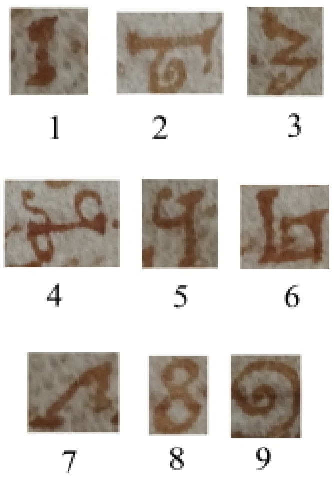
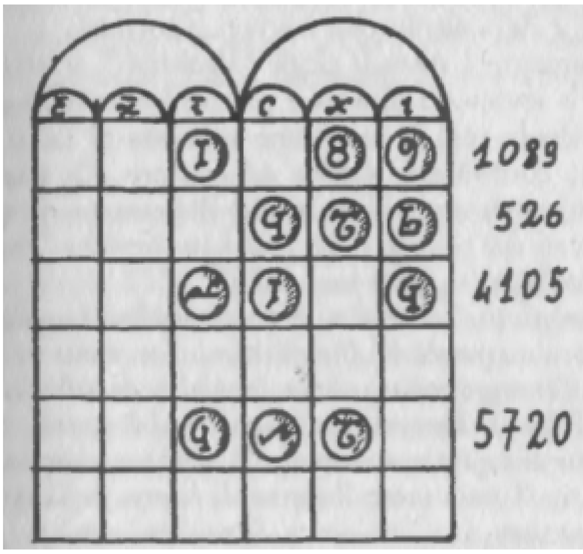
USO DELLE FRAZIONI ROMANE
NEI CALCOLI DEI GERBERTISTI

MARIAIRENE GUAGNINI
(irene.guagnini@alice.it)

Gerberto d'Aurillac (945 circa – 1003) introdusse per primo nell'Occidente cristiano i nove numerali arabi, la rappresentazione decimale posizionale dei numeri e le relative tecniche di calcolo indo-arabe, dopo essere venuto in contatto con la scienza araba durante un soggiorno in Spagna. La *rappresentazione dei numeri* avveniva su un nuovo tipo di abaco[1], suddiviso in colonne recanti le intestazioni di unità, decine, centinaia ecc., in cui le cifre erano rappresentate mediante gettoni recanti il simbolo corrispondente in notazione araba (o greca o, talvolta, con scrittura latina[2]). Tuttavia la mancanza di un simbolo per lo zero, che veniva risolta da Gerberto lasciando vuota la colonna corrispondente dell'abaco, *non* permetteva la *scrittura dei numeri* e infatti Gerberto e coloro che proseguirono i suoi studi matematici (detti Gerbertisti) scrissero sempre i numeri in notazione latina. Tuttavia la rappresentazione dei numeri sull'abaco mediante gettoni produsse un grande progresso nello svolgimeno dei calcoli, perché permise ai Gerbertisti di utilizzare le tecniche di calcolo indo-arabe, che sfruttano la rappresentazione decimale posizionale.



Le cifre rappresentate sui gettoni



La rappresentazione dei numeri sull'abaco

Per quanto riguarda le frazioni, Gerberto e i suoi seguaci, così come gli studiosi medievali dei secoli precedenti, continuarono a usare le once e le minuzie, cioè le frazioni degli antichi Romani. Esse corrispondevano a particolari suddivisioni dell'unità, legate ai valori delle monete e alle misure di pesi, lunghezze, aree, volumi. Per queste frazioni venivano utilizzati simboli e regole di calcolo completamente diversi da quelle attuali e, nel Medioevo, il loro studio era considerato particolarmente difficile, anche se necessario per le applicazioni in Geometria, Musica e Astronomia.

E' interessante esaminare quello che i Gerbertisti scrissero riguardo le once e le minuzie (in un periodo che spazia dalla fine del X al XII secolo), perché nei loro scritti, per la prima volta, vennero

1 Vedere GUAGNINI, *L'abaco di Gerberto d'Aurillac*, pp. 1-3.
2 Vedere, per esempio, immagine a p. 19.

descritti nel dettaglio i procedimenti di calcolo.
Più nel generale, gli scritti dei Gerbertisti rivestono un interesse storico perché mostrano lo stato dell'arte dell'aritmetica nei due secoli immediatamente precedenti la comparsa del *Liber abaci* di Fibonacci.
In un altro scritto si sono esaminate nel dettaglio varie tecniche di calcolo usate dai Gerbertisti, limitandosi all'ambito dei numeri naturali (privati dello zero)[3]. Qui completo la ricerca presentando le tecniche di calcolo specifiche per le once e le minuzie.

Ho cercato, nel limite delle mie possibilità, di non sovrapporre nozioni 'moderne' ai concetti dei secoli X-XII. In particolare nel testo ho indicato le frazioni romane a volte con i loro nomi, a volte con i simboli attuali, mantenendo però il senso originale[4]. Invece, per non appesantire inutilmente l'esposizione, nelle spiegazioni compaiono i simboli +, – , ×, : , = (posteriori di vari secoli).

Vengono presentati calcoli effettivamente svolti dai Gerbertisti[5] nei loro trattati sul computo, spesso anche con l'aiuto dei testi originali[6]. Utilizzerò prevalentemente il quarto libro del *Liber abaci* di Bernelino, allievo di Gerberto, e il *De minutiis* di un abacista anonimo, che ebbero entrambi una larga diffusione, oltre ad alcuni esempi proposti da Oddone, Gerlando, Turchillo e da un altro autore anonimo[7].

LE ONCE - DEFINIZIONI E PRIME PROPRIETA'

> Unum ergo, quicquid illud sit, sive pes sive libra, si per XII divido, duodecimam unam unciam, duas sextantem, tres quadrantem, quatuor trientem, quinque quincuncem, sex semissem, septem septuncem, octo bisse, novem dodrantem, decem dextantem, undecim deuncem, duodecim assem nomino[8].

Nel testo precedente vengono presentate le once. Un'oncia, che corrisponde alla dodicesima parte dell'unità. In questo contesto l'unità è chiamata asse, quindi un'oncia corrisponde alla dodicesima parte dell'asse.

I multipli dell'oncia hanno ognuno un proprio nome, che richiama una proprietà matematica della frazione stessa.

> Sextans dicitur quasi assis sexta; nam duabus unciis constat[9].

Due dodicesimi dell'asse, cioè due once si chiama *sestante* perché è la sesta parte dell'asse.

> Quadrans dicitur quasi assis quarta; nam tribus unciis constat[10].

Tre dodicesimi dell'asse, cioè tre once, si chiama *quadrante* perché è la quarta parte dell'asse.

3 Vedere Guagnini, *L'abaco di Gerberto*, pp. 5-15.
4 Per esempio, la metà dell'unità verrà indicata o con il nome di semiasse (traduzione del termine latino *semis*) o come 6/12 (6 once, cioè 6 dodicesimi dell'unità).
5 Non ricostruiti a posteriori da matematici moderni; vedere, a questo riguardo, alcuni esempi in MAHER, MAKOWSKY, *Literary Evidence for Roman Arithmetic with Fractions*, pp. 380-383.
6 L'unica eccezione è il secondo esempio a p. 19, di mia invenzione, ma svolto con la tecnica proposta da Bernelino.
7 I testi completi sono facilmente reperibili in internet, vedere sitografia.
8 Abacista anonimo, *De minutiis*, in BUBNOV, *Gerberti Opera Mathematica (972-1003)*, p. 229. “Se divido per 12 un'unità qualsiasi, un piede o una libbra, chiamo la dodicesima parte *oncia*, due [dodicesimi] *sestante*, tre [dodicesimi] *quadrante*, quattro [dodicesimi] *triente*, cinque [dodicesimi] *quinconce*, sei [dodicesimi] *semiasse*, sette [dodicesimi] *settonce,* otto [dodicesimi] *bisse*, nove [dodicesimi] *dodrante*, dieci [dodicesimi] *destante*, undici [dodicesimi] *deoncia*, dodici [dodicesimi] *asse*.”
9 Bernelino, *Liber abaci*, in OLLERIS, *Oeuvres de Gerbert-pape sous le nom de Sylvestre II*, p. 388. “Si chiama sestante la sesta parte dell'asse; infatti è formato da due once.”
10 Ivi, p. 388. “Si chiama quadrante la quarta parte dell'asse; infatti è formato da tre once.”

Triens dicitur quasi assis tertia; nam IIII unciis constat[11].

Quattro dodicesimi dell'asse, cioè tre once, si chiama *triente* perché è la terza parte dell'asse.

Quincunx dicitur quasi quinque unciis consta[12].

Cinque dodicesimi dell'asse si chiama *quinconce* perché è formato da cinque once.

Semis dicitur quasi medietas assis; nam VI unciis constat[13].

Sei dodicesimi dell'asse, cioè sei once, si chiama *semiasse* perché è la metà dell'asse.

Septunx dicitur, quasi septem unciis constans[14].

Sette dodicesimi dell'asse si chiama *settonce* perché è formato da sette once.

Bisse dicitur quasi bis triens, vel triente demptus; VIII enim unciis constat[15].

Otto dodicesimi dell'asse, cioè otto once, si chiama *bisse*, perché corrisponde al doppio del triente. Si ottiene anche sottraendo all'asse un triente.

Dodrans dicitur quasi quadrante demptus. Nam tribus sublatis, VIIII unciis constat[16].

Nove dodicesimi dell'asse, cioè l'asse con tolte tre once, si chiama *dodrante*, perché di ottiene sottraendo dall'asse un quadrante.

Dextans vel decunx dicitur quod X unciis stet vel constet[17].

Dieci dodicesimi dell'asse si chiama *destante* perché è formato da dieci once e quindi si ottiene sottraendo dall'asse un sestante.

Deunx dicitur quod uncia minuitur; nam ab asse uncia separatur[18].

Undici dodicesimi dell'asse si chiama *deoncia* perché di ottiene sottraendo dall'asse un'oncia.

Sescuncia dicitur quasi uncia et semuncia[19].

A queste frazioni veniva aggiunta anche la *sesconcia*, che corrisponde a un'oncia e mezzo ed è quindi un ottavo dell'asse.

Nella tabella successiva sono indicate le principali proprietà delle once e i loro simboli. In particolare nella seconda e terza colonna si trovano alcuni dei simboli risalenti all'epoca romana, mentre nella quarta colonna compaiono quelli utilizzati in epoca medioevale.

Osservazione

Il simbolo del semiasse compare all'interno di quello del sesterzio romano: HS (abbreviazione di IIS). Infatti un sesterzio (*semistertius*[20]) inizialmente corripondeva a IIS = 2 + 6/12 = 2 assi e mezzo.

11 Ivi, p. 388. “Si chiama triente la terza parte dell'asse; infatti è formata da quattro once.”
12 Ivi, p. 388. “Si chiama quinconce perché è formato da cinque once.”
13 Ivi, p. 388. “La metà dell'asse si chiama semiasse; infatti è formato da sei once.”
14 Ivi, p. 388. “Si chiama settonce perché è formato da sette once.”
15 Ivi, p. 387. “Si chiama bisse il doppio del triente, [l'asse] tolto un triente; infatti è formato da otto once.”
16 Ivi, p. 387. “Si chiama dodrante [l'asse con] sottratto un quadrante. Infatti, tolte tre [once dall'asse], è formato da nove once.”
17 Ivi, p. 387. “Si chiama destante o deconce perché è composto e formato da dieci once.
18 Ivi, p. 387. “Si chiama deoncia [l'asse con] sottratto un'oncia; infatti un'oncia lo separa dall'asse.”
19 Ivi, p. 387. “Si chiama sesconcia la somma di un'oncia e una semioncia”.
20 “un semiasse nel terzo [asse]”

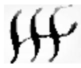
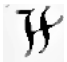
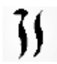
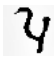
				asse	oncia	scrupolo	chalco
Asse	|	|		1	12	288	2304
Deoncia	S = = -	S : : ·		11/12 ; 1/2 +1/3 + 1/12	11	264	2112
Destante	S = =	S : :		10/12; 1/2 + 1/3	10	240	1920
Dodrante	S = -	S : ·		9 /12; 1/2 + 1/4	9	216	1728
Bisse	S =	S :		8/12; 1/2+ 1/6	8	192	1536
Settonce	S -	S ·		7/12; 1/3 + 1/4	7	168	1344
Semiasse	S	S		6/12; 1/2	6	144	1152
Quinconce	= = -	: : ·		5/12; 1/4+ 1/6	5	120	960
Triente	= =	: :		4/12; 1/3	4	96	768
Quadrante	= -	: ·		3/12; 1/4	3	72	576
Sestante	=	:		2/12; 1/6	2	48	384
Sesconcia				1/12 + 1/24; 1/8	1+ metà	36	288
Oncia	-	·		1/12	1	24	192

Tavola 1

LE MINUZIE

> Unciae medietas semuncia dicitur, tertia duella, quarta sicilicus, sexta sextula, octava dragma, duodecima dimitia sextula, vigesima quarta scripulus, quadragesima octava obolus, nonagesima sexta cerates, centesima novagesima secunda calcus[21].

21 Abacista anonimo, *De minutiis*, p. 235. "La metà dell'oncia si chiama semioncia, la terza parte duella, la quarta sicilico, la sesta sestula, l'ottava dramma, la dodicesima metà della sestula [emisecla N.d.T], la ventiquattresima

All'interno delle frazioni romane, un'oncia veniva suddivisa in ulteriori parti uguali. Ognuna delle frazioni così generate aveva un proprio simbolo e un proprio nome, che vengono presentati nella tabella sottostante, insieme alle loro principali equivalenze. Vengono indicate, tra parentesi, anche due frazioni che compaiono raramente, bissiliqua e tremisse.

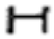
		asse	oncia	scrupolo	chalco
Semioncia		1/24	metà	12	96
Duella		1/36	un terzo	8	64
Sicilico/siclo		1/48	un quarto	6	48
Sestula		1/72	un sesto	4	32
Dramma		1/96	un ottavo	3	24
Emisescla		1/144	12ª parte	2	16
(Tremisse		1/216	18ª parte	1 + 1/3	10 +2/3)
Scrupolo		1/288	24ª parte	1	8
Obolo		1/576	48ª parte	metà	4
(Bissiliqua		1/864	72ª parte	un terzo	2 + 2/3)
Cerate		1/1152	96ª parte	un quarto	2
Siliqua[22]		1/1728	144ª parte	un sesto	1+1/3
Chalco		1/2304	192ª parte	un ottavo	1

Tavola 2

scrupolo, la quarantottesima obolo, la novantaseisima cerate, la centonovantaduesima chalco."

22 La siliqua era una moneta romana coniata per la prima volta da Costantino nell'anno 323, il cui peso era 1/6 di quello dello scrupolo. La frazione corripondente venne poi aggiunta a quelle utilizzate in precedenza.

● Le once e le minuzie corrispondono a particolari frazioni unitarie, quelle del tipo $1/n$ con n appartenente all'insieme{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 36, 48, 72, 96, 144, 288, 576, 1152, 1728, 2304}. I denominatori sono quindi del tipo $2^n \times 3^m$ e, in particolare, fra essi compaiono 12, 12^2 e 12^3, rispettivamente nell'oncia, nell'emisescla e nel chalco.

● La minore delle frazioni romane è il chalco, ma, se necessario, per esprimere i risultati finali di calcoli erano utilizzate anche parti intere di minuzie come, per esempio, metà del chalco, la terza parte del chalco, o anche la terza parte del cerate (vedere a p. 9).

● Addizionando in maniera opportuna due o più frazioni unitarie si possono ottenere altre frazioni (compresi i multipli dell'oncia non riducibili ad un'unica frazione unitaria)[23].

Di seguito vengono riportati alcuni esempi, presi quasi tutti da testi originali di epoca romana o medievale[24].

Parte dimitia et tertia (A)	Un mezzo e un terzo	1/2 + 1/3	5/6 destante
Parte dimitia et quarta (A)	Un mezzo e un quarto	1/2 +1/4	3/4 dodrante
Parte dimitia et sexta (A)	Un mezzo e un sesto	1/2 + 1/6	2/3 bisse
Trientemtem [et] quadrantem (B)	Un terzo e un quarto	1/3 + 1/4	7/12 settonce
/	/	1/4 + 1/6 1/12 + 1/3	5/12 quinconce
Parte dimitia et tertia et duodecima (A)	Un mezzo e un terzo e un dodicesimo	1/2 + 1/3 + 1/12	11/12 deoncia
Uncia et semuncia (B)	Un'oncia e una semioncia	1/12 + 1/24	1/8 sesconcia
Parte tertia et vigesimaquarta (A)	Un terzo e un ventiquattresimo	1/3 + 1/24	3/8
Parte dimitia et quarta et octava (A)	Un mezzo e un quarto e un ottavo	1/2 + 1/4 + 1/8	7/8
[Simboli] (D)	Una semioncia e un sicilico	1/24 + 1/48	1/16
Parte quinta et decima (A)	Un quinto e un decimo	1/5 + 1/10	3/10
[25]		22/7	Appross. di π
XXV et quinque septimas[26]	25 e cinque settimi	25 + 5/7	

● Gli esempi delle ultime tre righe mostrano che venivano prese in considerazione anche parti dell'unità che non si potevano esprimere combinando fra loro once e minuzie. In particolare il numero 22/7 (anche nella forma 3 + 1/7) era utilizzato in epoca romana e nel Medioevo per approssimare il valore di π.

A tale riguardo Gerberto d'Aurillac scrive:

> Si pluribus in misurando partibus indiget diligens [...] seu per minutias usitatas sive intellectuales multimodis habere poterit[27].

23 Particolari frazioni unitarie erano già utilizzate nell'antico Egizio, anche per scomporre frazioni proprie. Per approfondimenti sulle frazioni egizie e sull'utilizzo delle frazioni unitarie da parte di Fibonacci vedere: GHIONE, *La disgregazione e le frazioni egizie. Scomposizione di una frazione (propria) in frazioni unitarie.*

24 Esempi tratti da: (A) DE LAMA, *Tavola alimentaria Velejate*, pp. 41-42; (B) Bernelino, *Liber abaci*, (D) Vittorio d'Aquitania, *Victorii Calculus* (vedere figg. 2- 3 p. 9). Per il testo del *Victorii Calculus* vedere nota 36.

25 "Diametrum, exempli gratia XIV, ducas vigesime bis, fient CCCVIII; sumas partem septimam, fit XLIV, quod es circulus". *Geometria incerti auctoris* in Bubnov, *Gerberti Opera Mathematica*, p. 356. "Moltiplica il diametro, per esempio 14, per 22, risulterà 308; prendi la settima parte, risulta 44, che è la circonferenza".

26 Approssimazione (poco accurata) della radice quadrata di 675. Vedere Bubnov, *Gerberti Opera Mathematica*, p. 44.

27 Gerberto, *Geometria* in Bubnov, *Gerberti Opera Mathematica*, p. 64. "Se tu diligente, mentre misuri, hai la necessità di diverse parti qualsiasi [cioè di frazioni qualsiasi N.d.T.], potrai adoperare diversamente sia le minuzie usuali che quelle che sorgono alla mente".

Gerberto afferma esplicitamente che *in geometria* si possono usare sia le frazioni romane[28] sia le *altre frazioni* che "sorgono alla mente". Queste ultime erano scritte per esteso[29] e, a differenza delle frazioni romane, non avevano un proprio simbolo né furono oggetto di studi particolari riguardo ai calcoli aritmetici.

INTRODUZIONE AI CALCOLI CON LE FRAZIONI ROMANE

I procedimenti di calcolo con le frazioni oggi in uso, che hanno il pregio della semplicità e della generalità, si basano sulla rappresentazione delle frazioni come rapporto fra numeratore e denominatore[30]. Non si possono quindi applicare alle once e alle minuzie, che hanno una rappresentazione di tutt'altro tipo.

Per operare con le frazioni romane era necessario fare ricorso a tavole di calcoli molto estese, che consistevano in lunghi elenchi di risultati di calcoli già svolti. A queste si affiancavano anche tavole di conversione di once e minuzie.

Non stupisce quindi che, nell'Alto Medioevo, l'apprendimento dell'aritmetica e, in particolare, delle frazioni fosse molto difficoltoso, come testimonia, ad esempio, Sant'Aldelmo di Malmesbury (VII sec.), riferendosi a studi compiuti in età adulta:

> De ratione vero calculationis quid commemorandum, cum tantae supputationis imminens desperatio colla mentis compresserit, ut omnes praeteritum lectionis laborem parvi penderem [...] Tandem superna gratia fretus difficillima rerum argumenta et calculi supputationes, quas partes numeri appellant, lectionis instantia repperi[31].

Su come venissero usate le tavole di calcolo sia in epoca romana che in epoca alto medievale conosciamo pochissimo perché allora l'arte dei calcoli era trasmessa direttamente da maestro ad allievo. Successivamente, a partire dalla fine del X secolo, i Gerbertisti scrissero dei manuali riguardanti l'aritmetica pratica, da cui possiamo trarre molte informazioni sul loro modo di operare con interi e con le frazioni[32]. In particolare Bernelino, allievo di Gerberto, presentò in un suo manuale, il *Liber abaci*, in modo organico e completo, le conoscenze aritmetiche insegnate dal suo maestro. Nell'introduzione della quarta parte del *Liber abaci*, interamente dedicata ai calcoli con le frazioni romane, troviamo:

> Nunc itaque ad unciarum minuntiarumque tractatum veniamus, in quo si quid me veritas praeterierit minime mireris, cum [...] nullius praeter Victorii opus habeam exemplar, qui, dum brevis studuit fieri, factus est obscurissimus[33].

Bernellino cita l'uso delle tavole di Vittorio d'Aquitania che giudica di difficile comprensione perché troppo sintetiche, ma che tuttavia furono usate per vari secoli.

---

28 Gerlando le indica come *latini minucias* (frazioni latine), evidentemente per distinguerle dalle altre frazioni; GERLANDO, *Trattato sull'abaco*, in *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* T X, p. 604.

29 Ad esempio, 5/7 era indicato con *quinque septimae* o V *septimae* (" cinque settime [parti]).

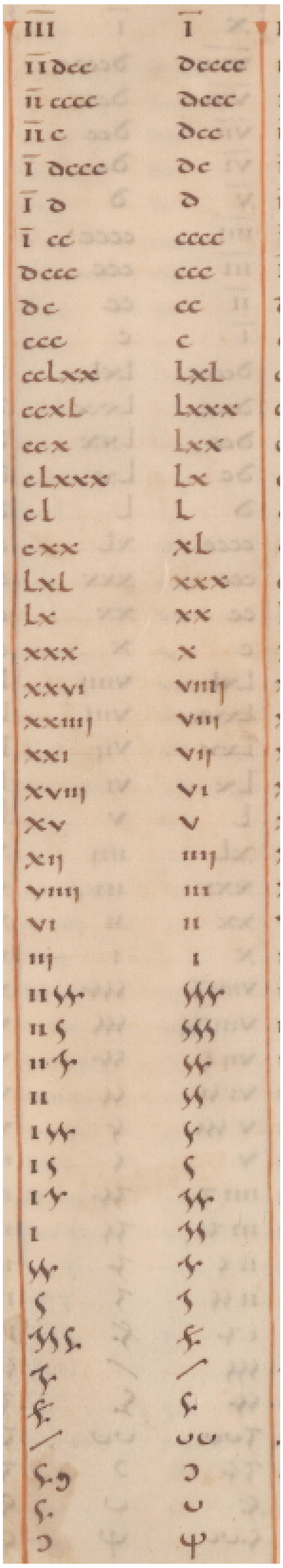
30 L'introduzione nell'Occidente cristiano della rappresentazione delle frazioni mediante numeratore e denominatore avvenne nei primi anni del XIII secolo ad opera di Fibonacci, vedere FIBONACCI, *Liber abaci*, capitolo quinto.

31 ALDELMO, *Epistola ad Leutherium*, p. 477. "Che dire della scienza del calcolo che ricordo? La disperazione quasi raggiunta per un così grande numero di calcoli pesò sulla mia mente tanto che le precedenti fatiche di studio sembrano insignificanti. […] Infine, confidando nella grazia divina e con uno studio assiduo, venni a conoscere i più difficili dei principi naturali, quelle che si chiamano parti dei numeri [cioè frazioni N.d.T.] e i loro calcoli".

32 Fibonacci sembra riferirsi alle loro tecniche di calcolo quando, nella parte iniziale del *Liber abaci*, cita "l'algoritmo e gli archi di Pitagora"; vedere FIBONACCI, *Liber abaci*, capitolo primo, I.3.

33 Bernelino, *Liber abaci*, p. 386. "Ora quindi veniamo al trattato delle once e delle minuzie; non ti meravigliare minimamente se in esso la verità mi sfuggirà, poiché […] non ho nessun esempio oltre all'opera di Vittorio che, a causa della ricerca della brevità, è diventata pressoché incomprensibile".

LE TAVOLE DI CALCOLO DI VITTORIO D'AQUITANIA



3000	1000
2700	900
2400	800
2100	700
1800	600
1500	500
1200	400
?	300
600	200
300	100
270	90
240	80
210	70
180	60
150	50
120	40
90	30
60	20
30	10
27	9
24	8
21	7
18	6
15	5
12	4
9	3
6	2
3	1
12 + 9/12	11/12
2 + 6/12	10/12
2 + 3/12	9/12
2	8/12
1 + 9/12	7/12
1 + 6/12	6/12
1+ 3/12	5/12
1	4/12
9/12	3/12
6/12	2/12
4/12 + 1/24	1/12 + 1/24
3/12	1/12
1/12 + 1/24	1/24
1/12	1/36
1/24 + 1/48	1/48
1/24	1/72
1/48	1/144

Le più antiche tavole di calcolo a noi pervenute contenenti frazioni romane sono quelle attribuite a Vittorio d'Aquitania, indicate generalmente con il nome di *Victorii calculus*. Risalgono al quinto secolo ed erano ancora utilizzate nei secoli IX-XII.

Il *Victorii Calculus* presenta 49 coppie di colonne. Nella figura a lato vediamo la seconda di queste coppie e la sua traduzione. Nella colonna di destra c'è una sequenza di numeri decrescenti comprendenti le centinaia da mille a cento, le decine da 90 a 10, le unità da 9 a 1, le once e varie minuzie, in quella a sinistra i loro valori moltiplicati per 3[34].

La sequenza di numeri moltiplicandi è ripetuta, a destra, in tutte le 49 coppie, mentre in ciascuna delle colonne di sinistra si trovano valori di quei numeri moltiplicati per 2, per 3 e per tutti i seguenti numeri interi fino a 50.

Le tavole sono precedute da un'introduzione in cui Vittorio presenta le frazioni romane e spiega la struttura delle tavole. Queste spiegazioni furono giudicate tuttavia di difficile comprensione perché troppo sintetiche, come testimoniano Bernelino (vedere citazione alla pagina precedente) e Abbone di Fleury[35].

Alcune osservazioni

Con l'uso di queste tavole e applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione è possibile moltiplicare rapidamente numeri interi e misti per numeri interi da 2 a 5000.

Mancano tuttavia i prodotti di frazioni e calcoli riferiti alle altre operazioni aritmetiche.

34 Bern, Burgerbibliothek, cod. 250, fol. 2r, col. 2.

35 Abbone di Fleury, *Excerpta in calculum Victorii commentario*, in Bubnov, *Gerberti Opera Math.*, pp. 197-203.

AGGIUNTE ALLE TAVOLE DI VITTORIO (SEC. VIII-IX)

A partire dal secolo IX, e quindi ben prima dell'epoca di Gerberto e dei Gerbertisti, si trovano nei manoscritti le tavole di Vittorio d'Aquitania arricchite da nuovi calcoli[36].

Per quanto riguarda le frazioni romane in questa nuova parte troviamo somme di frazioni, differenze di frazioni, quadrati numeri misti (vedere esempi nelle figg. 1-3) e altri calcoli.

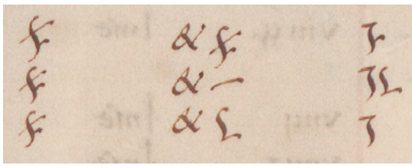


Fig. 1[37]

(1/12 + 1/24) + (1/12 + 1/24) = 3/12

(1/12 + 1/24) + 1/12 = 2/12 + 1/24

(1/12 + 1/24) + 1/24 = 2/12

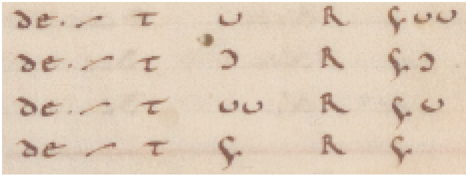


Fig. 2[38]

1/12 – 1/72 = 1/24 + 1/36
1/12 – 1/48 = 1/24 + 1/48
1/12 – 1/36 = 1/24 + 1/72
1/12 – 1/24 = 1/24

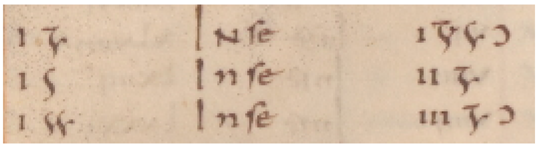


Fig. 3[39]

$(1 + 3/12)^2 = 1 + 3/12 + 1/24 + 1/48$
$(1 + 6/12)^2 = 2 + 3/12$
$(1 + 9/12)^2 = 3 + 3/12 + 1/48$

Il nuovo testo presenta anche alcune giustificazioni dei risultati, ma le spiegazioni risultano di difficile comprensione, come possiamo vedere nel seguente esempio.

Esaminiano il commento relativo al calcolo della seconda riga della fig. 3 (nella trascrizione del testo i simboli sono stati sostituiti dai corrispondenti termini italiani).

> In secundo loco dicis *ASSE SEMIASSE* in se *ASSE ASSE QUADRANTE*. Tolle [...] prioris numeri plenitudinem de subsequenti, id est *ASSE SEMIASSE*, remanet *SEMIASSE QUADRANTE*. Ista vice *SEMIASSE* mitte super *ASSE*, id est ipsius medietatem, *QUADRANTE* autem super *SEMIASSE*, illius similiter medietatem[40].

Il testo sembra affermare che $(1 + 1/2) \times (1 + 1/2) = 2 + 1/4$ perché $2 + 1/4 - (1 + 1/2) = 1/2 + 1/4 =$ $= 1 : 2 + 1/2 : 2$.

Tuttavia questo, più che un calcolo diretto di $(1 + 1/2) \times (1 + 1/2)$, sembra la verifica del suo risultato, in quanto

$(1 + 1/n) \times (1 + 1/n) = (1 + 1/n) + (1 + 1/n) \times 1/n \Leftrightarrow (1 + 1/n) \times (1 + 1/n) - (1 + 1/n) = 1 : n + 1/n : n.$

36 Il testo latino si trova in FRIEDLEIN, *Der Calcus des Victorius*, pp. 58-72 e tavole finali. Per altre informazioni sulla nuova parte aggiuntiva vedere anche PANIAGUA, *Polemio Silvio y los additamenta al Calculus de Victorio de Aquitania*, pp.152-153.

37 Bern, Burgerbibliothek, cod. 250, fol. 8r, col. 2.

38 Ivi, fol. 7r, col. 3.

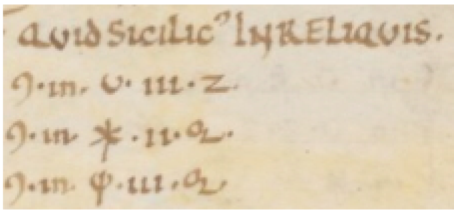
39 Ivi, fol. 8v, col. 2.

40 "Nella seconda riga si dice che 1 + 1/2 moltiplicato per se stesso è 2 + 1/4. Togli per intero il primo numero dal seguente, cioè 1 + 1/2, rimane 1/2 + 1/4. Metti questo semiasse sopra l'asse, è la sua metà, e anche il quadrante sopra il semiasse, è similmente la sua metà".

LE NUOVE TAVOLE DEI GERBERTISTI

Bernellino e altri Gerbertisti completarono le tabelle precedenti elencando *tutti* i prodotti di coppie di frazioni romane.

Alcuni esempi:



[41]

Sicilico moltiplicato per le minuzie minori di esso

1/48 × 1/72 = (1/1152)/3

1/48 × 1/96 = (1/2304)/2

1/48 × 1/144 =(1/2304)/3

De sicilico.	Sicilico
Sicilicum in duellam tertia oboli.	1/48 × 1/36 = (1/576)/3
Sicilicus in semunciam cerates.	1/48 × 1/24 = 1/1152
[…]	[…]
Sicilicus in quadrantem scripulus et obolus[42].	1/48 × 3/12 = 1/288 + 1/576

COME CALCOLARE IL PRODOTTO DI DUE FRAZIONI ROMANE

I Gerbertisti esplicitarono anche i procedimenti di calcolo.

Il primo che lo fece fu Bernelino, che nel *Liber abaci* presentò una sequenza di esempi-guida riguardanti la moltiplicazione di once e minuzie. I procedimenti sono di vario tipo a seconda dei casi esaminati e ovviamente molto diversi dal procedimento attuale, che si basa sulla manipolazione dei numeratori e dei denominatori dei due fattori.

Bernelino enuncia innanzitutto la **regola fondamentale della moltiplicazione di frazioni**: *quando si moltiplica un'oncia o una minuzia per una qualsiasi altra oncia o minuzia, il moltiplicando viene modificato come il moltiplicatore modifica l'asse*[43].

Per esempio, se si moltiplica una quantità (un'oncia o una minuzia) per un'oncia, risulta la parte dodicesima di tale quantità perché un'oncia è la dodicesima parte dell'asse; se si moltiplica per una deoncia, alla quantità iniziale viene sottratto un dodicesimo del suo valore, perché una deoncia sottrae un dodicesimo all'asse.

Bernellino affronta poi vari casi[44].

Primo esempio.

> Utpote quæritur quod semis in se fit, quadrans respondebitur; nam sicut semis assis est medietas sic si sua requiratur quadrans [respondebitur]. [...] facilius per numeros demonstratur hoc modo: quoniam semis est medietas assis, binarium et semissem pari comparatione adime eorum medietas item, hoc est quadrantem et unitatem, quæ cum amplius nec secundare nec tertiare possit, ducendi finis occurrit. Est igitur, ut dictum est, semis in se quadrans[45].

---

41 London, British Library, Add MS 17808, fol. 71v, col. 2.

42 Abacista anonimo, *De minutiis*, p. 237. “Sul sicilico. Sicilico per duella, terza parte dell'obolo. Sicilico per semioncia, cerate. […] Sicilico per quadrante, scrupolo e obolo”.

43 Bernelino, *Liber abaci*, p. 390.

44 Ne riporto solo alcuni. Tutti gli esempi di Bernelino si trovano in *Bernelino, Liber abaci*, pp. 390-393.

45 Bernelino, *Liber abaci*, p. 390. “Se ci si domanda quanto dà il semiasse moltiplicato per se stesso, si risponde un quadrante; infatti, così come il semiasse è la metà dell'asse, così se si cerca la sua metà si avrà un quadrante. […] si può dimostrare più facilmente con i numeri in questo modo: poiché il semiasse è la metà dell'asse, sostituisci il due e il semiasse con l'uguale rapporto dalle loro metà, cioè il quadrante e l'unità. Questi non si possono più dividere nello

Il risultato del prodotto di un semiasse per un semiasse è un quadrante, perché occorre calcolare la metà della metà dell'asse.

Per raggiungere il risultato, si può anche utilizzare un metodo più generale. Il semiasse (moltiplicatore) è la metà dell'asse, quindi bisogna dividere il primo semiasse per 2. Questo viene fatto applicando la proprietà invariantiva della divisione e dividendo i due termini per 2:

semiasse × semiasse = semiasse : 2 = quadrante : 1 = quadrante

[6/12 × 1/2 = 6/12 : 2 = 3/12 : 1 = 3/12]

Secondo esempio.

Il procedimento dell'esempio precedente si può applicare anche alle minuzie. Calcoliamo il prodotto di semioncia per semioncia (cioè 1/24 × 1/24).

> Si semuncia in se ducatur, cum ipsa sit assis XXIIII pars, ejus XXIIII, hoc est ololum respondeas. Hoc autem numerorum ratione tali cadit ordine. Quia semuncia vicesima quarta est assis, XXIIII et semunciam pari comparatione adime. Eorum medietates iterum, hoc est XII et sicilicum; rursus horum medietatem, hoc est VI et dragmam; horum rursus tertias, hoc est ii et scripulus, quia dragma in duo non scinditur æqua. Hos iterum secunda, hoc est unum et obolum. Vide ergo quia eadem est proportio unitatis ad obolum quota fuit vicesima quarta ad semunciam.[46]

Poiché la semioncia è la 24ª parte dell'asse, la semioncia (moltiplicatrice) divide per 24 la semioncia moltiplicanda. Sfruttando opportunemente le relazioni fra le minuzie (tabella 2) si ottiene

semioncia × semioncia = semioncia : 24 = 96 chalchi : 24 = 4 chalchi : 1 = 4 chalchi = obolo

(ossia 1/24 × 1/24 = 1/24 : 24 = 96 × 1/2304 : 24 = 4 × 1/2304 : 1 = 1/ 576)

Viene proposto anche un altro procedimento, simile a quello della seconda parte del primo esempio.

Semioncia : 24 ; dividiamo i due termini per 2 e otteniamo sicilico : 12; dividiamo ancora i due termini per 2 e otteniamo dramma : 6; poiché non possiamo dividere la dramma per 2, dividiamo per 3 e otteniamo scrupolo : 2; dividiamo ancora per 2 e troviamo infine obolo : 1. Si ottiene così:

semioncia × semioncia = semioncia : 24 = sicilico : 12 =

= dramma : 6 = scrupolo : 2 = obolo : 1 = obolo

(cioè 1/24 : 24 = 1/48 : 12 = 1/96 : 6 = 1/288 : 2 = 1/576 : 1 = 1/576)

Risulta quindi

semioncia × semioncia = obolo

(1/24 × 1/24 = 1/576)

Terzo esempio.

Non sempre si possono applicare i procedimenti precedenti e quindi si introduce un'altra tecnica

---

stesso modo né per due né per tre: la moltiplicazione è finita. E quindi, come detto, il semiasse moltiplicato per se stesso dà un quadrante.”

46 Ivi, p. 390. “Se si moltiplica una semioncia per se stessa, poiché essa è la ventiquattresima parte dell'asse, dai come risposta il suo ventiquattresimo, cioè l'obolo. E ciò si ottiene anche mediante calcoli numerici nel modo seguente. Poiché la semioncia è la ventiquattresima parte dell'asse, sostituisci 24 e semioncia con un uguale rapporto. Le loro metà [sono] 12 e un sicilico, nuovamente le loro metà, 6 e una dramma, poi le loro terze parti, 2 e uno scrupolo, poiché la dramma non si può dividere in due parti uguali. Dividi ancora per 2, si ha 1 e un obolo. Vedi quindi che il rapporto fra l'unità e l'obolo è uguale a quanto era la ventiquattresima parte della semioncia.”

mediante un ulteriore esempio: si propone la ricerca del prodotto di deoncia per deoncia (cioè 11/12 × 11/12).

> XI, namque in integris numeris secundas aut tertias nusquam recipit. Omnis uncia sive minutia, ut superius conclusum est, totam partem illius in qua ducitur quærit quota ipsa est assis; deunx igitur, qui ab asse assis duodecima superatur, si in se ducatur, dextans et emisescla respondebitur. Deunx enim quota pars assis est tota pars est dextans et emisescla deuncis. Et CCXLII tota CCLXIIII parte ab eisdem superantur, quota CCLXIIII CCLXXXVIII parte ab eisdem superantur. Qui CCXLII sumpti per compositam divisionem dextantem faciunt et emisesclam[47].

Non si può applicare subito il procedimento precedente per una deoncia corrisponde a 11 once e 11 non è divisibile né per 2 né per 3. Allora si ricorre agli scrupoli e alla proprietà fondamentale della moltiplicazione di frazioni. Una deoncia (moltiplicanda) è formata da 264 scrupoli[48] e la sua dodicesima parte è 22 scrupoli. Al moltiplicando la deoncia moltiplicatrice toglie quindi 22 scrupoli. Risultano 242 scrupoli.
Occorre però esprimere questo risultato in forma standard, cioè mediante once e minuzie. Un'oncia è formata da 24 scrupoli, quindi dividiamo 242 per 24. Si ottiene 242 = 24 × 10 + 2, quindi 242 scrupoli sono 10 once e 2 scrupoli, pari a un'emisescla.

$$\text{Deoncia} \times \text{deoncia} = 264 \text{ scrupoli} \times \text{deoncia} =$$
$$= (264 - 264/12 \text{ scrupoli}) = 242 \text{ scrupoli} =$$
$$= (24 \times 10 + 2) \text{ scrupoli} = 10 \times 24 \text{ scrupoli} + 2 \text{ scrupoli} =$$
$$= 10 \times \text{oncia} + 2 \text{ scrupoli} = \text{destante} + \text{emisescla}.$$

Quarto esempio.

Si ricorre a un analogo procedimento per calcolare il prodotto di deoncia per destante (cioè 11/12 × 10/12).

> Si deunx in dextantem ducatur, dodrans et sextula respondebitur. Nam deunx quota pars est assis, tota pars etiam est dodrans et sextula dextantis. Et quota CCLXXXVIII parte CCLXIIII superantur, tota CCXL parte CCXX ab eisdem superantur.[49]

Una deoncia equivale a 264 scrupoli. La sua dodicesima parte è 22. Il destante toglie 2 once all'asse, cioè due volte la dodicesima parte. Allora nella moltiplicazione proposta il destante (moltiplicatore) toglie alla deoncia (moltiplicando) due volte la sua dodicesima parte, cioè 2 × 22 = 44 scrupoli. Risultano 220 scrupoli. Per esprimere questo risultato in forma standard, dividiamo 220 per 24. Si ottiene 220 = 9 × 24 + 4, quindi 220 scrupoli sono 9 once e 4 scrupoli.

$$\text{Deoncia} \times \text{destante} = 264 \text{ scrupoli} \times \text{destante} =$$
$$= (264 - 2 \times 264/12 \text{ scrupoli}) = 220 \text{ scrupoli} =$$
$$= (9 \times 24 + 4) \text{ scrupoli} = 9 \times 24 \text{ scrupoli} + 4 \text{ scrupoli} =$$
$$= 9 \times \text{oncia} + 4 \text{ scrupoli} = \text{dodrante} + \text{sestula}.$$

47 Ivi, p. 390. "11, per esempio, non ammette come divisori né 2 né 3. Ogni oncia o minuzia, come si è detto prima, acquista una parte del numero moltiplicando quanto è la sua parte dell'asse, quindi la deoncia, che è superata dall'asse di un dodicesimo di asse, moltiplicata per se stessa, produce un destante e un'emisescla. Infatti il rapporto fra la deoncia e l'asse è uguale a quello di destante più emisescla e deoncia. E il rapporto fra 242 e 264 è uguale a quello di 264 e 288".

48 Deoncia = asse – oncia = 288 scrupoli – 24 scrupoli = 264 scrupoli (vedere tabella 2).

49 Ivi, p. 390. "Se si moltiplica deoncia per destante, si risponde dodrante e sestula. Infatti il rapporto fra deoncia e asse è uguale al rapporto fra la somma di dodrante e sestula e destante . E il rapporto di 288 e 264 è uguale a quello di 240 e 220."

Quinto esempio.

Il procedimento richiede un aggiustamento per calcolare il prodotto di semioncia per settonce (cioè 1/24 × 7/12) , perché il settonce non si può dividere ne' per 2 ne' per 3 (nell'ambito delle minuzie).

> Septunx nusquam recipit secundas aut tertias in integris, ut ita dicam, numeris. Quapropter sic fieri ut prius ducatur in trientem, exinde in quadratem, qui simul juncti perficiunt septuncem. Semuncia igitur in septuncem ducta fit sextula et dragma, vel sicilicus et scripulus. Nam semuncia in trientem ducta, sextula respondebitur. Nunc autem ductam in quadrantem respondebis dragmam.[50]

Poiché settonce = triente + quadrante (7/12 = 4/12 + 3/12) , si ha

semioncia × settonce =	1/24 × 7/12 =
= semioncia × (triente + quadrante) =	= 1/24 × (4/12 + 3/12) =
= semioncia × triente + semioncia × quadrante	= 1/24 × 4/12 + 1/24 × 3/12

I due prodotti si calcolano con i procedimenti visti negli esempi precedenti e si ottengono rispettivamente sestula e dramma, quindi

semioncia × settonce = sestula + dramma

(cioè 1/24 × 7/12 = 1/72 + 1/96)

Una regola per moltiplicare le once.

Troviamo anche, nel testo di Bernelino, una regola pratica per moltiplicare le once fra di loro: si moltiplicano i due numeri delle once e si divide questo prodotto per 12. Si possono ora presentare due casi.

(1) Se la divisione è esatta, il quoziente (quoto) è il numero di once corrispondenti al risultato finale.

Esempio: semiasse × semiasse = 6 once × 6 once ; 6 × 6 = 36 ; 36 : 12 = 3 ; risultato finale 3 once, cioè quadrante.

(2) Se la divisione non è esatta, il quoziente è il numero di once corrispondenti al risultato finale, mentre il resto moltiplicato per 2 corrisponde al numero degli scrupoli.

Esempio:

semiasse × settonce = 6 once × 7 once ;
6 × 7 = 42 ;
42: 12; Q = 3 (once) e R = 6 ;
6 × 2 = 12 scrupoli = semioncia.

Quindi

semiasse × settonce = 3 once + 1 semioncia.

50 Ivi, p. 391. “Il settonce non ammette in alcun modo una divisione per 2 o per 3 all'interno dei numeri cosiddetti interi. Pertanto di deve procedere così, prima si moltiplica per un triente e poi per un quadrante, che sommati danno un settonce. […] Una seminoncia moltiplicata per un settonce dà una sestula e una dramma, o un sicilico e uno scrupolo. Infatti una semioncia per un triente dà una sestula, mentre moltiplicata per un quadrante dà una dramma.”

Nel testo non ci sono giustificazioni. Possiamo giustificare la regola in questo modo

$$n \text{ once} \times m \text{ once} = n/12 \times m/12 = (nm)/144 =$$

$$= (q \times 12 + r)/144 = q/12 + r/144 =$$

$$= q/12 + (2r)/288 = q \text{ once} + 2r \text{ scrupoli.}$$

Prodotto di una frazione per un numero intero

La regola fondamentale viene estesa anche al prodotto di una frazione per un numero intero, come mostra il seguente esempio.

> Si unciam in XXIIII ducas, [...] XXIIII totam partem quota est uncia assis, id est XII, requiras, quae erit binarius[51].

Per calcolare il prodotto di 24 per un'oncia, si segue il ragionamento visto prima per il prodotto di frazioni. Poiché l'oncia è la dodicesima parte dell'asse, si deve calcolare la dodicesima parte di 24, che è 2. Il risultato del prodotto richiesto è quindi 2.

L'autore esplicita anche altri casi. Ad esempio:

> [...] Sextans autem, quia sexta est assis, in quemcumque numerum sive minutiam ducatur, ejusdem, in quem ducitur, sextam requirit; [...] bisse, quia duae tertiae, duas tertias; dodrans, quia tres quartae, tres quartas; dextans, quia decem duodecimae, decem duodecimas; deunx, quia undecim duodecimae, undecim duodecimas[52].

ALTRE TABELLE DI CALCOLO

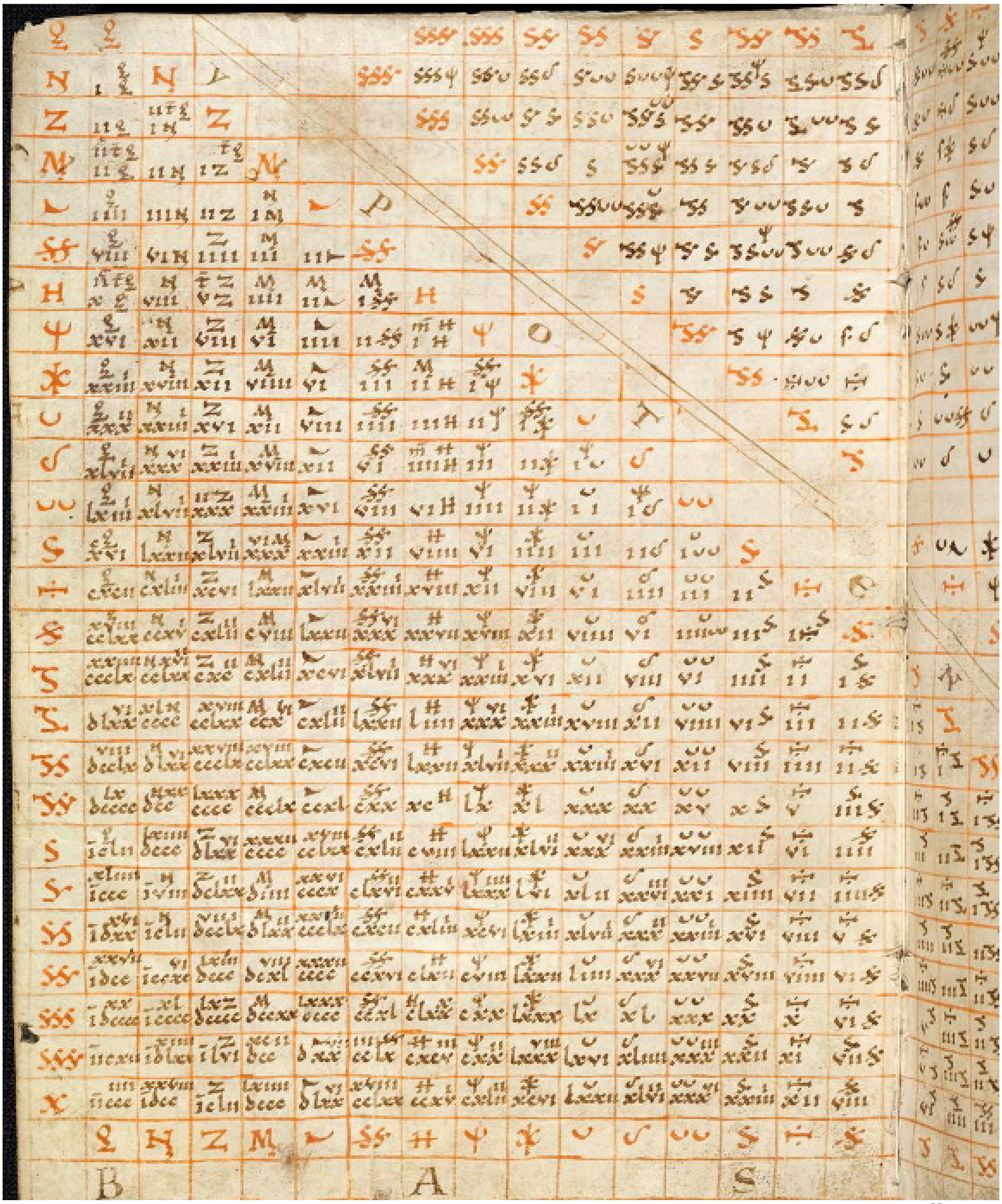
Nonostante le spiegazioni e le regole date nei vari trattati dei Gerbertisti, le tabelle di calcolo con frazioni rimasero ancora in uso nei secoli XI-XII, anzi vennero perfezionate. Ad esempio, in alcuni manoscritti troviamo le tavole di Ermanno di Reichenau[53] che presentano prodotti fra numeri interi e frazioni o i risultati di moltiplicazioni di once e di divisioni di minuzie. (vedere le due figure seguenti[54]). Ovviamente la necessità di utilizzare le tabelle rendeva i calcoli più lunghi e complessi.

51 Abacista anonimo, *De minutiis*, p. 233. "Se moltiplichi un'oncia per 24, cerca la parte di 24 uguale a quella che è l'oncia dell'asse, cioè la dodicesima, che sarà 2."

52 Abacista anonimo, *De minutiis*, p. 233."[...] Inoltre il sestante, che è la sesta parte dell'asse, moltiplicato per qulunque numero o minuzia, richiede la sesta parte della quantità per la quale viene moltiplicato, [...] la bisse, che è due terzi dell'asse, due terzi di essa, , il dodrante, che è tre quarti [dell'asse] , tre quarti; il destante, che è dieci dodicesimi, dieci dodicesimi di essa; la deoncia, che è undici dodicesimi , undici dodicesimi di essa".

53 Hermanus Contractus (1013-1052), in italiano Ermanno il Contratto (a causa di una grave malformazione fisica). Stimato studioso, lasciò molti scritti su varie materie.

54 Karlsruhe, Badische Landesbibliothek, 504, fol. 87v, e fol. 88r, sec. XI-XII.



A sinistra, parte iniziale di una tavola di divisioni di frazioni attribuita a Ermanno di Reichenau[55].
A destra, in alto, parte iniziale di una tavola di moltiplicazione di once (seguito nella pagina successiva).

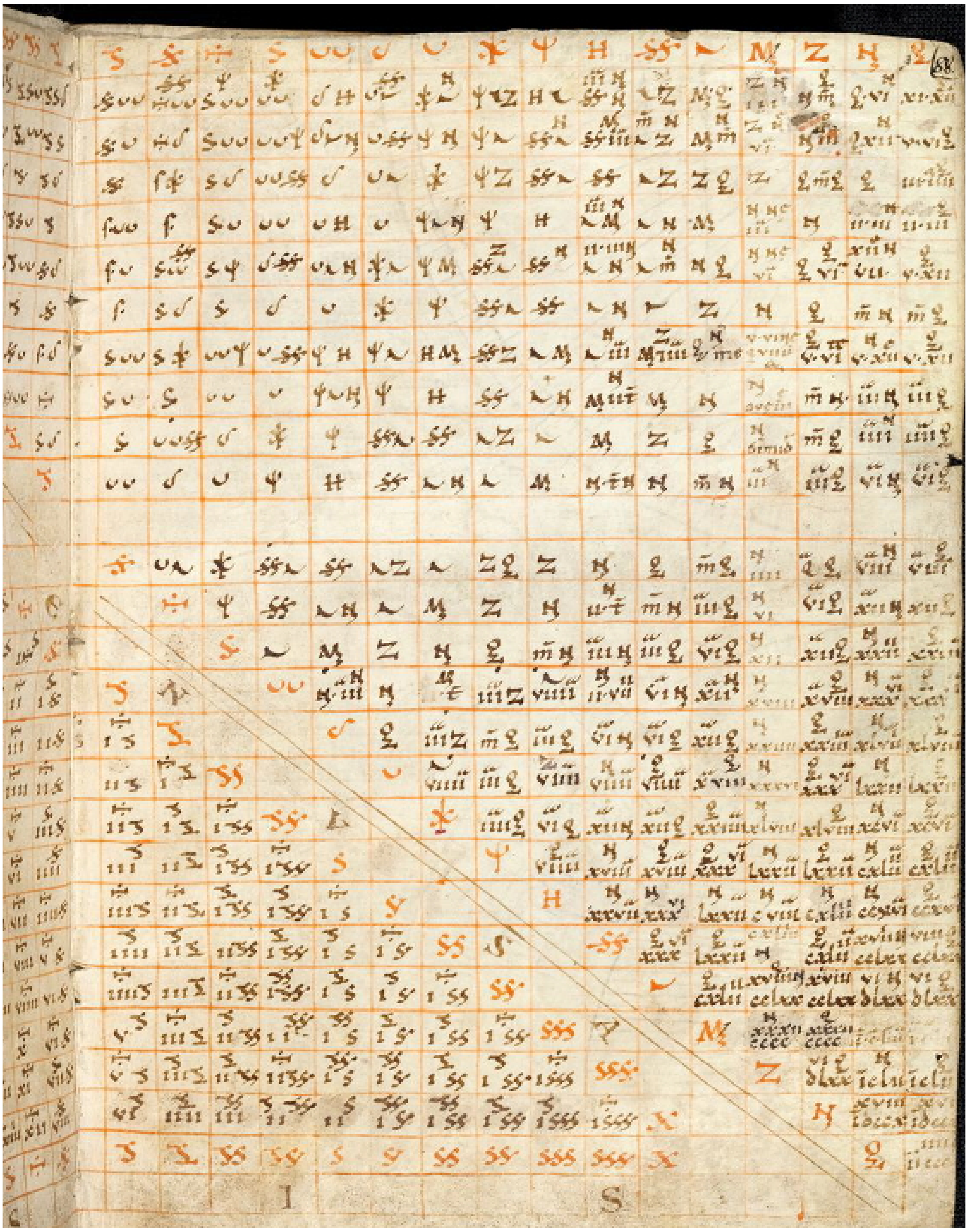
Esempio di trascrizione.

(Sesta riga in alto a sinistra)

Scrupolo : chalco = 8; scrupolo : siliqua = 6; scrupolo : cerate = 4; scrupolo : bissiliqua = 3; scrupolo : obolo = 2.

Oppure 1 scrupolo = 8 chalchi = 6 silique = = 4 cerate = 3 bissiliqua= 2 oboli

55 Può essere interpretata anche come una tavola di equivalenze.



A sinistra, in basso, prosecuzione della tavola di divisioni di frazioni (inizio nella pagina precedente).
A destra, in alto, prosecuzione della tavola di moltiplicazione di frazioni (inizio nella pagina precedente).

CALCOLO DEL PRODOTTO DI NUMERI MISTI CON L'ABACO

La conoscenza dei prodotti di due frazioni o di un numero intero per una frazione permette di svolgere agevolmente i prodotti di numeri misti con l'abaco.

Sull'abaco di Gerberto sono presenti tre colonne per la rappresentazione delle once delle minuzie[56].

> Tres lineas earum minutiarumque dispositioni prædiximus servandas, quarum prima calcos haberet, scripulos secunda, tertia autem uncias[57].

Le colonne sono poste a destra, prima quella delle unità. La prima, da destra, è riservata ai chalchi, la seconda agli scrupoli e la terza alle once[58]. Anche se nei testi dei Gerbertisti non vengono citati, evidentemente c'erano dei gettoni con i simboli delle once e delle minuzie.

Si rappresenta numero moltiplicando nella prima traccia e il numero motiplicatore nella quarta e poi si procede in modo analogo a quello utilizzato per i numeri interi[59].

Esempio.

> XII et dextans per duos asses et semissem hoc modo multiplicentur. Bis unus II, in deceni secundo. Bis II, IIII, in singularis eodem. Bis dextans, as, in singulari secundo; bisse autem in unciarum eodem.[...] Nunc per semissem. Semis in denarium, hoc est in decem asses. Quinarius in singularis secundo. Semis in binarium, hoc est in duos asses; unitas ibidem. Semis in dextantem, quincunx in secundo tramite unciarum[60].

Il procedimento indicato corrisponde alla seguente sequenza:

(12 + destante) × (2 + semiasse) = (10 + 2 + destante) × (2 + semiasse) =

= 10 × 2 + 2 × 2 + destante × 2 + 10 × semiasse + 2 × semiasse + destante × semiasse =

= 20 + 4 + (1 + bisse) + 5 + 1 + quinconce = 31 + 8 once + 5 once = 32 + oncia

X	I	oncia	scrupolo	chalco	
1	2	destante			moltiplicando
2 	 4 1 5 1 	 bisse quinconce			dieci × 2 2 × 2 destante × 2 dieci × semiasse 2 × semiasse destante × semiasse
3	2	oncia			Risultato finale
	2	semiasse			moltiplicatore

Schema della moltiplicazione (12 + destante) × (2 + semiasse) eseguita con un abaco

56 Anche l'abaco romano aveva colonne per le frazioni. Un esempio è dato dall'abaco di Kircher, che si trova al Museo Nazionale Romano. Iniziando da destra, le prime due colonne di questo abaco sono dedicate alla rappresentazione delle frazioni romane: la prima è riservata a semioncia, sicilico e duella, mentre la seconda è per le once; vedere: De Palma (a cura di), *I racconti di Numeria*, pp. 31-32.

57 Bernelino *Liber abaci*, p. 397. "Fissiamo tre colonne riservate alla disposizione delle minuzie, la prima delle quali contenga i chalchi, la seconda gli scupoli, la terza invece le once".

58 Da esempi successivi proposti da Bernelino si deduce che semioncia, duella, sicilico, sestula, dramma, emisescla, scrupolo erano poste nella colonna degli scrupoli, mentre obolo, cerate, siliqua, chalco erano poste in quella dei chalchi.

59 Vedere Guagnini, *L'abaco di Gerberto d'Aurillac*, pp. 6-9.

60 Ivi, p. 397. "Si moltiplichi 12 e destante per 2 e semiasse nel seguente modo. 2 per 1, 2 nelle decine della seconda traccia. 2 per 2, 4 nelle unità della stessa. 2 volte destante, asse nelle unità della seconda traccia e inoltre bisse nelle once della stessa. Ora per semiasse. Semiasse per 10, cioè per 10 assi, 5 nelle unità della seconda traccia. Semiasse per 2, cioè per due assi, 1 nello stesso posto. Semiasse per destante, quinconce nelle once della seconda traccia".

DIVISIONE DI UN NUMERO INTERO PER UN NUMERO MISTO USANDO L'ABACO

Più complessa è l'operazione di divisione.

Primo esempio

L'autore[61] mostra come dividere 120 per 11 e deoncia (cioè per 11 + 11/12), utilizzando il metodo della divisione 'con differenza'[62]. Questo metodo, molto usato dai Gerbertisti, è spesso piuttosto lungo, ma presenta calcoli molto semplici da svolgere [63].

Si inizia approssimando il divisore alla decina successiva, cioè 20 = <u>2 decine</u>, e calcolando la differenza d fra 20 e il divisore D.

$$D = 11 + 11/12 \quad ; \quad d = 8 + 1/12$$

Poi si svolge la seguenti sequenza di calcoli:

12 decine : <u>2 decine</u> = 6 = Q_1 primo quoziente parziale;

$6 \times \mathrm{d} = 48 + 6/12 = \mathrm{R}_1$ primo resto parziale;

4 decine : <u>2 decine</u> = 2 = Q_2 secondo quoziente parziale;

$2 \times d + 8 + 6/12 = 16 + 2/12 + 8 + 6/12 = 24 + 8/12 = R_2$ secondo resto parziale;

2 decine : <u>2 decine</u> = 1 = Q_3 terzo quoziente parziale;

$1 \times d + 4 + 8/12 = 8 + 1/12 + 4 + 8/12 = 12 + 9/12 = R_3$ terzo resto parziale;

Poiché R_3 è maggiore di D ma minore di 20, si sottrae da esso direttamente il divisore:

$R_3 - D = 12 + 9/12 - (11 + 11/12) = 11 + 12/12 + 9/12 - (11 + 11/12) = 10/12$ *fine divisione*;

$1 = Q_4$ quarto quoziente parziale; $R = 10/12$ resto della divisione;

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 6 + 2 + 1 + 1 = 10$.

In conclusione $120 = 10 \times (11 + 11/12) + 10/12$.

Il procedimento ha la seguente *giustificazione*:

$120 : D = (6 \times \underline{20}) : D = (6 \times (\underline{D + d})) : D = (6D + 6d) : D = 6 + (6\mathrm{d}) : D =$

$= 6 + (48 + 6/12) : D = 6 + (40 + 8 + 6/12) : D = 6 + (2 \times \underline{20} + 8 + 6/12) : D =$

$= 6 + (2 \times (\underline{D + d}) + 8 + 6/12) : D = 6 + (2\,D + 2d + 8 + 6/12) : D =$

$= 6 + 2 + (2\mathrm{d} + 8 + 6/12) : D = 6 + 2 + (16 + 2/12 + 8 + 6/12) : D =$

$= 6 + 2 + (24 + 8/12) : D = 6 + 12 + (\underline{20} + 4 + 8/12) : D =$

$= 6 + 2 + (\underline{D + d} + 4 + 8/12) : D = 6 + 2 + 1 + (d + 4 + 8/12) : D =$

$= 6 + 2 +1 + (8 + 1/12 + 4 + 8/12) : D = 6 + 2 +1 + (12 + 9/12) : D =$

$= 6 + 2 + 1 + (D + 10/12) : D = 6 + 2 + 1 + 1 + (10/12) : D = 10 + (10/12) : D.$

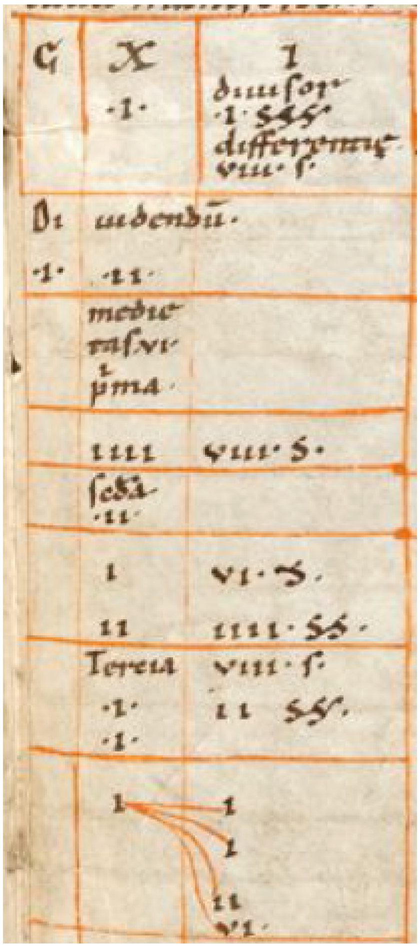
$Q = 10$ e $R = 10/12$

---

61 Abacista anonimo, *De minutiis*, p. 243.

62 La 'divisione con differenza', detta anche 'divisione ferrea', è spiegata in GUAGNINI, *L'abaco di Gerberto d'Aurillac*, pp. 9-14. Vedere, in particolare, il terzo caso a p. 13.

63 Vedere CAJORI, *A History of Mathematics*, pp. 122-123.



C	X	I
	1	divisore 1 e 11/12 differenza 8 e 1/12
Di 1	videndo 2	
	Prima divisione per 2, 6	
	4	8 e 6/12
	2^divisione, 2	
	1 2	6 e 2/12 4 e 8/12
	3^divisione, 1 1	8 e 1/2 2 e 9/12
	1	← 1 ← 1 ← 2 ← 6

Immagine dello schema della divisione 120 : (11 + 11/12) tratta da un manoscritto[64] .

Secondo esempio

Vediamo come applicare il procedimento precedente (divisione 'con differenza') nel caso in cui il divisore presenti sia once sia minuzie. Si vuole calcolare 98 : (18 + 11/12 + 1/48).

Si inizia approssimando il divisore alla decina successiva, cioè 20 = <u>2 decine</u>, e calcolando la differenza d fra 20 e il divisore D.

$$D = 18+ 11/12 + 1/48; \quad d = 1 + 1/24 + 1/48$$

Poi si svolge la seguenti sequenza di calcoli:

9 decine : <u>2 decine</u> = 4 = Q_1 primo quoziente parziale;

$18 + 4 \times d = 18 + 4 + 2/12 + 1/12 = 22 + 3/12 = R_1$ primo resto parziale;

2 decine : <u>2 decine</u> = 1 = Q_2 secondo quoziente parziale;

$2 + 3/12 + 1 \times \mathrm{d} = 2 + 3/12 + 1 + 1/24 + 1/48 = 3 + 3/12 + 1/24 + 1/48 = R_2$

La divisione è finita perché $R_2 < D$.

$$Q = Q_1 + Q_2 = 5, \quad R = 3 + 3/12 + 1/24 + 1/48$$

In conclusione $98 = 5 \times (18+ 11/12 + 1/48) + 3 + 3/12 + 1/24 + 1/48$.

64 Karlsruhe, Badische Landesbibliothek, 504, fol. 84r, sec. XI-XII.

USO DELLE ONCE E DELLE MINUZIE NELLA DIVISIONE FRA DUE NUMERI INTERI

In alcuni scritti si trova anche l'uso delle once e delle minuzie per approssimare il risultato di divisioni di numeri interi[65].

Primo esempio: 3:7

Il primo testo che esaminiamo propone la divisione di 94657 per 7[66]. Utilizzando unicamente i numeri interi ottiene come resto 3. L'autore prosegue poi nella divisione per 7 utilizzando once e minuzie nel seguente modo:

R = 3 = 3 assi = 6 semiassi; non si può dividere 6 per 7, allora si segue un'altra strada:

3 assi = 9 trienti, si divide per 7, Q_1= 1 triente, R_1 = 2 trienti;

2 trienti = 8 once, si divide per 7, Q_2 = 1 oncia, R_2 = 1 oncia;

1 oncia = 4 sicilico; non si può dividere, allora si procede con un'altra equivalenza:

1 oncia = 8 dramme, si divide per 7, Q_3 = 1 dramma, R_3 = 1 dramma;

1 dramma = 12 cerate, si divide per 7, Q_4 = 1 cerate, R_4 = 5 cerate,

5 cerate = 10 chalchi, si divide per 7, Q_5 = 1 chalco, R_5 = 3 chalchi, *fine della divisione*.

In conclusione

3 = 7 × (5 once + 1 dramma + 1 cerate + 1 chalco) + 3 chalchi

$$(3 = 7 \times (5/12 + 1/96 + 1/1152 + 1/2304) + 3/2304)$$

Secondo esempio: 1:11

Gerlando propone il seguente problema: suddividere 100 marchi fra 11 maestri[67].

Da 100 marchi diviso 11 si ottiene Q_1 = 9 marchi e R_1 = 1 marco.

Volendo proseguire la divisione, si trasforma il resto in 12 once.

Da 12 once diviso 11 si ottiene Q_2= 1 oncia e R_2= 1 oncia.

Si traforma il resto di un oncia in 12 emisescle.

Da 12 emisescle diviso 11 si ottiene Q_3= 1 emisescla e R_3 = 1 emisescla.

Si trasforma il resto di un'emisescla in 12 silique.

Da 12 silique diviso 11 si ottiene Q_4 = 1 siliqua e R_4 = 1 siliqua.

La divisione è terminata poiché non sono più possibili ulteriori trasformazioni utili del resto: 1 siliqua corrisponde a 1 chalco + 1/2 chalco e il chalco è la frazione romana più piccola[68]. Sommando i vari quozienti parziali si ottiene

Q = 9 + oncia + emisescla + siliqua, R = siliqua

100 = 11 × (9 + oncia + emisescla + siliqua) + siliqua

$$(100 = 11 \times (9 + 1/12 + 1/144 + 1/1728) + 1/1728)$$

65 In essi viene usato il metodo detto della 'divisione aurea', che è sostanzialmente il procedimento di divisione che ancora oggi viene insegnato alla scuola elementare.

66 Anonimo, *Exemplum simplicis auree*, in *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, T. X, Roma 1877, pp. 617-618.

67 Gerlando, *Trattato sull'abaco*, pp. 604-607.

68 Come osservato in precedenza (p. 6) i Gerbertisti usavano anche parti delle minuzie più piccole, ma qui non ha senso farlo perché è richiesto il numero di *monete* da dare ad ogni maestro.

Terzo esempio: 1:1000

Oddone[69] presenta un problema che coinvolge numeri più grandi e che richiede una serie di trasformazioni più complesse. Si devono suddividere milleuno monete d'argento fra mille soldati.

Da 1001 monete d'argento : 1000 si ottiene $Q_1 = 1$ moneta d'argento e $R_1 = 1$ moneta d'argento.

Volendo proseguire la divisione, si trasforma il resto in 12 once.

Quindi trasforma 10 once in 240 scrupoli, poi 200 scrupoli in 1200 silique

M	C	X	I
			~~1~~
		~~1 once~~	2 once
	~~2 scrupoli~~	4 scrupoli	
1 silique	2 silique		

Ora si possono dividere le 1000 silique per 1000 e si ha $Q_2 = 1$ siliqua.

$R_2 = 200$ silique + 40 scrupoli + 2 once.

Anche riducendo tutti i termini alla minuzia minore, il chalco, non si riesce a raggiungere la colonna delle migliaia, quindi la divisione è finita.

$$Q = 1 \text{ moneta d'arg.} + 1 \text{ siliqua}, \quad R = 200 \text{ silique} + 40 \text{ scrupoli} + 2 \text{ once}$$

$$1001 = 1000 \times (1 + 1 \text{ siliqua}) + 200 \text{ silique} + 40 \text{ scrupoli} + 2 \text{ once}$$

$$(1001 = 1000\,(1 + 1/1728) + 200/1728 + 40/288 + 2/12))$$

Oddone tuttavia non sembra completamente soddisfatto del procedimento usato nelle divisioni, perché aggiunge:

> Si vero portiones divisoribus nequeunt coaequari, quidquid de partibus remanet, ultra non poterit dividi. Nec mirandum est, aliquid de minutiis superesse, cum alias artes in multis videam vacillare. Quamvis enim grammatica amplioribus sit discussa philosophis, tamen ut cæteræ artes aliquid habet imperfectionis, scilicet & in generibus & in personis. Cum enim coelum in singulari generis sit neutri, in plurali fit masculini. Et ut paucis concludam, qui in septem artibus vult studere, plurima perfectione carentia poterit invenire; nam sicut est antiquum proverbium: nihil est omni parte beatum[70].

Il fatto che si ottenga un resto nella divisione, pur ricorrendo alle once e alle minuzie, sembra ad Oddone un difetto della teoria, al pari di tanti altri che si trovano studiando le arti liberali. Un altro abacista, Turchillus, affronta diversamente questo problema.

69 Forse identificabile con Odo, abate di Saint-Maur-des-Fossés dal 1006 al 1029; cfr. RYAN, *The Anonymous* Musicae artis disciplina*: A Critical Edition*, pp. 32-33.

70 ODDONE, *Regulae domno Oddonis super abacum*, in Gerbert, Martin, *Scriptores ecclesiastici de musica sacra*, p. 302. “Tuttavia, se le frazioni [il resto parziale N.d.T.] non sono in grado di raggiungere il livello del divisore, qualunque frazione rimanga non si può procedere nella divisione. Non ci si deve stupire che rimanga qualche minuzia, perché in molti vedono vacillare [anche] le altre arti [cioè le arti liberali del trivio e del quadrivio: grammatica, retorica, dialettica, aritmetica, geometria, astronomia, musica N.d.T.]. Infatti, per quanto la grammatica sia discussa dai più illustri filosofi, nondimeno, come le altre arti, ha dei difetti, senza dubbio relativamente ai generi e alle persone. Infatti mentre *cielo* è al singolare di genere neutro, al plurale diventa di genere maschile. E, in breve, chi vuole dedicarsi allo studio delle sette arti, potrà trovare molte imperfezioni; proprio come dice il proverbio: “niente è perfetto in ogni sua parte”.

Quarto esempio: 200 : 2500

Turchillus, nello spiegare ai lettori come si dividono fra loro due interi, inizia nel modo usuale, ma poi aggiunge una regola nuova: se non si riescono a trovare conversioni opportune utilizzando le frazioni romane, si possono usare *nelle divisioni* anche tutte le *altre frazioni*.

Mostra quest'ultimo caso con un esempio[71].

Si devono suddividere 200 marchi in 2500 parti uguali.

200 marchi corrispondono a 32000 denari.

32000 denari: 2500 dà $Q_1 = 12$ denari e $R_1 = 2000$ denari.

1 denaro corrisponde a 2 'oboli'[72] quindi $R_1 = 4000$ 'oboli'.

4000 'oboli' : 2500 dà $Q_2 = 1$ 'obolo' e $R_2 = 1500$ 'oboli'.

1 'obolo' corrisponde a 2 quadranti quindi $R_2 = 3000$ quadranti.

3000 qudranti : 2500 dà $Q_3 = 1$ quadrante e $R_3 = 500$ quadranti.

500 quadranti : 2500 = 1/5 quadrante *perché non si riesce a trasformare in maniera adeguata un quadrante e in questo modo non c'è resto*. Quindi $Q_4 = 1/5$ quadrante.

In conclusione:

200 marchi : 2500 = 12 denari + 1 'obolo' + 1 quadrante + *1/5 quadrante*.

(32000 : 2500 = 12 + 1/2 + 1/4 + *1/20*)

Questo esempio è più avanzato rispetto ai tre precedenti anche per un altro motivo. Come osserva Turchillus, in questa divisione il divisore supera il dividendo ed è perciò necessario sfruttare *fin dall'inizio* delle equivalenze; il quoto è quindi minore dell'unità del dividendo (cioè di 1 marco).

QUAL E' L'ORIGINE DEI PROCEDIMENTI ESAMINATI?

Ci si può domandare se i procedimenti che abbiamo fin qui esaminato siano stati scoperti autonomamente dai Gerbertisti o da precedenti studiosi medievali oppure se fossero già usati nell'antichità e siano stati trasmessi durante i secoli fino all'epoca di Gerberto.

Non si può rispondere con certezza perché non abbiamo testimonianze su come gli Antichi Romani svolgessero i calcoli aritmetici. Si possono quindi fare solo delle supposizioni e discuterle sulla base di *tutte* fonti tardo antiche e medievali *disponibili*.

Entrambe le possibilità avrebbero comunque delle conseguenze interessanti.

Nuovi procedimenti aritmetici scoperti (o riscoperti) nell'Alto Medioevo dimostrerebbero che si compie un errore affermando che in tale periodo nell'Occidente cristiano lo studio della matematica si basasse unicamente su testi latini tardo antichi[73].

Se, invece, i procedimenti con le once e le minuzie risalissero al periodo romano, essi ci fornirebbero nuove e utili informazioni sull'aritmetica romana. A favore di una trasmissione delle conoscenze aritmetiche durante i secoli abbiamo: gli scritti di vari studiosi medievali che riprendono testi tardo antichi[74]; la similitudine fra l'abaco romano e l'abaco di Gerberto; il permanere nel tempo dell'antica tecnica dell'indigitazione[75] e dell'uso delle Tavole di Vittorio d'Aquitania.

71 TURCHILLUS, *Reguncule super abacus*, in *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, T. XV, pp. 153-154.

72 Così viene indicato nel testo il semiasse.

73 CAJORI, *A History of Mathematics*, p. 117.

74 FRIEDLEIN, *Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer*, pp. 35-66.

75 Vedere: GHIONE, *Calcolare con le mani*.

BIBLIOGRAFIA / SITOGRAFIA[76]

TESTI

ALDELMO, *Epistola ad Leutherium*, in *Monumenta Germaniae Historica-Auctores Antiquissimi*, XV, *Aldhelmi opera,* R. Ehwald Berlin 1919, https://www.dmgh.de/mgh_auct_ant_15/index.htm#page/477/mode/1up;

BUBNOV, Nicolaj, *Gerberti Opera Mathematica (972 – 1003)*, R. Friedländer & Sohn, Berlino1899, https://ia802707.us.archive.org/24/items/operamathematic00bubngoog/operamathematic00bubngoog.pdf;

CAJORI, Florian, *A History of Mathematics*, MacMillian, London 1901, https://ia802606.us.archive.org/25/items/ahistoryelement01cajogoog/ahistoryelement01cajogoog.pdf;

DE LAMA, Pietro, *Tavola alimentaria Velejate detta Trajana*, Carmignani, Parma 1819, http://www.veleia.it/download/epigrafia/fn000006.pdf;

DE PALMA, Wilma (a cura di), *I racconti di Numeria*, Argos, Roma 1999.

FIBONACCI, *Liber abaci*, capitolo primo, https://www.progettofibonacci.it/liber/BONCOMPAGNI/trad/trad01B.html;

FIBONACCI, *Liber abaci*, capitolo quinto, https://www.progettofibonacci.it/liber/BONCOMPAGNI/trad/trad05B.html;

FRIEDLEIN, Gottfried, *Der Calcus des Victorius*, in *Zeitschr. f. Mathematik u. Physik XVI, 1. S. 42 – 79*, [reperibile in https://books.google.it/];

FRIEDLEIN, Gottfried, [*Die*] *Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes*, Verlang von Andreas Deichert, Erlangen 1869, https://ia800300.us.archive.org/30/items/diezahlzeichenun00frie/diezahlzeichenun00frie.pdf;

GERLANDO, *Trattato sull'abaco*, in *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* T. X, 1877, [reperibile in https://books.google.it/];

GHIONI, Franco, *La disgregazione e le frazioni egizie. Scomposizione di una frazione (propria) in frazioni unitarie*, https://www.progettofibonacci.it/skede/cap_7/disgregazione.pdf;

GHIONI, Franco, *Calcolare con le mani*, https://www.progettofibonacci.it/skede/cap_1/contare.html;

GUAGNINI, Mariairene, L'abaco di Gerberto d'Aurillac e il suo uso con i numeri naturali, https://www.progettofibonacci.it/skede/abaco_Gerberto/abaco_Gerberto.pdf;

MAHER, David, MAKOWSKY, John, *Literary Evidence for Roman Arithmetic with Fractions*, http://dmaher.org/Publications/romanarithmetic.pdf;

ODDONE, *Regulae domno Oddonis super abacum*, in Gerbert, Martin, *Scriptores ecclesiastici de musica sacra*, 1784, [reperibile in https://books.google.it/];

OLLERIS, Alexandre, *Oeuvres de Gerbert, pape sous le nom de Sylvestre II*, Thimbaud, Clermont-F. 1867, https://ia800208.us.archive.org/9/items/oeuvresdegerbert00sylv/oeuvresdegerbert00sylv.pdf;

76 Ultimo accesso alle URL il giorno 20/01/2021.

PANIAGUA, David , *Polemio Silvio y los additamenta al Calculus de Victorio de Aquitania*, in *Forme di accesso al sapere in età tardoantica e altomedievale*, VI, 149-178, https://www.openstarts.units.it/bitstream/10077/13121/1/PANIAGUA_Forme_di_accessoPolymnia.pdf;

RYAN, Bettina, *The Anonymous* Musicae artis disciplina*: A Critical Edition*, thesis, University of Toronto 2013, https://tspace.library.utoronto.ca/bitstream/1807/68961/3/Ryan_Bettina_R_201306_PhD_thesis.pdf;

TURCHILLUS, *Reguncule super abacus*, in *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, T. XV, 1882, [reperibile in https://books.google.it/].

MANOSCRITTI

Bern, Burgerbibliothek, cod. 250, https://www.e-codices.ch/fr/list/one/bbb/0250;

Karlsruhe, Badische Landesbibliothek, 504, https://digital.blb-karlsruhe.de/blbhs/content/pageview/1161799;

London, British Library, Add MS 17808, http://www.bl.uk/manuscripts/Viewer.aspx?ref=add_ms_17808_fs001r.