

Durch Siedepunktserhöhungsbestimmungen an den wäßrigen Lösungen kommt Benrath zu dem Schluß, daß nur diejenigen Substanzen, z. B. $CdCl_2$, welche die Blaufärbung verhindern, Komplexe bilden, während diejenigen, z. B. $CaCl_2$, welche die Blaufärbung bewirken, keine Komplexe bilden. Und wenn dies auch aus seinen Resultaten hervorzugehen scheint, so ist immer nicht zu leugnen, daß die Überführungsversuche die Existenz von Komplexen im letzteren Fall unzweideutig beweisen. Benrath gibt ja zu, daß solche Komplexe bei höheren Konzentrationen existieren, aber wenn bei höheren Konzentrationen, warum nicht auch bei etwas niedrigeren Konzentrationen? Es handelt sich nur um die relativen Mengen, und wenn Benrath noch behauptet, daß die Bildung solcher Komplexe sich „thermodynamisch wohl kaum begründen läßt“, so kann man hierzu nur bemerken, daß die Thermodynamik wohl kaum etwas damit zu tun hat.

Aus diesen neueren Arbeiten geht deutlich hervor, daß die Frage nach der Ursache der Farbenänderungen bei Kobaltsalzen noch nicht erledigt ist und daß deren Erledigung noch weiterer exakter Versuche bedarf.

Nachtrag III.

Zu dem Kapitel über den Einfluß des Aggregatzustandes. K. Arndt hat auf die Einwendungen von Lorenz kurz geantwortet (Ber. d. d. chem. Ges. 40, 3612—3614, 1907) und beabsichtigt in der Zeitschrift für Elektrochemie ausführlich dieselben zu widerlegen.

(Eingegangen 1. Oktober 1907.)

Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen.

Von A. Einstein.

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen behalten ihre Form, wenn man auf ein neues, relativ zu dem ursprünglich benutzten in gleichförmiger Translationsbewegung begriffenes Koordinatensystem transformiert nach den Gleichungen

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}$$

Solange man an der Meinung festhielt, daß auf die Newtonschen Bewegungsgleichungen die ganze Physik aufgebaut werden könne, konnte man also nicht daran zweifeln, daß die Naturgesetze gleich ausfallen, auf welches von relativ zueinander gleichförmig bewegten (beschleunigungsfreien) Koordinatensystemen sie auch bezogen werden mögen. Jene Unabhängigkeit vom Bewegungszustande des benutzten Koordinatensystems, im folgenden „Relativitätsprinzip“ genannt, schien aber mit einem Male in Frage gestellt durch die glänzenden Bestätigungen, welche die H. A. Lorentzsche Elektrodynamik bewegter Körper erfahren hat.¹⁾ Jene Theorie ist nämlich auf die Voraussetzung eines ruhenden, unbeweglichen Lichtäthers gegründet; ihre Grundgleichungen sind nicht so beschaffen, daß sie bei Anwendung der obigen Transformationsgleichungen in Gleichungen von der gleichen Form übergehen.

Seit dem Durchdringen jener Theorie mußte man erwarten, daß es gelingen werde, einen Einfluß der Bewegung der Erde relativ zum Lichtäther auf die optischen Erscheinungen nachzuweisen. Lorentz bewies allerdings bekanntlich in jener Arbeit, daß nach seinen Grundannahmen eine Beeinflussung des Strahlenganges bei optischen Versuchen durch jene Relativbewegung nicht zu erwarten sei, sofern man sich bei der Rechnung auf die Glieder beschränkt, in denen das Verhältnis $\frac{v}{c}$ jener Relativgeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in der ersten Potenz auftritt. Aber das negative Resultat des Experimentes von Michelson und Morley²⁾ zeigte, daß in einem bestimmten Falle auch ein Effekt zweiter Ordnung (proportional $\frac{v^2}{c^2}$) nicht vorhanden war, trotzdem er nach den Grundlagen der Lorentzschen Theorie bei dem Versuche sich hätte bemerkbar machen müssen.

Es ist bekannt, daß jener Widerspruch zwischen Theorie und Experiment durch die Annahme von H. A. Lorentz und Fitzgerald, nach welcher bewegte Körper in der Richtung ihrer Bewegung eine bestimmte Kontraktion erfahren, formell beseitigt wurde. Diese ad

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895. Neudruck Leipzig 1906.

2) A. A. Michelson und E. W. Morley, Amer. Journ. of Science (3) 34, S. 333, 1887.

hoc eingeführte Annahme erschien aber doch nur als ein künstliches Mittel, um die Theorie zu retten; der Versuch von Michelson und Morley hatte eben gezeigt, daß Erscheinungen auch da dem Relativitätsprinzip entsprechen, wo dies nach der Lorentzschen Theorie nicht einzusehen war. Es hatte daher den Anschein, als ob die Lorentzsche Theorie wieder verlassen und durch eine Theorie ersetzt werden müsse, deren Grundlagen dem Relativitätsprinzip entsprechen, denn eine solche Theorie ließe das negative Ergebnis des Versuches von Michelson und Morley ohne weiteres voraussehen.

Es zeigte sich aber überraschenderweise, daß es nur nötig war, den Begriff der Zeit genügend scharf zu fassen, um über die soeben dargelegte Schwierigkeit hinweg zu kommen. Es bedurfte nur der Erkenntnis, daß man eine von H. A. Lorentz eingeführte Hilfsgröße, welche er „Ortszeit“ nannte, als „Zeit“ schlechthin definieren kann. Hält man an der angedeuteten Definition der Zeit fest, so entsprechen die Grundgleichungen der Lorentzschen Theorie dem Relativitätsprinzip, wenn man nur die obigen Transformationsgleichungen durch solche ersetzt, welche dem neuen Zeitbegriff entsprechen. Die Hypothese von H. A. Lorentz und Fitzgerald erscheint dann als eine zwingende Konsequenz der Theorie. Nur die Vorstellung eines Lichtäthers als des Trägers der elektrischen und magnetischen Kräfte paßt nicht in die hier dargelegte Theorie hinein; elektromagnetische Felder erscheinen nämlich hier nicht als Zustände irgendeiner Materie, sondern als selbständig existierende Dinge, die der ponderablen Materie gleichartig sind und mit ihr das Merkmal der Trägheit gemeinsam haben.

Im folgenden ist nun der Versuch gemacht, die Arbeiten zu einem Ganzen zusammenzufassen, welche bisher aus der Vereinigung von H. A. Lorentz'scher Theorie und Relativitätsprinzip hervorgegangen sind.

In den ersten beiden Teilen der Arbeit sind die kinematischen Grundlagen sowie deren Anwendung auf die Grundgleichungen der Maxwell-Lorentzschen Theorie behandelt; dabei hielt ich mich an Arbeiten¹⁾ von H. A. Lorentz (Versl. Kon. Akad. v. Wet., Amsterdam 1904) und A. Einstein (Ann. d. Phys. **16**, 1905).

In dem ersten Abschnitt, in dem ausschließlich die kinematischen Grundlagen der Theorie angewendet worden sind, habe ich auch einige optische Probleme (Dopplersches Prinzip, Aberration, Mitführung des

1) Es kommen auch noch die einschlägigen Arbeiten von E. Cohn in Betracht, von welchen ich aber hier keinen Gebrauch gemacht habe.

Lichtes durch bewegte Körper) behandelt; auf die Möglichkeit einer derartigen Behandlungsweise wurde ich durch eine mündliche Mitteilung und eine Arbeit (Ann. d. Phys. **23**, 989, 1907) von Herrn M. Laue, und durch eine (allerdings korrekturbedürftige) Arbeit von Herrn J. Laub (Ann. d. Phys. **32**, 1907) aufmerksam.

Im dritten Teil ist die Dynamik des materiellen Punktes (Elektrons) entwickelt. Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen benutzte ich dieselbe Methode wie in meiner oben genannten Arbeit. Die Kraft ist definiert wie in der Planckschen Arbeit. Auch die Umformungen der Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes, welche die Analogie der Bewegungsgleichungen mit denen der klassischen Mechanik so deutlich hervortreten lassen, sind dieser Arbeit entnommen.

Der vierte Teil befaßt sich mit den allgemeinen Folgerungen, betreffend die Energie und die Bewegungsgröße physikalischer Systeme, zu welchen die Relativitätstheorie führt. Dieselben sind in den Originalabhandlungen:

A. Einstein, Ann. d. Phys. **18**, 639, 1905 und Ann. d. Phys. **23**, 371, 1907, sowie M. Planck, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wissensch. XXIX, 1907

entwickelt worden, hier aber auf einem neuen Wege abgeleitet, der — wie mir scheint — den Zusammenhang jener Anwendungen mit den Grundlagen der Theorie besonders klar erkennen läßt. Auch die Abhängigkeit der Entropie und Temperatur vom Bewegungszustande ist hier behandelt; bezüglich der Entropie hielt ich mich ganz an die zuletzt zitierte Plancksche Abhandlung, die Temperatur bewegter Körper definierte ich wie Herr Mosengeil in seiner Arbeit über die bewegte Hohlraumstrahlung.¹⁾

Das wichtigste Ergebnis des vierten Teiles ist das von der trägen Masse der Energie. Dies Resultat legt die Frage nahe, ob die Energie auch schwere (gravitierende) Masse besitze. Ferner drängt sich die Frage auf, ob das Relativitätsprinzip auf beschleunigungsfrei bewegte Systeme beschränkt sei. Um diese Fragen nicht ganz unerörtert zu lassen, habe ich dieser Abhandlung einen fünften Teil hinzugefügt, welcher eine neue relativitätstheoretische Betrachtung über Beschleunigung und Gravitation enthält.

1) Kurd von Mosengeil, Ann. d. Phys. **22**, 867, 1907.

I. Kinematischer Teil.

§ 1. Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Definition der Zeit. Relativitätsprinzip.

Um irgendeinen physikalischen Vorgang beschreiben zu können, müssen wir imstande sein, die in den einzelnen Punkten des Raumes stattfindenden Veränderungen örtlich und zeitlich zu werten.

Zur örtlichen Wertung eines in einem Raumelement stattfindenden Vorganges von unendlich kurzer Dauer (Punkt ereignis) bedürfen wir eines Cartesischen Koordinatensystems, d. h. dreier aufeinander senkrecht stehender, starr miteinander verbundener, starrer Stäbe, sowie eines starren Einheitsmaßstabes.¹⁾ Die Geometrie gestattet, die Lage eines Punktes bzw. den Ort eines Punkt ereignisses durch drei Maßzahlen (Koordinaten x, y, z) zu bestimmen.²⁾ Für die zeitliche Wertung eines Punkt ereignisses bedienen wir uns einer Uhr, die relativ zum Koordinatensystem ruht und in deren unmittelbarer Nähe das Punkt ereignis stattfindet. Die Zeit des Punkt ereignisses ist definiert durch die gleichzeitige Angabe der Uhr.

Wir denken uns in vielen Punkten relativ zum Koordinatensystem ruhende Uhren angeordnet. Dieselben seien sämtlich gleichwertig, d. h. die Differenz der Angaben zweier solcher Uhren soll ungeändert bleiben, falls sie nebeneinander angeordnet werden. Denkt man sich diese Uhren irgendwie eingestellt, so erlaubt die Gesamtheit der Uhren, falls letztere in genügend kleinen Abständen angeordnet sind, ein beliebiges Punkt ereignis — etwa mittels der nächstgelegenen Uhr — zeitlich zu werten.

Der Inbegriff dieser Uhrangaben liefert uns aber gleichwohl noch keine „Zeit“, wie wir sie für physikalische Zwecke nötig haben. Wir bedürfen vielmehr hierzu noch einer Vorschrift, nach welcher diese Uhren relativ zueinander eingestellt werden sollen.

Wir nehmen nun an, die Uhren können so gerichtet werden, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines jeden Lichtstrahles im Vakuum — mit Hilfe dieser Uhren gemessen — allenthalben gleich einer universellen Konstante c wird, vorausgesetzt, daß das Koordinatensystem nicht beschleunigt ist. Sind A und B zwei relativ zum Koordinatensystem ruhende, mit Uhren ausgestattete Punkte, deren Entfernung r beträgt, und ist t_A die An-

1) Statt von „starr“ Körpern, könnte hier sowie im folgenden ebenso gut von deformierenden Kräften nicht unterworfenen festen Körpern gesprochen werden.

2) Hierzu braucht man noch Hilfsstäbe (Lineale, Zirkel).

gabe der Uhr in A , wenn ein durch das Vakuum in der Richtung AB sich fortpflanzender Lichtstrahl den Punkt A erreicht, t_B die Angabe der Uhr in B beim Eintreffen des Lichtstrahles in B , so soll also, wie auch die den Lichtstrahl emittierende Lichtquelle, sowie andere Körper bewegt sein mögen, stets

$$\frac{r}{t_B - t_A} = c$$

sein.

Daß die hier gemachte Annahme, welche wir „Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit“ nennen wollen, in der Natur wirklich erfüllt sei, ist keineswegs selbstverständlich, doch wird dies — wenigstens für ein Koordinatensystem von bestimmtem Bewegungszustande — wahrscheinlich gemacht durch die Bestätigungen, welche die, auf die Voraussetzung eines absolut ruhenden Äthers gegründete Lorentzsche Theorie¹⁾ durch das Experiment erfahren hat.²⁾

Den Inbegriff der Angaben aller gemäß dem vorhergehenden gerichteter Uhren, welche man sich in den einzelnen Raumpunkten relativ zum Koordinatensystem ruhend angeordnet denken kann, nennen wir die zu dem benutzten Koordinatensystem gehörige Zeit oder kurz die Zeit dieses Systems.

Das benutzte Koordinatensystem samt Einheitsmaßstab und den zur Ermittlung der Zeit des Systems dienenden Uhren, nennen wir „Bezugssystem S “. Wir denken uns die Naturgesetze in bezug auf das Bezugssystem S ermittelt, welches etwa zunächst relativ zur Sonne ruhe. Hierauf werde das Bezugssystem S durch irgendeine äußere Ursache eine Zeitlang beschleunigt und gelange schließlich wieder in einen beschleunigungsfreien Zustand. Wie werden die Naturgesetze ausfallen, wenn man die Vorgänge auf das nunmehr in einem anderen Bewegungszustande befindliche Bezugssystem S' bezieht?

In bezug hierauf machen wir nun die denkbar einfachste und durch das Experiment von Michelson und Morley nahe gelegte Annahme: Die Naturgesetze sind unabhängig vom Bewegungszustande des Bezugssystems, wenigstens falls letzterer ein beschleunigungsfreier ist.

Auf diese Annahme, welche wir „Relativitätsprinzip“ nennen,

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden 1895.

2) Insbesondere kommt in Betracht, daß diese Theorie den Mitführungskoeffizienten (Fizeauscher Versuch) im Einklang mit der Erfahrung lieferte.

sowie auf das oben angegebene Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit werden wir uns im folgenden stützen.

§ 2. Allgemeine Bemerkungen, Raum und Zeit betreffend.

1. Wir betrachten eine Anzahl beschleunigungsfrei und gleich bewegter (d. h. relativ zueinander ruhender) starrer Körper. Nach dem Relativitätsprinzip schließen wir, daß die Gesetze, nach denen sich diese Körper relativ zueinander räumlich gruppieren lassen, bei Änderung des gemeinsamen Bewegungszustandes dieser Körper sich nicht ändern. Daraus folgt, daß die Gesetze der Geometrie die Lagerungsmöglichkeiten starrer Körper stets in der gleichen Weise bestimmen, unabhängig von deren gemeinsamem Bewegungszustande. Aussagen über die Gestalt eines beschleunigungsfrei bewegten Körpers haben daher unmittelbar einen Sinn. Wir wollen die Gestalt eines Körpers im dargelegten Sinn, die „Geometrische Gestalt“ desselben nennen. Letztere ist offenbar nicht vom Bewegungszustande eines Bezugssystems abhängig.

2. Eine Zeitangabe hat gemäß der in § 1 gegebenen Definition der Zeit nur mit Bezug auf ein Bezugssystem von bestimmtem Bewegungszustande einen Sinn. Es ist daher zu vermuten (und wird sich im folgenden zeigen), daß zwei räumlich distante Punkt ereignisse, welche in bezug auf ein Bezugssystem S gleichzeitig sind, in bezug auf ein Bezugssystem S' von anderem Bewegungszustande im allgemeinen nicht gleichzeitig sind.

3. Ein aus den materiellen Punkten P bestehender Körper bewege sich irgendwie relativ zu einem Bezugssystem S . Zur Zeit t von S besitzt jeder materielle Punkt P eine bestimmte Lage in S , d. h. er koinzidiert mit einem bestimmten, relativ zu S ruhendem Punkte II . Den Inbegriff der Lagen der Punkte II relativ zum Koordinatensystem von S nennen wir die Lage, den Inbegriff der Lagenbeziehungen der Punkte II untereinander die kinematische Gestalt des Körpers in bezug auf S für die Zeit t . Ruht der Körper relativ zu S , so ist seine kinematische Gestalt in bezug auf S mit seiner geometrischen Gestalt identisch.

Es ist klar, daß relativ zu einem Bezugssystem S ruhende Beobachter nur die auf S bezogene kinematische Gestalt eines relativ zu S bewegten Körpers zu ermitteln vermögen, nicht aber dessen geometrische Gestalt.

Im folgenden werden wir gewöhnlich nicht explizite zwischen

geometrischer und kinematischer Gestalt unterscheiden; eine Aussage geometrischen Inhaltes betrifft die kinematische bzw. geometrische Gestalt, je nachdem dieselbe auf ein Bezugssystem S bezogen ist oder nicht.

§ 3. Koordinaten-Zeit-Transformation.

S und S' seien gleichwertige Bezugssysteme, d. h. diese Systeme mögen gleichlange Einheitsmaßstäbe und gleichlaufende Uhren besitzen, falls diese Gegenstände im Zustande relativer Ruhe miteinander verglichen werden. Es ist dann einleuchtend, daß jedes Naturgesetz, das in bezug auf S gilt, in genau gleicher Form auch in bezug auf S' gilt, falls S und S' relativ zueinander ruhen. Das Relativitätsprinzip verlangt jene vollkommene Übereinstimmung auch für den Fall, daß S' relativ zu S in gleichförmiger Translationsbewegung begriffen ist. Im speziellen muß sich also für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in bezug auf beide Bezugssysteme dieselbe Zahl ergeben.

Ein Punktereignis sei relativ zu S durch die Variablen x, y, z, t relativ zu S' durch die Variablen x', y', z', t' , bestimmt, wobei S und S' beschleunigungsfrei und relativ zueinander bewegt seien. Wir fragen nach den Gleichungen, welche zwischen den erstgenannten und den letztgenannten Variablen bestehen.

Von diesen Gleichungen können wir sofort aussagen, daß sie in bezug auf die genannten Variablen linear sein müssen, weil die Homogenitätseigenschaften des Raumes und der Zeit dies erfordern. Daraus folgt im speziellen, daß die Koordinatenebenen von S' — auf das Bezugssystem S bezogen — gleichförmig bewegte Ebenen sind; doch werden diese Ebenen im allgemeinen nicht aufeinander senkrecht stehen. Wählen wir jedoch die Lage der x' -Achse so, daß letztere — auf S bezogen — die gleiche Richtung hat, wie die auf S bezogene Translationsbewegung von S' , so folgt aus Symmetriegründen, daß die auf S bezogenen Koordinatenebenen von S' aufeinander senkrecht stehen müssen. Wir können und wollen die Lagen der beiden Koordinatensysteme im speziellen so wählen, daß die x -Achse von S und die x' -Achse von S' dauernd zusammenfallen und daß die auf S bezogene y' -Achse von S' parallel der y -Achse von S ist. Ferner wollen wir als Anfangspunkt der Zeit in beiden Systemen den Augenblick wählen, in welchem die Koordinatenanfangspunkte koinzidieren; dann sind die gesuchten linearen Transformationsgleichungen homogen.

Aus der nun bekannten Lage der Koordinatenebenen von S' relativ

zu S schließen wir unmittelbar, daß je zwei der folgenden Gleichungen gleichbedeutend sind:

$$\begin{aligned} x' &= 0 \quad \text{und} \quad x - vt = 0 \\ y' &= 0 \quad \text{und} \quad y = 0 \\ z' &= 0 \quad \text{und} \quad z = 0 \end{aligned}$$

Drei der gesuchten Transformationsgleichungen sind also von der Form:

$$\begin{aligned} x' &= a(x - vt) \\ y' &= by \\ z' &= cz. \end{aligned}$$

Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume in bezug auf beide Bezugssysteme gleich c ist, so müssen die beiden Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

und

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

gleichbedeutend sein. Hieraus und aus den soeben für x' , y' , z' gefundenen Ausdrücken schließt man nach einfacher Rechnung, daß die gesuchten Transformationsgleichungen von der Form sein müssen:

$$\begin{aligned} t' &= \varphi(v) \cdot \beta \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' &= \varphi(v) \cdot \beta \cdot (x - vt) \\ y' &= \varphi(v) \cdot y \\ z' &= \varphi(v) \cdot z. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gesetzt.

Die noch unbestimmt gebliebene Funktion von v wollen wir nun bestimmen. Führen wir ein drittes mit S und S' gleichwertiges Bezugssystem S'' ein, welches relativ zu S' mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt und ebenso relativ zu S' orientiert ist, wie S' relativ zu S , so erhalten wir durch zweimalige Anwendung der eben erlangten Gleichungen

$$\begin{aligned} t'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot t \\ x'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot x \\ y'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot y \\ z'' &= \varphi(v) \cdot \varphi(-v) \cdot z. \end{aligned}$$

Da die Koordinatenanfangspunkte von S und S'' dauernd zu-

sammenfallen, die Achsen gleich orientiert und die Systeme „gleichwertige“ sind, so ist diese Substitution die identische¹⁾, so daß

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1.$$

Da ferner die Beziehung zwischen y und y' vom Vorzeichen von v nicht abhängen kann, ist,

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Es ist also²⁾ $\varphi(v) = 1$, und die Transformationsgleichungen lauten

$$\left. \begin{aligned} t' &= \beta \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' &= \beta (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

wobei

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Löst man die Gleichungen (1) nach x, y, z, t auf, so erhält man die nämlichen Gleichungen, nur daß die „gestrichenen“ durch die gleichnamigen „ungestrichenen“ Größen und umgekehrt ersetzt sind, und v durch $-v$ ersetzt ist. Es folgt dies auch unmittelbar aus dem Relativitätsprinzip und aus der Erwägung, daß S' relativ zu S eine Paralleltranslation in Richtung der X' -Achse mit der Geschwindigkeit $-v$ ausführt.

Allgemein erhält man gemäß dem Relativitätsprinzip aus jeder richtigen Beziehung zwischen „gestrichenen“ (mit Bezug auf S' definierten) und „ungestrichenen“ (mit Bezug auf S definierten) Größen oder zwischen Größen nur einer dieser Gattungen wieder eine richtige Beziehung, wenn man die ungestrichenen durch die entsprechenden gestrichenen Zeichen und umgekehrt sowie v durch $-v$ ersetzt.

§ 4. Folgerungen aus den Transformationsgleichungen, starre Körper und Uhren betreffend.

1. Relativ zu S' ruhe ein Körper. x_1', y_1', z_1' und x_2', y_2', z_2' seien die auf S' bezogenen Koordinaten zweier materieller Punkte desselben. Zwischen den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 dieser Punkte in

1) Dieser Schluß ist auf die physikalische Voraussetzung gegründet, daß die Länge eines Maßstabes, sowie die Ganggeschwindigkeit einer Uhr dadurch keine dauernde Änderung erleiden, daß diese Gegenstände in Bewegung gesetzt und wieder zur Ruhe gebracht werden.

2) $\varphi(v) = -1$ kommt offenbar nicht in Betracht.

bezug auf das Bezugssystem S bestehen zu jeder Zeit t von S nach den soeben abgeleiteten Transformationsgleichungen die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_1 &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (x_2' - x_1') \\ y_2 - y_1 &= y_2' - y_1' \\ z_2 - z_1 &= z_2' - z_1' \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Die kinematische Gestalt eines in gleichförmiger Translationsbewegung begriffenen Körpers hängt also ab von dessen Geschwindigkeit relativ zum Bezugssystem, und zwar unterscheidet sich die kinematische Gestalt des Körpers von seiner geometrischen Gestalt lediglich durch eine Verkürzung in Richtung der Relativbewegung im Verhältnis

$1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Eine Relativbewegung von Bezugssystemen mit Überlichtgeschwindigkeit ist mit unseren Prinzipien nicht vereinbar.

2. Im Koordinatenanfangspunkt von S' sei eine Uhr ruhend angeordnet, welche ν_0 mal schneller laufe als die zur Zeitmessung in den Systemen S und S' benutzten Uhren, d. h. diese Uhr führe ν_0 -Perioden aus in einer Zeit, in welcher die Angabe einer relativ zu ihr ruhenden Uhr von der Art der in S und S' zur Zeitmessung benutzten Uhren um eine Einheit zunimmt. Wie schnell geht die erstgenannte Uhr vom System S aus betrachtet?

Die betrachtete Uhr beendet jeweils eine Periode in den Zeitepochen $t_n' = \frac{n}{\nu_0}$, wobei n die ganzen Zahlen durchläuft, und für die Uhr dauernd $x' = 0$ ist. Hieraus erhält man mit Hilfe der beiden ersten Transformationsgleichungen für die Zeitepochen t_n , in denen die Uhr, von S aus betrachtet, jeweils eine Periode beendet

$$t_n = \beta t_n' = \frac{\beta}{\nu_0} n.$$

Vom System S aus betrachtet führt die Uhr also, pro Zeiteinheit $\nu = \frac{\nu_0}{\beta} = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ Perioden aus; oder: eine relativ zu einem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit v gleichförmig bewegte Uhr geht von diesem Bezugssystem aus beurteilt im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ langsamer als die nämliche Uhr, falls sie relativ zu jenem Bezugssystem ruht.

Die Formel $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ gestattet eine sehr interessante

Anwendung. Herr J. Stark hat im vorigen Jahre gezeigt¹⁾, daß die die Kanalstrahlen bildenden Ionen Linienspektren emittieren, indem er eine als Dopplereffekt zu deutende Verschiebung von Spektrallinien beobachtete.

Da der einer Spektrallinie entsprechende Schwingungsvorgang wohl als ein intraatomischer Vorgang zu betrachten ist, dessen Frequenz durch das Ion allein bestimmt ist, so können wir ein solches Ion als eine Uhr von bestimmter Frequenzzahl ν_0 ansehen, welche letztere man z. B. erhält, wenn man das von gleich beschaffenen, relativ zum Beobachter ruhenden Ionen ausgesandte Licht untersucht. Die obige Betrachtung zeigt nun, daß der Einfluß der Bewegung auf die von dem Beobachter zu ermittelnde Lichtfrequenz durch den Dopplereffekt noch nicht vollständig gegeben ist. Die Bewegung verringert vielmehr außerdem die (scheinbare) Eigenfrequenz der emittierenden Ionen gemäß obiger Beziehung.²⁾

§ 5. Additionstheorem der Geschwindigkeiten.

Relativ zum System S' bewege sich ein Punkt gleichförmig gemäß den Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= u_x' t' \\ y' &= u_y' t' \\ z' &= u_z' t'. \end{aligned}$$

Ersetzt man x', y', z', t' durch ihre Ausdrücke in x, y, z, t vermittels der Transformationsgleichungen (1), so erhält man x, y, z in Funktion von t , also auch die Geschwindigkeitskomponenten w_x, w_y, w_z des Punktes in bezug auf S . Es ergibt sich so

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} \\ u_y &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} u_y' \\ u_z &= \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} u_z' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 21, 401, 1906.
2) Vgl. hierzu § 6 Gleich. (4a).

Das Gesetz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten gilt also nur in erster Annäherung. Setzen wir

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

$$u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2$$

und bezeichnen wir mit α den Winkel zwischen der x' -Achse (v) und der Bewegungsrichtung des Punktes in bezug auf S' (u'), so ist

$$u = \frac{\sqrt{(v^2 + u'^2 + 2vu' \cos \alpha) - \left(\frac{vu' \sin \alpha}{c^2}\right)^2}}{1 + \frac{vu' \cos \alpha}{c^2}}$$

Sind beide Geschwindigkeiten (v und u') gleichgerichtet, so hat man:

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß aus der Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten, welche kleiner sind als c , stets eine Geschwindigkeit resultiert, die kleiner als c ist. Setzt man nämlich $v = c - k$, $u' = c - \lambda$, wobei k und λ positiv und kleiner als c seien, so ist:

$$u = c \frac{2c - k - \lambda}{2c - k - \lambda + \frac{k\lambda}{c}} < c.$$

Es folgt ferner, daß die Zusammensetzung der Lichtgeschwindigkeit c und einer „Unterlichtgeschwindigkeit“ wieder die Lichtgeschwindigkeit c ergibt.

Aus dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten ergibt sich ferner noch die interessante Folgerung, daß es keine Wirkung geben kann, welche zur willkürlichen Signalgebung verwendet werden kann, und die sich schneller fortpflanzt als das Licht im Vakuum. Es erstrecke sich nämlich längs der x -Achse von S ein Materialstreifen, relativ zu welchem sich eine gewisse Wirkung (vom Materialstreifen aus beurteilt) mit der Geschwindigkeit W fortzupflanzen vermöge, und es befinde sich sowohl im Punkte $x = 0$ (Punkt A) als auch im Punkte $x = \lambda$ (Punkt B) der x -Achse ein relativ zu S ruhender Beobachter. Der Beobachter in A sende mittels der oben genannten Wirkung Zeichen zu dem Beobachter in B durch den Materialstreifen, welcher letzterer nicht ruhe, sondern mit der Geschwindigkeit $v (< c)$ sich in der negativen x -Richtung bewege. Das Zeichen wird dann, wie aus der ersten der Gleichungen (3) hervorgeht, mit der Geschwindigkeit

$\frac{W-v}{1-\frac{Wv}{c^2}}$ von A nach B übertragen. Die hierzu nötige Zeit T ist also

$$T = l \frac{1 - \frac{Wv}{c^2}}{W - v}.$$

Die Geschwindigkeit v kann jeglichen Wert unter c annehmen. Wenn also $W > c$ ist, wie wir angenommen haben, so kann man v stets so wählen, daß $T < 0$. Dies Resultat besagt, daß wir einen Übertragungsmechanismus für möglich halten müßten, bei dessen Benutzung die erzielte Wirkung der Ursache vorangeht. Wenn dies Resultat auch, meiner Ansicht nach, rein logisch genommen, keinen Widerspruch enthält, so widerstreitet es doch derart dem Charakter unserer gesamten Erfahrung, daß durch dasselbe die Unmöglichkeit der Annahme $W > c$ zur Genüge erwiesen erscheint.

§ 6. Anwendungen der Transformationsgleichungen auf einige Probleme der Optik.

Der Lichtvektor einer im Vakuum sich fortpflanzenden ebenen Lichtwelle sei, auf das System S bezogen, proportional zu

$$\sin \omega \left(t - \frac{lx + my + nz}{c} \right),$$

auf S' bezogen sei der Lichtvektor des nämlichen Vorganges proportional zu

$$\sin \omega' \left(t' - \frac{l'x + m'y' + n'z'}{c} \right).$$

Die im § 3 entwickelten Transformationsgleichungen verlangen, daß zwischen den Größen ω, l, m, n und ω', l', m', n' die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \omega \beta \left(1 - l \frac{v}{c} \right) \\ l' &= \frac{l - \frac{v}{c}}{1 - l \frac{v}{c}} \\ m' &= \frac{m}{\beta \left(1 - l \frac{v}{c} \right)} \\ n' &= \frac{n}{\beta \left(1 - l \frac{v}{c} \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Die Formel für ω' wollen wir in zwei verschiedenen Weisen deuten, je nachdem wir uns den Beobachter als bewegt und die (unendlich ferne) Lichtquelle als ruhend, oder umgekehrt ersteren als ruhend und letztere als bewegt betrachten.

1. Ist ein Beobachter relativ zu einer unendlich fernen Lichtquelle von der Frequenz ν mit der Geschwindigkeit v derart bewegt, daß die Verbindungslinie „Lichtquelle-Beobachter“ mit der auf ein relativ zur Lichtquelle ruhendes Koordinatensystem bezogenen Geschwindigkeit des Beobachters den Winkel φ bildet, so ist die von dem Beobachter wahrgenommene Frequenz ν' des Lichtes gegeben durch die Gleichung

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos \varphi \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

2. Ist eine Lichtquelle, welche bezogen auf ein mit ihr bewegtes System die Frequenz ν_0 besitzt, derart bewegt, daß die Verbindungslinie „Lichtquelle-Beobachter“ mit der auf ein relativ zum Beobachter ruhendes System bezogenen Geschwindigkeit der Lichtquelle den Winkel φ bildet, so ist die vom Beobachter wahrgenommene Frequenz ν durch die Gleichung gegeben

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \cos \varphi \frac{v}{c}} \dots \dots \dots (4a)$$

Die beiden letzten Gleichungen drücken das Dopplersche Prinzip in seiner allgemeinen Fassung aus; die letzte Gleichung läßt erkennen, wie die beobachtbare Frequenz des von Kanalstrahlen emittierten (bezw. absorbierten) Lichtes von der Bewegungsgeschwindigkeit der die Strahlen bildenden Ionen und von der Richtung des Visierens abhängt.

Nennt man ferner φ bzw. φ' den Winkel zwischen der Wellennormale (Strahlrichtung) und der Richtung der Relativbewegung von S' gegen S (d. h. mit der x - bzw. x' -Achse), so nimmt die Gleichung für ν' die Form an

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{c}}{1 - \cos \varphi \frac{v}{c}}$$

Diese Gleichung zeigt den Einfluß der Relativbewegung des Beobachters auf den scheinbaren Ort einer unendlich fernen Lichtquelle (Aberration).

Wir wollen noch untersuchen, wie rasch sich das Licht in einem in Richtung des Lichtstrahles bewegten Medium fortpflanzt. Das Medium ruhe relativ zum System S' , und der Lichtvektor sei proportional zu

$$\sin \omega' \left(t' - \frac{x'}{V'} \right)$$

bezw. zu

$$\sin \omega \left(t - \frac{x}{V} \right),$$

je nachdem der Vorgang auf S' oder auf S bezogen wird.

Die Transformationsgleichungen ergeben

$$\begin{aligned} \omega &= \beta \omega' \left(1 + \frac{v}{V'} \right) \\ \frac{\omega}{V} &= \beta \frac{\omega'}{V'} \left(1 + \frac{V'v}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Hierbei ist V' als aus der Optik ruhender Körper bekannte Funktion von ω' zu betrachten. Durch Division dieser Gleichungen erhält man

$$V = \frac{V' + v}{1 + \frac{V'v}{c^2}},$$

welche Gleichung man auch unmittelbar durch Anwendung des Additionstheorems der Geschwindigkeiten hätte erhalten können.¹⁾ Falls V' als bekannt anzusehen ist, löst die letzte Gleichung die Aufgabe vollständig. Falls aber nur die auf das „ruhende“ System S bezogene Frequenz (ω) als bekannt anzusehen ist, wie z. B. bei dem bekannten Experiment von Fizeau, sind die beiden obigen Gleichungen in Verbindung mit der Beziehung zwischen ω' und V' zu verwenden zur Bestimmung der drei Unbekannten ω' , V' und V .

Ist ferner G bezw. G' die auf S bezw. S' bezogene Gruppengeschwindigkeit, so ist nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten

$$G = \frac{G' + v}{1 + \frac{G'v}{c^2}}.$$

Da die Beziehung zwischen G' und ω' aus der Optik ruhender Körper zu entnehmen ist²⁾, und ω' nach dem Obigen aus ω berechenbar ist, so ist die Gruppengeschwindigkeit G auch dann berechenbar,

1) Vgl. M. Laue, Ann. d. Phys. 23, 989, 1907.

2) Es ist nämlich $G' = \frac{V'}{1 + \frac{1}{V'} \frac{dV'}{d\omega'}}$

wenn lediglich die auf S bezogene Frequenz des Lichtes sowie die Natur und die Bewegungsgeschwindigkeit des Körpers gegeben ist.

II. Elektrodynamischer Teil.

§ 7. Transformation der Maxwell-Lorentzschen Gleichungen.

Wir gehen aus von den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \left\{ u_x \rho + \frac{\partial X}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{1}{c} \left\{ u_y \rho + \frac{\partial Y}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{1}{c} \left\{ u_x \rho + \frac{\partial Z}{\partial t} \right\} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

In diesen Gleichungen bedeutet

(X, Y, Z) den Vektor der elektrischen Feldstärke,

(L, M, N) den Vektor der magnetischen Feldstärke,

$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ die 4π -fache Dichte der Elektrizität,

(u_x, u_y, u_z) den Geschwindigkeitsvektor der Elektrizität.

Diese Gleichungen in Verbindung mit der Annahme, daß die elektrischen Massen unveränderlich an kleine starre Körper (Ionen, Elektronen) gebunden seien, bilden die Grundlage der Lorentzschen Elektrodynamik und Optik bewegter Körper.

Transformiert man diese Gleichungen, welche in bezug auf das System S gelten mögen, mit Hilfe der Transformationsgleichungen (1) auf das relativ zu S wie bei den bisherigen Betrachtungen bewegte System S' , so erhält man die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \left\{ u'_x \rho' + \frac{\partial X'}{\partial t'} \right\} &= \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'} \\ \frac{1}{c} \left\{ u'_y \rho' + \frac{\partial Y'}{\partial t'} \right\} &= \frac{\partial L'}{\partial z'} - \frac{\partial N'}{\partial x'} \\ \frac{1}{c} \left\{ u'_z \rho' + \frac{\partial Z'}{\partial t'} \right\} &= \frac{\partial M'}{\partial x'} - \frac{\partial L'}{\partial y'} \end{aligned} \right\} \dots \dots (5')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial L'}{\partial t'} &= \frac{\partial Y'}{\partial z'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial M'}{\partial t'} &= \frac{\partial Z'}{\partial x'} - \frac{\partial X'}{\partial z'} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial N'}{\partial t'} &= \frac{\partial X'}{\partial y'} - \frac{\partial Y'}{\partial x'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6')$$

wobei gesetzt ist:

$$\left. \begin{aligned} X' &= X \\ Y' &= \beta \left(Y - \frac{v}{c} N \right) \\ Z' &= \beta \left(Z + \frac{v}{c} M \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7a)$$

$$\left. \begin{aligned} L' &= L \\ M' &= \beta \left(M + \frac{v}{c} Z \right) \\ N' &= \beta \left(N - \frac{v}{c} Y \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7b)$$

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} = \beta \left(1 - \frac{v u_x}{c^2} \right) \rho \dots \dots \dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x' &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u_y' &= \frac{u_y}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \\ u_z' &= \frac{u_z}{\beta \left(1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Die erlangten Gleichungen sind von derselben Gestalt wie die Gleichungen (5) und (6). Aus dem Relativitätsprinzip folgt andererseits, daß die elektrodynamischen Vorgänge, auf S' bezogen, nach den gleichen Gesetzen verlaufen wie die auf S bezogenen. Wir schließen hieraus zunächst, daß X' , Y' , Z' bzw. L' , M' , N' nichts anderes sind als die Komponenten der auf S' bezogenen elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke.¹⁾ Da ferner gemäß den Umkehrungen der

1) Die Übereinstimmung der gefundenen Gleichungen mit den Gleichungen (5) und (6) läßt zwar die Möglichkeit offen, daß sich die Größen X' usw. von den auf S' bezogenen Feldstärken um einen konstanten Faktor unterscheiden. Daß dieser Faktor gleich 1 sein muß, läßt sich aber leicht auf ganz ähnliche Weise zeigen wie in § 3 bei der Funktion $\varphi(\psi)$.

Gleichungen (3) die in den Gleichungen (9) auftretenden Größen u_x', u_y', u_z' gleich sind den Geschwindigkeitskomponenten der Elektrizität in bezug auf S' , so ist ρ' die auf S' bezogene Dichte der Elektrizität. Die elektrodynamische Grundlage der Maxwell-Lorentz'schen Theorie entspricht also dem Prinzip der Relativität.

Zur Interpretation der Gleichungen (7a) bemerken wir folgendes. Es liege eine punktförmige Elektrizitätsmenge vor, welche relativ zu S ruhend in bezug auf S' von der Größe „eins“ sei, d. h. auf eine gleiche, ebenfalls in bezug auf S ruhende Elektrizitätsmenge im Abstand 1 cm die Kraft 1 Dyn ausübe. Nach dem Relativitätsprinzip ist diese elektrische Masse auch dann gleich „eins“, wenn sie relativ zu S' ruht und von S' aus untersucht wird.¹⁾ Ruht diese Elektrizitätsmenge relativ zu S , so ist (X, Y, Z) definitionsgemäß gleich der auf sie wirkenden Kraft, wie sie z. B. mittels einer relativ zu S ruhenden Federwage gemessen werden könnte. Die analoge Bedeutung hat der Vektor (X', Y', Z') mit Bezug auf S' .

Gemäß den Gleichungen (7a) und (7b) kommt einer elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke an und für sich keine Existenz zu, indem es von der Wahl des Koordinatensystems abhängen kann, ob an einer Stelle (genauer: in der örtlich-zeitlichen Umgebung eines Punkt ereignisses) eine elektrische bzw. magnetische Feldstärke vorhanden ist oder nicht. Man ersieht ferner, daß die bisher eingeführten „elektromotorischen“ Kräfte, welche auf eine in einem Magnetfelde bewegte elektrische Masse wirken, nichts anderes sind als „elektrische“ Kräfte, falls man ein zu der betrachteten elektrischen Masse ruhendes Bezugssystem einführt. Die Fragen über den Sitz jener elektromotorischen Kräfte (bei Unipolarmaschinen) werden daher gegenstandslos; die Antwort fällt nämlich verschieden aus, je nach der Wahl des Bewegungszustandes des benutzten Bezugssystems.

Die Bedeutung der Gleichung (8) erkennt man aus folgendem. Ein elektrisch geladener Körper ruhe relativ zu S' . Seine auf S' bezogene Gesamtladung ϵ' ist dann $\int \frac{\rho'}{4\pi} dx' dy' dz'$. Wie groß ist seine Gesamtladung ϵ zu einer bestimmten Zeit t von S ?

Aus den drei letzten der Gleichungen (1) folgt, daß für konstantes t die Beziehung gilt:

$$dx' dy' dz' = \beta dx dy dz.$$

1) Dieser Schluß gründet sich ferner auf die Annahme, daß die Größe einer elektrischen Masse von deren Bewegungsvorgeschichte unabhängig ist.

Gleichung (8) lautet in unserem Falle:

$$q' = \frac{1}{\beta} q.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, daß

$$\varepsilon' = \varepsilon$$

sein muß. Gleichung (8) sagt also aus, daß die elektrische Masse eine vom Bewegungszustand des Bezugssystems unabhängige Größe ist. Bleibt also die Ladung eines beliebig bewegten Körpers vom Standpunkt eines mitbewegten Bezugssystems konstant, so bleibt sie auch in bezug auf jedes andere Bezugssystem konstant.

Mit Hilfe der Gleichungen (1), (7), (8) und (9) läßt sich jedes Problem der Elektrodynamik und Optik bewegter Körper, in welchem nur Geschwindigkeiten, nicht aber Beschleunigungen eine wesentliche Rolle spielen, auf eine Reihe von Problemen der Elektrodynamik bzw. Optik ruhender Körper zurückführen.

Wir behandeln noch ein einfaches Anwendungsbeispiel für die hier entwickelten Beziehungen. Eine ebene, im Vakuum sich fort-pflanzende Lichtwelle sei relativ zu S dargestellt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \Phi & L &= L_0 \sin \Phi \\ Y &= Y_0 \sin \Phi & M &= M_0 \sin \Phi & \Phi &= w \left(t - \frac{lx + my + nz}{c} \right) \\ Z &= Z_0 \sin \Phi & N &= N_0 \sin \Phi \end{aligned}$$

Wir fragen nach der Beschaffenheit dieser Welle, wenn dieselbe auf das System S' bezogen wird.

Durch Anwendung der Transformationsgleichungen (1) und (7) erhält man

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin \Phi' & L' &= L_0 \sin \Phi' \\ Y' &= \beta \left(Y_0 - \frac{v}{c} N_0 \right) \sin \Phi' & M' &= \beta \left(M_0 + \frac{v}{c} Z_0 \right) \sin \Phi' \\ Z' &= \beta \left(Z_0 + \frac{v}{c} M_0 \right) \sin \Phi' & N' &= \beta \left(N_0 - \frac{v}{c} Y_0 \right) \sin \Phi' \\ \Phi' &= w' \left(t' - \frac{l'x' + m'y' + n'z'}{c} \right). \end{aligned}$$

Daraus, daß die Funktionen X' usw. den Gleichungen (5') und (6') genügen müssen, folgt, daß auch in bezug auf S' Wellennormale, elektrische Kraft und magnetische Kraft aufeinander senkrecht stehen, und daß die beiden letzteren einander gleich sind. Die Beziehungen, die aus der Identität $\Phi = \Phi'$ fließen, haben wir schon in § 6 behandelt; wir haben hier nur noch Amplitude und Polarisationszustand der Welle in bezug auf S' zu ermitteln.

Wir wählen die X - Y -Ebene parallel zur Wellennormale und behandeln zunächst den Fall, daß die elektrische Schwingung parallel zur Z -Achse erfolgt. Dann haben wir zu setzen:

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 & L_0 &= -A \sin \varphi \\ Y_0 &= 0 & M_0 &= -A \cos \varphi \\ Z_0 &= A & N_0 &= 0, \end{aligned}$$

wobei φ den Winkel zwischen Wellennormale und X -Achse bezeichnet. Es folgt nach dem Obigen

$$\begin{aligned} X' &= 0 & L' &= -A \sin \varphi \sin \Phi' \\ Y' &= 0 & M' &= \beta \left(-\cos \varphi + \frac{v}{c} \right) A \sin \Phi' \\ Z' &= \beta \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi \right) A \sin \Phi' & N' &= 0. \end{aligned}$$

Bedeutet also A' die Amplitude der Welle in bezug auf S' , so ist

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \dots \dots \dots (10)$$

Für den Spezialfall, daß die magnetische Kraft senkrecht auf der Richtung der Relativbewegung und der Wellennormale steht, gilt offenbar die gleiche Beziehung. Da man aus diesen beiden Spezialfällen den allgemeinen Fall durch Superposition konstruieren kann, so folgt, daß bei der Einführung eines neuen Bezugssystems S' die Beziehung (10) allgemein gilt, und daß der Winkel zwischen der Polarisationssebene und einer zur Wellennormale und zur Richtung der Relativbewegung parallelen Ebene in den beiden Bezugssystemen derselbe ist.

III. Mechanik des materiellen Punktes (Elektrons).

§ 8. Ableitung der Bewegungsgleichungen des (langsam beschleunigten) materiellen Punktes bzw. Elektrons.

In einem elektromagnetischen Felde bewege sich ein mit einer elektrischen Ladung e versehenes Teilchen (im folgenden „Elektron“ genannt), über dessen Bewegungsgesetz wir folgendes annehmen:

Ruht das Elektron in einem bestimmten Zeitpunkt in bezug auf ein (beschleunigungsfreies) System S' , so erfolgt dessen Bewegung im nächsten Zeitteilchen in bezug auf S' nach den Gleichungen

$$\begin{aligned}\mu \frac{d^2 x_0'}{dt'^2} &= \varepsilon X' \\ \mu \frac{d^2 y_0'}{dt'^2} &= \varepsilon Y' \\ \mu \frac{d^2 z_0'}{dt'^2} &= \varepsilon Z',\end{aligned}$$

wobei x_0' , y_0' , z_0' die Koordinaten des Elektrons in bezug auf S' bezeichnen, und μ eine Konstante bedeutet, welche wir die Masse des Elektrons nennen.

Wir führen ein System S ein, relativ zu welchem S' wie bei unseren bisherigen Untersuchungen bewegt sei, und transformieren unsere Bewegungsgleichungen mittels der Transformationsgleichungen (1) und (7a).

Erstere lauten in unserem Falle

$$\begin{aligned}t' &= \beta \left(t - \frac{v}{c^2} x_0 \right) \\ x_0' &= \beta (x_0 - vt) \\ y_0' &= y_0 \\ z_0' &= z_0.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir, indem wir $\frac{dx_0}{dt} = \dot{x}_0$ usw. setzen:

$$\begin{aligned}\frac{dx_0'}{dt'} &= \frac{\beta(\dot{x}_0 - v)}{\beta \left(1 - \frac{v\dot{x}_0}{c^2} \right)} \text{ usw.} \\ \frac{d^2 x_0'}{dt'^2} &= \frac{\frac{d}{dt} \left\{ \frac{dx_0'}{dt'} \right\}}{\beta \left(1 - \frac{v\dot{x}_0'}{c^2} \right)} = \frac{1}{\beta} \frac{\left(1 - \frac{v\dot{x}_0}{c^2} \right) \ddot{x}_0 + (\dot{x}_0 - v) \frac{v\ddot{x}_0}{c^2}}{\left(1 - \frac{v\dot{x}_0}{c^2} \right)} \text{ usw.}\end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke, nachdem man in ihnen $\dot{x}_0 = v$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$ gesetzt hat, in die obigen Gleichungen ein, so erhält man, indem man gleichzeitig X' , Y' , Z' mittels der Gleichungen (7a) ersetzt

$$\begin{aligned}\mu \beta^3 \ddot{x}_0 &= \varepsilon X \\ \mu \beta \ddot{y}_0 &= \varepsilon \left(Y - \frac{v}{c} N \right) \\ \mu \beta \ddot{z}_0 &= \varepsilon \left(Z + \frac{v}{c} M \right).\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind die Bewegungsgleichungen des Elektrons für den Fall, daß in dem betreffenden Augenblick $\dot{x}_0 = v$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$ ist. Man kann also auf den linken Seiten statt v die durch die Gleichung

$$q = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}$$

definierte Geschwindigkeit q einsetzen und auf den rechten Seiten v durch \dot{x}_0 ersetzen. Außerdem fügen wir die durch zyklische Vertauschung aus $\frac{\dot{x}_0}{c} M$ und $-\frac{\dot{x}_0}{c} N$ zu gewinnenden Glieder, welche in dem betrachteten Spezialfalle verschwinden, an den entsprechenden Stellen hinzu. Indem wir den Index bei x_0 usw. weglassen, erhalten wir so die für den betrachteten Spezialfall mit den obigen gleichbedeutenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mu \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \right\} &= K_x \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mu \dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \right\} &= K_y \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mu \dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \right\} &= K_z, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

wobei gesetzt ist:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \varepsilon \left\{ X + \frac{\dot{y}}{c} N - \frac{\dot{z}}{c} M \right\} \\ K_y &= \varepsilon \left\{ Y + \frac{\dot{z}}{c} L - \frac{\dot{x}}{c} N \right\} \\ K_z &= \varepsilon \left\{ Z + \frac{\dot{x}}{c} M - \frac{\dot{y}}{c} L \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Diese Gleichungen ändern ihre Form nicht, wenn man ein neues, relativ ruhendes Koordinatensystem mit anders gerichteten Achsen einführt. Sie gelten daher allgemein, nicht nur, wenn $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ ist.

Den Vektor (K_x, K_y, K_z) nennen wir die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft. In dem Falle, daß q^2 gegen c^2 verschwindet, gehen K_x, K_y, K_z nach Gleichungen (11) in die Kraftkomponenten gemäß Newtons Definition über. Im nächsten Paragraphen ist ferner dargelegt, daß in der Relativitätsmechanik jener Vektor auch im übrigen dieselbe Rolle spielt wie die Kraft in der klassischen Mechanik.

Wir wollen an den Gleichungen (11) auch in dem Falle festhalten, daß die auf den Massenpunkt ausgeübte Kraftwirkung nicht elektromagnetischer Natur ist. In diesem Falle haben die Gleichungen

(11) keinen physikalischen Inhalt, sondern sie sind dann als Definitionsgleichungen der Kraft aufzufassen.

§ 9. Bewegung des Massenpunktes und mechanische Prinzipien.

Multipliziert man die Gleichungen (5) und (6) der Reihe nach mit $\frac{X}{4\pi}$, $\frac{Y}{4\pi}$. . . $\frac{N}{4\pi}$ und integriert über einen Raum, an dessen Grenzen die Feldstärken verschwinden, so erhält man

$$\int \frac{q}{4\pi} (u_x X + u_y Y + u_z Z) d\omega + \frac{dE_e}{dt} = 0, \quad . . . \quad (13)$$

wobei

$$E_e = \int \left[\frac{1}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2) \right] d\omega$$

die elektromagnetische Energie des betrachteten Raumes ist. Das erste Glied der Gleichung (13) ist nach dem Energieprinzip gleich der Energie, welche vom elektromagnetischen Felde pro Zeiteinheit an die Träger der elektrischen Massen abgegeben wird. Sind elektrische Massen mit einem materiellen Punkte starr verbunden (Elektron), so ist der auf sie entfallende Anteil jenes Gliedes gleich dem Ausdruck

$$\varepsilon (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}),$$

wenn (X, Y, Z) die äußere elektrische Feldstärke bezeichnet, d. h. die Feldstärke abzüglich derjenigen, welche von der Ladung des Elektrons selbst herrührt. Dieser Ausdruck geht vermöge der Gleichungen (12) über in

$$K_x \dot{x} + K_y \dot{y} + K_z \dot{z}.$$

Der im vorigen Paragraph als „Kraft“ bezeichnete Vektor (K_x, K_y, K_z) steht also zu der geleisteten Arbeit in derselben Beziehung wie bei der Newtonschen Mechanik.

Multipliziert man also die Gleichungen (11) der Reihe nach mit x , y , z , addiert und integriert über die Zeit, so muß sich die kinetische Energie des materiellen Punktes (Elektrons) ergeben. Man erhält

$$\int (K_x \dot{x} + K_y \dot{y} + K_z \dot{z}) dt = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} + \text{const.} \quad . . . \quad (14)$$

Daß die Bewegungsgleichungen (11) mit dem Energieprinzip im Einklang sind, ist damit gezeigt. Wir wollen nun dartun, daß sie auch dem Prinzip von der Erhaltung der Bewegungsgröße entsprechen.

Multipliziert man die zweite und dritte der Gleichungen (5) und

die zweite und dritte der Gleichungen (6) der Reihe nach mit $\frac{N}{4\pi}$, $-\frac{M}{4\pi}$, $-\frac{Z}{4\pi}$, $\frac{Y}{4\pi}$, addiert und integriert über einen Raum, an dessen Grenzen die Feldstärken verschwinden, so erhält man

$$\frac{d}{dt} \left[\int \frac{1}{4\pi c} (YN - ZM) d\omega \right] + \int \frac{q}{4\pi} \left(X + \frac{u_y}{c} N - \frac{u_x}{c} M \right) d\omega = 0 \quad (15)$$

oder gemäß den Gleichungen (12)

$$\frac{d}{dt} \left[\int \frac{1}{4\pi c} (YN - ZM) d\omega \right] + \Sigma K_x = 0 \quad \dots \quad (15a)$$

Sind die elektrischen Massen an frei bewegliche materielle Punkte (Elektronen) gebunden, so geht diese Gleichung vermöge (11) über in

$$\frac{d}{dt} \left[\int \frac{1}{4\pi c} (YN - ZM) + \Sigma \right] \frac{\mu \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \quad \dots \quad (15b)$$

Diese Gleichung drückt in Verbindung mit den durch zyklische Vertauschung zu gewinnenden den Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße in dem hier betrachteten Falle aus. Die Größe $\xi = \frac{\mu \dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

spielt also die Rolle der Bewegungsgröße des materiellen Punktes, und es ist gemäß Gleichungen (11) wie in der klassischen Mechanik

$$\frac{d\xi}{dt} = K_x.$$

Die Möglichkeit, eine Bewegungsgröße des materiellen Punktes einzuführen, beruht darauf, daß in den Bewegungsgleichungen die Kraft bzw. das zweite Glied der Gleichung (15) als Differentialquotient nach der Zeit dargestellt werden kann.

Man sieht ferner unmittelbar, daß unseren Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes die Form der Bewegungsgleichungen von Lagrange gegeben werden kann; denn es ist gemäß Gleichungen (11)

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \right] = K_x \text{ usw.},$$

wobei

$$H = -\mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \text{const}$$

gesetzt ist. Die Bewegungsgleichungen lassen sich auch darstellen in der Form des Hamiltonschen Prinzips

$$\int_{t_0}^{t_1} (dH + A) dt = 0,$$

wobei die Zeit t sowie die Anfangs- und Endlage unverändert bleibt und A die virtuelle Arbeit bezeichnet:

$$A = K_x \partial x + K_y \partial y + K_z \partial z.$$

Endlich stellen wir noch die Hamiltonschen kanonischen Bewegungsgleichungen auf. Hierzu dient die Einführung der „Impulskoordinaten“ (Komponenten der Bewegungsgröße) ξ, η, ζ , wobei wie oben gesetzt ist

$$\xi = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \frac{\mu x}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \text{ usw.}$$

Betrachtet man die kinetische Energie L als Funktion von ξ, η, ζ und setzt $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = q^2$, so ergibt sich

$$L = \mu c^2 \sqrt{1 + \frac{q^2}{\mu^2 c^2}} + \text{const}$$

und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen werden:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= K_x & \frac{d\eta}{dt} &= K_y & \frac{d\zeta}{dt} &= K_z \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial \xi} & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial \eta} & \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

§ 10. Über die Möglichkeit einer experimentellen Prüfung der Theorie der Bewegung des materiellen Punktes. Kaufmannsche Untersuchung.

Eine Aussicht auf Vergleichung der im letzten Paragraphen abgeleiteten Resultate mit der Erfahrung ist nur da vorhanden, wo bewegte, mit einer elektrischen Ladung versehene Massenpunkte Geschwindigkeiten besitzen, deren Quadrat gegenüber c^2 nicht zu vernachlässigen ist. Diese Bedingung ist bei den rascheren Kathodenstrahlen und bei den von radioaktiven Substanzen ausgesandten Elektronenstrahlen (β -Strahlen) erfüllt.

Es gibt drei Größen bei Elektronenstrahlen, deren gegenseitige Beziehungen Gegenstand einer genaueren experimentellen Untersuchung sein können, nämlich das Erzeugungspotential bzw. die kinetische Energie der Strahlen, die Ablenkbarkeit durch ein elektrisches Feld und die Ablenkbarkeit durch ein magnetisches Feld.

Das Erzeugungspotential Π ist gemäß (14) gegeben durch die Formel

$$\Pi\varepsilon = \mu \left\{ \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} - 1 \right\}$$

Zur Berechnung der andern beiden Größen schreiben wir die letzte der Gleichungen (11) hin für den Fall, daß die Bewegung momentan parallel zur X -Achse ist; man erhält, falls man mit ε den absoluten Betrag der Ladung des Elektrons bezeichnet,

$$-\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\mu} \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} \left(Z + \frac{q}{c} M \right).$$

Falls Z und M die einzigen ablenkenden Feldkomponenten sind, die Krümmung also in der XZ -Ebene erfolgt, ist der Krümmungsradius R der Bahn gegeben durch $\frac{q^2}{R} = \left[\frac{d^2x}{dt^2} \right]$. Definiert man als elektrische

bezw. magnetische Ablenkbarkeit die Größe $A_e = \frac{1}{R} : Z$ bzw. $A_m = \frac{1}{R} : M$ für den Fall, daß nur eine elektrische bzw. nur eine magnetische ablenkende Feldkomponente vorhanden ist, so hat man also

$$A_e = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{q^2}$$

$$A_m = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}{cq}$$

Bei Kathodenstrahlen kommen alle drei Größen, Π , A_e und A für die Messung in Betracht; es liegen jedoch noch keine Untersuchungen bei genügend raschen Kathodenstrahlen vor. Bei β -Strahlen sind (praktisch) nur die Größen A_e und A_m der Beobachtung zugänglich. Herr W. Kaufmann hat mit bewunderungswürdiger Sorgfalt die Beziehung zwischen A_m und A_e für die von einem Radium-Bromid-Körnchen ausgesandten β -Strahlen ermittelt.¹⁾

Sein Apparat, dessen hauptsächliche Teile in Fig. 1 in natürlicher Größe dargestellt sind, bestand im wesentlichen in einem lichtdichten, im Innern eines evakuierten Glasgefäßes befindlichen Messinggehäuse H , auf dessen Boden A in einer kleinen Vertiefung O sich das Radiumkörnchen befand. Die von ihm ausgehenden β -Strahlen durchlaufen

1) W. Kaufmann, Über die Konstitution des Elektrons. Ann. d. Phys. 19, 1906. Die beiden Figuren sind der Kaufmannschen Arbeit entnommen.

den Zwischenraum zwischen zwei Kondensatorplatten P_1 und P_2 , treten durch das Diaphragma D von 0,2 mm Durchmesser und fallen dann auf die photographische Platte. Die Strahlen wurden durch ein zwischen den Kondensatorplatten P_1 und P_2 gebildetes elektrisches Feld sowie

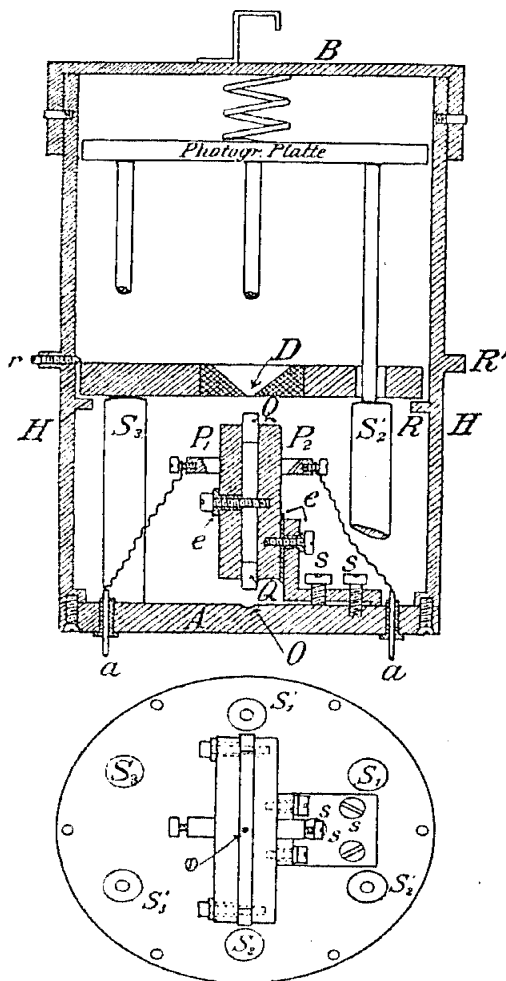


Fig. 1 (nat. Gr.).

durch ein von einem großen permanenten Magneten erzeugtes, in gleicher Richtung verlaufendes magnetisches Feld senkrecht dazu abgelenkt, so daß durch die Wirkung der Strahlen einer bestimmten Geschwindigkeit ein Punkt, durch die Wirkung der Teilchen von den verschiedenen Geschwindigkeiten zusammen eine Kurve auf der Platte markiert wurde.

Fig. 2 zeigt diese Kurve¹⁾, welche bis auf den Maßstab für Ab-

1) Die in der Figur angegebenen Maßzahlen bedeuten Millimeter auf der photographischen Platte. Die gezeichnete Kurve ist nicht genau die beobachtete, sondern die „auf unendlich kleine Ablenkung reduzierte“ Kurve.

szisse und Ordinate die Beziehung zwischen A_m (Abszisse) und A^e (Ordinate) darstellt. Über der Kurve sind durch Kreuzchen der nach der Relativitätstheorie berechneten Kurve angegeben, wobei für $\frac{\epsilon}{\mu}$ der Wert $1,878 \cdot 10^7$ angenommen ist.

In Anbetracht der Schwierigkeit der Untersuchung möchte man geneigt sein, die Übereinstimmung als eine genügende anzusehen. Die vorhandenen Abweichungen sind jedoch systematisch und erheblich

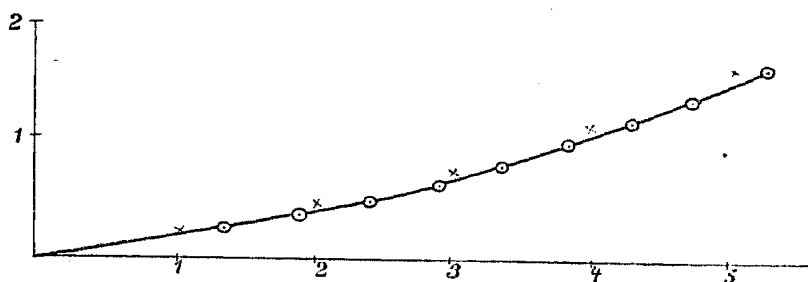


Fig. 2.

außerhalb der Fehlergrenze der Kaufmannschen Untersuchung. Daß die Berechnungen von Herrn Kaufmann fehlerfrei sind, geht daraus hervor, daß Herr Planck bei Benutzung einer anderen Berechnungsmethode zu Resultaten geführt wurde, die mit denen von Herrn Kaufmann durchaus übereinstimmen.¹⁾

Ob die systematischen Abweichungen in einer noch nicht gewürdigten Fehlerquelle oder darin ihren Grund haben, daß die Grundlagen der Relativitätstheorie nicht den Tatsachen entsprechen, kann wohl erst dann mit Sicherheit entschieden werden, wenn ein mannigfaltigeres Beobachtungsmaterial vorliegen wird.

Es ist noch zu erwähnen, daß die Theorien der Elektronenbewegung von Abraham²⁾ und von Bucherer³⁾ Kurven liefern, die sich der beobachteten Kurve erheblich besser anschließen als die aus der Relativitätstheorie ermittelte Kurve. Jenen Theorien kommt aber nach meiner Meinung eine ziemlich geringe Wahrscheinlichkeit zu, weil ihre die Maße des bewegten Elektrons betreffenden Grundannahmen nicht nahe gelegt werden durch theoretische Systeme, welche größere Komplexe von Erscheinungen umfassen.

1) Vergl. M. Planck, Verhandl. d. Deutschen Phys. Ges. VIII. Jahrg. Nr. 20, 1906; IX. Jahrg. Nr. 14, 1907.

2) M. Abraham, Gött. Nachr. 1902.

3) A. H. Bucherer, Math. Einführung in die Elektronentheorie, S. 58, Leipzig 1904.

IV. Zur Mechanik und Thermodynamik der Systeme.

§ 11. Über die Abhängigkeit der Masse von der Energie.

Wir betrachten ein von einer für Strahlung nicht durchlässigen Hülle umgebenes physikalisches System. Dies System schwebe frei im Raume und sei keinen andern Kräften unterworfen, als den Einwirkungen elektrischer und magnetischer Kräfte des umgebenden Raumes. Durch letztere kann auf das System Energie in Form von Arbeit und Wärme übertragen werden, welche Energie im Innern des Systems irgendwelche Verwandlungen erfahren kann. Die von dem System aufgenommene Energie ist, auf das System S bezogen, gemäß (13) gegeben durch den Ausdruck

$$\int dE = \int dt \int \frac{\rho}{4\pi} (X_a u_x + Y_a u_y + Z_a u_z) d\omega,$$

wobei (X_a, Y_a, Z_a) den Feldvektor des äußern, nicht zum System gerechneten Feldes und $\frac{\rho}{4\pi}$ die Elektrizitätsdichte in der Hülle bedeutet.

Diesen Ausdruck transformieren wir mittels der Umkehrungen der Gleichungen (7a), (8) und (9), indem wir berücksichtigen, daß gemäß den Gleichungen (1) die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(x', y', z', t')}{D(x, y, z, t)}$$

gleich eins ist. Wir erhalten so

$$\begin{aligned} \int dE &= \beta \int \int \frac{\rho'}{4\pi} (u_x' X_a' + u_y' Y_a' + u_z' Z_a') d\omega' dt' \\ &+ \beta v \int \int \frac{\rho'}{4\pi} \left(X_a' + \frac{u_y'}{c} N_a' - \frac{u_x'}{c} M_a' \right) d\omega' dt', \end{aligned}$$

oder, da auch in bezug auf S' das Energieprinzip gelten muß, in leicht verständlicher Schreibweise

$$dE = \beta dE' + \beta v \int [\Sigma K_x'] dt'. \quad (16)$$

Wir wollen diese Gleichung auf den Fall anwenden, daß sich das betrachtete System derart gleichförmig bewegt, daß es als Ganzes relativ zu dem Bezugssystem S' ruht. Dann dürfen wir, falls die Teile des Systems relativ zu S' so langsam bewegt sind, daß die Quadrate der Geschwindigkeiten relativ zu S' gegenüber c^2 zu vernachlässigen sind, in bezug auf S' die Sätze der Newtonschen Mechanik anwenden. Es kann also nach dem Schwerpunktsatz das betrachtete System (genauer gesagt, dessen Schwerpunkt) nur dann dauernd in Ruhe bleiben, wenn für jedes t'

$$\Sigma K_x' = 0$$

ist. Trotzdem braucht das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung (16) nicht zu verschwinden, weil die zeitliche Integration nicht zwischen zwei bestimmten Werten von t' , sondern zwischen zwei bestimmten Werten von t auszuführen ist.

Wenn aber am Anfang und am Ende der betrachteten Zeitspanne keine äußeren Kräfte auf das Körpersystem wirken, so verschwindet jenes Glied, so daß wir einfach erhalten

$$dE = \beta \cdot dE'$$

Aus dieser Gleichung schließen wir zunächst, daß die Energie eines (gleichförmig) bewegten Systems, das nicht unter dem Einfluß äußerer Kräfte steht, eine Funktion zweier Variablen ist, nämlich der Energie E_0 des Systems relativ zu einem mitbewegten Bezugssystem¹⁾, und der Translationsgeschwindigkeit q des Systems, und wir erhalten

$$\frac{\partial E}{\partial E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

Daraus folgt

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} E_0 + \varphi(q),$$

wobei $\varphi(q)$ eine vorläufig unbekannte Funktion von q ist. Den Fall, daß E_0 gleich 0 ist, d. h. daß die Energie des bewegten Systems Funktion der Geschwindigkeit q allein ist, haben wir bereits in den § 8 und 9 untersucht. Aus Gleichung (14) folgt unmittelbar, daß wir zu setzen haben

$$\varphi(q) = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} + \text{const.}$$

Wir erhalten also

$$E = \left(\mu + \frac{E_0}{c^2} \right) \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad (16a)$$

wobei die Integrationskonstante weggelassen ist. Vergleicht man diesen Ausdruck für E mit dem in Gleichung (14) enthaltenen Ausdruck für die kinetische Energie des materiellen Punktes, so erkennt man, daß

1) Hier so wie im folgenden verstehen wir ein Zeichen mit dem unteren Index „0“, um anzudeuten, daß die betreffende Größe sich auf ein relativ zu dem betrachteten physikalischen System ruhendes Bezugssystem bezieht. Da das betrachtete System relativ zu S' ruht, können wir also hier E' durch E_0 ersetzen.

beide Ausdrücke von derselben Form sind; bezüglich der Abhängigkeit der Energie von der Translationsgeschwindigkeit verhält sich das betrachtete physikalische System wie ein materieller Punkt von der Masse M , wobei M von dem Energieinhalt E_0 des Systems abhängt nach der Formel

$$M = \mu + \frac{E_0}{c^2}. \quad (17)$$

Dies Resultat ist von außerordentlicher theoretischer Wichtigkeit, weil in demselben die träge Masse und die Energie eines physikalischen Systems als gleichartige Dinge auftreten. Eine Masse μ ist in bezug auf Trägheit äquivalent mit einem Energieinhalt von der Größe μc^2 . Da wir über den Nullpunkt von E_0 willkürlich verfügen können, sind wir nicht einmal imstande, ohne Willkür zwischen einer „wahren“ und einer „scheinbaren“ Masse des Systems zu unterscheiden. Weit natürlicher erscheint es, jegliche träge Masse als einen Vorrat von Energie aufzufassen.

Der Satz von der Konstanz der Masse ist nach unserem Resultat für ein einzelnes physikalisches System nur dann zutreffend, wenn dessen Energie konstant bleibt; er ist dann gleichbedeutend mit dem Energieprinzip. Allerdings sind die Änderungen, welche die Masse physikalischer Systeme bei den bekannten physikalischen Vorgängen erfährt, stets unmeßbar klein. Die Abnahme der Masse eines Systems, welches 1000 Gramm-Kalorien abgibt, beträgt z. B. $4,6 \cdot 10^{-11}$ gr.

Beim radioaktiven Zerfall eines Stoffes werden ungeheure Energiemengen frei; ist die bei einem derartigen Prozeß auftretende Verminderung der Masse nicht groß genug, um konstatiert zu werden?

Herr Planck schreibt hierüber: „Nach J. Precht¹⁾ entwickelt ein Grammatom Radium, wenn es von einer hinreichend dicken Bleischicht umgeben ist, pro Stunde $134,4 \times 225 = 30\,240$ gr-cal. Dies ergibt nach (17) für die Stunde eine Verminderung der Masse um

$$\frac{30\,240 \cdot 419 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^{20}} \text{ gr} = 1,41 \cdot 10^{-6} \text{ mgr}$$

oder in einem Jahre eine Verminderung der Masse um 0,012 mgr. Dieser Betrag ist allerdings, besonders mit Rücksicht auf das hohe Atomgewicht des Radiums, immer noch so winzig, daß er wohl zunächst außer dem Bereich der möglichen Erfahrung liegt“. Es liegt nahe, sich zu fragen, ob man nicht durch Anwendung einer indirekten Methode zum Ziele kommen könnte. Es sei M das Atomgewicht des

1) J. Precht, Ann. d. Phys. 21, 599, 1906.

zerfallenden Atoms, m_1, m_2 etc. seien die Atomgewichte der Endprodukte des radioaktiven Zerfalls, dann muß sein

$$M - \sum m = \frac{E}{c^2},$$

wobei E die beim Zerfall eines Grammatoms entwickelte Energie bedeutet; diese kann berechnet werden, wenn man die bei stationärem Zerfall pro Zeiteinheit entwickelte Energie und die mittlere Zerfalldauer des Atoms kennt. Ob die Methode mit Erfolg angewendet werden kann, hängt in erster Linie davon ab, ob es radioaktive Reaktionen gibt, für welche $\frac{M - \sum m}{M}$ nicht allzu klein gegen 1 ist. Für den oben erwähnten Fall des Radiums ist — wenn man die Lebensdauer desselben zu 2600 Jahren annimmt — ungefähr

$$\frac{M - \sum m}{M} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 2600}{250} = 0,00012.$$

Wenn also die Lebensdauer des Radiums einigermaßen richtig bestimmt ist, müßte man die in Betracht kommenden Atomgewichte auf fünf Stellen genau kennen, um unsere Beziehung prüfen zu können. Dies ist natürlich ausgeschlossen. Es ist indessen möglich, daß radioaktive Vorgänge bekannt werden, bei welchen ein bedeutend größerer Prozentsatz der Masse des ursprünglichen Atoms sich in Energie diverser Strahlungen verwandelt als beim Radium. Es liegt wenigstens nahe, sich vorzustellen, daß die Energieentwicklung beim Zerfall eines Atoms bei verschiedenen Stoffen nicht minder verschieden sei als die Raschheit des Zerfalls.

Im vorhergehenden ist stillschweigend vorausgesetzt, daß eine derartige Massenänderung mit dem zur Messung von Massen gewöhnlich benutzten Instrument, der Wage, gemessen werden könne, daß also die Beziehung

$$M = \mu + \frac{E_0}{c^2}$$

nicht nur für die träge Masse, sondern auch für die gravitierende Masse gelte, oder mit anderen Worten, daß Trägheit und Schwere eines Systems unter allen Umständen genau proportional seien. Wir hätten also auch z. B. anzunehmen, daß in einem Hohlraum eingeschlossene Strahlung nicht nur Trägheit, sondern auch Gewicht besitze. Jene Proportionalität zwischen träger und schwerer Masse gilt aber ausnahmslos für alle Körper mit der bisher erreichten Genauigkeit, so daß wir bis zum Beweise des Gegenteils die Allgemeingültigkeit

annehmen müssen. Wir werden ferner im letzten Abschnitt dieser Abhandlung ein neues, die Annahme stützendes Argument finden.

§ 12. Energie und Bewegungsgröße eines bewegten Systems.

Wir betrachten wieder wie im vorigen Paragraphen ein frei im Raume schwebendes System, welches von einer für Strahlung nicht durchlässigen Hülle umgeben ist. Mit X_a, Y_a, Z_a etc. bezeichnen wir wieder die Feldstärken des äußeren elektromagnetischen Feldes, welches den Energieaustausch des Systems mit anderen Systemen vermittelt. Auf dies äußere Feld können wir die Betrachtungen anwenden, welche uns zu Formel (15) geführt haben, so daß wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \left[\int \frac{1}{4\pi c} (Y_a N_a - Z_a M_a) d\omega \right] + \int \frac{\rho}{4\pi} \left(X_a + \frac{u_y}{c} N_a - \frac{u_x}{c} M_a \right) d\omega = 0.$$

Wir wollen nun annehmen, daß der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße allgemein gelte. Dann muß der über die Systemhülle erstreckte Teil des zweiten Gliedes dieser Gleichung, als Differentialquotient nach der Zeit einer durch den Momentanzustand des Systems vollkommen bestimmten Größe G_x darstellbar sein, welche wir als die X -Komponente der Bewegungsgröße des Systems bezeichnen. Wir wollen nun das Transformationsgesetz der Größe G_x aufsuchen. Durch Anwendung der Transformationsgleichungen (1), (7), (8) und (9) erhalten wir auf ganz analogem Wege wie im vorigen Paragraphen die Beziehung

$$\int d G_x = \beta \int \int \frac{\rho'}{4\pi} \left(X_a' + \frac{u_y'}{c} N_a' - \frac{u_x'}{c} M_a' \right) d\omega' \cdot dt' + \frac{\beta v}{c^2} \int \int \frac{\rho'}{4\pi} (X_a u_x' + Y_a' u_y' + Z_a' u_z') d\omega \cdot dt'$$

oder

$$d G_x = \beta \frac{v}{c^2} d E' + \beta \int \{ \Sigma K_x' \} dt'. \quad (18)$$

Der Körper bewege sich wieder beschleunigungsfrei, derart, daß er dauernd in bezug auf S' ruht, dann ist wieder

$$\Sigma K_x' = 0.$$

Trotzdem die Grenzen der Zeitintegration von x' abhängen, verschwindet wieder das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung, wenn der Körper vor und nach der betrachteten Veränderung äußeren Kräften nicht ausgesetzt ist; es ist dann

$$d G_x = \beta \frac{v}{c^2} d E'.$$

Hieraus folgt, daß die Bewegungsgröße eines äußeren Kräften nicht ausgesetzten Systems eine Funktion nur zweier Variabeln ist, nämlich der Energie E_0 des Systems in bezug auf ein mitbewegtes Bezugssystem und der Translationsgeschwindigkeit q desselben. Es ist

$$\frac{\partial G}{\partial E_0} = \frac{\frac{q}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}.$$

Hieraus folgt

$$G = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \left(\frac{E_0}{c^2} + \psi(q) \right),$$

wobei $\psi(q)$ eine vorläufig unbekannte Funktion von q ist. Da $\psi(q)$ nichts anderes ist als die Bewegungsgröße für den Fall, daß letztere durch die Geschwindigkeit allein bestimmt ist, schließen wir aus Formel (15 b), daß

$$\psi(q) = \frac{\mu q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

ist. Wir erhalten also

$$G = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left\{ \mu + \frac{E_0}{c^2} \right\} \quad (18a)$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem für die Bewegungsgröße des materiellen Punktes nur dadurch, daß an Stelle von μ die Größe $\left(\mu + \frac{E_0}{c^2} \right)$ tritt, im Einklang mit dem Resultat des vorigen Paragraphen.

Wir wollen nun Energie und Bewegungsgröße eines in bezug auf S ruhenden Körpers aufsuchen für den Fall, daß der Körper dauernden äußeren Kräften unterworfen ist. In diesem Falle ist zwar auch für jedes t'

$$\sum K_x' = 0,$$

aber das in den Gleichungen (16) und (18) auftretende Integral

$$\int [\sum K_x'] dt'$$

verschwindet nicht, weil dasselbe nicht zwischen zwei bestimmten Werten von t' , sondern von zwei bestimmten Werten von t zu er-

446 Einstein, Relativitätsprinzip u. die aus demselben gezog. Folgerungen.
 strecken ist. Da nach der Umkehrung der ersten der Gleichungen (1)

$$t = \beta \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right),$$

so sind die Grenzen für die Integration nach t' gegeben durch

$$\frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{c^2} x' \quad \text{und} \quad \frac{t_2}{\beta} - \frac{v}{c^2} x',$$

wobei t_1 und t_2 von x', y', z' unabhängig sind. Die Grenzen der Zeitintegration in bezug auf S' sind also von der Lage der Angriffspunkte der Kräfte abhängig. Wir zerlegen das obige Integral in drei Integrale:

$$\int [\Sigma K_x'] dt' = \int_{\frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{c^2} x'}^{\frac{t_1}{\beta}} + \int_{\frac{t_1}{\beta}}^{\frac{t_2}{\beta}} + \int_{\frac{t_2}{\beta}}^{\frac{t_2}{\beta} - \frac{v}{c^2} x'}.$$

Das zweite dieser Integrale verschwindet, weil es konstante Zeitgrenzen hat. Wenn ferner die Kräfte K_x' beliebig rasch veränderlich sind, können wir die beiden anderen Integrale nicht auswerten; dann können wir bei Anwendung der hier benutzten Grundlagen von einer Energie bzw. Bewegungsgröße des Systems überhaupt nicht reden.¹⁾ Falls sich aber jene Kräfte in Zeiten von der Größenordnung $\frac{v x'}{c^2}$ sehr wenig ändern; so können wir setzen:

$$\int_{\frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{c^2} x'}^{\frac{t_1}{\beta}} (\Sigma K_x') dt' = \Sigma K_x' \int_{\frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{c^2} x'}^{\frac{t_1}{\beta}} dt' = \frac{v}{c^2} \Sigma x' K_x'.$$

Nachdem das dritte Integral entsprechend ausgewertet ist, erhält man

$$\int (\Sigma K_x') dt' = - d \left\{ \frac{v}{c^2} \Sigma x' K_x' \right\}.$$

Nun ist die Berechnung der Energie und der Bewegungsgröße aus den Gleichungen (16) und (18) ohne Schwierigkeit auszuführen. Man erhält

$$E = \left(\mu + \frac{E_0}{c^2} \right) \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} - \frac{\frac{q^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \Sigma (\delta_0 K_{0\sigma}) \quad (16b)$$

1) Vergl. A. Einstein, Ann. d. Phys. **23**, § 2, 1907.

$$q = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left(\mu + \frac{E_0 - \Sigma(\delta_0 K_{0\sigma})}{c^2} \right), \quad (18b)$$

wobei $K_{0\sigma}$ die in die Bewegungsrichtung fallende Komponente einer auf ein mitbewegtes Bezugssystem bezogenen Kraft, δ_0 den in demselben System gemessenen Abstand des Angriffspunktes jener Kraft von einer zur Bewegungsrichtung senkrechten Ebene bedeutet.

Besteht, wie wir im folgenden annehmen wollen, die äußere Kraft in einem von der Richtung unabhängigen, überall auf die Oberfläche des Systems senkrecht wirkenden Druck p_0 , so ist im speziellen

$$\Sigma(\delta_0 K_{0\sigma}) = -p_0 V_0, \quad (19)$$

wobei V_0 das auf ein mitbewegtes Bezugssystem bezogene Volumen des Systems ist. Die Gleichungen (16b) und (18b) nehmen dann die Form an

$$E = \left(\mu + \frac{E_0}{c^2} \right) \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} + \frac{\frac{q^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} p_0 V_0 \quad (16c)$$

$$G = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left(\mu + \frac{E_0 + p_0 V_0}{c^2} \right). \quad (18c)$$

§ 13. Volumen und Druck eines bewegten Systems. Bewegungsgleichungen.

Wir haben uns zur Bestimmung des Zustandes des betrachteten Systems der Größen E_0 , p_0 , V_0 bedient, welche mit Bezug auf ein mit dem physikalischen System bewegtes Bezugssystem definiert sind. Wir können uns aber statt der genannten auch der entsprechenden Größen bedienen, welche mit Bezug auf dasselbe Bezugssystem definiert sind, wie die Bewegungsgröße G . Zu diesem Zweck müssen wir untersuchen, wie sich Volumen und Druck bei Einführung eines neuen Bezugssystems ändern.

Ein Körper ruhe in bezug auf das Bezugssystem S' . V' sei sein Volumen in bezug auf S' , V sein Volumen in bezug auf S . Aus Gleichungen (2) folgt unmittelbar

$$\int dx \cdot dy \cdot dz = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \int dx' \cdot dy' \cdot dz'$$

oder

$$V = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot V'.$$

Ersetzt man gemäß der von uns benutzten Bezeichnungsweise V' durch V^0 und v durch q , so hat man

$$V = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} \cdot V_0. \quad (20)$$

Um ferner die Transformationsgleichung für die Druckkräfte zu ermitteln, müssen wir von den Transformationsgleichungen ausgehen, welche für Kräfte überhaupt gelten. Da wir ferner in § 8 die bewegenden Kräfte so definiert haben, daß sie durch die Kraftwirkungen elektromagnetischer Felder auf elektrische Massen ersetzt werden können, können wir uns hier darauf beschränken, die Transformationsgleichungen für letztere aufzusuchen.¹⁾

Die Elektrizitätsmenge ε ruhe in bezug auf S' . Die auf dieselbe wirkende Kraft ist gemäß den Gleichungen (12) gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} K_x &= \varepsilon X & K_x' &= \varepsilon X' \\ K_y &= \varepsilon \left(Y - \frac{v}{c} N \right) & K_y' &= \varepsilon Y' \\ K_z &= \varepsilon \left(Z + \frac{v}{c} M \right) & K_z' &= \varepsilon Z'. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen und den Gleichungen (7a) folgt:

$$\left. \begin{aligned} K_x' &= K_x \\ K_y' &= \beta \cdot K_y \\ K_z' &= \beta \cdot K_z \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Nach diesen Gleichungen lassen sich Kräfte berechnen, wenn sie in bezug auf ein mitbewegtes Bezugssystem bekannt sind.

Wir betrachten nun eine auf das relativ zu S' ruhende Flächenelement s' wirkende Druckkraft

$$\begin{aligned} K_x' &= p' \cdot s' \cdot \cos l' = p' \cdot s_x' \\ K_y' &= p' \cdot s' \cdot \cos m' = p' \cdot s_y' \\ K_z' &= p' \cdot s' \cdot \cos n' = p' \cdot s_z', \end{aligned}$$

wobei l' , m' , n' die Richtungscosinus der (nach dem Innern des Körpers gerichteten) Normale, s_x' , s_y' , s_z' die Projektionen von s' bedeuten. Aus den Gleichungen (2) folgt, daß

1) Durch diesen Umstand wird auch das in den vorhergehenden Untersuchungen benutzte Verfahren gerechtfertigt, welches darin bestand, daß wir einzig Wechselwirkung rein elektromagnetischer Art zwischen dem betrachteten System und seiner Umgebung einführten. Die Resultate gelten ganz allgemein.

$$\begin{aligned} s_x' &= s_x \\ s_y' &= \beta \cdot s_y \\ s_z' &= \beta \cdot s_z, \end{aligned}$$

wobei s_x, s_y, s_z die Projektionen des Flächenelements in bezug auf S sind. Für die Komponenten K_x, K_y, K_z der betrachteten Druckkraft in bezug auf S erhält man also aus den letzten drei Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} K_x &= K_x' = p' \cdot s_x' = p' \cdot s_x = p' \cdot s \cos l \\ K_y &= \frac{1}{\beta} K_y' = \frac{1}{\beta} p' s_y' = p' \cdot s_y = p' \cdot s \cdot \cos m \\ K_z &= \frac{1}{\beta} K_z' = \frac{1}{\beta} p' s_z' = p' \cdot s_z = p' \cdot s \cdot \cos n, \end{aligned}$$

wobei s die Größe des Flächenelements, l, m, n die Richtungscosinus von dessen Normale in bezug auf S bezeichnen. Wir erhalten also das Resultat, daß der Druck p' in bezug auf das mitbewegte System sich in bezug auf ein anderes Bezugssystem durch einen ebenfalls senkrecht auf das Flächenelement wirkenden Druck von gleicher Größe ersetzen läßt. In der von uns benutzten Bezeichnungweise ist also

$$p = p_0. \quad (22)$$

Die Gleichungen (16c), (20) und (22) setzen uns in den Stand, den Zustand eines physikalischen Systems statt durch die in bezug auf ein mitbewegtes Bezugssystem definierten Größen E_0, V_0, p_0 durch die Größen E, V, p zu bestimmen, welche in bezug auf dasselbe System definiert sind wie die Bewegungsgröße G und die Geschwindigkeit q des Systems. Falls z. B. der Zustand des betrachteten Systems für einen mitbewegten Beobachter durch zwei Variable (V_0 und E_0) vollkommen bestimmt ist, dessen Zustandsgleichung also als eine Beziehung zwischen p_0, V_0 und E_0 aufgefaßt werden kann, kann man mittels der genannten Gleichungen die Zustandsgleichung auf die Form

$$\varphi(q, p, V, E) = 0$$

bringen.

Formt man die Gleichung (18c) in entsprechender Weise um, so erhält man

$$G = q \left\{ \mu + \frac{E + pV}{c^2} \right\}, \quad (18d)$$

welche Gleichung in Verbindung mit den das Prinzip von der Erhaltung der Bewegungsgröße ausdrückenden Gleichungen

$$\frac{dG_x}{dt} = \Sigma K_x \text{ etc.}$$

die Translationsbewegung des Systems als Ganzes vollkommen be-

stimmen, wenn außer den Größen ΣK_x etc. auch E , p und V als Funktionen der Zeit bekannt sind, oder wenn statt der letzten drei Funktionen drei ihnen äquivalente Angaben über die Bedingungen vorliegen, unter denen die Bewegung des Systems vor sich gehen soll.

§ 14. Beispiele.

Das betrachtete System bestehe in elektromagnetischer Strahlung, welche in einen masselosen Hohlkörper eingeschlossen sei, dessen Wandung dem Strahlungsdruck das Gleichgewicht leiste. Wenn keine äußeren Kräfte auf den Hohlkörper wirken, so können wir auf das ganze System (den Hohlkörper inbegriffen) die Gleichungen (16a) und (18a) anwenden. Es ist also:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

$$G = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} E_0 = q \frac{E}{c^2},$$

wobei E_0 die Energie der Strahlung in bezug auf ein mitbewegtes Bezugssystem bedeutet.

Sind dagegen die Wandungen des Hohlkörpers vollkommen biegsam und dehnbar, so daß dem auf sie von innen ausgeübten Strahlungsdruck durch äußere Kräfte, welche von nicht zu dem betrachteten System gehörigen Körpern ausgehen, das Gleichgewicht geleistet werden muß, so sind die Gleichungen (16c) und (18c) anzuwenden, in welche der bekannte Wert des Strahlungsdruckes

$$p_0 = \frac{1}{3} \frac{E_0}{c^2}$$

einzusetzen ist, so daß man erhält:

$$E = \frac{E_0 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{q^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

$$G = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{\frac{4}{3} E_0}{c^2}.$$

Wir betrachten ferner den Fall eines elektrisch geladenen masselosen Körpers. Falls äußere Kräfte auf denselben nicht wirken, können

wir wieder die Formeln (16a) und (18a) anwenden. Bezeichnet E_0 die elektrische Energie in bezug auf ein mitbewegtes Bezugssystem, so hat man

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

$$G = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{\frac{4}{3} E_0}{c^2}.$$

Von diesen Werten entfällt ein Teil auf das elektromagnetische Feld, der Rest auf den masselosen, von seiten seiner Ladung Kräften unterworfenen Körper.¹⁾

§ 15. Entropie und Temperatur bewegter Systeme.

Wir haben bisher von den Variablen, welche den Zustand eines physikalischen Systems bestimmen, nur Druck, Volumen, Energie, Geschwindigkeit und Bewegungsgröße benutzt, von den thermischen Größen aber noch nicht gesprochen. Es geschah dies deshalb, weil es für die Bewegung eines Systems gleichgültig ist, welcher Art die ihm zugeführte Energie ist, so daß wir bisher keine Ursache hätten, zwischen Wärme und mechanischer Arbeit zu unterscheiden. Nun aber wollen wir noch die thermischen Größen einführen.

Der Zustand eines bewegten Systems sei durch die Größen q, V, E vollkommen bestimmt. Für ein solches System haben wir offenbar als zugeführte Wärme dQ die gesamte Energiezunahme zu betrachten abzüglich der vom Drucke geleisteten und der auf Vergrößerung der Bewegungsgröße verwendeten Arbeit, so daß man hat

$$dQ = dE + p dV - q dQ. \quad (23)$$

Nachdem so die zugeführte Wärme für ein bewegtes System definiert ist, kann man durch Betrachtung von umkehrbaren Kreisprozessen die absolute Temperatur T und Entropie η des bewegten Systems in derselben Weise einführen, wie dies in den Lehrbüchern der Thermodynamik geschieht. Für umkehrbare Prozesse gilt auch hier die Gleichung

$$dQ = T d\eta. \quad (24)$$

Wir haben nun die Gleichungen abzuleiten, die zwischen den Größen dQ, η, T und den auf ein mitbewegtes Bezugssystem bezogenen entsprechenden Größen dQ_0, η_0, T_0 bestehen. Bezüglich der Entropie

1) Vgl. A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 23, 373—379, 1907.

wiederhole ich hier eine von Herrn Planck angegebene Überlegung¹⁾, indem ich bemerke, daß unter dem „gestrichenen“ bzw. „ungestrichenen“ Bezugssystem das Bezugssystem S' bzw. S zu verstehen ist.

„Wir denken uns den Körper aus einem Zustand, in welchem er für das ungestrichene Bezugssystem ruht, durch irgendeinen reversiblen, adiabatischen Prozeß in einen zweiten Zustand gebracht, in welchem er für das gestrichene Bezugssystem ruht. Bezeichnet man die Entropie des Körpers für das ungestrichene System im Anfangszustand mit η_1 , im Endzustand mit η_2 , so ist wegen der Reversibilität und Adiabatie $\eta_1 = \eta_2$. Aber auch für das gestrichene Bezugssystem ist der Vorgang reversibel und adiabatisch, also haben wir ebenso $\eta_1' = \eta_2'$.“

„Wäre nun η_1' nicht gleich η_1 , sondern etwa $\eta_1' > \eta_1$, so würde das heißen: Die Entropie eines Körpers ist für das Bezugssystem, für welches er in Bewegung begriffen ist, größer als für dasjenige Bezugssystem, für welches er sich in Ruhe befindet. Dann müßte nach diesem Satze auch $\eta_2 > \eta_2'$ sein; denn im zweiten Zustand ruht der Körper für das gestrichene Bezugssystem, während er für das ungestrichene in Bewegung begriffen ist. Diese beiden Ungleichungen widersprechen aber den oben aufgestellten beiden Gleichungen. Ebensowenig kann $\eta_1' > \eta_1$ sein; folglich ist $\eta_1' = \eta_1$, und allgemein $\eta' = \eta$, d. h. die Entropie des Körpers hängt nicht von der Wahl des Bezugssystems ab.“

Bei Anwendung der von uns benutzten Bezeichnungsweise haben wir also zu setzen:

$$\eta = \eta_0. \quad (25)$$

Führen wir ferner auf der rechten Seite der Gleichung (23) mittels der Gleichungen (16c), (18c), (20) und (22) die Größen E_0 , p_0 und V_0 ein, so erhalten wir

$$dQ = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} (dE_0 + p_0 dV_0)$$

oder

$$dQ = dQ_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}. \quad (26)$$

Da ferner gemäß (24) die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} dQ &= T d\eta \\ dQ_0 &= T d\eta_0 \end{aligned}$$

gelten, so erhält man endlich mit Rücksicht auf (25) und (26)

1) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme. Sitzungsber. d. kgl. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1907.

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}. \quad (27)$$

Die Temperatur eines bewegten Systems ist also in bezug auf ein relativ zu ihm bewegtes Bezugssystem stets kleiner als in bezug auf ein relativ zu ihm ruhendes Bezugssystem.

§ 16. Dynamik der Systeme und Prinzip der kleinsten Wirkung.

Herr Planck geht in seiner Abhandlung „Zur Dynamik bewegter Systeme“ vom Prinzip der kleinsten Wirkung (und von den Transformationsgleichungen für Druck und Temperatur der Hohlraumstrahlung) aus¹⁾ und gelangt zu Resultaten, mit welchen die hier entwickelten übereinstimmen. Es erhebt sich daher die Frage, wie die Grundlagen seiner und der vorliegenden Untersuchung zusammenhängen.

Wir sind ausgegangen vom Energieprinzip und vom Prinzip von der Erhaltung der Bewegungsgröße. Nennen wir F_x, F_y, F_z die Komponenten der Resultierenden der auf das System wirkenden Kräfte, so können wir die von uns benutzten Prinzipien für umkehrbare Prozesse und ein System, dessen Zustand durch die Variablen q, V, T bestimmt ist, so formulieren:

$$dE = F_x dx + F_y dy + F_z dz - p dV + T dS \quad (28)$$

$$F_x = \frac{dG_x}{dt} \text{ etc.} \quad (29)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn man beachtet, daß

$$F_x dx = F_x \dot{x} dt = \dot{x} dG = d(x G_x) - G_x d\dot{x} \text{ etc.}$$

und

$$T d\eta = d(T\eta) - \eta dT,$$

die Beziehung

$$d(-E + T\eta + qG) = G_x d\dot{x} + G_y d\dot{y} + G_z d\dot{z} + p dV + \eta dT.$$

Da auch die rechte Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential sein muß, so folgt unter Berücksichtigung von (29):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \right) = F_x \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \right) = F_y \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{z}} \right) = F_z$$

$$\frac{\partial H}{\partial V} = p \quad \frac{\partial H}{\partial T} = \eta.$$

Dies sind aber die mittels des Prinzips der kleinsten Wirkung ableitbaren Gleichungen, von denen Herr Planck ausgegangen ist.

1) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme. Sitzungsber d. kgl. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1907.

V. Relativitätsprinzip und Gravitation.

§ 17. Beschleunigtes Bezugssystem und Gravitationsfeld.

Bisher haben wir das Prinzip der Relativität, d. h. die Voraussetzung der Unabhängigkeit der Naturgesetze vom Bewegungszustande des Bezugssystems, nur auf beschleunigungsfreie Bezugssysteme angewendet. Ist es denkbar, daß das Prinzip der Relativität auch für Systeme gilt, welche relativ zueinander beschleunigt sind?

Es ist zwar hier nicht der Ort für die eingehende Behandlung dieser Frage. Da sich diese aber jedem aufdrängen muß, der die bisherigen Anwendungen des Relativitätsprinzips verfolgt hat, will ich es nicht unterlassen, zu der Frage hier Stellung zu nehmen.

Wir betrachten zwei Bewegungssysteme Σ_1 und Σ_2 . Σ_1 sei in Richtung seiner X -Achse beschleunigt, und es sei γ die (zeitlich konstante) Größe dieser Beschleunigung. Σ_2 sei ruhend; es befinde sich aber in einem homogenen Gravitationsfelde, das allen Gegenständen die Beschleunigung $-\gamma$ in Richtung der X -Achse erteilt.

Soweit wir wissen, unterscheiden sich die physikalischen Gesetze in bezug auf Σ_1 nicht von denjenigen in bezug auf Σ_2 ; es liegt dies daran, daß alle Körper im Gravitationsfelde gleich beschleunigt werden. Wir haben daher bei dem gegenwärtigen Stande unserer Erfahrung keinen Anlaß zu der Annahme, daß sich die Systeme Σ_1 und Σ_2 in irgendeiner Beziehung voneinander unterscheiden, und wollen daher im folgenden die völlige physikalische Gleichwertigkeit von Gravitationsfeld und entsprechender Beschleunigung des Bezugssystems annehmen.

Diese Annahme erweitert das Prinzip der Relativität auf den Fall der gleichförmig beschleunigten Translationsbewegung des Bezugssystems. Der heuristische Wert der Annahme liegt darin, daß sie ein homogenes Gravitationsfeld durch ein gleichförmig beschleunigtes Bezugssystem zu ersetzen gestattet, welches letzterer Fall bis zu einem gewissen Grade der theoretischen Behandlung zugänglich ist.

§ 18. Raum und Zeit in einem gleichförmig beschleunigten Bezugssystem.

Wir betrachten zunächst einen Körper, dessen einzelne materielle Punkte zu einer bestimmten Zeit t des beschleunigungsfreien Bezugssystems S , relativ zu S keine Geschwindigkeit, jedoch eine gewisse Beschleunigung besitzen. Was für einen Einfluß hat diese Beschleunigung γ auf die Gestalt des Körpers in bezug auf S ?

Falls ein derartiger Einfluß vorhanden ist, wird er in einer Dila-

tation nach konstantem Verhältnis in der Beschleunigungsrichtung sowie eventuell in den beiden dazu senkrechten Richtungen bestehen; denn ein Einfluß anderer Art ist aus Symmetriegründen ausgeschlossen. Jene von der Beschleunigung herrührenden Dilatationen müssen (falls solche überhaupt existieren) gerade Funktionen von γ sein; sie können also vernachlässigt werden, wenn man sich auf den Fall beschränkt, daß γ so klein ist, daß Glieder zweiten und höheren Grades in γ vernachlässigt werden dürfen. Da wir uns im folgenden auf diesen Fall beschränken wollen, haben wir also einen Einfluß der Beschleunigung auf die Gestalt eines Körpers nicht anzunehmen.

Wir betrachten nun ein relativ zu dem beschleunigungsfreien Bezugssystem S in Richtung von dessen X -Achse gleichförmig beschleunigtes Bezugssystem Σ . Uhren besw. Maßstab von Σ seien, ruhend untersucht, gleich den Uhren bezw. dem Maßstab von S . Der Koordinatenanfang von Σ bewege sich auf der X -Achse von S , und die Achsen von Σ seien denen von S dauernd parallel. Es existiert in jedem Augenblick ein unbeschleunigtes Bezugssystem S' , dessen Koordinatenachsen in dem betreffenden Augenblick (zu einer bestimmten Zeit t' von S' mit den Koordinatenachsen von Σ zusammen fallen. Besitzt ein Punkt ereignis, welches zu dieser Zeit t' stattfindet, in bezug auf Σ die Koordinaten ξ, η, ζ , so ist

$$\left. \begin{aligned} x' &= \xi \\ y' &= \eta \\ z' &= \zeta \end{aligned} \right\},$$

weil ein Einfluß der Beschleunigung auf die Gestalt der zur Messung von ξ, η, ζ benutzten Meßkörper nach dem Obigen nicht anzunehmen ist. Wir wollen uns ferner vorstellen, daß die Uhren von Σ zu dieser Zeit t' von S' so gerichtet werden, daß ihre Angabe in diesem Augenblick gleich t' ist. Wie steht es mit dem Gang der Uhren in dem nächsten Zeiteilchen τ ?

Zunächst haben wir zu berücksichtigen, daß ein spezifischer Einfluß der Beschleunigung auf den Gang der Uhren von Σ nicht in Betracht fällt, da dieser von der Ordnung γ^2 sein müßte. Da ferner der Einfluß der während τ erlangten Geschwindigkeit auf den Gang der Uhren zu vernachlässigen ist, und ebenso die während der Zeit τ von den Uhren relativ zu denen von S' zurückgelegten Wege von der Ordnung τ^2 , also zu vernachlässigen sind, so sind für das Zeitelement τ die Angaben der Uhren von Σ durch die Angaben der Uhren von S' vollkommen nutzbar.

Aus dem Vorgehenden folgt, daß sich das Licht im Vakuum

relativ zu Σ im Zeitelement τ mit der universellen Geschwindigkeit c fortpflanzt, falls wir die Gleichzeitigkeit in dem relativ zu Σ momentan ruhenden System S' definieren, und zur Zeit- bzw. Längenmessung Uhren bzw. Maßstäbe verwenden, welche jenen gleich sind, die in unbeschleunigten Systemen zur Ausmessung von Zeit und Raum benutzt werden. Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit läßt sich also auch hier zur Definition der Gleichzeitigkeit verwenden, falls man sich auf sehr kleine Lichtwege beschränkt.

Wir denken uns nun die Uhren von Σ in der angegebenen Weise zu derjenigen Zeit $t=0$ von S gerichtet, in welcher Σ relativ zu S momentan ruht. Der Inbegriff der Angaben der so gerichteten Uhren von Σ werde die „Ortszeit“ σ des Systems Σ genannt. Die physikalische Bedeutung der Ortszeit σ ist, wie man unmittelbar erkennt, die folgende. Bedient man sich zur zeitlichen Wertung der in den einzelnen Raumelementen von Σ stattfindenden Vorgänge jener Ortszeit σ , so können die Gesetze, denen jene Vorgänge gehorchen, nicht von der Lage des betreffenden Raumelementes, d. h. von dessen Koordinaten, abhängen, falls man sich in den verschiedenen Raumelementen nicht nur gleichen Uhren, sondern auch sonst gleicher Meßmittel bedient.

Dagegen dürfen wir nicht die Lokalzeit σ als die „Zeit“ von Σ schlechthin bezeichnen, und zwar deshalb, weil zwei in verschiedenen Punkten von Σ stattfindende Punkt ereignisse nicht dann im Sinne unserer obigen Definition gleichzeitig sind, wenn ihre Lokalzeiten σ einander gleich sind. Da nämlich irgend zwei Uhren von Σ zur Zeit $t=0$ in bezug auf S synchron sind und den nämlichen Bewegungen unterworfen werden, so bleiben sie dauernd in bezug auf S synchron. Aus diesem Grunde laufen sie aber gemäß § 4 in bezug auf ein momentan relativ zu Σ ruhendes, in bezug auf S bewegtes Bezugssystem S' nicht synchron, also gemäß unserer Definition auch nicht in bezug auf Σ .

Wir definieren nun die „Zeit“ τ des Systems Σ als den Inbegriff derjenigen Angaben der im Koordinatenanfangspunkt von Σ befindlichen Uhr, welche mit den zeitlich zu wertenden Ereignissen im Sinne der obigen Definition gleichzeitig sind.¹⁾

Wir wollen jetzt die Beziehung aufsuchen, welche zwischen der Zeit τ und der Ortszeit σ eines Punkt ereignisses besteht. Aus der ersten der Gleichungen (1) folgt, daß zwei Ereignisse in bezug auf S' , also auch in bezug auf Σ gleichzeitig sind, wenn

1) Das Zeichen „ τ “ ist also hier in einem anderen Sinne verwendet als oben.

$$t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 = t_2 - \frac{v}{c^2} x_2,$$

wobei die Indizes die Zugehörigkeit zu dem einen bzw. andern Punkt-ereignis andeuten soll. Wir beschränken uns nun zunächst auf die Betrachtung so kurzer Zeiten¹⁾, daß alle Glieder, welche die zweite oder eine höhere Potenz von τ oder v enthalten, weggelassen werden dürfen; dann haben wir mit Rücksicht auf (1) und (29) zu setzen:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= x_2' - x_1' = \xi_2 - \xi_1 \\ t_1 &= \sigma_1 & t_2 &= \sigma_2 \\ v &= \gamma t = \gamma \tau, \end{aligned}$$

so daß wir aus obiger Gleichung erhalten:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{\gamma \tau}{c^2} (\xi_2 - \xi_1).$$

Verlegen wir das erste Punktereignis in den Koordinatenanfang, so daß $\sigma_1 = \tau$ und $\xi_1 = 0$, so erhalten wir unter Weglassung des Index für das zweite Punktereignis

$$\sigma = \tau \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2} \right). \quad (30)$$

Diese Gleichung gilt zunächst, wenn τ und ξ unterhalb gewisser Grenzen liegen. Sie gilt offenbar für beliebig große τ , falls die Beschleunigung γ mit Bezug auf Σ konstant ist, weil die Beziehung zwischen σ und τ dann linear sein muß. Für beliebig große ξ gilt Gleichung (30) nicht. Daraus, daß die Wahl des Koordinatenanfangspunktes auf die Relation nicht von Einfluß sein darf, schließt man nämlich, daß die Gleichung (30) genau genommen durch die Gleichung

$$\sigma = \tau e^{\frac{\gamma \xi}{c^2}}$$

ersetzt werden müßte. Wir wollen jedoch an der Formel (30) festhalten.

Gleichung (30) ist nach § 17 auch auf ein Koordinatensystem anzuwenden, in dem ein homogenes Schwerfeld wirkt. In diesem Falle haben wir $\Phi = \gamma \xi$ zu setzen, wobei Φ das Potential der Schwerkraft bedeutet, so daß wir erhalten

$$\sigma = \tau \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) \quad (30a)$$

Wir haben zweierlei Zeiten für Σ definiert. Welcher von beiden Definitionen haben wir uns für die verschiedenen Fälle zu bedienen? Nehmen wir an, es existiere an zwei Orten verschiedenen Gravitations-

1) Hierdurch wird gemäß (1) auch eine gewisse Beschränkung in bezug auf die Werte von $\xi = x'$ angenommen.

potentials ($\gamma \xi$) je ein physikalisches System, und wir wollen ihre physikalischen Größen vergleichen. Zu diesem Zwecke werden wir wohl am natürlichsten folgendermaßen vorgehen: Wir begeben uns mit unseren Meßmitteln zuerst zu dem ersten physikalischen System und führen dort unsere Messungen aus; hierauf begeben wir uns samt unsern Meßmitteln nach dem zweiten System, um hier die gleichen Messungen auszuführen. Ergeben die Messungen da und dort die gleichen Resultate, so werden wir die beiden physikalischen Systeme als „gleich“ bezeichnen. Unter den genannten Meßmitteln befindet sich eine Uhr, mit welcher wir Lokalzeiten σ messen. Daraus folgt, daß wir uns zum Definieren der physikalischen Größen an einem Orte des Schwerfeldes naturgemäß der Zeit σ bedienen.

Handelt es sich aber um ein Phänomen, bei welchem an Orten verschiedenen Gravitationspotentials befindliche Gegenstände gleichzeitig berücksichtigt werden müssen, so haben wir uns bei den Gliedern, in welchen die Zeit explizite (d. h. nicht nur bei der Definition physikalischer Größen) vorkommt, der Zeit τ zu bedienen, da sonst die Gleichzeitigkeit der Ereignisse nicht durch die Gleichheit der Zeitwerte beider Ereignisse ausgedrückt würde. Da bei der Definition der Zeit τ nicht ein willkürlich gewählter Zeitpunkt, wohl aber eine an einem willkürlich gewählten Orte befindliche Uhr benutzt ist, so können bei Benutzung der Zeit τ die Naturgesetze nicht mit der Zeit, wohl aber mit dem Orte variieren.

§ 19. Einfluß des Gravitationsfeldes auf Uhren.

Befindet sich in einem Punkte P vom Gravitationspotential Φ eine Uhr, welche die Ortszeit angibt, so sind gemäß (30a) ihre Angaben $\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)$ mal größer als die Zeit τ , d. h. sie läuft $\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)$ mal schneller als eine gleich beschaffene, im Koordinatenanfangspunkt befindliche Uhr. Ein irgendwo im Raume befindlicher Beobachter nehme die Angaben dieser beiden Uhren irgendwie, z. B. auf optischem Wege, wahr. Da die Zeit $\Delta\tau$, welche zwischen dem Zeitpunkt einer Angabe einer der Uhren und der Wahrnehmung dieser Angabe durch den Beobachter verstreicht, von τ unabhängig ist, so läuft die Uhr in P für einen irgendwo im Raume befindlichen Beobachter $\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)$ mal schneller als die Uhr im Koordinatenanfangspunkt. In diesem Sinne können wir sagen, daß der in der Uhr sich abspielende Vorgang — und allgemeiner jeder physikalische Prozeß — desto schneller abläuft,

je größer das Gravitationspotential des Ortes ist, an dem er sich abspielt.

Es gibt nun „Uhren“, welche an Orten verschiedenen Gravitationspotentials vorhanden sind und deren Ganggeschwindigkeit sehr genau kontrolliert werden kann; es sind dies die Erzeuger der Spektrallinien. Aus dem Obigen schließt man¹⁾, daß von der Sonnenoberfläche kommendes Licht, welches von einem solchen Erzeuger herrührt, eine um etwa zwei Millionstel größere Wellenlänge besitzt, als das von gleichen Stoffen auf der Erde erzeugte Licht.

§ 20. Einfluß der Schwere auf die elektromagnetischen Vorgänge.

Beziehen wir einen elektromagnetischen Vorgang in einem Zeitpunkt auf ein beschleunigungsfreies Bezugssystem S' , das momentan relativ zu dem wie oben beschleunigten Bezugssystem Σ ruht, so gelten gemäß (5) und (6) die Gleichungen

$$\frac{1}{c} \left(\rho' u_{x'} + \frac{\partial X'}{\partial t'} \right) = \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial x'} \text{ etc.}$$

und

$$\frac{1}{c} \frac{\partial L'}{\partial t'} = \frac{\partial Y'}{\partial x'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'} \text{ etc.}$$

Nach dem Obigen können wir die auf S' bezogenen Größen ρ' , u' , X' , L' , x' etc. den entsprechenden auf Σ bezogenen Größen ρ , u , X , L , ξ etc. ohne weiteres gleichsetzen, falls wir uns auf eine unendlich kurze Zeit beschränken²⁾, welche der Zeit der relativen Ruhe von S' und Σ unendlich nahe liegt. Ferner haben wir t' durch die Lokalzeit σ zu ersetzen. Dagegen dürfen wir nicht einfach

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

setzen, und zwar deshalb, weil ein in bezug auf Σ ruhender Punkt, auf den sich die auf Σ transformierten Gleichungen beziehen sollen, relativ zu S' während des Zeittleilchens $dt' = d\sigma$ seine Geschwindigkeit ändert, welcher Änderung gemäß den Gleichungen (7a) und (7b) eine zeitliche Änderung der auf Σ bezogenen Feldkomponenten entspricht. Wir haben daher zu setzen:

1) Indem man voraussetzt, daß Gleichung (30a) auch für ein nicht-homogenes Gravitationsfeld gelte.

2) Diese Beschränkung beeinträchtigt den Gültigkeitsbereich unserer Resultate nicht, da die abzuleitenden Gesetze der Natur der Sache nach von der Zeit nicht abhängen können.

$$\begin{aligned} \frac{\partial X'}{\partial t'} &= \frac{\partial X}{\partial \sigma} & \frac{\partial L'}{\partial t'} &= \frac{\partial L}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial Y'}{\partial t'} &= \frac{\partial Y}{\partial \sigma} + \frac{\gamma}{c} N & \frac{\partial M'}{\partial t'} &= \frac{\partial M}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c} Z \\ \frac{\partial Z'}{\partial t'} &= \frac{\partial Z}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c} M & \frac{\partial N'}{\partial t'} &= \frac{\partial N}{\partial \sigma} + \frac{\gamma}{c} Y. \end{aligned}$$

Die auf Σ bezogenen elektromagnetischen Gleichungen lauten also zunächst

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left(\rho u_{\xi} + \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right) &= \frac{\partial N}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{c} \left(\rho u_{\eta} + \frac{\partial Y}{\partial \sigma} + \frac{\gamma}{c} N \right) &= \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{1}{c} \left(\rho u_{\zeta} + \frac{\partial Z}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c} M \right) &= \frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \sigma} &= \frac{\partial Y}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z}{\partial \eta} \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma} - \frac{\gamma}{c} Z \right) &= \frac{\partial Z}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial N}{\partial \sigma} + \frac{\gamma}{c} Y \right) &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen multiplizieren wir mit $\left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2}\right)$ und setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} X^* &= X \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2}\right), & Y^* &= Y \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2}\right) \text{ etc.} \\ \rho^* &= \rho \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Wir erhalten dann, indem wir Glieder zweiten Grades in γ vernachlässigen, die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \left(\rho^* u_{\xi} + \frac{\partial X^*}{\partial \sigma} \right) &= \frac{\partial N^*}{\partial \eta} - \frac{\partial M^*}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{c} \left(\rho^* u_{\eta} + \frac{\partial Y^*}{\partial \sigma} \right) &= \frac{\partial L^*}{\partial \zeta} - \frac{\partial N^*}{\partial \xi} \\ \frac{1}{c} \left(\rho^* u_{\zeta} + \frac{\partial Z^*}{\partial \sigma} \right) &= \frac{\partial M^*}{\partial \xi} - \frac{\partial L^*}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (31a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial L^*}{\partial \sigma} &= \frac{\partial Y^*}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z^*}{\partial \eta} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial M^*}{\partial \sigma} &= \frac{\partial Z^*}{\partial \xi} - \frac{\partial X^*}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial N^*}{\partial \sigma} &= \frac{\partial X^*}{\partial \eta} - \frac{\partial Y^*}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (32a)$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man zunächst, wie das Gravitationsfeld die statischen und stationären Erscheinungen beeinflusst. Die geltenden Gesetzmäßigkeiten sind dieselben wie im gravitationsfreien Felde; nur sind die Feldkomponenten X etc. durch $X\left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right)$ etc. und ρ durch $\rho\left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right)$ ersetzt.

Um ferner den Verlauf nichtstationärer Zustände zu übersehen, bedienen wir uns der Zeit τ sowohl bei den nach der Zeit differenzierten Gliedern als auch für die Definition der Geschwindigkeit der Elektrizität, d. h. wir setzen gemäß (30)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right) \frac{\partial}{\partial \tau}$$

und

$$w_{\xi} = \left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right).$$

Wir erhalten so

$$\frac{1}{c\left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right)} \left(\rho^* w_{\xi} + \frac{\partial X^*}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial N^*}{\partial \eta} - \frac{\partial M^*}{\partial \zeta} \text{ etc.} \quad (31b)$$

und

$$\frac{1}{c\left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right)} \frac{\partial L^*}{\partial \tau} = \frac{\partial Y^*}{\partial \zeta} = \frac{\partial Z^*}{\partial \eta} \text{ etc.} \quad (32b)$$

Auch diese Gleichungen sind von derselben Form wie die entsprechenden des beschleunigungs- bzw. gravitationsfreien Raumes; hier tritt aber an die Stelle von c der Wert

$$c\left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right) = c\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Es folgt hieraus, daß die Lichtstrahlen, welche nicht in der ξ -Achse verlaufen, durch das Gravitationsfeld gekrümmt werden; die Richtungsänderung beträgt, wie leicht zu ersehen, pro Zentimeter Lichtweg $\frac{\gamma}{c^2} \sin \varphi$, wobei φ den Winkel zwischen der Richtung der Schwerkraft und der des Lichtstrahles bedeutet.

Mittels dieser Gleichungen und den aus der Optik ruhender Körper bekannten Gleichungen zwischen Feldstärke und elektrischer Strömung an einem Orte läßt sich der Einfluß des Gravitationsfeldes auf die optischen Erscheinungen bei ruhenden Körpern ermitteln. Es ist hierbei zu berücksichtigen, daß jene Gleichungen aus der Optik ruhender Körper für die Lokalzeit σ gelten. Leider ist der Einfluß des irdischen Schwerfeldes nach unserer Theorie ein so geringer (wegen der Klein-

heit von $\frac{\gamma x}{c^2}$), daß eine Aussicht auf Vergleichung der Resultate der Theorie mit der Erfahrung nicht besteht.

Multiplizieren wir die Gleichungen (31 a) und (32 a) der Reihe nach mit $\frac{X^*}{4\pi} \dots \dots \frac{N^*}{4\pi}$ und integrieren über den unendlichen Raum, so erhalten wir bei Benutzung unserer früheren Bezeichnungsweise:

$$\int \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2}\right)^2 \frac{\rho}{4\pi} (u X + u_n Y + u Z) d\omega + \int \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \sigma} (X^2 + Y^2 \dots + N^2) d\omega = 0.$$

$\frac{\rho}{4\pi} (u X + u_n Y + u Z)$ ist die der Materie pro Volumeneinheit und Einheit der Lokalzeit σ zugeführte Energie η_σ , falls diese Energie mittels an der betreffenden Stelle befindlicher Meßmittel gemessen wird. Folglich ist gemäß (30) $\eta_\tau = \eta^\sigma \left(1 - \frac{\gamma \xi}{c^2}\right)$ die der Materie pro Volumeneinheit und Einheit der Zeit τ zugeführte (ebenso gemessene) Energie. $\frac{1}{8\pi} (X^2 + Y^2 \dots + N^2)$ ist die elektromagnetische Energie ε pro Volumeneinheit — ebenso gemessen. Berücksichtigen wir ferner, daß gemäß (30) $\frac{\partial}{\partial \sigma} = \left(1 - \frac{\gamma \xi}{c^2}\right) \frac{\partial}{\partial \tau}$ zu setzen ist, so erhalten wir

$$\int \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2}\right) \eta_\tau d\omega + \frac{d}{d\tau} \left\{ \int \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2}\right) \varepsilon d\omega \right\} = 0.$$

Diese Gleichung drückt das Prinzip von der Erhaltung der Energie aus und enthält ein sehr bemerkenswertes Resultat. Eine Energie bzw. eine Energiezufuhr, welche — an Ort und Stelle gemessen — den Wert $E = \varepsilon d\omega$ bzw. $E = \eta d\omega d\tau$ hat, liefert zum Energieintegral außer dem ihrer Größe entsprechenden Wert E noch einen ihrer Lage entsprechenden Wert $\frac{E}{c^2} \gamma \xi = \frac{E}{c^2} \Phi$. Jeglicher Energie E kommt also im Gravitationsfelde eine Energie der Lage zu, die ebenso groß ist, wie die Energie der Lage einer „ponderabeln“ Masse von der Größe $\frac{E}{c^2}$.

Der im § 11 abgeleitete Satz, daß einer Energiemenge E eine Masse von der Größe $\frac{E}{c^2}$ zukomme, gilt also, falls die im § 17 eingeführte Voraussetzung zutrifft, nicht nur für die träge, sondern auch für die gravitierende Masse.

(Eingegangen 4. Dezember 1907.)

Die in den verschiedenen Versuchen benutzten Geschwindigkeiten der Ladungen übertreffen nicht $1,5 \cdot 10^4$ cm/sec.; das Verhältnis $\beta = \frac{v}{c}$ war also höchstens $0,5 \cdot 10^{-6}$. Die besten Versuche waren mit einem möglichen Fehler von etwa 3 Proz. behaftet. Wenn also die Versuche die Abhängigkeit des Magnetfeldes der elektrischen Konvektion von der ersten Potenz des β festzustellen erlauben, so sind sie gar nicht imstande, den etwaigen Einfluß des β^2 zu entdecken.

Dasselbe gilt für den Versuch von Fizeau über den Einfluß des strömenden Wassers auf die Lichtgeschwindigkeit.

Wenn also alle diese Versuche gegen die Maxwell-Hertzschen elektrodynamischen Gleichungen bewegter Körper und zugunsten der Lorentzschen Elektronentheorie sprechen, so können sie dennoch zwischen den neueren Theorien von H. Lorentz und E. Cohn nicht entscheiden.

Moskau, Ingenieur-Hochschule. 9. Februar 1908.

(Eingegangen 12. Februar 1908.)

Berichtigungen

zu der Arbeit: „Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen“.¹⁾

Von A. Einstein.

Bei Durchsicht der Korrekturbogen der genannten Arbeit ist mir leider eine Anzahl Fehler entgangen, die ich berichtigen muß, weil sie das Lesen der Arbeit erschweren.

Formel 15 b (S. 435) sollte lauten:

$$\frac{d}{dt} \left[\int \frac{1}{4\pi c} (YN - ZM) dv \right] + \sum \frac{\mu \dot{x}^i}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = 0.$$

Die zweite Formel auf S. 451 hat fälschlich den Faktor $\frac{4}{3}$; es sollte heißen:

$$G = \frac{q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \frac{E_0}{c^2}.$$

Formel 28 auf S. 453 lautet richtig:

$$dE = F_x dx + F_y dy + F_z dz - p dV + T d\eta.$$

Einige Zeilen weiter unten ist der Index bei G_x zu ergänzen. In der vorletzten Zeile der S. 455 sollte es heißen „ersetzbar“ statt „nutzbar“.

1) Dieses Jahrbuch 4, 411, 1907.

Auf S. 461 sollte es heißen:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2}\right) \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

und

$$w_{\xi} = \left(1 + \frac{\gamma \xi}{c^2}\right) u_{\xi}.$$

Auf S. 462 sind ferner bei den Größen w_{ξ} und w_{ζ} die Indizes zu ergänzen. Außerdem ist etwa in der Mitte dieser Seite ein Zeichenfehler zu berichtigen; es sollte heißen:

$$\eta_{\sigma} = \eta_{\tau} \left(1 - \frac{\gamma \xi}{c^2}\right).$$

Eine briefliche Mitteilung von Herrn Planck veranlaßt mich dazu, zur Vermeidung eines naheliegenden Mißverständnisses eine ergänzende Bemerkung beizufügen.

Im Abschnitt „Relativitätsprinzip und Gravitation“ wird ein ruhendes, in einem zeitlich konstanten, homogenen Schwerfeld gelegenes Bezugssystem als physikalisch gleichwertig behandelt mit einem gleichförmig beschleunigten, gravitationsfreien Bezugssystem. Der Begriff „gleichförmig beschleunigt“ bedarf noch einer Erläuterung.

Wenn es sich — wie in unserem Falle — um eine gradlinige Bewegung (des Systems Σ) handelt, so ist die Beschleunigung durch den Ausdruck $\frac{dv}{dt}$ gegeben, wobei v die Geschwindigkeit bedeutet. Nach der bisher ge-

bräuchlichen Kinematik ist $\frac{dv}{dt}$ eine vom Bewegungszustande des (beschleunigungsfreien) Bezugssystems unabhängige Größe, so daß man, wenn die Bewegung in einem bestimmten Zeitteilchen gegeben ist, ohne weiteres von der (momentanen) Beschleunigung reden kann. Gemäß der von uns angewendeten Kinematik hängt $\frac{dv}{dt}$ vom Bewegungszustande des (beschleunigungsfreien) Bezugssystems ab. Unter allen Beschleunigungswerten, die man so für eine bestimmte Bewegungsepoche erhalten kann, ist aber derjenige ausgezeichnet, welcher einem Bezugssystem entspricht, demgegenüber der betrachtete Körper die Geschwindigkeit $v=0$ besitzt. Dieser Beschleunigungswert ist es, der bei unserem „gleichförmig beschleunigten“ System konstant bleiben soll. Die auf S. 457 gebrauchte Beziehung $v = \gamma t$ gilt also nur in erster Annäherung; dies genügt aber, weil in der Betrachtung nur bezüglich t bzw. τ lineare Glieder zu berücksichtigen sind.

(Eingegangen 3. März 1908.)