Prof. Bruno Holanda - Semana Olímpica 2011 - **Nível 1**

Teoria dos Grafos

O que é um grafo? Se você nunca ouviu falar nisso antes, esta é certamente uma pergunta que você deve estar se fazendo. Vamos tentar matar sua curiosidade contando como foi que a teoria dos grafos surgiu.

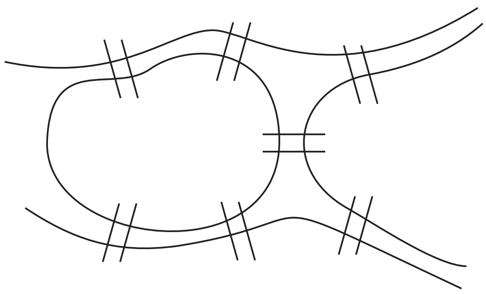


Figura 1.1: Mapa de Königsberg

A Literatura afirma que a teoria dos grafos começou na cidade de Königsberg em 1736 pelo grande matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). A cidade era cortada pelo rio Pregel, que possuía duas ilhas (figura 1.1). Como era muito complicado fazer o transporte de cargas e pessoas através de barcos, algumas pontes foram construídas para auxiliar neste deslocamento entre as ilhas e as duas margens. Após algum tempo as pessoas começaram a se perguntar se era possível sair de sua casa, passar por cada ponte exatamente uma vez e voltar para a segurança de seu lar.

Para resolver o problema, Euler montou um diagrama que representasse o mapa da cidade. Ele o fez da seguinte maneira: A cada ilha e margem ele associou a um ponto que chamaremos de *vértice* e a cada ponte uma ligação que chamaremos de *aresta*. Com isso, ele obteve a figura 1.2:

Essa figura com vários pontos (vértices) e algumas ligações (arestas) que denominamos um *grafo*. Para finalizar seu raciocínio, Euler percebeu que existiam vértices com exatamente três arestas incidentes. Por outro lado, como os moradores queriam atravessar cada ponte apenas uma vez, cada vértice deveria ter

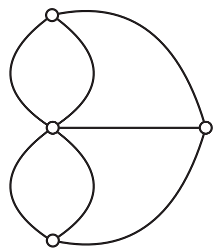
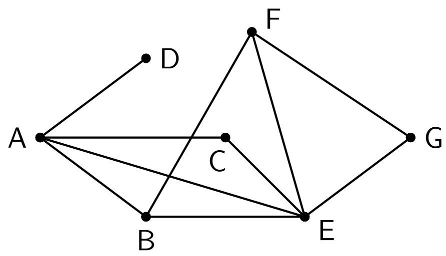


Figura 1.2: Diagrama de Euler

um número par arestas. Logo, se tornaria impossível fazer um percurso seguindo as regras impostas pelos moradores.

1.1 Conseitos Básicos

Como em toda teoria matemática, a teoria dos grafos está repleta de nomeclaturas e termos técnicos. Nesta seção vamos aprender algumas definições importantes para o entendimento completo deste capítulo. A seguir damos um exemplo de um grafo que representa um mapa de estradas e cidades.



Vamos aproveitar o grafo acima para abordar algumas definições. Por exemplo, o grafo acima é *conexo*, pois é possível ir de um vértice a qualquer outro passando usando algumas de suas arestas. Por exemplo, para ir de A até G basta fazer a seguinte seqüência $A \to C \to E \to F \to G$. Dizemos então, que esta seqüência é um *caminho* de A até G. Agora, um caminho fechado é chamado de *ciclo*. Por exemplo, o caminho $A \to B \to E \to A$ é um ciclo de tamanho 3 (ou seja um C_3). Já o ciclo $B \to E \to G \to F \to B$ é um C_4.

Outra notação muito importante é o *grau*. Vamos definir o grau de um vértice v como a quantidade de arestas que incidem nele. E vamos denotar essa quantidade como $d(v)$. Por exemplo, $d(A) = 4$, $d(B) = 3$ e $d(C) = 2$. Os próximos exercícios servirão para fixarmos as definições que acabamos de aprender.

Exercícios:

1. Sabemos que o grafo anterior era conexo. Porém, existe uma aresta que, se retirada, o grafo passará a ser *desconexo*. Que aresta é essa? Explique porque não pode ser outra.

2. Qual é o menor caminho de D até C? E o maior? (não se pode repetir arestas)

3. Quantos ciclos de tamanho três existem? E de tamanho quatro?

4. Determine o ciclo que possui o maior tamanho.

5. Qual o vértice que tem o maior grau?

6. Calcule a soma dos graus de todos os vértices do grafo.

Você deve ter notado que o grafo de Euler possui uma particularidade: entre o mesmo par de vértices existem duas arestas que os liga. Porém, a maioria dos grafos que estudamos são *grafos simples*. Ou seja, grafos que não admitem laços (arestas que começam e terminam no mesmo vértice) e *arestas múltiplas* (como no grafo de Euler).

O próximo problema é um dos mais famosos problemas de toda a olimpíada de matemática. Pode ter certeza que você ainda vai ouvir falar desse problema muitas vezes.

Problema 1. É possível que os cavalos da figura 1 fiquem na posição da figura 2?

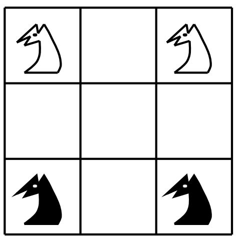


Figura 1

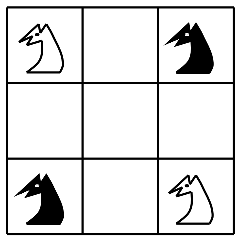
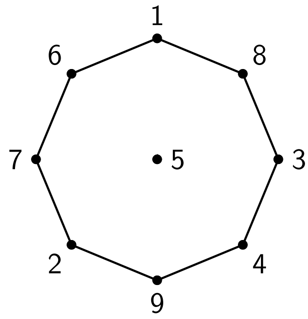


Figura 2

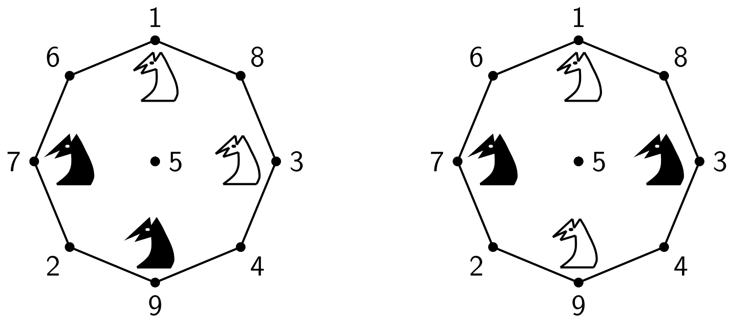
Solução. Vamos enumerar as casas do tabuleiro da seguinte forma:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Agora vamos construir um grafo com vértices $1, 2, ..., 9$ onde vamos ligar dois vértice i e j se é possível o cavalo ir da casa i até a casa j usando apenas um movimento. Dessa forma, obtemos o seguinte grafo:



Agora colocamos os cavalos de acordo com os tabuleiros mostrados anteriormente.



Dessa forma fica fácil ver que é impossível ir de uma configuração a outra, pois a ordem cíclica dos cavalos não pode mudar. □

1.2 Grafos Simples

Teorema. *Em um grafo simples $G = (V, A)$, a soma dos graus de todos os seus vértices é igual ao dobro do número de arestas. Ou seja;*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|A|$$

Prova. De cada vértice v partem $d(v)$ arestas. Porém, cada aresta possui dois vértices. Desse modo, se somarmos os graus de todos os vértices obteremos o dobro do número de arestas. □

Problema 2. (USAMO 1989) Um torneio de xadrez reúne 20 jogadores. Foram jogadas 14 partidas, com cada jogador jogando pelo menos uma vez. prove que nesse campeonato deve haver um conjunto de 6 jogos com 12 jogadores diferentes.

Solução. Vamos montar um grafo G com 20 vértices a 14 arestas, onde os vértices representam os jogadores e as arestas os jogos. Como cada jogador jogou pelo menos uma vez, cada vértice do grafo tem pelo menos grau 1. Agora, usando o teorema temos que a soma dos graus dos vértices é 28. Daí, pelo princípio da casa dos pombos, devem existir pelo menos 12 vértices com grau exatamente 1. Esses 12 vértices representam os

12 jogadores solicitados pelo problema. □

Problemas Propostos

1. Considere um grupo de 1997 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:
   a) 3 pessoas?
   b) 4 pessoas?

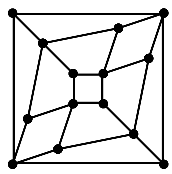
2. Considere um grupo de 1998 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente 101 pessoas do grupo?

3. Cada um dos 102 estudantes é amigo de pelo menos 68 outros alunos. Prove que existem quatro estudantes com o mesmo número de amigos.

4. Todos os vértices de um grafo têm grau 3. Prove que o grafo possui um ciclo.

5. Em um conjunto de n pessoas, em qualquer grupo de quatro delas existe uma que conhece as outras três. Prove que existe uma pessoa que conhece todas as outras.

6. A figura abaixo representa as ligações rodoviárias entre 14 cidades. Existe um caminho passando por cada cidade exatamente uma vez?



7. Em um conjunto de $2n$ pessoas, cada uma delas possui um número par de amigos. Prove que existem duas pessoas que possuem um número par de amigos em comum.

8. (Rússsia 2000) Em um grafo G cada vértice possui grau pelo menos 3. Prove que nesse grafo há um ciclo com o número de arestas não divisível por 3.

1.3 Grafos Orientados e Torneios

1. Na Bruzundanga, quaisquer duas cidades são ligadas por uma estrada. Um imperador tirano decidiu transformar todas essas estradas em estradas de mão única de tal forma que se uma pessoa sair de sua cidade não poderá mais voltar. É possível fazer tal crueldade?

2. (Rússia 1970) Em um torneio completo de tennis haviam 12 jogadores. Prove que podemos encontrar três jogadores A, B e C tais que A ganhou de B, B ganhou de C e C ganhou de A.

3. (Torneio das Cidades 1982) Em certo país existem mais do que 101 cidades. A capital deste país é conectada por linhas aéreas a outras 100 cidades, e cada cidade, exceto pela capital, é conectada a outras 10 cidades (se A está conectado a B, B está conectado a A). Além disso, todas as linhas aéreas são de uma única direção. Sabe-se que de qualquer cidade é possível chegar a qualquer outra usando essas rotas. Prove que é possível fechar metade das linhas aéreas conectadas à capital, e preservar a capacidade de viajar de uma cidade a qualquer outra.

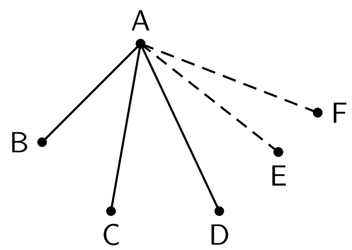
4. (Rússia 2004) Um grafo orientado tem 1001 vértices. Cada vértice possui 500 entradas e 500 saídas. Mostre que qualquer subgrafo de 668 vértices é conexo.

1.4 Misturando outras idéias

De todas os assuntos abordados pela matemática, a teoria dos grafos é dos que possuem o maior número de idéias diferentes. Nesta seção vamos resolver vários problemas de grafos usando estratégias que aprendemos anteriormente. Vamos começar provando um fato conhecido com teorema de Ramsey.

Problema 3. (Teorema de Ramsey) Em um grupo de seis pessoas sempre existem três que se conhecem mutuamente ou três que não se conhecem mutuamente.

Prova. Para resolver este problema vamos usar a linguagem dos grafos. Dessa forma, pense em um grafo com seis vértices A, B, C, D, E, F. Uma aresta contínua irá representar uma "amizade" e uma aresta pontilhada, uma "inimizade". Fixado o vértice A, sabemos que ele possui cinco arestas. Como só há dois tipos de aresta, um dos tipos foi usado pelo menos três vezes. Sem perca de generalidade, suponha que o tipo "continua" foi escolhido três vezes.



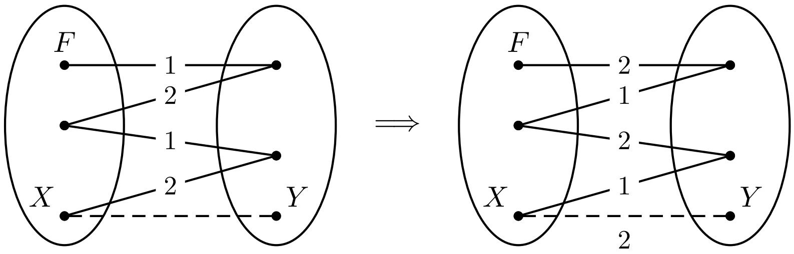
Agora, se uma das arestas BC,CD ou DB for contínua, teremos três pessoas se conhecendo mutuamente. Caso contrário, as três são pontilhadas. Neste caso, B,C e D não se conhecem mutuamente. □

Veja que no exemplo anterior usamos esencialmente o princípio da casa dos pombos. O próximo problema é da olimpíada do Leningrado de 1990. Neste exemplo vamos usar uma idéia um pouco mais sofisticada, o princípio do extremo.

Problema 4. A Brunzundanga e a Zuzunzilandia são países vizinhos. Sabe-se que cada cidade está ligada a no máximo dez outras cidades e que cidades do mesmo país não são ligadas. Prove que podemos pintar essas estradas usando dez cores de modo que estradas adjacentes possuam cores distintas.
PS: As estradas são adjacentes se possuem uma cidade em comum.

Solução. Suponha que inicialmente todas as estradas estavam incolores. É claro que podemos escolher uma delas e pintar com uma das cores. A partir daí vamos pintar as demais estradas respeitando a seguinte regra:

Sejam X e Y duas cidades (uma de cada país) tais que a estrada XY está incolor. Desse modo, existe uma cor (digamos a cor 1) que não foi usada em nenhuma das estradas partindo de X e uma cor (digamos a cor 2) que não foi usada em nenhuma das estradas partindo de Y. Agora escolha o maior caminho da forma $2-1-2-1-\cdots$ partindo de X.



Suponha, sem perda de generalidade, que esse caminho termine em uma aresta de cor 1 na cidade F. Desse modo, não existe uma estrada de cor 2 partindo de F. Com isso, podemos trocar as cores das estradas deste caminho (onde for 2 pintamos de 1 e virce-versa) sem nenhum problema. Para finalizar, basta pintar a estrada XY da cor 2. □

Problemas Propostos

1. Em um grupo de 50 cientistas sabe-se que cada um deles conhece pelo menos 25 outros cientistas. Prove que podemos colocar quatro deles ao redor de uma mesa de forma que cada cientista esteja sentado ao lado de dois amigos.

2. (Jr. Balkan) Em um país com seis cidades quaisquer duas são conectadas por uma linha aérea (ida-volta). Cada linha aérea é operada por exatamente uma das duas empresas aéreas existentes. Mostre que existem quatro cidades A, B, C, D tais que as linhas AB, BC, CD, DA são controladas por uma única empresa.

3. (IMO 1964) Em um grafo de 17 vértices todas as arestas são traçadas e pintadas de uma de três cores. Prove que existe um triângulo com as três arestas da mesma cor.

4. (Proposto IMO 1977) Em uma sala estão nove homens. Sabe-se que em qualquer grupo de três deles existem dois que se conhecem. Prove que podemos escolher quatro deles que se conhecem mutuamente.

5. (Rússia 2003) Existem N cidades em um país. Entre quaisquer duas cidades existe uma estrada ou uma linha de trem. Um turista deseja viajar pelo país, visitando cada cidade uma única vez, e retornando à cidade inicial. Prove que ele pode escolher uma cidade, e percurso da viagem de tal forma que ele não irá trocar de meio de transporte não mais do que uma vez.

6. (São Petersburgo 2001) Um país possui 2000 cidades. Mostre que é possível unir pares de cidades usando estradas (duas-mãos) tal que para $n = 1, 2, ..., 1000$, existem exatamente duas cidades com exatamente n estradas.

7. (Rússia 1974) Em um grupo de n pessoas sabe-se que se duas possuem mesmo número de amigos, então elas não possuem amigos em comum. Prove que existe uma pessoa com exatamente um amigo.