

Die Boysche Fläche in Oberwolfach

von Hermann Karcher und Ulrich Pinkall

Seit dem Frühjahr 1991 steht vor dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach ein Metallmodell der Boyschen Fläche. Über die mathematischen Eigenschaften dieses Modells, seine historischen Bezüge und über seine Herstellung durch die Firma Daimler-Benz soll hier berichtet werden.



Geschichte

Werner Boy hat 1901 bei Hilbert über die “Curvatura integra” ($\iint K dA$) promoviert [Math. Ann. 57 (1903), 151-184]. Dies ist die erste uns bekannte Stelle, in der der globale Satz von Gauß-Bonnet so formuliert ist, wie wir ihn heute benutzen: $\iint K dA = 2\pi \cdot \chi(M^2)$.^a Boy hat diesen Satz insbesondere für nicht orientierbare Flächen diskutiert und dabei auch nach einer (damals eher für unwahrscheinlich gehaltenen) Immersion der projektiven Ebene gesucht. Er hat die von ihm hergestellte Fläche dadurch als projektive Ebene identifiziert, daß er die Eulercharakteristik aus den kritischen Punkten der Höhenfunktion berechnete: 3 Minima, 3 Sättel, 1 Maximum. Boy benutzte dieses Argument ohne Zitat, also wohl als “allgemein bekannt”; darüber, daß die Erläuterungen zu dieser “Morsetheorie” der Flächen im Raum schon bei Möbius [Werke II, S. 440-445, 1863] stehen, hat Dombrowski in einem Vortrag in Oberwolfach berichtet. In Hilbert und Cohn-Vossen: “Anschauliche Geometrie” wird die Boysche Fläche in §47 mit vielen Abbildungen erläutert.

^aAuch der Satz von Whitney-Graustein [1930], der reguläre Homotopieklassen ebener Kurven durch ihre Windungszahl klassifiziert, kommt in einer Fußnote vor.

Mathematik

Schon lange vor Boys Dissertation war eine sehr schöne *Einbettung* der projektiven Ebene nach S^4 bekannt, die minimale und straffe “Veronese-Fläche”; außerdem kannte man verschiedene algebraische Flächen in \mathbb{R}^3 , die bis auf isolierte Singularitäten immersierte projektive Ebenen sind. Boys – erstmals singularitätenfreie – *Immersion* in den \mathbb{R}^3 ist ohne besondere differentialgeometrische Eigenschaften konstruiert, sie zeigt aber mit ihrem Tripelpunkt eine differentialtopologische Besonderheit: Alle Immersionen von $\mathbb{R}P^2$ nach \mathbb{R}^3 haben eine ungerade Anzahl solcher Tripelpunkte [Banchoff]. Das Modell vor dem Forschungsinstitut hat außerdem spezielle differentialgeometrische Eigenschaften: Die Fläche ist ein Minimum für das Willmore-Funktional, zusätzlich stammt sie aus einer einparametrischen Familie mit 120^0 -Symmetrie. Das Willmore-Funktional

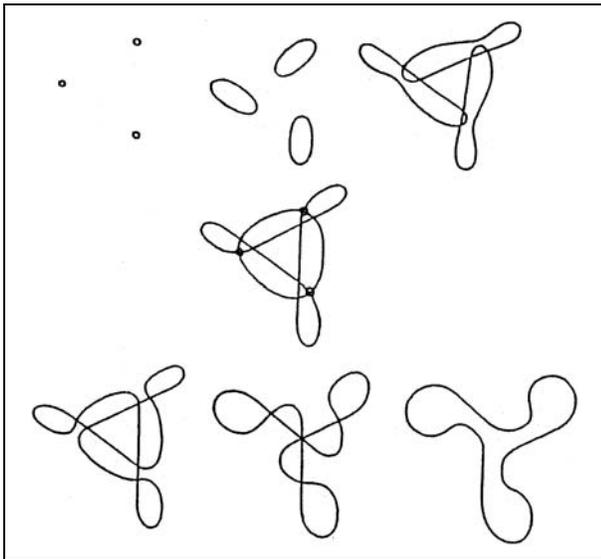
$$\iint H^2 dA = \frac{1}{4} \iint (\kappa_1 + \kappa_2)^2 dA$$

(κ_i die beiden Hauptkrümmungen)

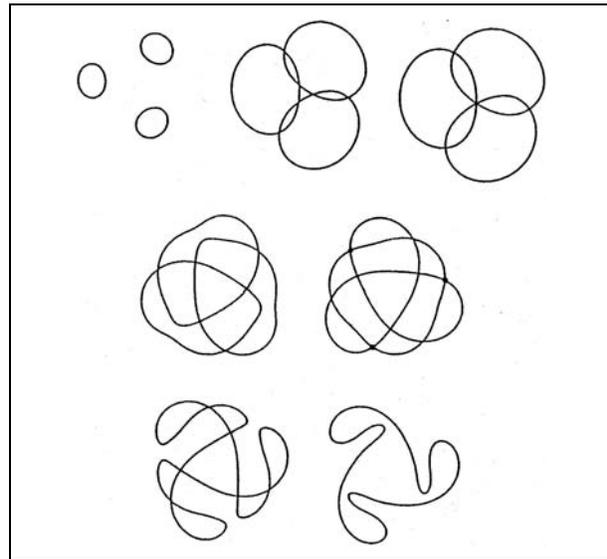
gibt die Biegungsenergie elastisch verformter Materialien an. Chern erinnerte auf einer Oberwolfacher Tagung daran, daß die konform invariante Form dieses Funktionals,

$$\begin{aligned} \iint H^2 dA - 2\pi \cdot \chi(M^2) &= \iint (H^2 - K) dA \\ &= \frac{1}{4} \iint (\kappa_1 - \kappa_2)^2 dA, \end{aligned}$$

schon in den zwanziger Jahren von Blaschke und seinen Schülern studiert wurde (“Konformminimalflächen”). Die verschiedenen Formen des Willmore-Funktional zeigen, daß Minima von Integralen mit sehr verschiedenen Integranden dieselben Flächen liefern können; diese sind daher einerseits möglichst richtungsunabhängig gekrümmt, d.h. $\kappa_1 \approx \kappa_2$, andererseits haben sie möglichst kleine Norm der zweiten undamentalform, $\iint (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) dA$, sind also ohne unnötige Beulen.



Höhenlinien
eines Modells der projektiven Ebene
nach Werner Boy



Höhenlinien des Modells von Oberwolfach,
entsprechend der von R. Bryant und R. Kusner
angegebenen Immersion

R. Bryant hat gezeigt, daß alle sphärischen (d.h. mit S^2 parametrisierten) Konformminimalflächen (oder Willmore-Flächen) durch geeignete Möbiustransformationen auf rational immensierte Minimalflächen (mit sogenannten "ebenen Enden") abgebildet werden können. Die 120° -symmetrische Lösung für unser Modell stammt von R. Kusner:

$$M(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z^3 - z^{-3} + \sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} i \cdot (z^2 - z^{-2}) \\ z^2 + z^{-2} \\ \frac{2i}{3} \cdot (z^3 + z^{-3}) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad z \in S^2, \text{ Nenner} \neq 0.$$

Diese Abbildung besitzt Antipodensymmetrie, $M(z) = M(-1/\bar{z})$, daher ist ihr Bild eine (dreifach punktierte) projektive Ebene, zweifach überlagert.

Eine Inversion

$$\operatorname{Boy}(z) = \frac{M(z)}{\|M(z)\|^2}$$

liefert unsere Boysche Fläche, mit dem Tripelpunkt als Bild von ∞ . Die Gestalt der Boyschen Fläche kann man durch eine Translation vor der Inversion verändern; nur Translationen in z -Richtung liefern Flächen mit der erwähnten 120° -Symmetrie.

Die Metallstreifen der Fläche sind aus ebenem Stahlblech geschnitten; um daraus die berechnete Fläche biegen zu können, muß die Zentralkurve jedes Streifens als Krümmung gerade die geodätische

Krümmung der entsprechenden Parameterlinie haben. Mit dieser Krümmungsfunktion werden die Zentralkurven der Streifen durch Integration der Frenet-Gleichungen gewonnen. Die Streifen um die Meridianlinien sind gewöhnliche Möbiusbänder, d.h. mit nur einer 180° -Drehung verklebt. Sechzehn der siebzehn Breitenkreisstreifen sind unverdrillt; der letzte, markiert mit Kugelkopfnieten, ist ein mit $3 \times 180^\circ$ verklebtes Möbiusband, genau wie das Emblem des Instituts. Dieses Möbiusband wird durch Ansetzen einer Kreisscheibe zur immensierten projektiven Ebene.

Herstellung

Die Boysche Fläche des Instituts wurde von der Mercedes-Benz AG hergestellt und am 28.1.91 in Oberwolfach aufgestellt. Zur Vorgeschichte gehörten Gespräche von Herrn Barner mit dem Züricher Künstler Max Bill, sowie Aufforderungen an zahlreiche Mathematiker, geeignete Vorschläge für ein Objekt zu machen. Frühzeitig hat sich Pinkall für eine Boysche Fläche eingesetzt, beeinflusst von Computerbildern, die 1984 während der Zusammenarbeit von Karcher, Pinkall und Sterling am Max-Planck-Institut in Bonn entstanden waren.

Auf der Suche nach geeigneten Realisierungsmöglichkeiten erinnerte man sich einiger Mathematiker, die inzwischen bei Mercedes-Benz das CAD/CAM System SYRKO entwickeln. Anfang Oktober 1988 besuchten Barner, Karcher und Pinkall die SYRKO-Entwicklung und führten den Mathematikern Stei-

ner, Hahn, Kaufmann und Kuhn auf einem ATARI-Computer (mit getakteten Brillen) Stereobilder der Fläche vor.

Das CAD/CAM System SYRKO kann u. a. Punkte – normalerweise von Tonmodellen abgenommene Meßpunkte – durch Flächen interpolieren, und es verfügt über einen Formelinterpreter, mit dessen Hilfe Punkte der Kusnerschen Parametrisierung berechnet wurden. Damit war in kurzer Zeit ein Flächenmodell der Boysche Fläche in SYRKO erstellt und für verschiedene Fertigungsverfahren zugänglich.

Im Dezember 1988 war ein aus Plexiglas hergestelltes Höhenschichtenmodell fertig; es war noch als “Büromaterial” klassifiziert. Dies Modell sah so gut aus, daß Mercedes-Benz dafür interessiert werden konnte, die Fläche als Geschenk für Oberwolfach zu bauen.

Der erste Plan, ein Modell aus Röhren um die Parameterlinien herzustellen, schien ein gutes Projekt für die Lehrlingswerkstatt zu sein. Mit Hilfe von SYRKO wurden Holzblöcke hergestellt, in deren Kerben die Rohre für Teile der Fläche in die endgültige Form gebogen wurden. Eine solche Teilfläche war an allen Kreuzungen zusammengesteckt. Diese Verbindungen sollten wetterfest verlötet werden. Leider verzog sich dabei schon das erste Teil so gründlich und

wurde zugleich so stabil, daß an ein Zusammensetzen der Fläche aus solchen Teilen nicht mehr zu denken war (Sept. 1989).

Herr Kuhn hatte dann die Idee, statt Parameterröhren abwickelbare Parameterstreifen zu verwenden und erstellte in den Weihnachtsferien ein solches Modell aus geplotteten Papierstreifen. Eine Festigkeitsberechnung bestätigte das Konzept der Stahlstreifenfläche, und im April 1990 wurde ein Drittel der so gebauten Fläche fertig. Wegen Terminpässen und wegen Schwierigkeiten längs der Selbstdurchdringungslinie dauerte der vollständige Zusammenbau noch bis zum Jahresende.

Bei der Übergabefeier am 15.2.1991 hielt dann Herr Dr. Philipp von der Mercedes-Benz AG eine für die Mathematiker außerordentlich freundliche Rede. Er berichtete unter anderem, daß viele Zuschauer aus der Firma zum Beginn des Zusammenbaus kamen und angesichts der langen merkwürdig geformten Streifen auf dem Boden der Montagehalle sehr skeptisch waren. Es zeigte sich jedoch schnell, daß, beim Einstecken der Niete in die berechneten Löcher, die Streifen ganz von alleine die richtige Form annahmen. Das Ansehen der Mathematiker in der Firma habe an diesem Tag sehr gewonnen.