

I. Interpolation

Cours de Claudia NEGULESCU

Le problème de l'approximation d'une fonction f intervient dans plusieurs situations, comme par exemple :

- 1) la fonction $f(x)$ est connue, mais difficile à manipuler. L'approximation a pour but de remplacer f par une fonction plus simple, $\Pi(f)$, qui est plus accessible pour l'intégration, la différentiation, etc.
- 2) la fonction $f(x)$ n'est pas connue, on ne connaît que les valeurs dans certains points x_i . Les quantités données $f(x_i) = y_i$ peuvent être par exemple des mesures expérimentales. Le but de l'approximation est alors de trouver une représentation synthétique (analytique) des données expérimentales.

Etant donné $n + 1$ couples (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$, le but de l'interpolation est de trouver une fonction $\Pi(x)$, qui appartient à une certaine classe et qui prend dans les *noeuds d'interpolation* x_i les valeurs y_i , c.à.d. $\Pi(x_i) = y_i, \forall i$. On dit que $\Pi(x)$ interpole $\{y_i\}_{i=0}^n$ aux noeuds $\{x_i\}_{i=0}^n$. On parle d'*interpolation polynomiale* quand $\Pi(x)$ est un polynôme, d'*interpolation trigonométrique* quand $\Pi(x)$ est un polynôme trigonométrique et d'*interpolation polynomiale par morceaux* quand $\Pi(x)$ est polynomiale par morceaux. Contrairement à l'interpolation, l'approximation d'une fonction ne demande pas que la courbe recherchée passe par les points (x_i, y_i) , mais plutôt qu'un critère d'approximation soit satisfait, comme par exemple le critère de minimax, le critère des moindres carrés, etc. Dans ce chapitre on présentera plusieurs types d'interpolation polynomiale. Le chapitre III sera consacré à l'approximation des fonctions.

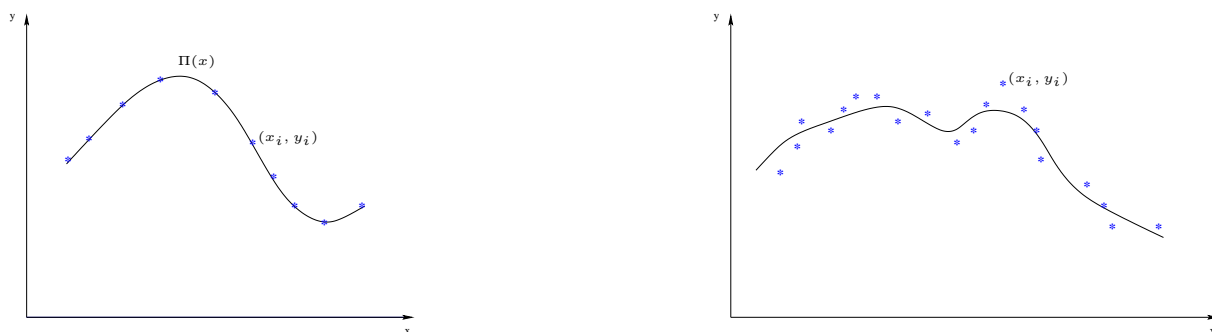


Figure 1: Interpolation polynomiale et approximation d'un nuage de points.

1 Forme de Lagrange du polynôme d'interpolation

Soit $a = x_0 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n = b$ une division de l'intervalle $[a, b]$ et $\{y_i\}_{i=0}^n$, des valeurs correspondantes. Le problème est de trouver un polynôme de degré inférieur ou égale à m , $\Pi_m \in \mathcal{P}_m$, appelé polynôme d'interpolation, vérifiant $\Pi_m(x_i) = y_i, \forall i$. Posé sous cette forme, ce problème peut avoir un nombre infini de solutions, une seule solution ou aucune. Toutefois, il y a une et une seule solution, si on cherche cette solution dans l'espace \mathcal{P}_n ($m = n$). En effet, en définissant les polynômes caractéristiques de Lagrange $l_i \in \mathcal{P}_n$, associés aux noeuds $\{x_i\}_{i=0}^n$,

$$(1) \quad l_i(x) := \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \dots, n,$$

on remarque qu'ils forment une base de \mathcal{P}_n . Comme $l_i(x_j) = \delta_{ij}$, on peut déduire que le polynôme d'interpolation recherché se laisse écrire sous la forme suivante (formule d'interpolation de Lagrange) et est unique :

$$(2) \quad \Pi_n(x) := \sum_{i=0}^n y_i l_i(x).$$

Théorème 1 *Etant donné $n + 1$ points distincts x_0, \dots, x_n ainsi que $n + 1$ valeurs associées y_0, \dots, y_n , il existe un unique polynôme $\Pi_n \in \mathcal{P}_n$, tel que $\Pi_n(x_i) = y_i$ pour $i = 0, \dots, n$.*

Soit ω_{n+1} le polynôme nodal de degré $n + 1$ associé aux noeuds x_i et défini par

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Le prochain théorème donne l'erreur d'interpolation faite quand on remplace une fonction f par son polynôme d'interpolation $\Pi_n f$ associé aux noeuds x_i .

Théorème 2 *Soient $a = x_0 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n = b$, $n + 1$ noeuds distincts et $f \in C^{n+1}([a, b])$. L'erreur d'interpolation au point $x \in [a, b]$ est donnée par*

$$E_n(x) := f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x),$$

avec $\xi \in [a, b]$.

Preuve

Il est clair, qu'on ne peut rien dire sur l'erreur d'interpolation E_n si on ne connaît aucun renseignement sur la fonction f , sauf ses valeurs dans les noeuds x_i . Etudions maintenant plus en détail la convergence uniforme du polynôme de Lagrange.

2 Stabilité et convergence du polynôme de Lagrange

Notons la norme maximum d'une fonction $f \in C([a, b])$ par $\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Le polynôme d'interpolation de Lagrange de f associé aux noeuds $\{x_i\}_{i=0}^n$ est donné par

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x).$$

Si on remplace les valeurs $f(x_i)$ par des valeurs approchées \tilde{f}_i (par exemple due aux erreurs dans les mesures expérimentales ou aux erreurs d'arrondi) on aura une erreur sur le polynôme d'interpolation

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty = \left\| \sum_{i=0}^n (f(x_i) - \tilde{f}_i) l_i(x) \right\|_\infty \leq \Lambda_n \max_{i=0, \dots, n} |f(x_i) - \tilde{f}_i|,$$

avec

$$\Lambda_n := \|\lambda_n(x)\|_\infty, \quad \lambda_n(x) := \sum_{i=0}^n |l_i(x)|.$$

La constante Λ_n , qui dépend que de n , de $[a, b]$ et des points x_i est appelé constante de Lebesgue et joue le rôle d'une constante de stabilité pour l'interpolation. On peut montrer en plus le théorème suivant de majoration de l'erreur d'interpolation

Théorème 3 Soit $f \in C([a, b])$ et $p_n \in \mathcal{P}_n$ son polynôme d'interpolation associé aux noeuds x_0, \dots, x_n . Alors on a

$$\|E_n\|_\infty = \|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n^*(f), \quad E_n^*(f) := \inf_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_\infty.$$

On remarque que Λ_n depend que des noeuds x_i tandis que E_n^* depend que de f . Analysons ces deux termes.

Notons $\overline{\Lambda}_n$ l'infimum des constantes de Lebesgue pour tous les choix possible de noeuds $\{x_i\}_{i=0}^n$ à n fixé. On peut montrer que

$$(3) \quad \overline{\Lambda}_n \sim \frac{2}{\pi} \log(n), \quad \text{c.à.d.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Lambda}_n = \infty.$$

Il est très compliqué de trouver les noeuds qui mènent vers la constante de Lebesgue minimale $\overline{\Lambda}_n$. Par contre, les points d'interpolation de Chebyshev

$$x_i := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = 0, \dots, n,$$

qui sont les zéros du polynôme de Chebyshev de degré $n+1$, sont quasi optimaux.

En ce qui concerne le deuxième terme, le théorème de Weierstrass montre que pour toute fonction $f \in C([a, b])$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n^*(f) = 0.$$

Il est important de remarquer maintenant que pour une fonction $f \in C([a, b])$ donnée, le choix des noeuds d'interpolation est crucial!!! Par contre on peut montrer, due à la propriété (3), que pour n'importe quel choix de noeuds $x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ pour chaque valeur de n , on trouvera toujours une fonction $f \in C([a, b])$, telle que le polynôme d'interpolation p_n ne converge pas uniformément vers f , pour $n \rightarrow \infty$. La propriété (3) montre aussi que l'interpolation de Lagrange peut devenir très instable pour des grand n .

La figure suivante montre le phénomène de Runge. Il s'agit de l'interpolation de Lagrange de la fonction

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5,$$

soit avec noeuds équirépartis soit avec les noeuds de Chebyshev. Il est particulièrement évident que dans ce cas (fonction régulière!) le polynôme d'interpolation avec noeuds équidistants ne converge pas uniformément vers f , par contre le choix des points de Chebyshev mène à la convergence uniforme.

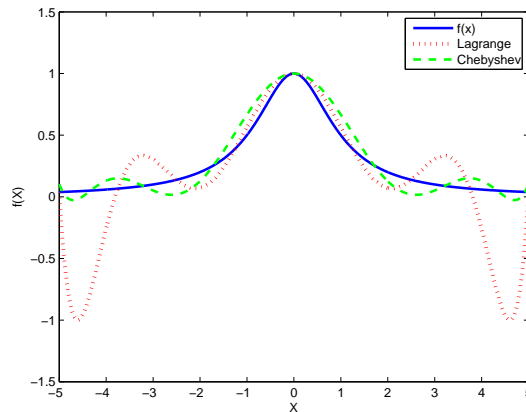


Figure 2: Phénomène de Runge. Interpolation de Lagrange avec des noeuds équidistants (trait discontinu) ainsi que les noeuds de Chebyshev (trait pointillé).

3 Forme de Newton du polynôme d'interpolation

La forme de Lagrange (2) du polynôme d'interpolation n'est pas la plus commode d'un point de vue pratique. Dans cette partie on introduira une autre expression du même polynôme d'interpolation.

Soient $(x_i, y_i)_{i=0}^n$, $n + 1$ couples, où on notera $y_i = f(x_i)$. Le but est de représenter le polynôme d'interpolation $\Pi_n \in \mathcal{P}_n$ comme la somme de $\Pi_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ (associé aux noeuds x_i , pour $i = 0, \dots, n - 1$) et d'un polynôme $q_n \in \mathcal{P}_n$. Donc

$$\Pi_n(x) = \Pi_{n-1}(x) + q_n(x),$$

ce qui implique $q_n(x_i) = \Pi_n(x_i) - \Pi_{n-1}(x_i) = 0$ pour $i = 0, \dots, n-1$ et donc $q_n \in \mathcal{P}_n$ a la forme

$$q_n(x) = a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Le coefficient a_n , appelé *n-ième différence divisée de Newton*, et noté souvent $f[x_0, \dots, x_n]$, a la forme suivante

$$a_n = \frac{f(x_n) - \Pi_{n-1}(x_n)}{\omega_n(x_n)},$$

et se laisse calculer par récurrence comme suit

$$(4) \quad f[x_0, \dots, x_n] := \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Il faut remarquer que $\omega_0 \equiv 1$ et $y_i = f(x_i) = f[x_i]$. Le polynôme d'interpolation de Newton est

$$(5) \quad \Pi_n f(x) = \sum_{i=0}^n \omega_i(x) f[x_0, \dots, x_i].$$

D'après le théorème 1 d'existence et unicité du polynôme d'interpolation, le polynôme d'interpolation de Newton (5) n'est rien d'autre qu'une autre forme du polynôme de Lagrange. L'avantage de la formule de Newton est que les différences divisées sont invariantes par rapport à la permutation des noeuds. Par conséquent, pour rajouter un nouveau noeud x_{n+1} , on n'a qu'à rajouter au polynôme $\Pi_n f$ le terme $a_{n+1} \omega_{n+1}$, ce qui signifie une considérable réduction du coût numérique, par rapport à l'implémentation de la formule de Lagrange. L'algorithme suivant, obtenu à partir de l'expression (4), permet de calculer d'une manière récursive, simple et pas du tout coûteuse, les différences divisées de Newton.

L'expression de l'erreur d'interpolation avec la formule de Newton est la suivante

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = \omega_{n+1}(x) f[x_0, \dots, x_n, x].$$

4 Interpolation d'Hermite-Birkoff

On peut généraliser l'interpolation de Lagrange d'une fonction f pour chercher un polynôme (courbe) qui passe pas seulement par les points $(x_i, f(x_i))$, mais dont les dérivées coïncident à certains points nodaux avec les dérivées de la fonction f .

On se donne donc $(x_i, f^{(k)}(x_i))$, pour $i = 0, \dots, n$ et $k = 0, \dots, m_i$. On notera souvent la k -ième dérivée de f à l'endroit x_i par $f^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}$. Soit $N := \sum_{i=0}^n (1 + m_i)$. Alors, on peut montrer qu'il existe un polynôme unique $H_{N-1} \in \mathcal{P}_{N-1}$, le polynôme d'interpolation de Hermite, tel que

$$H^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad i = 0, \dots, n \quad k = 0, \dots, m_i.$$

Ce polynôme s'écrit

$$H_{N-1}(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{m_i} y_i^{(k)} L_{ik}(x),$$

avec les polynômes caractéristiques d'Hermite $L_{ik} \in \mathcal{P}_{N-1}$, définis par

$$\frac{d^p}{dx^p} L_{ik}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \text{ et } k = p \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'erreur d'interpolation pour le polynôme d'Hermite est donnée par

$$f(x) - H_{N-1}(x) = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} \Omega_N(x),$$

avec $\xi \in [a, b]$ et le polynôme nodal $\Omega_N \in \mathcal{P}_N$

$$\Omega_N(x) := (x - x_0)^{m_0+1} + \dots + (x - x_n)^{m_n+1}.$$

5 Interpolation de Lagrange par morceaux

On a vu par le phénomène de Runge, qu'on ne peut pas garantir la convergence uniforme du polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi_n(f)$ vers la fonction f lorsque n tend vers ∞ . Ce qu'on peut faire par contre, pour augmenter la précision, est d'introduire une sub-division de l'intervalle $[a, b]$ en m sous-intervalles $T_j := [z_j, z_{j+1}]$, $j = 0, \dots, m-1$, tel que $[a, b] = \cup_{j=0}^{m-1} T_j$. Sur chaque sous-intervalle T_j on utilise l'interpolation de Lagrange avec $n+1$ noeuds $x_i^{(j)}$, $i = 0, \dots, n$. Le polynôme d'interpolation par morceaux, noté $\Pi_n^{(m)}(f)$, appartiendra alors à l'espace

$$X_n^{(m)} := \{g \in C([a, b]) \mid g|_{T_j} \in \mathcal{P}_n(T_j), j = 0, \dots, m-1\},$$

et coïncidera sur chaque T_j avec le polynôme interpolant de $f|_{T_j}$, associé aux noeuds $\{x_i^{(j)}\}_{i=0}^n$. L'intérêt de cette approche est qu'on peut se limiter à des polynômes d'interpolation de bas degré, pour éviter les problèmes liés à la stabilité et convergence de l'interpolation de Lagrange. En effet, même pour n petit, on obtient une erreur suffisamment petite, dès que m est grand, comme le montre le théorème suivant

Théorème 4 Soit $f \in C^{n+1}([a, b])$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|f - \Pi_n^{(m)}(f)\|_\infty \leq ch^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_\infty, \quad h := \max_{j=0, m-1} |z_{j+1} - z_j|.$$

6 Splines

La méthode d'interpolation par splines consiste en une interpolation par morceaux, demandant à la courbe interpolante plus de régularité globale. L'interpolation de Lagrange par morceaux a l'inconvénient, que le polynôme d'interpolation $\Pi_n^{(m)}(f)$ est continu, mais pas dérivable.

Définition 1 Soit $a = x_0 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n = b$ une division de $[a, b]$ avec $n + 1$ noeuds distincts. La fonction $s_k \in C^{k-1}([a, b])$ vérifiant

$$s_{k|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_k, \quad i = 0, \dots, n - 1,$$

s'appelle une spline de degré k , correspondante aux noeuds $\{x_i\}_{i=0}^n$.

Une spline est donc une courbe régulière, polynomiale par morceaux et qui peut avoir des discontinuités à la k -ième dérivée. Les conditions demandées à la définition précédente ne permettent pas de déterminer une spline de manière unique. En effet, la restriction $s_{ki}(x) := s_{k|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_k$ se laisse écrire sous forme polynomiale

$$(6) \quad s_{ki}(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_{ij} (x - x_i)^j, \quad i = 0, \dots, n - 1,$$

ce qui requiert la connaissance de $(k + 1)n$ coefficients α_{ij} . Due à la régularité globale de la spline, on a

$$(7) \quad s_{k,i-1}^{(p)}(x_i) = s_{k,i}^{(p)}(x_i), \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad p = 0, \dots, k - 1,$$

ce qui montre qu'il reste $(k + 1)n - k(n - 1) = k + n$ degrés de liberté pour caractériser la spline. Si la spline doit interpoler une fonction f aux noeuds $\{x_i\}_{i=0}^n$, c.à.d. $s_k(x_i) = f(x_i) \forall i$, il reste tout de même $k - 1$ degrés de liberté. Pour fixer la spline de manière unique, on pourra poser les conditions suivantes :

1) *splines périodiques* (ont un sens si f est périodique!), si

$$s_k^{(p)}(a) = s_k^{(p)}(b), \quad p = 1, \dots, k - 1.$$

1) *splines naturelles*, si pour $k = 2l - 1$, $l \geq 2$

$$s_k^{(l+p)}(a) = s_k^{(l+p)}(b) = 0, \quad p = 0, \dots, l - 2.$$

Une manière de construire une spline a été donnée par les formules (6),(7). Une autre manière consiste à décomposer la spline à l'aide d'une base de splines. En effet, en notant l'espace des splines s_k par

$$\mathcal{S}_k := \{s_k \in C^{k-1}([a, b]) / s_{k|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_k, \quad i = 0, \dots, n - 1\},$$

on remarque que $\dim \mathcal{S}_k = n + k$. L'approche consiste maintenant à construire une base de splines $\{\phi_l\}_{l=1}^{k+n} \in \mathcal{S}_k$.

II. Intégration numérique

Si la fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et si on connaît sa primitive $F(x)$, on peut facilement calculer l'intégrale à l'aide de la formule de Newton-Leibniz

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Par contre, très souvent on ne connaît pas la primitive $F(x)$ ou elle est trop compliquée. Pour cette raison on fait appel à des méthodes approchées de calcul d'intégrales, appelées *formules de quadrature* ou *d'intégration numérique*. Le procédé usuel consiste à remplacer la fonction donnée sur $[a, b]$ par une fonction d'interpolation ou d'approximation f_n , qui sera plus facile à intégrer. On approche alors $I(f)$ par

$$I_n(f) := I(f_n) = \int_a^b f_n(x) dx.$$

L'erreur de quadrature sera ainsi donnée par

$$|E_n(f)| := |I(f) - I_n(f)| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq (b - a) \|f - f_n\|_\infty,$$

ce qui montre qu'une bonne approximation de la fonction f mène à une bonne approximation de l'intégrale $I(f)$. Le *degré d'exactitude* d'une formule de quadrature est défini comme le plus grand entier $r \geq 0$ tel que

$$I_n(p) = I(p), \quad \forall p \in \mathcal{P}_r.$$

Dans les sections suivantes on présentera des formules de quadrature interpolaires et dans le chapitre III des formules de quadrature approchées.

7 Les formules de quadrature de Newton-Cotes

Ces formules sont basées sur l'interpolation de Lagrange avec noeuds équidistants dans $[a, b]$, soit $x_i := x_0 + iH$, $i = 0, \dots, n$ et $H > 0$ le pas de discrétisation. Dans le cas où les extrémités de l'intervalle $[a, b]$ font partie des noeuds, c.à.d. $x_0 = a$, $x_n = b$ et $H = (b - a)/n$, on parle de *formules fermées*. Sinon, c.à.d. si $x_0 = a + H$, $x_n = b - H$ et $H = (b - a)/(n + 2)$, alors on a des *formules ouvertes*. L'approche consiste maintenant à prendre comme f_n le polynôme d'interpolation de Lagrange Π_n associé aux noeuds $\{x_i\}$. Ainsi on a

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx,$$

où $l_i \in \mathcal{P}_n$ est le polynôme caractéristique de Lagrange. Cette formule se laisse écrire de façon plus générale comme

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i), \quad \text{avec} \quad \alpha_i := \int_a^b l_i(x) dx.$$

Les coefficients α_i s'appellent aussi *poinds* et sont facilement calculables, vue que les l_i sont des polynômes. On présentera maintenant trois cas particuliers de cette formule pour $n = 0, 1$ et 2 .

Formule du point milieu : $n = 0$, $x_0 = (a + b)/2$, $H = (b - a)/2$, $l_0 \in \mathcal{P}_0$.

$$I_0(f) := (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right), \quad E_0(f) = \frac{H^3}{3}f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Formule du trapèze : $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $H = b - a$, $l_0, l_1 \in \mathcal{P}_1$.

$$I_1(f) := \frac{b - a}{2}[f(a) + f(b)], \quad E_1(f) = -\frac{H^3}{12}f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Formule de Cavalieri-Simpson : $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = (a + b)/2$, $x_2 = b$, $H = (b - a)/2$, $l_0, l_1, l_2 \in \mathcal{P}_2$.

$$I_2(f) := \frac{b - a}{6}[f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b)], \quad E_2(f) = -\frac{H^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

En utilisant la théorie de l'interpolation, on note que les formules d'intégration inter-

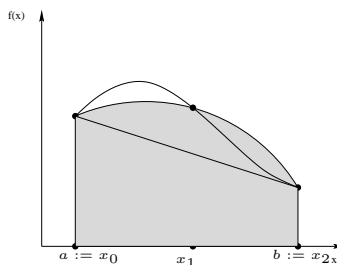


Figure 3: Intégration numérique avec la formule de Simpson.

polaires, associées à une discrétisation de $n + 1$ points, ont un degré d'exactitude au moins égale à n . On verra dans le prochain chapitre que pour les formules d'intégration approchées, comme la formule de quadrature de Gauss, on peut atteindre un degré d'exactitude égale à $2n + 1$.

L'ordre *infinitésimal* d'une formule de quadrature est le plus grand entier $p \geq 0$, tel que $|I(f) - I_n(f)| = \mathcal{O}(H^p)$. Il mesure la précision de la formule, tandis que le degré d'exactitude d'une formule de quadrature mesure une sorte d'efficacité de la formule.

Comme exemple pour la formule de Cavalieri-Simpson, l'ordre infinitésimal est égale à 5, par contre le degré d'exactitude est 3.

On remarque aussi l'inconvénient de ces formules de quadrature simples, à savoir dans le cas où la longueur de l'intervalle $[a, b]$ est assez grande, l'erreur de ces formules sera assez importante. De plus, pour augmenter la précision de ces formules, il n'est pas conseillé d'augmenter n . Cela amènera les mêmes effets néfastes comme pour l'interpolation de Lagrange (effet de Runge). Ces remarques motivent l'introduction des formules composites.

8 Les formules de quadrature composites de Newton-Cotes

Le procédé consiste à décomposer l'intervalle $[a, b]$ en m sous-intervalles $T_j := [z_j, z_{j+1}]$, avec $z_j := a + jh$, $j = 0, \dots, m$ et $h := (b-a)/m$. Sur chaque sous-intervalle on utilise une formule de quadrature interpolatoire (ouverte ou fermée) avec $n+1$ points équidistants $x_i^{(j)}$, $i = 0, \dots, n$, les poids correspondants étant $\alpha_i^{(j)}$. La formule de quadrature interpolatoire composite s'écrit alors sous la forme suivante

$$I_{n,m}(f) := \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(j)} f(x_i^{(j)}).$$

Pour nos trois cas particuliers $n = 0, 1$ et 2 , on retrouve les formules composites suivantes:

Formule du point milieu : $n = 0$, $x_j = a + (2j+1)h/2$, $j = 0, \dots, m-1$, $h = (b-a)/m$.

$$I_{0,m}(f) := h \sum_{j=0}^{m-1} f(x_j), \quad E_{0,m}(f) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

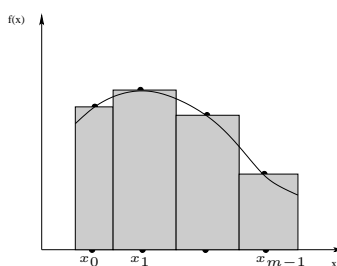


Figure 4: Intégration numérique avec la formule composite du point milieu.

Formule du trapèze : $n = 1$, $x_j = a + jh$, $j = 0, \dots, m$, $h = (b-a)/m$.

$$I_{1,m}(f) := \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j) + f(x_m) \right], \quad E_1(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

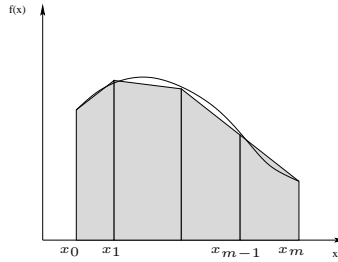


Figure 5: Intégration numérique avec la formule composite du trapèze.

Formule de Cavalieri-Simpson : $n = 2$, $x_j = a + jh/2$, $j = 0, \dots, 2m$, $h = (b - a)/m$.

$$I_{2,m}(f) := \frac{h}{6} \left[f(a) + 2 \sum_{r=1}^{m-1} f(x_{2r}) + 4 \sum_{s=0}^{m-1} f(x_{2s+1}) + f(b) \right],$$

$$E_{2,m}(f) = -\frac{b-a}{180} (h/2)^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Si on définit l'erreur par $E_{n,m}(f) := I(f) - I_{n,m}(f)$ on a le théorème de convergence suivant

Théorème 5 Soit $f \in C^{n+2}([a, b])$ et n pair. La formule de Newton-Cotes composite avec m sous-intervalles donne alors

$$E_{n,m}(f) = \frac{b-a}{(n+2)!} \frac{M_n}{\gamma_n^{n+3}} h^{n+2} f^{(n+2)}(\xi),$$

avec $\xi \in (a, b)$ et $h = (b - a)/m$. Il s'agit donc d'une formule d'ordre infinitésimal égale à $n + 2$ et de degré d'exactitude $n + 1$.

Soit $f \in C^{n+1}([a, b])$ et n impair. La formule de Newton-Cotes composite avec m sous-intervalles donne dans ce cas

$$E_{n,m}(f) = \frac{b-a}{(n+1)!} \frac{K_n}{\gamma_n^{n+2}} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi),$$

avec $\xi \in (a, b)$ et $h = (b - a)/m$. Il s'agit donc d'une formule d'ordre infinitésimal égale à $n + 1$ et de degré d'exactitude n .

Les constantes $M_n, K_n \in \mathbb{R}$ dépendent que de n et du fait que la formule est ouverte ou fermée. La constante γ_n est égale à $n + 2$ si la formule est ouverte et à n si elle est fermée.

On constate que pour n fixé $E_{n,m}(f) \rightarrow 0$ pour $m \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$). Dans la pratique, due aux mêmes raisons de stabilité et convergence du polynôme d'interpolation de Lagrange, on choisit une interpolation locale de bas degré ($n \leq 2$) et on augmente la précision en augmentant m . On constate aussi qu'il est plus astucieux de choisir des formules de quadratures composites avec n pair.

III. Approximation

Le phénomène de Runge nous a montré que l'interpolation, même si elle passe par des noeuds bien définis, présente des erreurs d'approximation non-négligeables entre les noeuds. Ces erreurs ainsi que l'instabilité du processus d'interpolation augmentent avec le nombre des noeuds, ce qui rend difficile l'interpolation des points donnés par des mesures expérimentales. L'idée maintenant est de trouver une autre méthode qui approche mieux une fonction sur tout l'intervalle et pas seulement dans les noeuds d'interpolation. Pour traduire en termes mathématiques ces idées, en particulier pour donner un sens à une "meilleure approximation", il faut introduire un cadre mathématique adéquate.

9 Notion de meilleure approximation

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace normé de fonctions f définies sur un borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et tel que $\mathcal{P}_n \subset E, \forall n$. Alors on a

Théorème 6 Pour tout $f \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme $p_n \in \mathcal{P}_n$ tel que

$$\|f - p_n\|_E = \inf_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_E.$$

Le polynôme p_n vérifiant cette propriété est appelé *polynôme de meilleure approximation de f dans $(E, \|\cdot\|_E)$* . Dans le cas où $(E, \|\cdot\|_E) = (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ on parle de *meilleure approximation minimax* ou *meilleure approximation au sens de Chebyshev*. Si $(E, \|\cdot\|_E) = (L^2(a, b), \|\cdot\|_2)$ on parle de *meilleure approximation au sens des moindres carrés*. Il faut remarquer, que le polynôme de meilleure approximation n'est pas toujours unique dans l'espace normé E .

Dans la section suivante on analysera une généralisation de l'approximation au sens des moindres carrés, plus particulièrement, on considérera l'espace des fonctions L_w^2 munies d'un poids w .

10 Approximation d'une fonction au sens des moindres carrés

Soit w une fonction poids sur (a, b) , c.à.d. $w(x) \geq 0$ est une fonction intégrable. L'espace

$$L_w^2(a, b) := \left\{ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} / \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx < \infty \right\},$$

est un espace de Banach avec le produit scalaire $(f, g)_w := \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx$ et la norme $\|f\|_w := (f, f)_w^{1/2}$.

Théorème 7 Il existe une famille unique de polynômes $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ telle que $p_k \in \mathcal{P}_k$ sont moniques (c.à.d. le coef. devant x^k est égale à 1) et que $(p_k, q)_w = 0, \forall q \in \mathcal{P}_{n-1}$. Cette famille de polynômes satisfait les expressions de récurrence suivantes

$$\begin{cases} p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), & k = 0, 1, 2, \dots \\ p_{-1} \equiv 0, & p_0 \equiv 1, \end{cases}$$

avec

$$\alpha_k := \frac{(xp_k, p_k)_w}{(p_k, p_k)_w}, \quad \beta_{k+1} := \frac{(p_{k+1}, p_{k+1})_w}{(p_k, p_k)_w}, \quad k \geq 0,$$

le coefficient β_0 étant arbitraire.

Remarquer que les polynômes sont deux à deux orthogonaux par rapport à w . En plus, ils vérifient la propriété suivante

Théorème 8 Les k racines du polynôme $p_k \in \mathcal{P}_k$ de la famille orthogonale précédente sont réelles, distinctes et appartiennent à (a, b) .

Le théorème suivant concerne la meilleure approximation au sens des moindres carrés de la fonction $f \in L_w^2(a, b)$.

Théorème 9 Soit $f \in L_w^2(a, b)$. Alors il existe un unique polynôme $f_n \in \mathcal{P}_n$, tel que

$$\|f - f_n\|_w = \inf_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_w,$$

et qui est donné par

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n \tilde{f}_k p_k(x), \quad \text{où} \quad \tilde{f}_k := \frac{(f, p_k)_w}{\|p_k\|_w^2}.$$

On peut dire aussi que f_n est la projection orthogonale de f sur \mathcal{P}_n au sens de L_w^2 ou que f_n est la troncature à l'ordre n de la série de Fourier généralisée de f

$$Sf := \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_k p_k,$$

où \tilde{f}_k sont les k -ièmes coefficients de Fourier. On peut montrer le résultat de convergence suivant

$$\|f - f_n\|_w \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \rightarrow \infty,$$

11 Les polynômes de Chébychev

La fonction de poids de Chébychev est donnée sur $(-1, 1)$ par

$$w(x) := (1 - x^2)^{-1/2}.$$

Les polynômes de Chébychev sont

$$T_k(x) := \cos(k\theta), \quad \text{avec } \theta := \arccos x, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

ou

$$\begin{cases} T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), & k = 1, 2, \dots \\ T_0 \equiv 1, & T_1(x) = x. \end{cases}$$

12 Les polynômes de Legendre

La fonction de poids de Legendre est donnée sur $(-1, 1)$ par $w \equiv 1$. Les polynômes de Legendre sont

$$L_k(x) := \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{[k/2]} (-1)^l \binom{k}{l} \binom{2k-2l}{k} x^{k-2l}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

où $[k/2]$ signifie la partie entière de $k/2$. La formule de récurrence est la suivante

$$\begin{cases} L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x L_k(x) - \frac{k}{k+1} L_{k-1}(x), & k = 1, 2, \dots \\ L_0 \equiv 1, & L_1(x) = x. \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Méthodes numériques pour le calcul scientifique*
- [2] M. Crouzeix, A.L. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*
- [3] J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*