Schwerkraft würde zu einem Drehmoment und damit zu einer Drehung um $\overline{AB}$ führen. Da diese Situation praktisch ständig gegeben ist, fragt man sich, was ein Radler macht, um nicht zu kippen. An Reaktionsmöglichkeiten stehen ihm die Schwerpunktsverlagerungen durch Bewegung des eigenen Körpers und die Drehung des Lenkers zur Verfügung. Vor allem letztere ist die entscheidende Maßnahme, die der praktisch ständig nach der einen oder anderen Seite kippende Radler ausnutzt. Die naive Vermutung, daß man etwa bei einem Kippen nach links nach rechts gegenzusteuern hätte, ist falsch. Dies würde den beginnenden Sturz nur noch beschleunigen. Man muß im Gegenteil in die gleiche Richtung, nach links, steuern.

3.2. Wie fährt man eine Kurve?

Um dies zu verstehen, betrachten wir, was passiert, wenn der Lenker eingeschlagen wird, d. h. das Rad eine Kurve zu fahren beginnt:

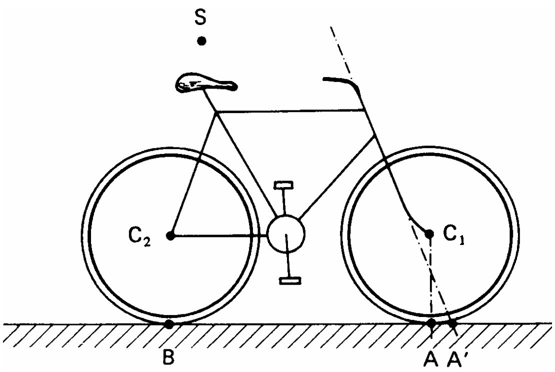

Bild 1: Seitenansicht des Fahrrads mit den Berührpunkten A und B und dem Schwerpunkt S (bezogen auf Fahrrad und Fahrer).

Um einfache Verhältnisse zu haben, fahre der Radler auf einer Kreisbahn vom Radius r, (in **Bild 2** perspektivisch angedeutet). Die Kurvenfahrt ist eine Abweichung von der gleichförmig geradlinigen Bewegung und erfordert eine auf den Kreismittelpunkt M gerichtete Kraft

$$\vec{F}_Z = -m\frac{v^2}{r}\hat{r} \qquad (1)$$

(wobei v die Geschwindigkeit des Rades, $\hat{r}$ die Richtung bestimmende Einheitsradiusvektor und m die im Schwerpunkt S zentriert gedachte Gesamtmasse von Fahrrad und Fahrer ist), Aufgebracht wird $\vec{F}_Z$ durch die am eingeschlagenen Vorderrad angreifende Reibungskraft $\vec{F}_R$, die ihrerseits durch die Muskelkraft hervorgerufen wird, mit der der Fahrer den Lenker eingeschlagen hält.

Der Situation, wie sie der Radfahrer selbst erlebt, angemessener ist die Beschreibung der Kurvenfahrt bezüglich des mit dem Fahrrad mitbewegten Bezugssystems. Die auf diese Weise heraustransformierte Zentralkraft ist dann durch eine im Schwerpunkt angreifende Scheinkraft, der Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z' = -\vec{F}_Z$ zu berücksichtigen, die sich aus der Sicht des Fahrers jedoch sehr real als eine ihn nach außen (von M weg) ziehende Kraft bemerkbar macht. Will er durch das auf diese Weise (bezüglich Drehpunkt A) wirkende Drehmoment $\vec{D}_1$, nicht umgekippt werden, so hat er durch Verlagerung seines Schwerpunktes S dafür zu sorgen, daß das Fahrrad um einen passenden Winkel α geneigt wird. Durch eine solche Neigung kann die Gewichtskraft ein $\vec{D}_1$ ausgleichendes Drehmoment $\vec{D}_2$ hervorrufen:

Für die Beträge von $\vec{D}_1$ und $\vec{D}_2$ gilt (vgl. Bild 2):

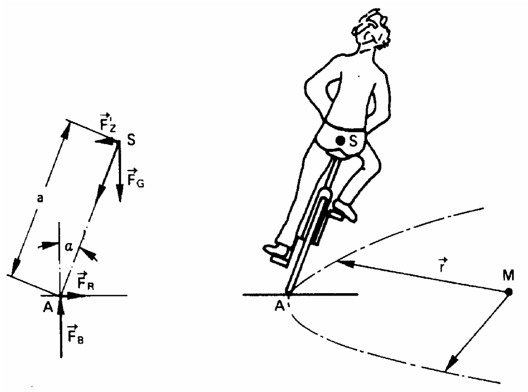

Bild 2: Rückansicht eines Radlers während der Kreisfahrt (Mittelpunkt M, Radiusvektor $\vec{r}$. Links daneben die der Bewegung zugrunde liegenden Kräfte. $\vec{F}_B$ ist die Reaktionskraft des Bodens.

$$D_1 = F_Z' \cdot a \cdot \cos\alpha = m\frac{v^2}{r} \cdot a \cdot \cos\alpha\,, \qquad (2)$$

$$D_2 = F_G \cdot a \cdot \sin\alpha = mg \cdot a \cdot \sin\alpha\,. \qquad (3)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung $D_1 = D_2$ ergibt sich

$$F_Z' = F_G \cdot \tan\alpha = mg \cdot \tan\alpha \qquad (4)$$

bzw. für den Neigungswinkel α

$$\alpha = \arctan\frac{v^2}{g \cdot r}\,. \qquad (5)$$

Der Neigungswinkel α, der bei einer Kurvenfahrt zur Aufrechterhaltung des (dynamischen) Gleichgewichts eingenommen wird, ist demnach um so größer, je größer die Fahrgeschwindigkeit und je enger die Kurve (d. h. je kleiner r) ist. Dieses Ergebnis wird durch die Erfahrung voll bestätigt. Will man eine enge Kurve mit großer Geschwindigkeit nehmen, so muß man sich stark in die Kurve legen. (Aus Gründen, die wir weiter unten noch ansprechen werden, wird man in den meisten Fällen bei engen Kurven jedoch lieber den Neigungswinkel durch Herabsetzen der Geschwindigkeit möglichst klein halten).

Fährt ein Radfahrer beispielsweise mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h in einer Kreisbahn vom Radius r = 10 m ein, so muß er sich um einen Winkel von α = 10° in die Kurve legen.

3.3. Der Radler pendelt um die Gleichgewichtslage

Es bleibt die Frage zu klären, wie es der Fahrer erreicht, die Neigung in die korrekte Richtung hervorzurufen. Denn ein bloßes Einschlagen des Lenkers führt nach dem eben Gesagten unweigerlich zum Umkippen. Der Trick besteht darin, daß der Fahrer, wenn er z. B. eine Linkskurve fahren möchte, kurz nach rechts lenkt, dadurch ein Kippen nach links bewirkt, dieses dann durch Einschlagen des Lenkers nach links abfängt und dabei die Kurvenfahrt hervorruft.

Kommen wir zum Ausgangsproblem der Technik des Gleichgewichtshaltens beim Fahrradfahren zurück, so kann man die eben gewonnenen Aussagen umkehren und feststellen:

Jede wie auch immer zustande kommende Abweichung des Radlers aus der Senkrechten muß durch ein angemessenes Einschlagen des Lenkers beantwortet werden. Man schlägt den Lenker so stark ein, daß das dadurch bedingte Drehmoment größer wird als das durch die Neigung hervorgerufene mit der Folge, daß das Fahrrad wieder aufgerichtet wird, Während der Aufrichtung wird man den Lenker in dem Maße wieder in die Geradeausrichtung bringen wie die Neigung aufgehoben wird. Ein in der Praxis kaum zu vermeidendes Übersteuern mit der Folge einer Neigung in die andere Richtung wird man erneut mit einer entsprechenden Steueraktion nunmehr in entgegengesetzte Richtung beantworten. Mit anderen Worten: Das Gleichgewichthalten beim Radfahren beruht auf einem äußerst subtilen Wechselspiel zwischen Kippen und Wiederaufrichten. Der Radfahrer wird kaum exakt ein statisches Gleichgewicht einhalten, sondern ständig ein dynamisches Gleichgewicht einregeln, d. h. ständig um die Gleichgewichtslage pendeln. Von diesen Pendelbewegungen des Lenkers merkt man i.a. wenig, sie werden unbewußt als Antwort auf Abweichungen vom Gleichgewicht vorgenommen. Ist man jedoch z.B. auf sandigem Untergrund, oder beim Bergauffahren gezwungen, langsam zu fahren, oder gerät man mit dem Fahrrad in Straßenbahnschienen, so merkt man jedoch sehr wohl etwas von den Aktionen zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts. Gemäß Glg. (3) müssen bei kleinen Geschwindigkeiten sehr kleine Krümmungsradien, d.h. sehr enge Kurven gefahren werden, um die durch Störungen bedingten Neigungen $(\alpha \neq 0)$ zu kompensieren. Der Lenker muß also jeweils sehr stark eingeschlagen werden. Da starkes Lenkereinschlagen außerdem mit zusätzlichen Störungen des Gleichgewichts verbunden sein dürfte, somit größere a als normal auftreten, beobachtet man in einem solchen Fall einen stark schwankenden Radler mit stark überlappenden Spuren (z. B. in Sand oder Schnee) von Vorder- und Hinterrad (siehe **Bild 3**). Bei einer Geschwindigkeit von beispielsweise 4 km/h und einer störungsbedingten Neigung von α = 5° muß ein Kreisbogen vom Radius r = 1,4 m befahren werden. Umgekehrt zeichnen sich schnelle Fahrten durch äußerst ruhigen, schwankungsfreien Lauf aus, zur Kompensation von Störungen des Gleichgewichts genügen kleinste Auslenkungen, entsprechend sehr großen Krümmungsradien. Beispielsweise worden störungsbedingte Neigungen von α = 5° bei einer Geschwindigkeit von v = 35 km/h durch eine von einer Geraden abweichenden Kurvenfahrt mit r = 110 m behoben.

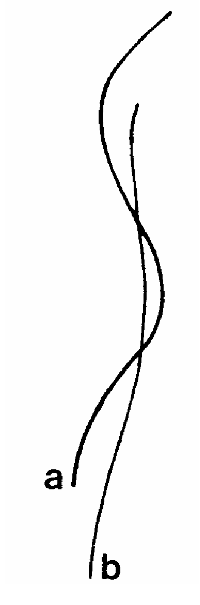

Bild 3: Schematische Darstellung des Spurverlaufs von Vorderrad (a) und Hinterrad (b) bei niedriger Geschwindigkeit.

Die Bedeutung des Lenkens, nicht nur für die Fahrtrichtungsbestimmung, sondern auch für das Einhalten des Gleichgewichts, merkt man spätestens dann, wenn - durch weichen Vorfall auch immer - der Lenker blockiert ist. Dies führt in der Regel zum Sturz.

4. Die Bedeutung der Reibung

4.1. Seitliches Wegrutschen

Es wurde bereits erwähnt, daß die für eine Kurvenfahrt aufzubringende Zentralkraft $\vec{F}_Z$ durch die Reibungskraft $\vec{F}_R$ des Rades mit dem Boden aufgebracht werden muß:

$\vec{F}_R = \vec{F}_Z$.

$\vec{F}_R$ ist ihrerseits von der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ abhängig, mit der das Laufrad auf den Boden drückt: Für die maximale Reibungskraft $\vec{F}_{R\max}$ gilt betragsmäßig:

$F_{R\max} = \mu F_G$,

wobei μ der vom Untergrund abhängende Reibungskoeffizient ist (siehe **Tabelle 1**). Die Reibungskraft F_R und damit die Zentralkraft F_Z , die für eine Kurvenfahrt nötig ist, ist somit begrenzt:

Tabelle 1: Reibungskoeffizienten μ für einige typische Fahrbahnen /11/

Material	μ
Beton, Asphalt (trocken)	0,8 - 0,9
Beton, Asphalt (naß)	0,4 - 0,7
Rollsplit	0,6 - 0,7
Loser Sand	0,3 - 0,4
Eis	0,1 - 0,2

$$F_Z \le F_{R\max} = \mu F_G \qquad (6)$$

Wegen Glg. (4) darf deshalb ein Neigungswinkel von

$$\alpha = \arctan\left(F_{R\max} / mg\right) = \arctan \mu \qquad (7)$$

nicht überschritten werden. Anderenfalls kommt es zu einem Wegrutschen des Vorderrades und damit unweigerlich zum Sturz.

Auf einer sandigen Fahrbahn (μ = 0,3) darf ein Fahrrad einen Neigungswinkel von α = 16,7° nicht überschreiten. Der maximale Winkel bei optimalen Straßenverhältnissen (μ = 0,9) beträgt knapp 42°.

Bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h kann man demnach auf Sandboden nur einen sehr weiten Kreis mit r > 24 m fahren. Selbst unter optimalen Bedingungen (μ = 0,9) darf der Kreis nicht enger als r $\approx$ 8 m sein. Damit erklärt sich, daß ein Radfahrer, der einen engen Kreis fahren möchte, die Geschwindigkeit so stark herabsetzen muß, daß die Unglg. (6) erfüllt bleibt.

4.2. Fahrbahnböschung

Die Destabilisierung aufgrund des Neigungswinkels bei Kurvenfahrten (beispielsweise bei Fahrradrennen im Stadion, bei denen große Geschwindigkeiten auftreten) kann durch eine passende Neigung der Bahn aufgehoben werden. Eine solche Fahrbahnneigung ist dann optimal, wenn das Rad senkrecht zur Bahn fährt.

Aufgrund von Glg. (5) muß bei einer gegebenen Geschwindigkeit für kleine Bahnradien eine relativ starke, für große Radien eine relativ schwache Bahnneigung vorhanden sein.

Bei vorgegebenem Bahnradius muß die Neigung der Bahn umso größer sein, je schneller gefahren wird.

5. Automatische Gleichgewichtsregelung

Die bisherigen Überlegungen beruhten auf der Voraussetzung, daß das Gleichgewicht durch ein weitgehend unbewußtes, auf die Bedingungen der jeweiligen Radfahrt fein abgestimmtes Regelverhalten des Fahrers eingestellt wird. JONES /4/ hat experimentell festgestellt, daß es so gut wie unmöglich ist, ein nicht fahrbares ("unridable") Fahrrad zu konstruieren.

Normale Fahrräder sind jedoch so konstruiert, daß sie das Regelverhalten des Fahrers weitgehend unterstützen. So ist es beispielsweise möglich, ein Fahrrad ohne Berührung des Lenkers zu lenken (etwa beim Freihändigfahren oder beim Schieben am Sattel), d.h. insbesondere auch Kurven zu fahren. Da nämlich beim normalen Fahrrad die Lenkstangenachse geometrisch verlängert unter dem Mittelpunkt C_1 des Vorderrades vorbeigeht und **vor** dem Berührpunkt A zwischen Reifen und Boden den Boden in A' trifft (siehe Bild 1) bewirkt die (aufgrund der Neigung des gesamten Rades zu einer Seite) in C_1 angreifende Schwerkraft des Vorderrades einen Lenkereinschlag in dieselbe Richtung. Damit ist aber nach den obigen Ausführungen je nach der Stärke der jeweiligen Fahrradneigung ein Wiederaufrichten oder ein Kurvenfahren möglich, ohne daß der Lenker berührt werden müßte.

6. Kreiseleffekte

Bislang wurde die Masse der Laufräder pauschal in die Gesamtmasse m mit einbezogen. Außerdem wurde ein möglicher Kreiseleffekt auf das Gleichgewichtsverhalten des Fahrrads vernachlässigt. Ob und inwieweit eine solche Näherung gerechtfertigt ist, soll kurz beleuchtet werden: Die mit einer Winkelgeschwindigkeit ω drehenden Laufräder des Fahrrads vom Radius ρ und Trägheitsmoment I stellen Kreisel dar. Wird der Lenker eingeschlagen, beispielsweise um einen Kreisbogen von Radius r zu befahren, dann bewirkt eine solche aufgezwungene Präzessionsbewegung des Laufrades ein kippendes Drehmoment D_K auf die Laufradachse /vgl. z. B. 2/:

$$D_K = I\omega \cdot \Omega , \qquad (8)$$

wodurch gleichsam automatisch die zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts notwendige Radneigung eingeleitet wird. Ω ist die Winkelgeschwindigkeit der durch den Lenkeinschlag eingenommenen Kreisbahn und daher durch den Quotienten v/r gegeben. Mit $I = m_{Rad} \cdot \rho^2$ sowie $\omega = v/\rho$ ergibt sich dann:

$$D_K = \frac{m_{Rad}}{r} \cdot v^2 \rho \cdot \qquad (9)$$

Bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h, einem Kreisbahnradius r = 30 m, einem Radradius ρ = 35 cm und einer Reifenmasse $m_{Rad} =$ 1 kg ergibt sich ein Drehmoment D_K = 0,8 Nm.

Im Vergleich zum Drehmoment D_1 (vgl. Glg. (2)), welches mit a = 1 m und m = 85 kg den Wert D_1 = 96 Nm annimmt, ist es jedoch vernachlässigbar klein. Allerdings zeigen KLEIN und SOMMERFELD /5/, daß die Kreiselwirkungen der Laufräder insofern in "besonders intelligenter Weise" zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts beitragen, als sie "vermöge der Phase ihre Wirkung zuerst ein Überfallen des Rades spüren und dann die viel stärkeren, aber etwas langsamen Centrifugalwirkungen in den Dienst der Stabilität spannen" /5, S. 884/.

Literatur:

/1 / DOUG LAS, R.R.: Computer simulation of bicycle dynamics. Buffalo: Calspan Corp., ASME paper fall 1973. P. 35 ff.

/2/ GERTHSEN, C.; KNESER, H.O.; VOGEL, H.: Physik. Heidelberg etc.: Springer 1977, 13. S. 65 f.

/3/ GRAMMEL, R.: Der Kreisel Braunschweig: Vieweg 1920. S. 183 ff.

/4/ JONES, D.E.H.: The Stability of the Bicycle. Phys. Today 23 (1970) 34 (Apr. 1970).

/5/ KLEIN, F.;SOMMERFELD,A.: Über die Theorie des Kreisels. Stuttgart: Teubner 1965.

/6/ LOWELL, J.; Mc KELL, H.D.: The stability of bicycles. Am. J. Phys. 50 (1982) 12, S.1106.

/7/ Mc GAW, G.T.: Engineer. (London) 30 (2. Dez. 1898).

/8/ SOMMERFELD, A.: Mechanik. Leipzig: Akad. Verlagsges, 1968,8. S. 138.

/9/ TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D.H.: Advanced Dynamics. New York: Mc Graw, Hill 1948. P. 239.

/10/ WHIPPLE, F.J.W.: The stability of the motion of a bicycle. Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics 30, (1899), S. 312-348.

/11/ WHITT, F.; WILSON, D.: Bicycling Science: Ergonomics and Mechanics. Cambridge, Mass.: Mit Press 1979. P. 180.