



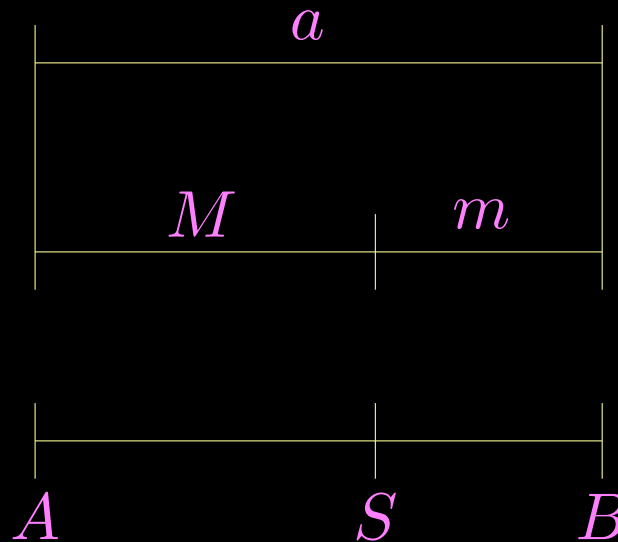
Das Lächeln der MONA LISA, die Schönheit von Sonnenblumen und Symmetrie bei Ornamenten

Prof. Dr. Herbert Henning, Christian Hartfeldt

Grundlagen zum Goldenen Schnitt

Definition (Goldener Schnitt). Sei a die Länge der Strecke \overline{AB} . Ein Punkt S teilt diese im Goldenen Schnitt, falls sich die größere Teilstrecke (Major M) zur kleineren (Minor m) verhält wie die Gesamtstrecke zum größeren Teil:

$$M : m = a : M.$$



Die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen bildet die Verhältniszahl

$$\mu = \frac{M}{m}.$$

Um diese Zahl mathematisch exakt zu bestimmen, benutzen wir obige Definition und ersetzen dabei die Gesamtstrecke a durch den Ausdruck $(M + m)$. Dann gilt

$$x = (M + m) : M.$$

Nach weiteren mathematischen Umformungen erhält man die Gleichung $0 = x^2 - x - 1$, denn

$$x = \frac{M + m}{M}$$

$$x = \frac{M}{M} + \frac{m}{M}$$

$$x = 1 + \frac{m}{M} \quad \left(\text{aus } x = \frac{M}{m} \text{ folgt } \frac{1}{x} = \frac{m}{M} \right)$$

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Nach Anwendung der bekannten p - q -Formel ergeben sich als Lösungen für die quadratische Gleichung $0 = x^2 - x - 1$ folgende zwei Werte

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Für die charakteristische Verhältniszahl des Goldenen Schnitt's ergibt sich somit die positive Zahl

$$\mu = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339\dots$$

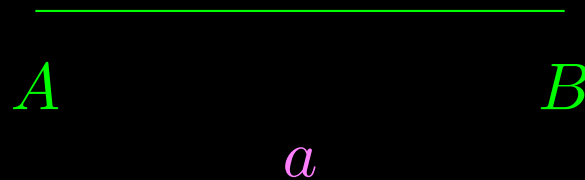
Mit diesem Wert lässt sich nun die Proportion gegebener Streckenpaare prüfen oder die Lage von Teilungspunkten berechnen.

Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke \overline{AB} soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.

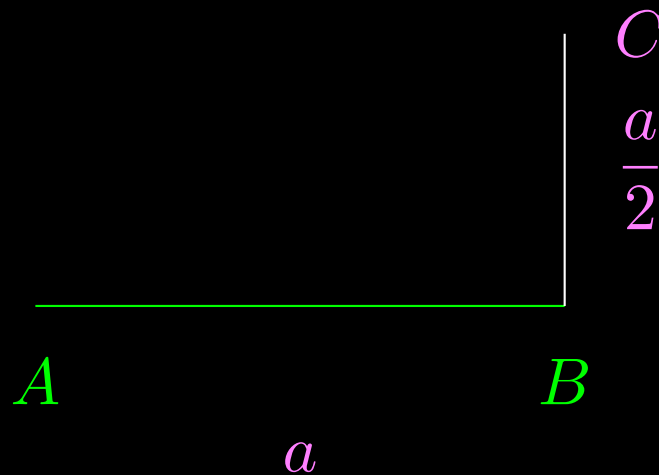
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke \overline{AB} soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



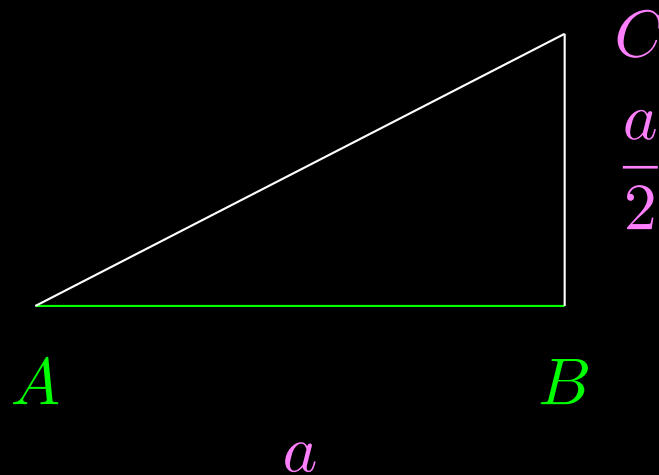
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke \overline{AB} soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



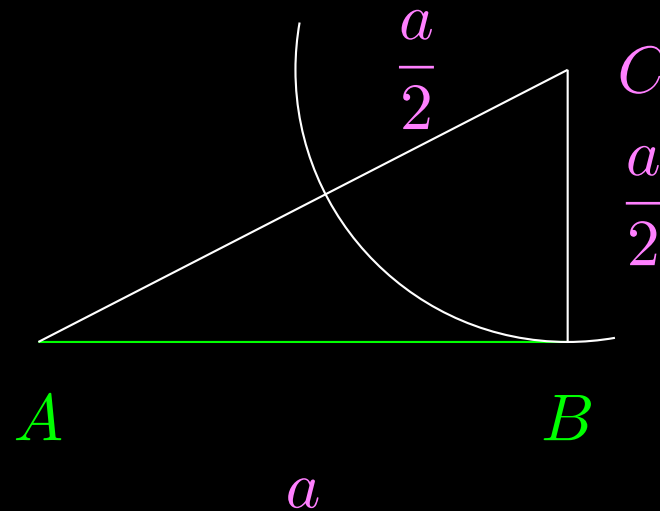
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke \overline{AB} soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



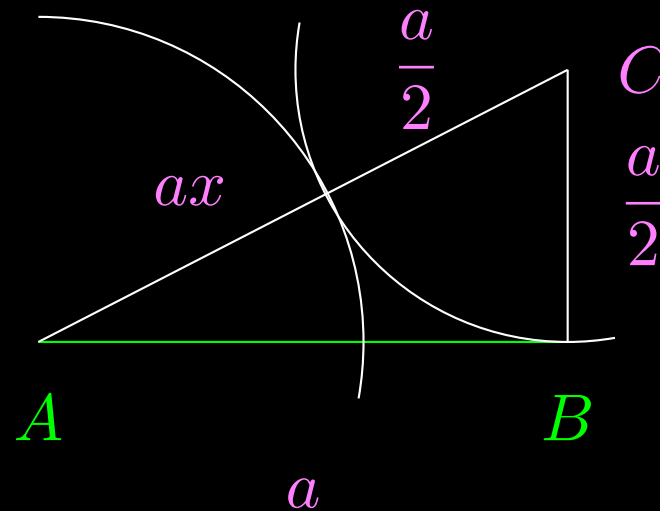
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke \overline{AB} soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



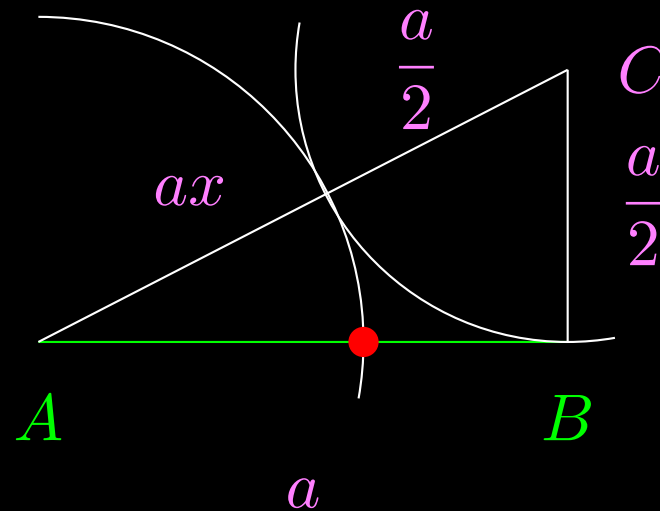
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke \overline{AB} soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



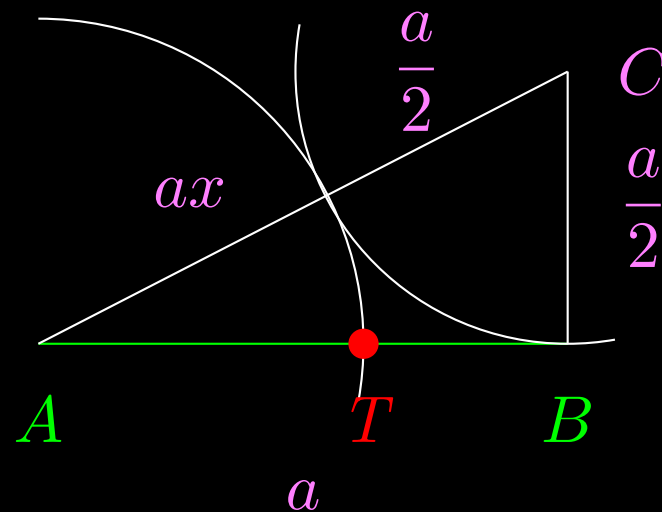
Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke \overline{AB} soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



Stetige Teilung einer Strecke (nach Heron von Alexandria, 1. Jh. n. Chr.)

Die Strecke \overline{AB} soll von einem Punkt T im Goldenen Schnitt geteilt werden.



Begründung: $\overline{AT} = ax$. Nach dem Pythagoras im Dreieck ABC folgt

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(ax + \frac{a}{2}\right)^2 \iff a^2 = a^2x^2 + a^2x \quad | : a^2$$

$$1 = x^2 + x \text{ oder } x^2 + x - 1 = 0$$

das ist genau die Bestimmungsgleichung für σ . Damit erhält man

$$\overline{AT} : \overline{AB} = \sigma a : a, \text{ also } \overline{AT} : \overline{AB} = \sigma.$$



Goldenes Rechteck

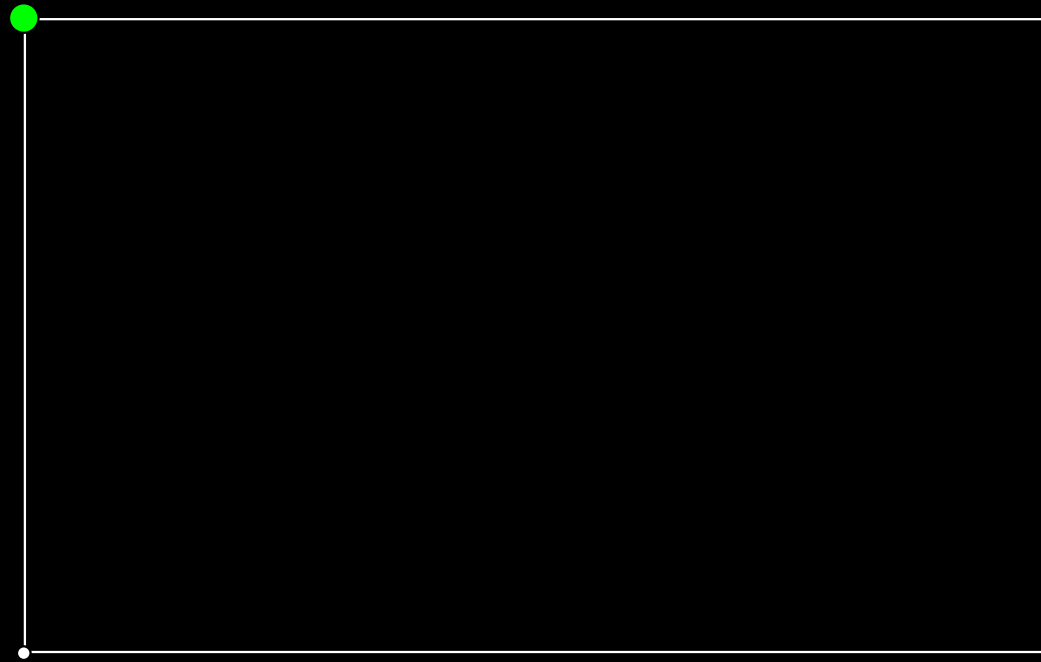
Wird ein Goldenes Rechteck in ein Quadrat und ein übriggebliebenes (kleineres Goldenes) Rechteck aufgeteilt und dieser Vorgang mehrfach wiederholt, so entsteht eine Punktfolge, die sich durch eine spiralförmige Linie verbinden lässt, die **Goldene Spirale**. Es handelt sich dabei um eine logarithmische Spirale, deren Behandlung (wegen des dabei notwendigen Rückgriffs auf Polarkoordinaten) in der Mittelstufe allerdings ungünstig ist. Eine brauchbare Näherung stellt die von Kepler gezeigte Viertelkreisfolge dar.

Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.

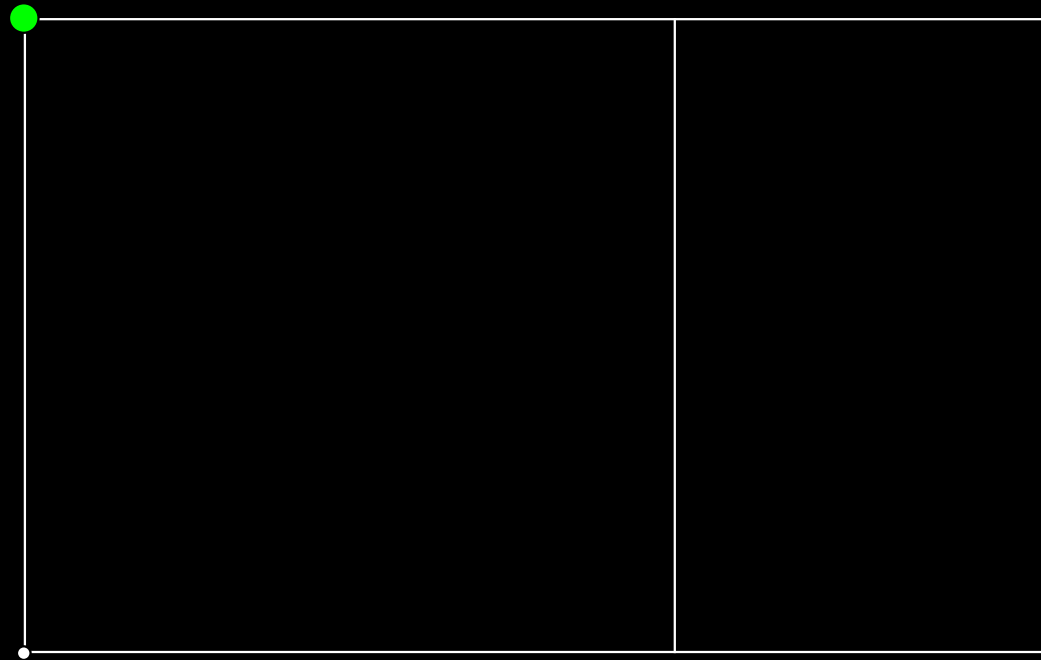
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



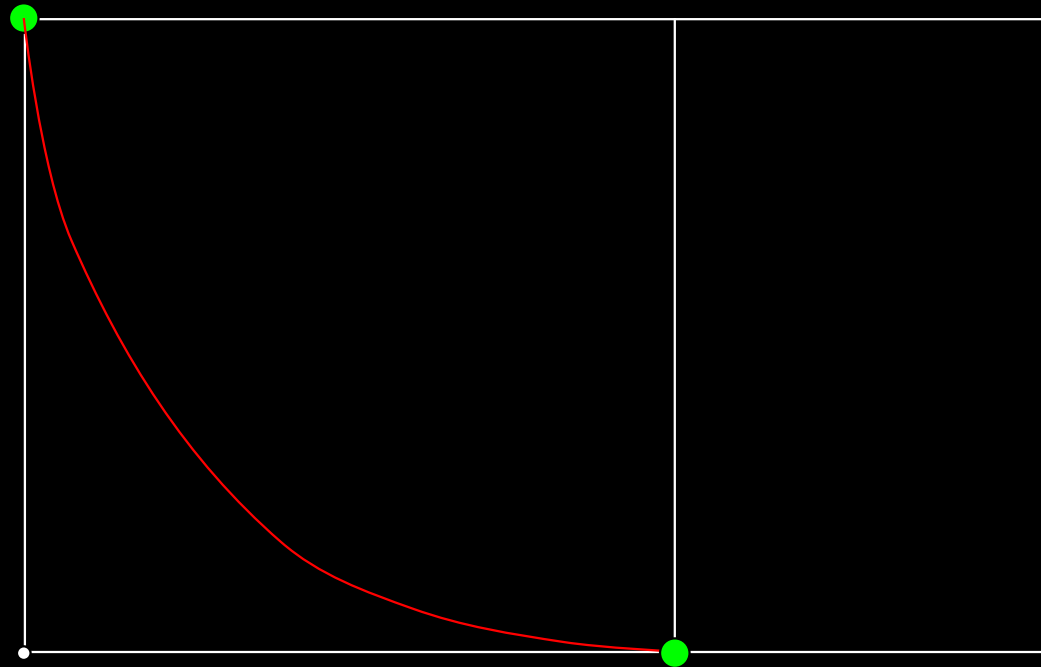
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



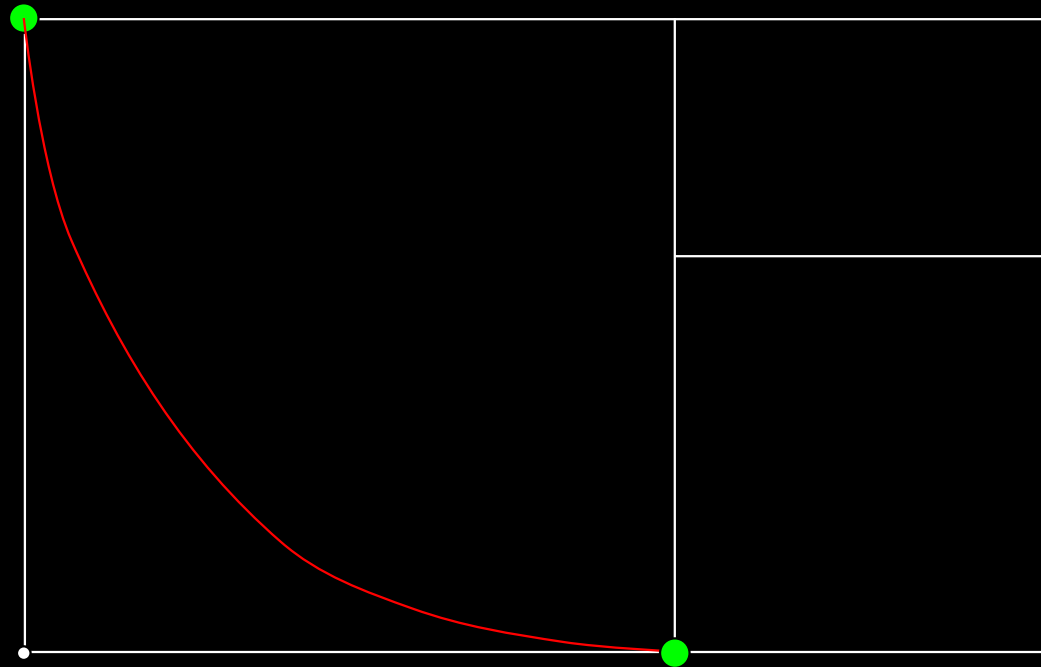
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



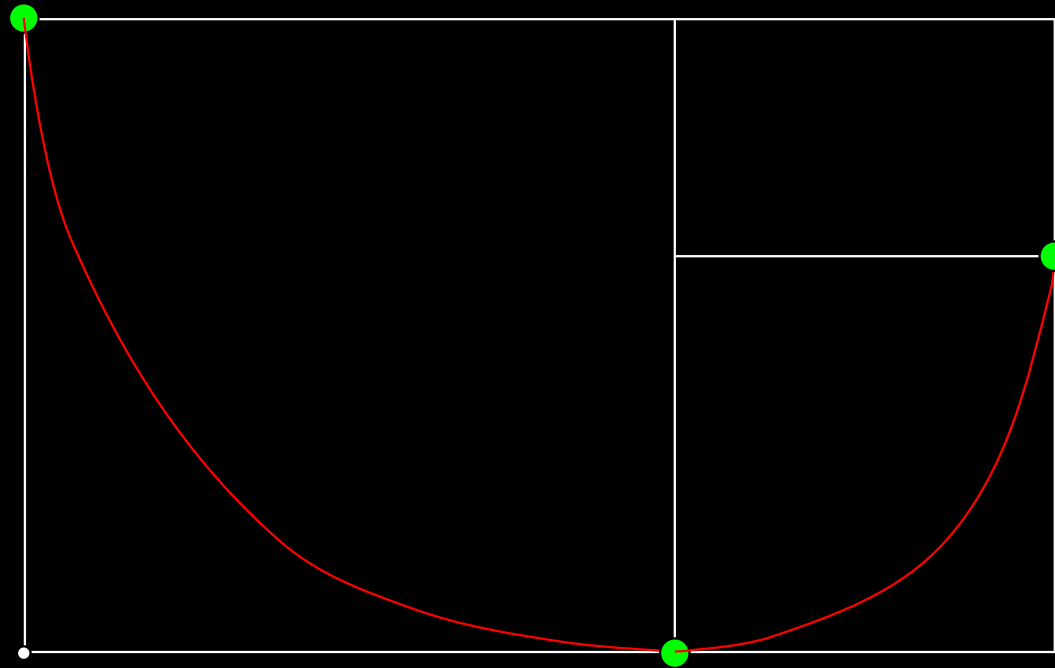
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



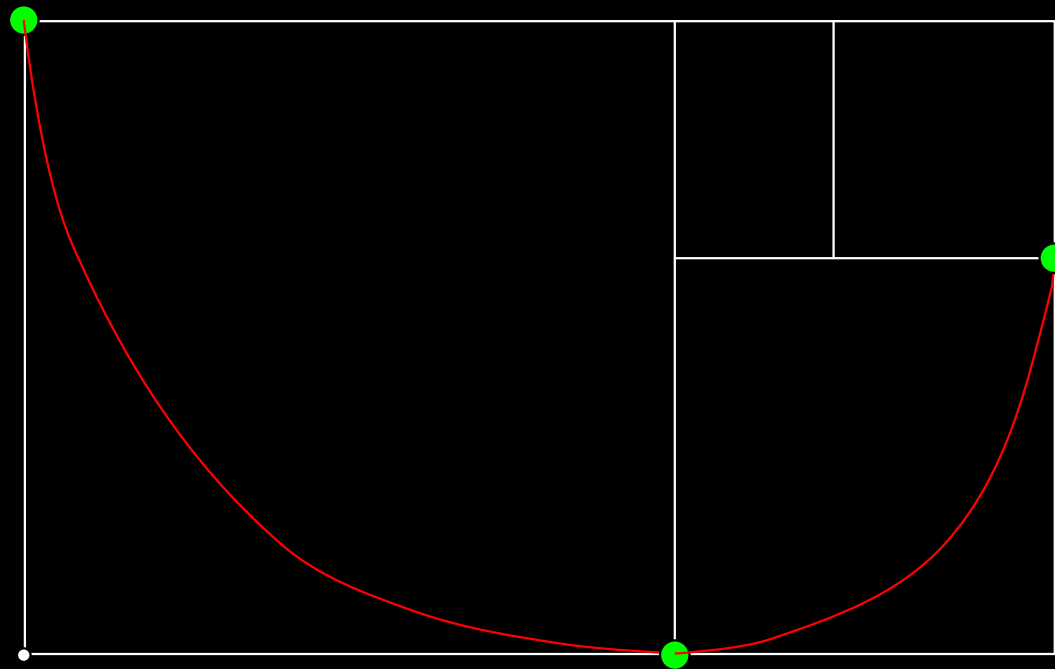
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



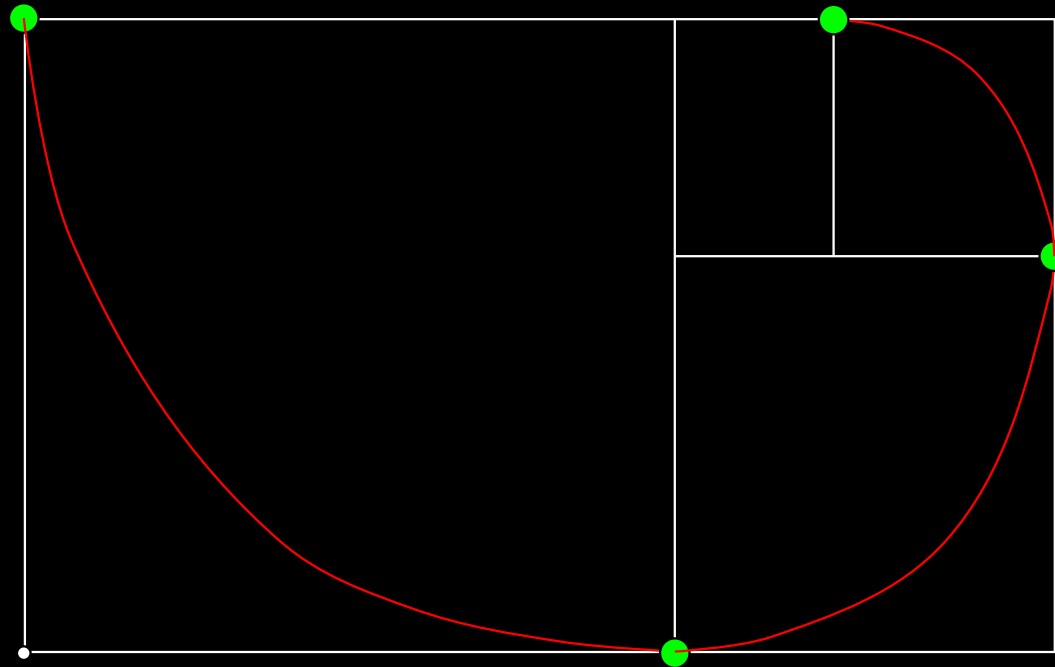
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



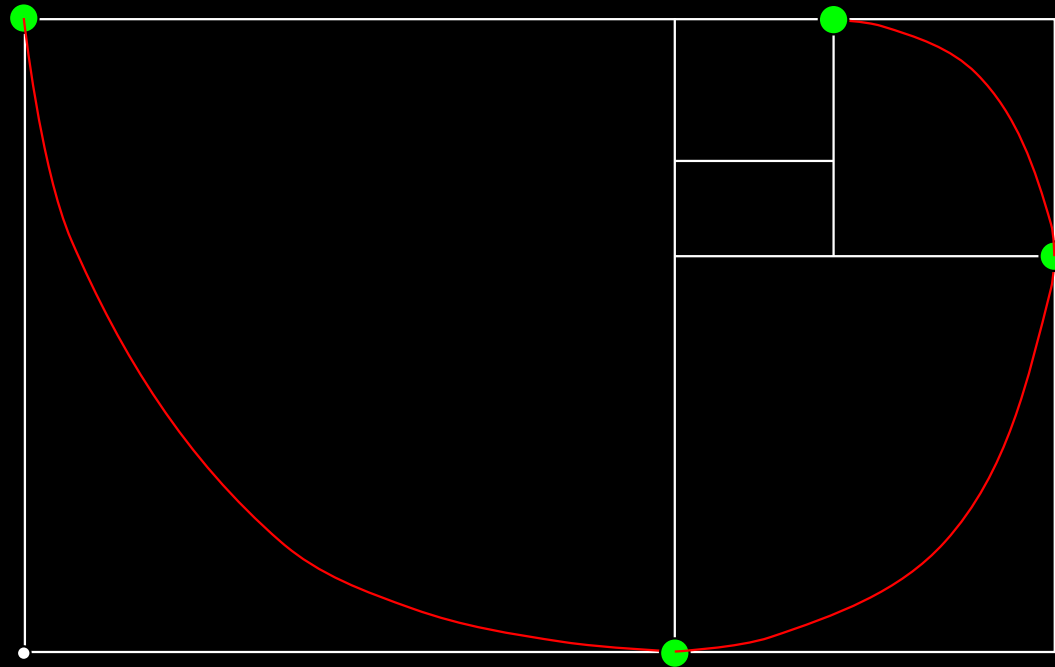
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



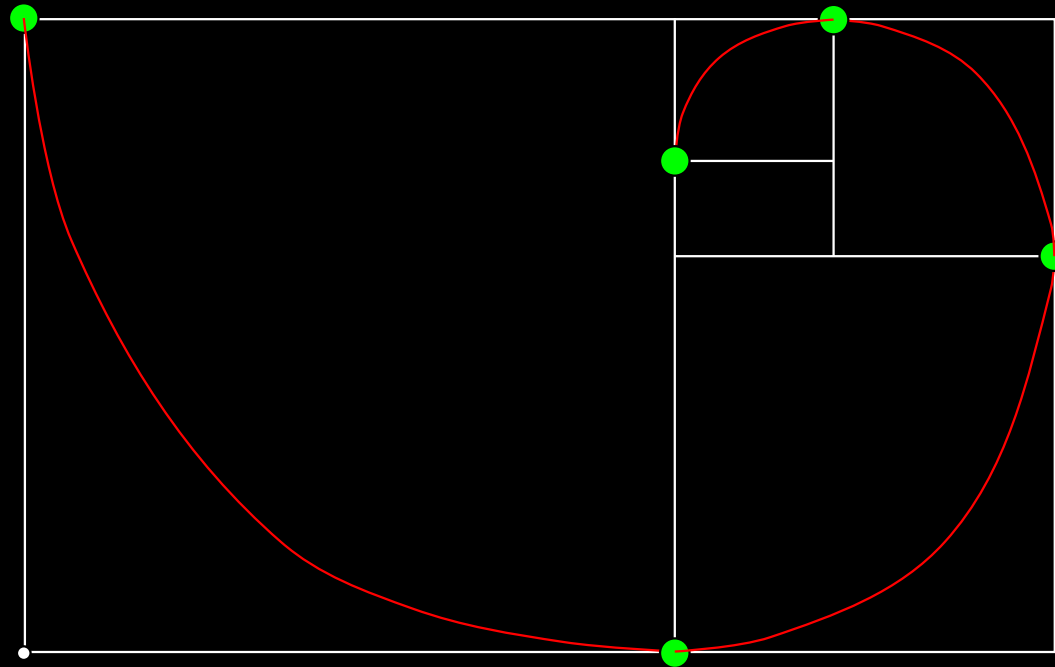
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



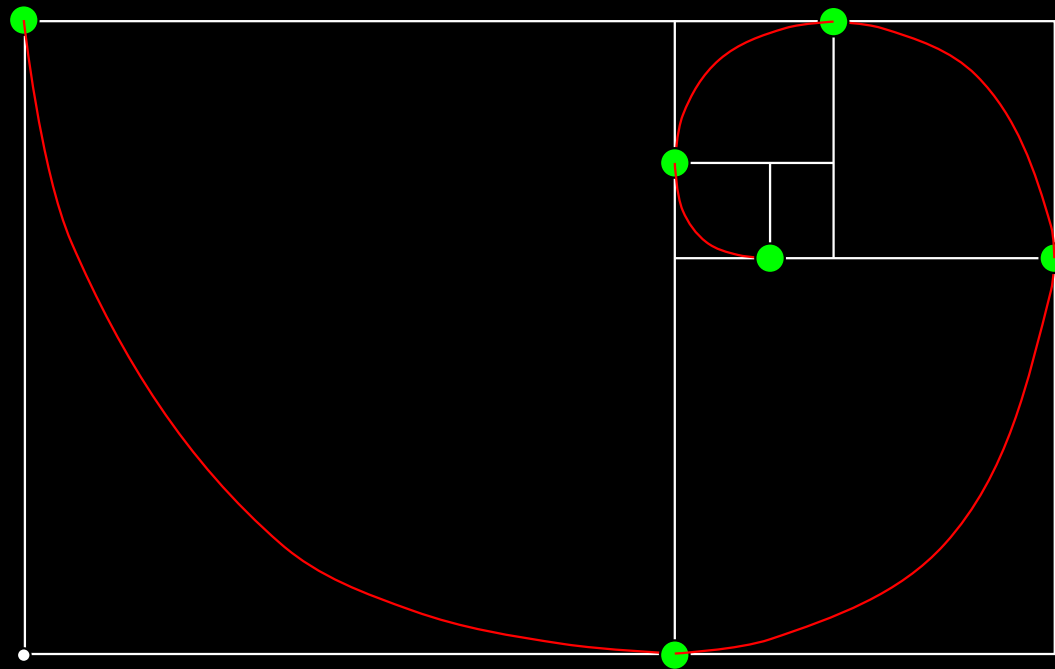
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



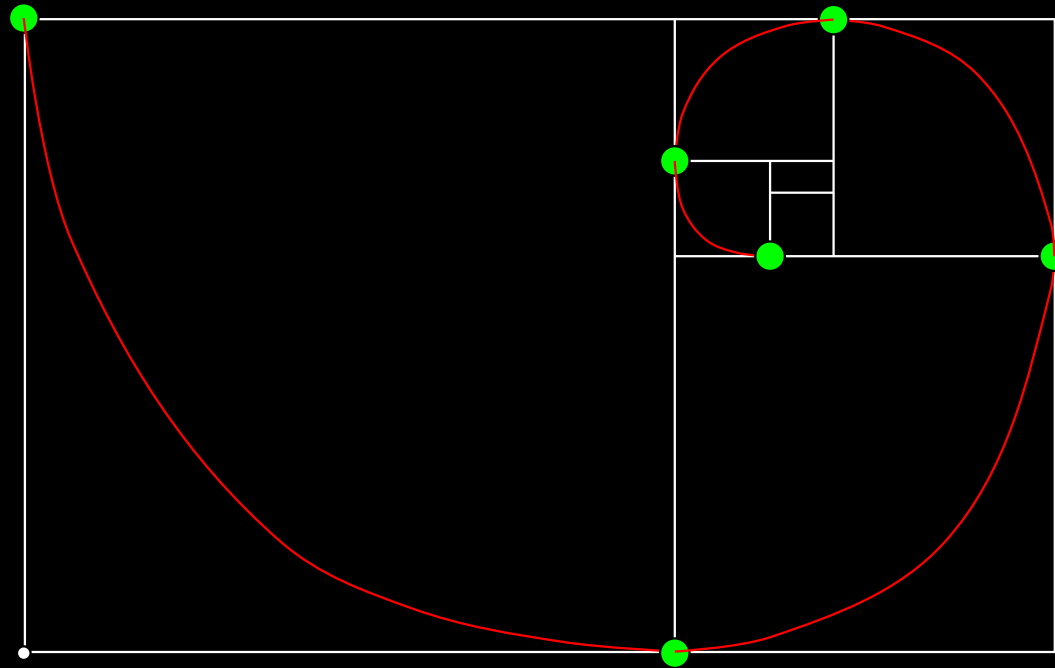
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



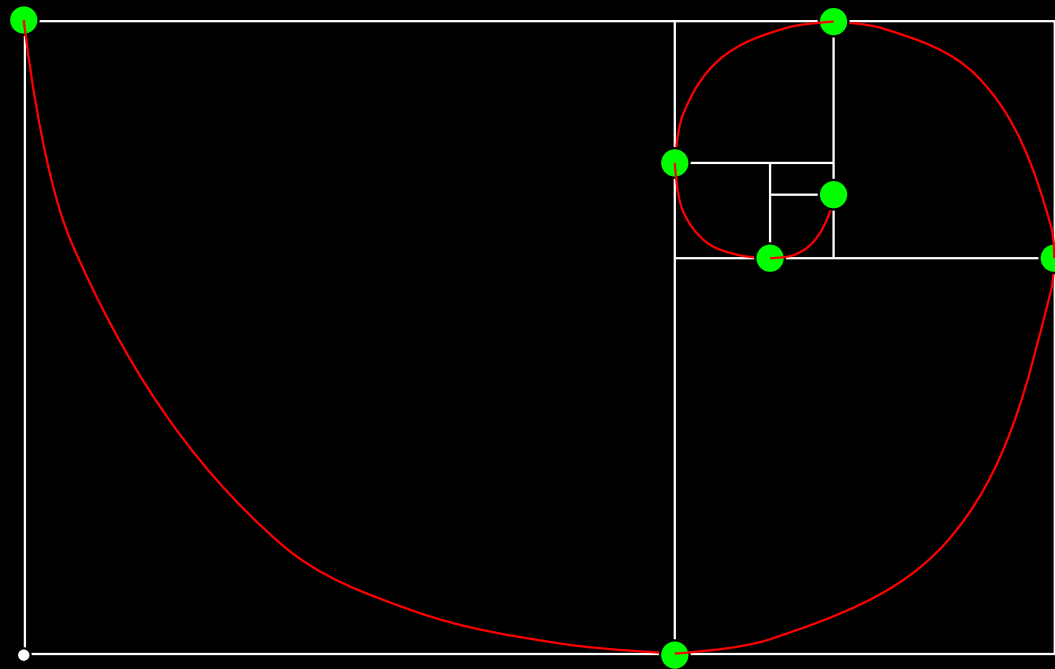
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



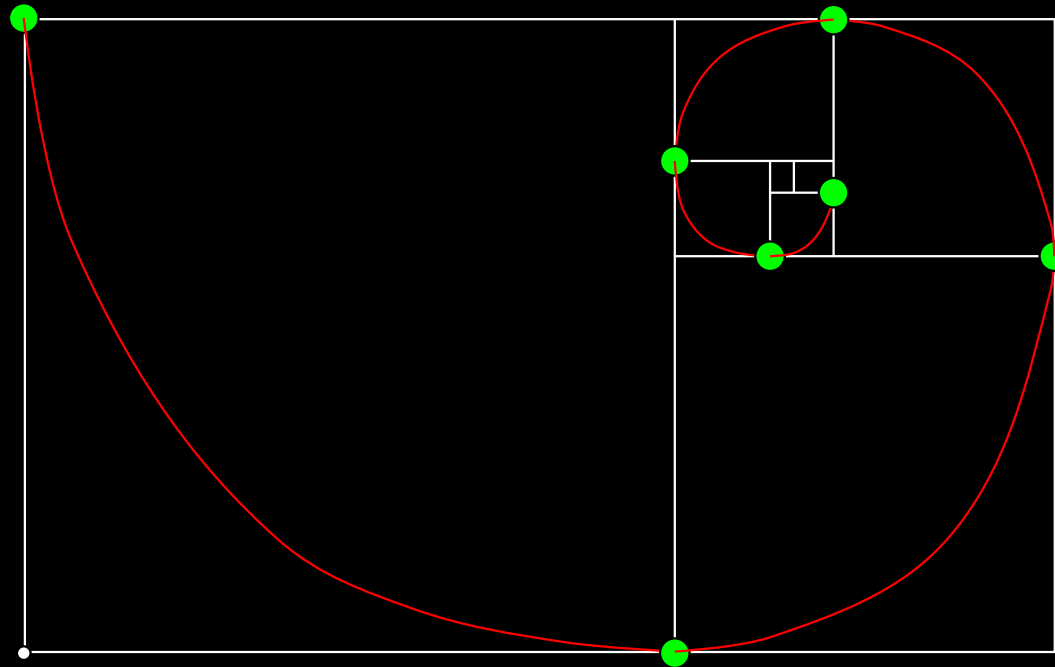
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



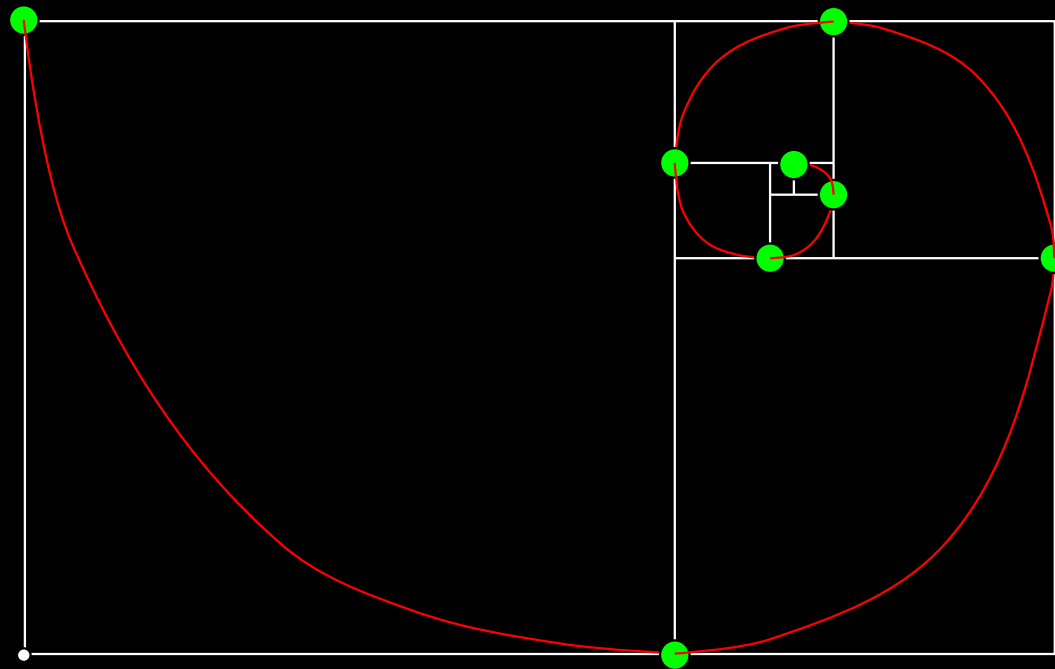
Bilder zum Goldenen Rechteck

Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.

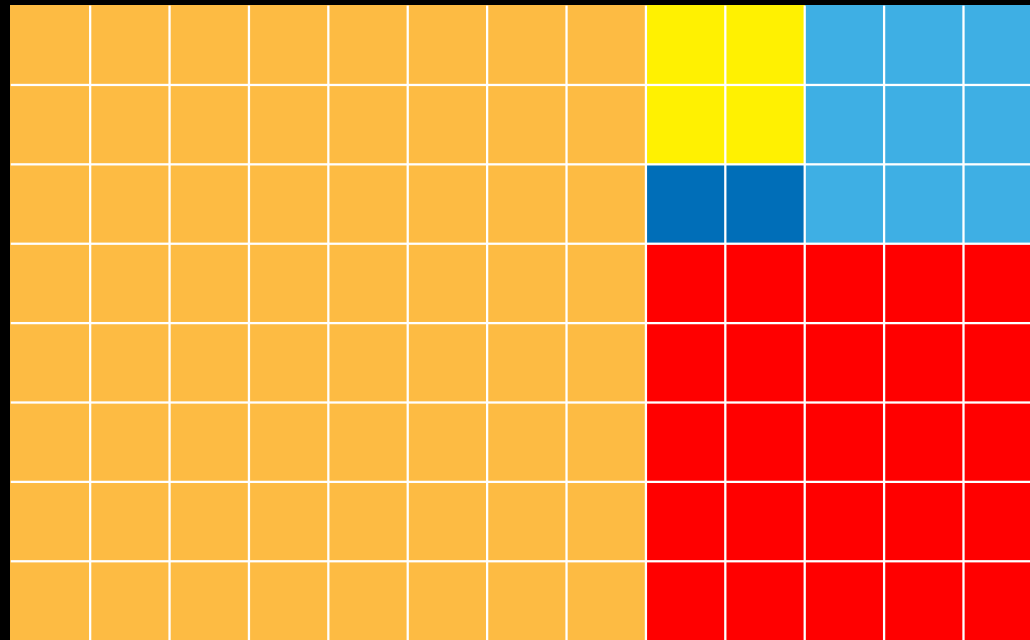


Bilder zum Goldenen Rechteck

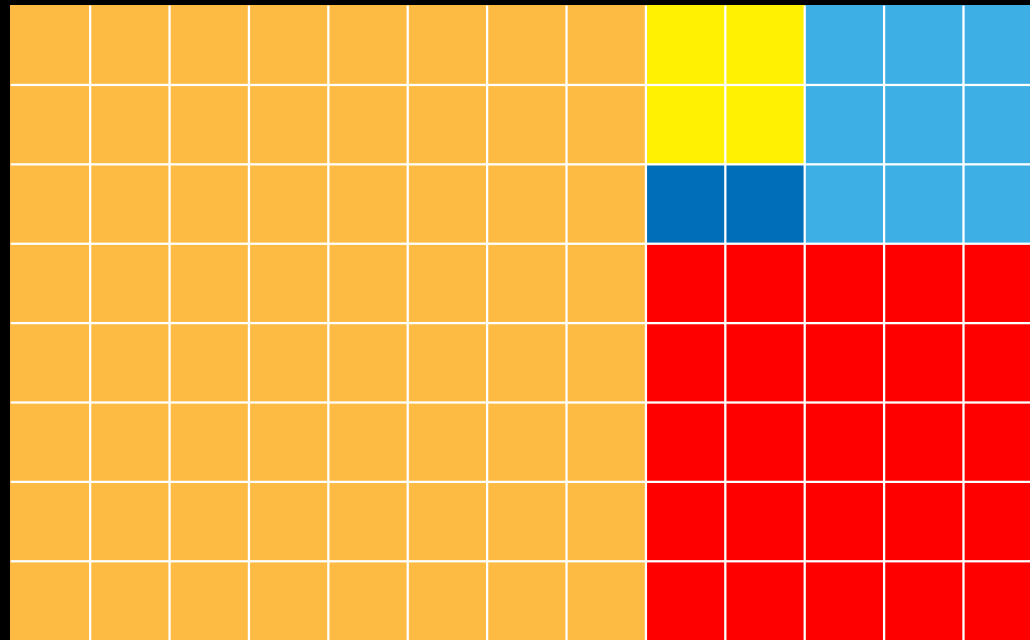
Beim Goldenen Rechteck stehen die beiden Rechteckseiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Betrachtet man die Folge der Abbildungen, in der bei jedem Schritt ein neues Goldenes Rechteck entsteht.



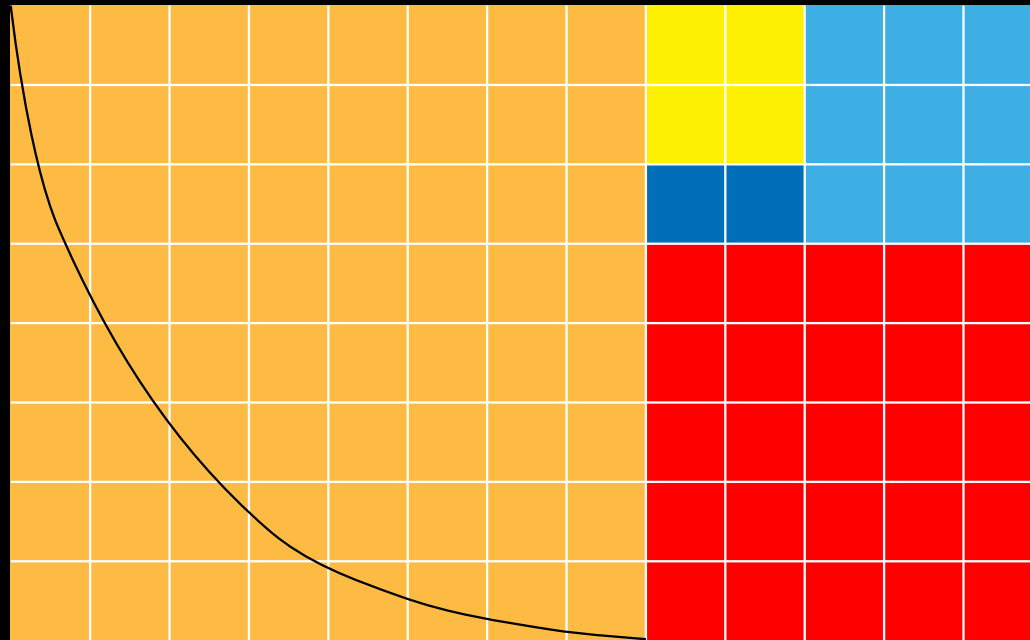
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



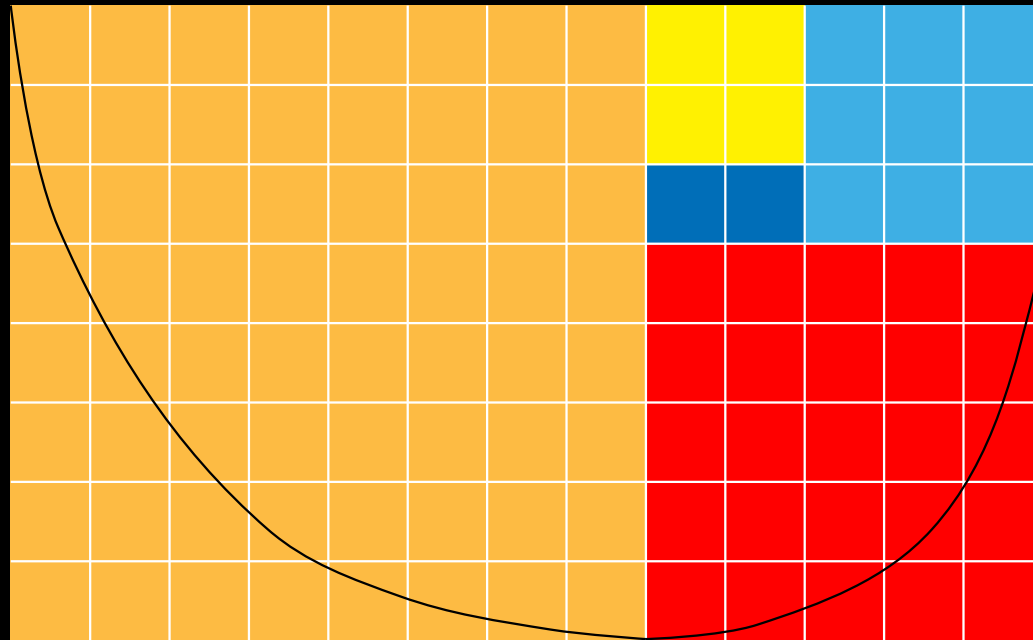
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



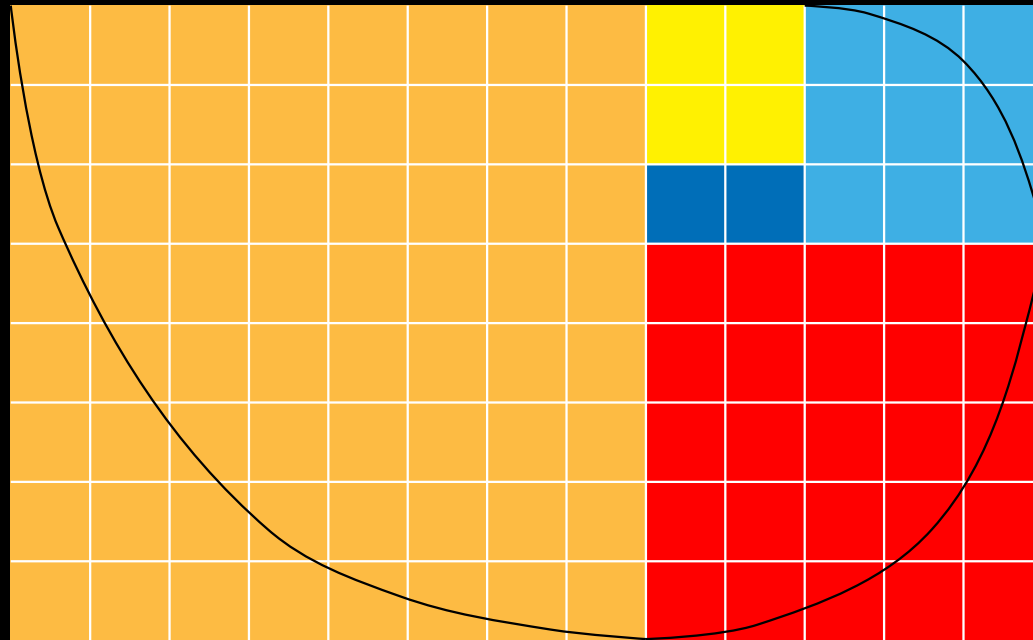
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



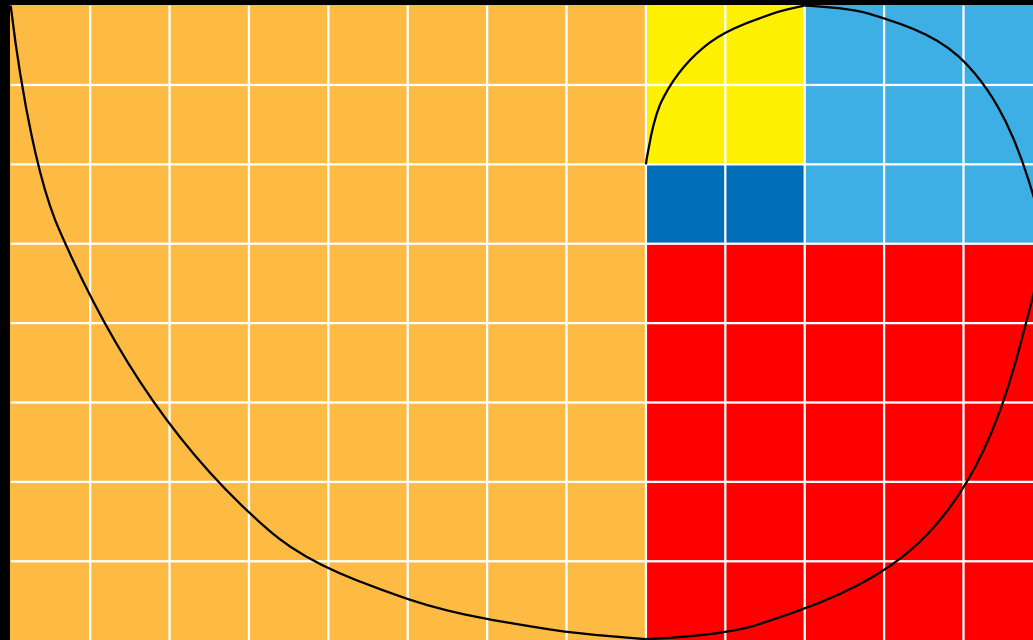
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



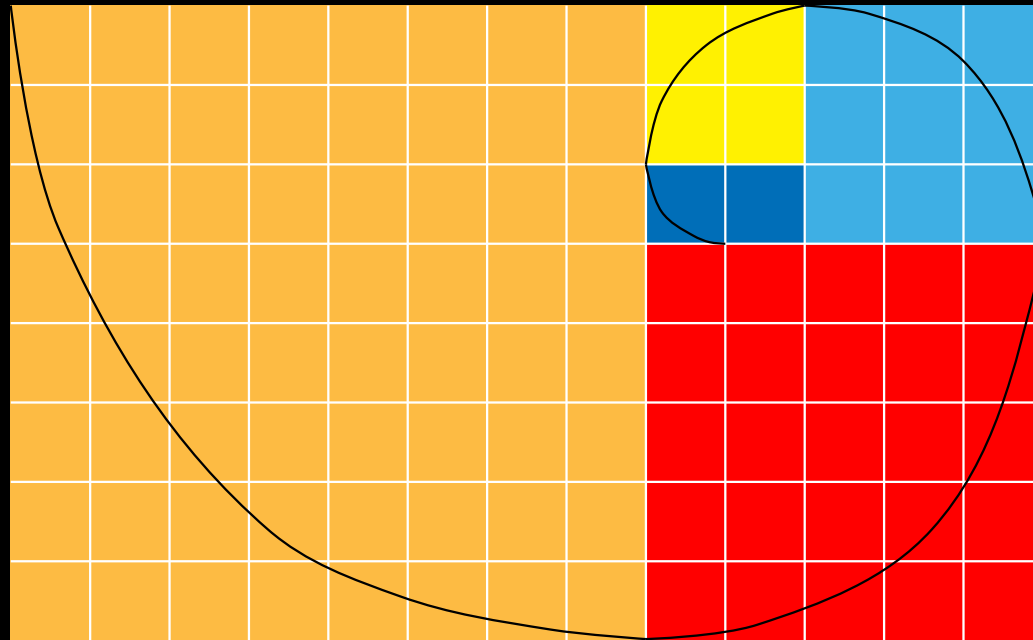
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



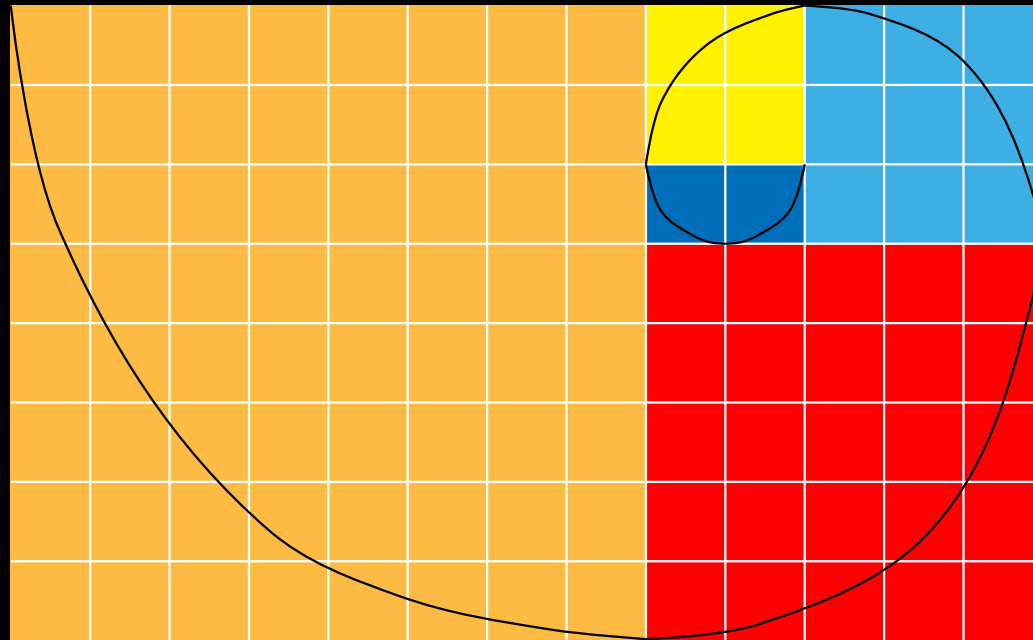
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



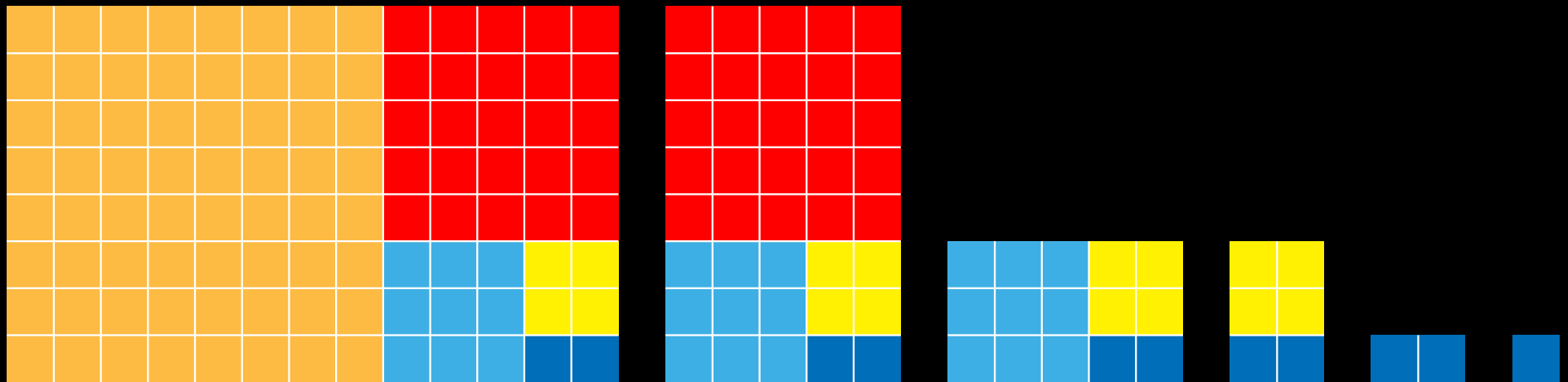
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



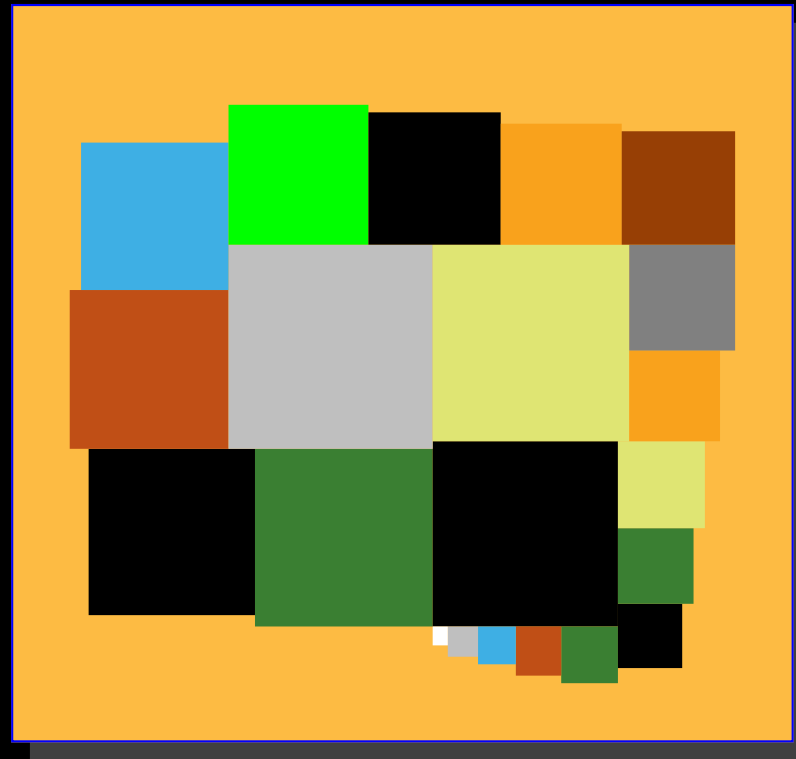
Wie eine logarithmische Spirale entsteht?



Wie eine logarithmische Spirale entsteht?

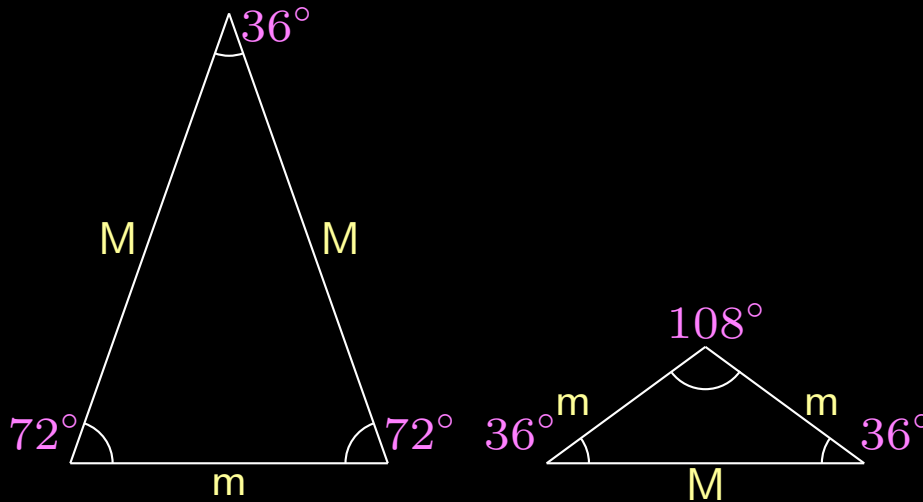


Anton Stankovski: „Quadratspirale“, (1959)

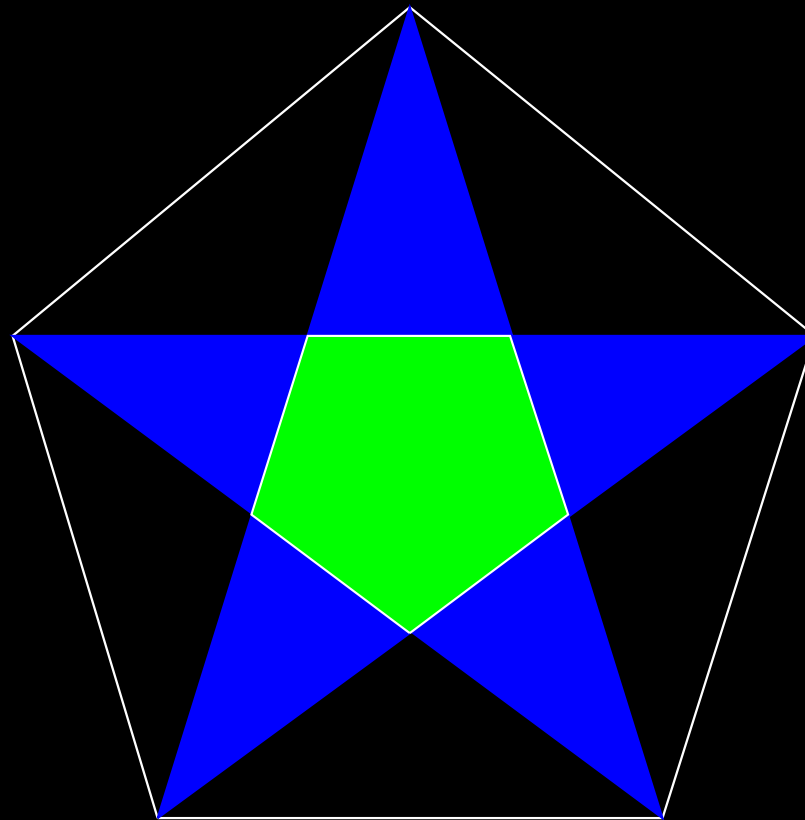


Goldenes Dreieck

Als Goldenes Dreieck bezeichnet man jedes gleichschenklige Dreieck mit goldenem Seitenverhältnis. Dazu existieren zwei Möglichkeiten: Ist m die Basis, so erhält man ein spitzes Goldenes Dreieck mit dem Basiswinkel 72° ; ist M die Basis, so erhält man ein stumpfes Goldenes Dreieck mit dem Basiswinkel 36° .

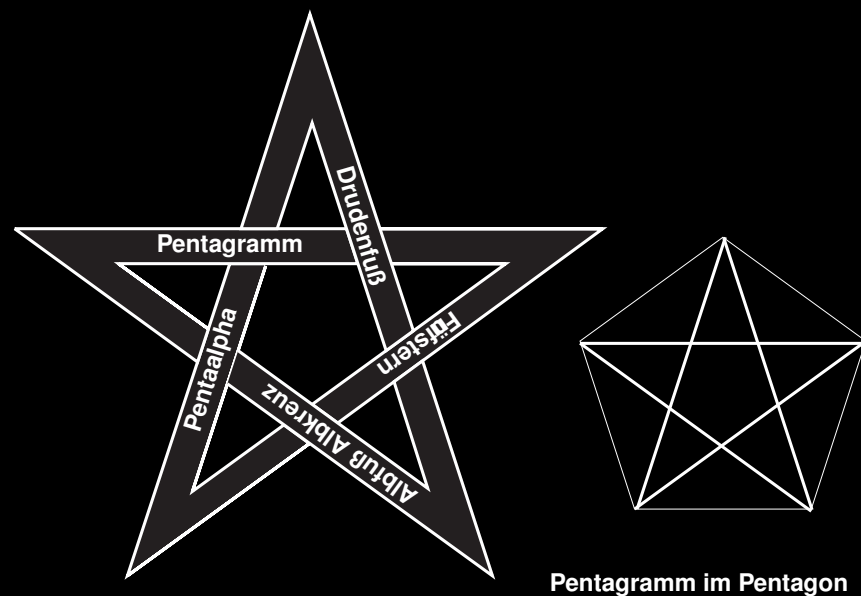


Das Pentagramm



Das Pentagramm

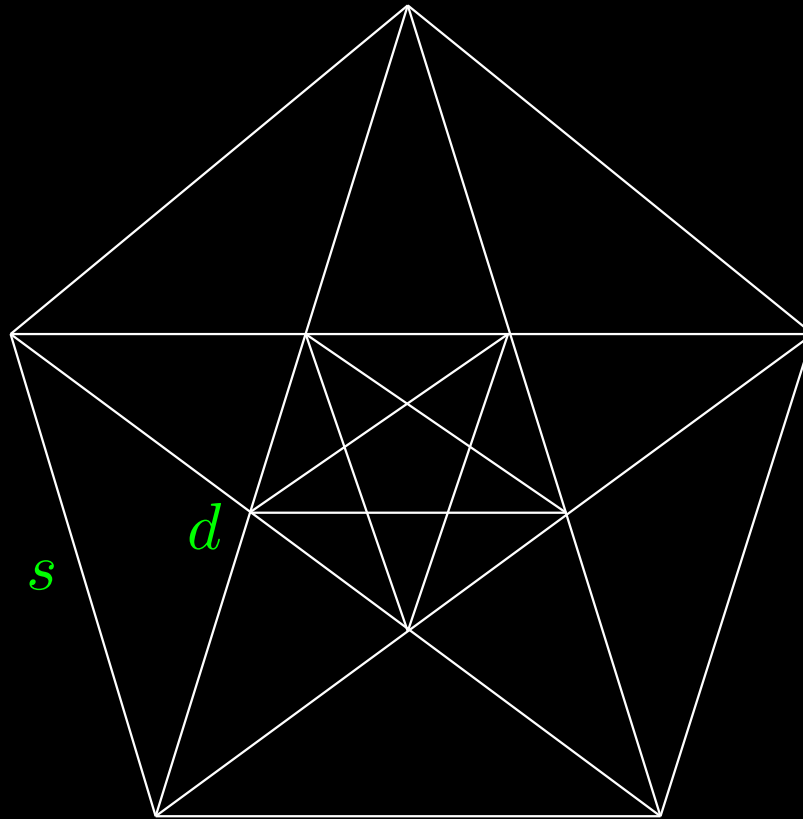
Zeichnet man in ein regelmäßiges Fünfeck die Diagonalen ein oder verlängert man die Seiten eines regelmäßigen Fünfecks, so entsteht ein fünfzackiger Stern, welchen man auch Fünfstern nennt. Andere Bezeichnungen für den Fünfstern sind Pentagramm, Drudenfuß, Albfuß bzw. Albkreuz.



Pentagramm im Pentagon



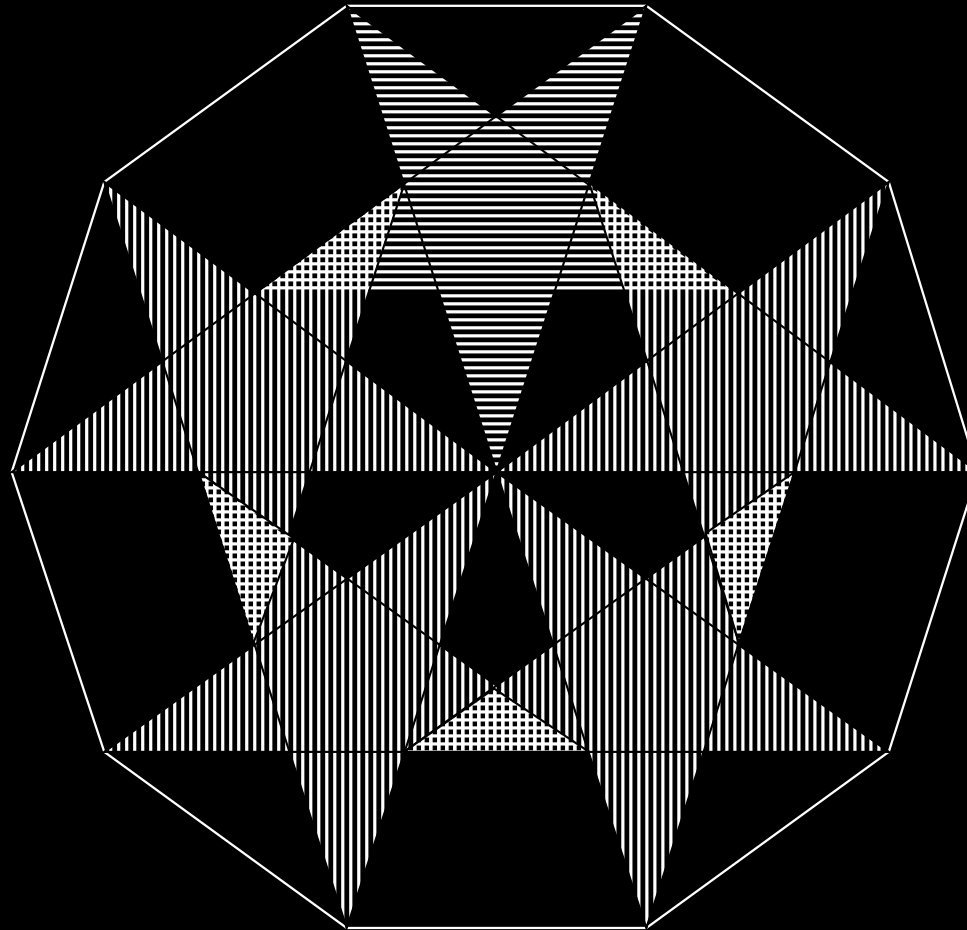
Das regelmäßige Fünfeck



Das regelmäßige Fünfeck hat u. a. folgende Eigenschaften:

- Zwei sich schneidene Diagonalen teilen sich im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Jede Diagonale und die zu ihr parallele Seite stehen zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
- Die äußeren Zacken des Pentagramms (Fünfsterns) sind (spitze) Goldene Dreiecke.
- Das sich zwischen den Diagonalen bildende kleine Fünfeck ist ebenfalls regelmäßig. Sein Flächeninhalt verhält sich dem der Ausgangsfigur wie $1 : \mu^2$.
- Einer der fünf Platonischen Körper, der Dodekaeder, besteht aus 12 regelmäßigen Fünfecken.

Das regelmäßige Zehneck



Der Zusammenhang zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Schnitt

Der Goldene Schnitt ist das Längenverhältnis zweier Strecken, bei dem sich die größere (Major) zur kleineren (Minor) Strecke verhält, wie die Summe der beiden Strecken zum größeren Teil.

Die Zahlenfolge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$ heißt **Fibonacci-Folge**. Dabei ist jede Zahl größer als 1 die Summe der beiden vorhergehenden.

Aufgabe: *Man bilde den Quotienten aus zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen. Was stellen Sie fest?*

| n | F_n | $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ |
|-----|-------|-----------------------|
| 0 | 0 | — |
| 1 | 1 | 1,0000 |
| 2 | 1 | 2,0000 |
| 3 | 2 | 1,5000 |
| 4 | 3 | 1,6667 |
| 5 | 5 | 1,6000 |
| 6 | 8 | 1,6250 |
| 7 | 13 | 1,6154 |
| 8 | 21 | 1,6190 |
| 9 | 34 | 1,6176 |
| 10 | 55 | 1,6182 |
| 11 | 89 | 1,6180 |
| 12 | 144 | |

Feststellung: Die Folge der Quotienten zweier aufeinander folgender Zahlen konvergiert gegen μ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \mu = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180.$$

Die Zahl μ ist das Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Zur Fibonacci-Zahl wird man wie folgt über die stetige Teilung geführt:



Eine Strecke \overline{AB} durch dem Punkt S heißt **stetig geteilt**, wenn gilt

$$\frac{M + m}{M} = \frac{M}{m}.$$

Setzt man $\frac{M}{m} =: x$, erhält man die Gleichung

$$1 + \frac{1}{x} = x \iff x + 1 = x^2 \iff x^2 - x - 1.$$

Die positive Lösung ist

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =: \mu.$$

Die Lösung $M : m = \mu$ können an vielen Kunstwerken gefunden werden, z. B. am Parthenon in Athen bzw. am neuen Rathaus zu Leipzig.

Architektur am Dom von Florenz und Fibonacci-Zahlen

Die Zahlenfolge $1, 2, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$ nennt man Fibonacci-Folge, die Glieder dieser Folge **Fibonacci-Zahlen**. Jedes Folgenglied – mit Ausnahme der beiden Anfangszahlen – ist die Summe der beiden vorausgehenden Folgenglieder. Jede dritte Fibonacci-Zahl kann man halbieren.



Die Fibonacci-Zahlen waren Grundlage für die Planung wichtiger Proportionen der Kuppel des Domes von Florenz. Im Aufrissplan von Giovanni di Gherardo da Prato von 1426 tauchen als Maße die Fibonacci-Zahlen 55, 89 und 144 und die 17 bzw. 72 als halbierte Fibonacci-Zahlen 34 bzw. 144 auf (Maßangaben in florentinischen Bracci, 1 florentinischer Bracci

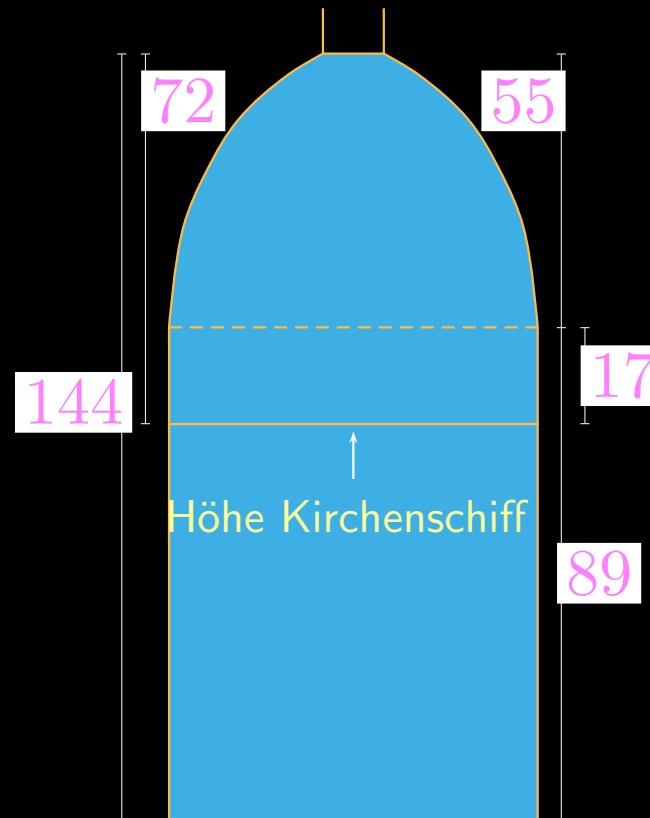
entspricht 58.4 cm).

Bei den Quotienten zweier benachbarter, am Bau verwendeter Fibonacci-Zahlen fällt auf, dass sie alle etwa 0.618 ergeben:

$$34 : 55 \approx 0.6182$$

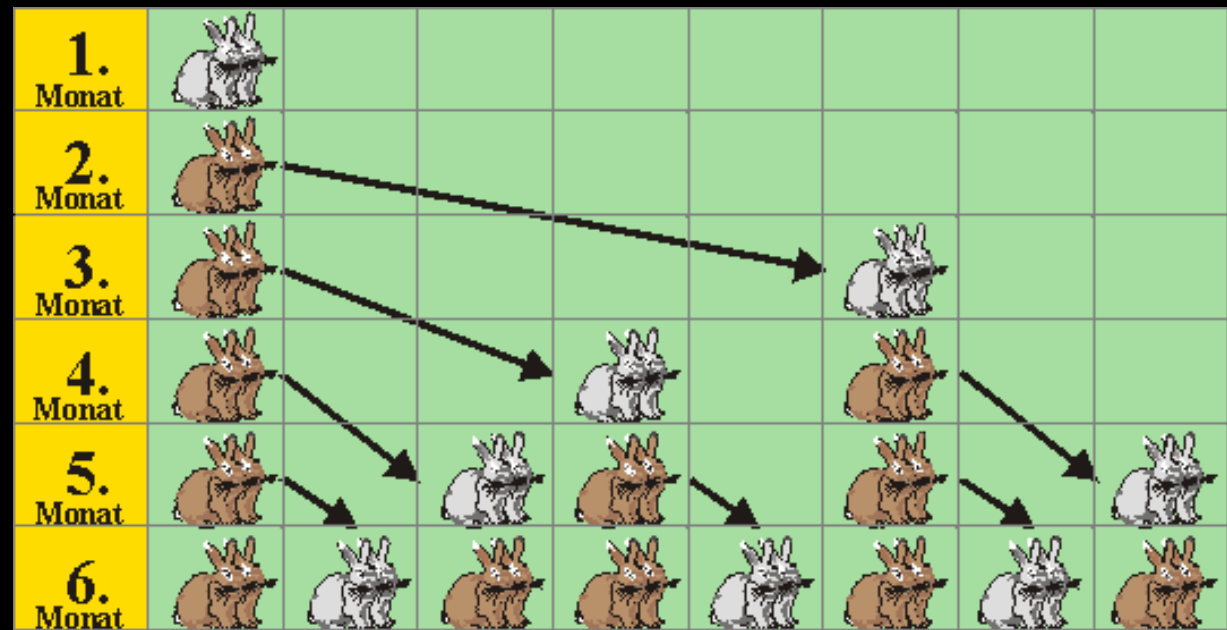
$$55 : 89 \approx 0.6180$$

$$89 : 144 \approx 0.6181$$



Kaninchenpopulation – Ein „Fall“ für Fibonacci (1170-1250)

Wie viele Kaninchenpaare gibt es am Ende eines Jahres, wenn im Januar 1 Paar zur Welt kommt und wenn es ab dem Alter von 2 Monaten jedes Paar jeden Monat ein weiteres Paar in die Welt setzt?



Altes Rathaus zu Leipzig

Der Turm teilt die Fassade im Verhältnis des „Goldenen Schnittes“.



Triumpfbogen des Kaisers Augustus in Rom



Partheon

Tempel der Athene auf der Akropolis
erbaut 447-438 v. Chr. unter Aufsicht von Phidias (475-430 v. Chr.).



Partheon

Der Vorderfront des Partheons passt genau in ein goldenes Rechteck, außerdem entsprechen auch Durchmesser und Höhen der Säulen, Höhe und Teilpunkte des Gebälks sehr exakt den Maßen, die sich bei einer fortgesetzten stetigen Teilung ergeben.



Architektur von Le Corbusier (1887-1965)

- In unserem Jahrhundert verwendete Le Corbusier bewusst den Goldenen Schnitt.
- Hauptwerk: „**Der Modulor**“ schreibt der französische Architekt, „der 'Modulor' ist ein Maßwerkzeug, das von der menschlichen Gestalt und Mathematik ausgeht“.
- Sein Modulor wurde zum Teil auch im Bereich der Innenarchitektur benutzt, setzte sich jedoch nirgends durch.

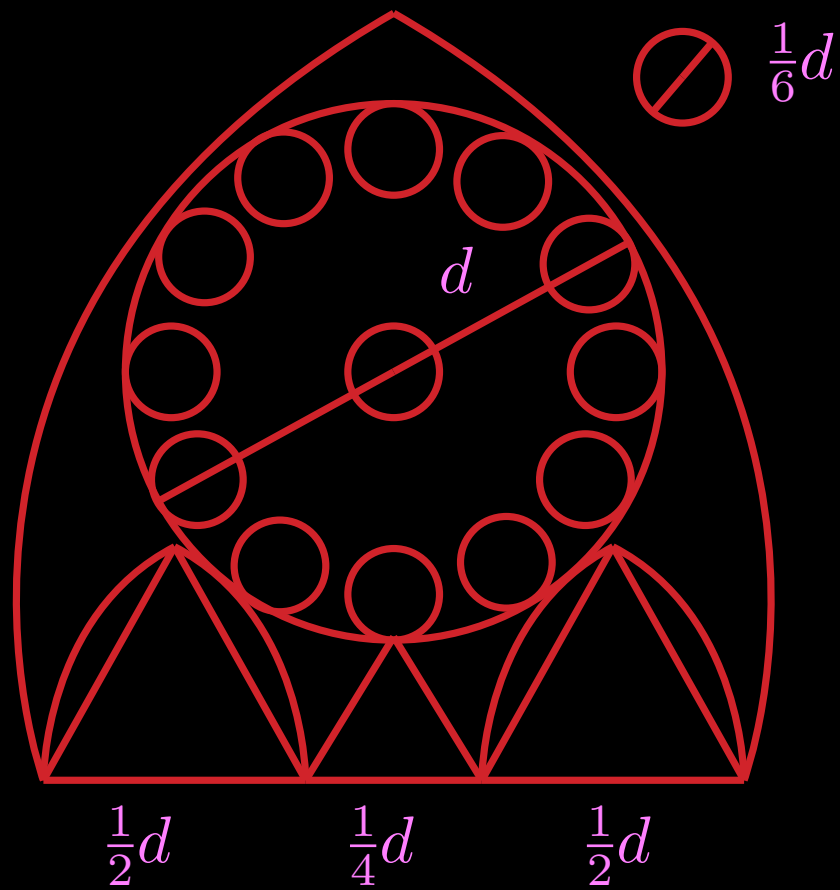
Unité d'Habitation von Le Corbusier (1887-1965) in Marseille

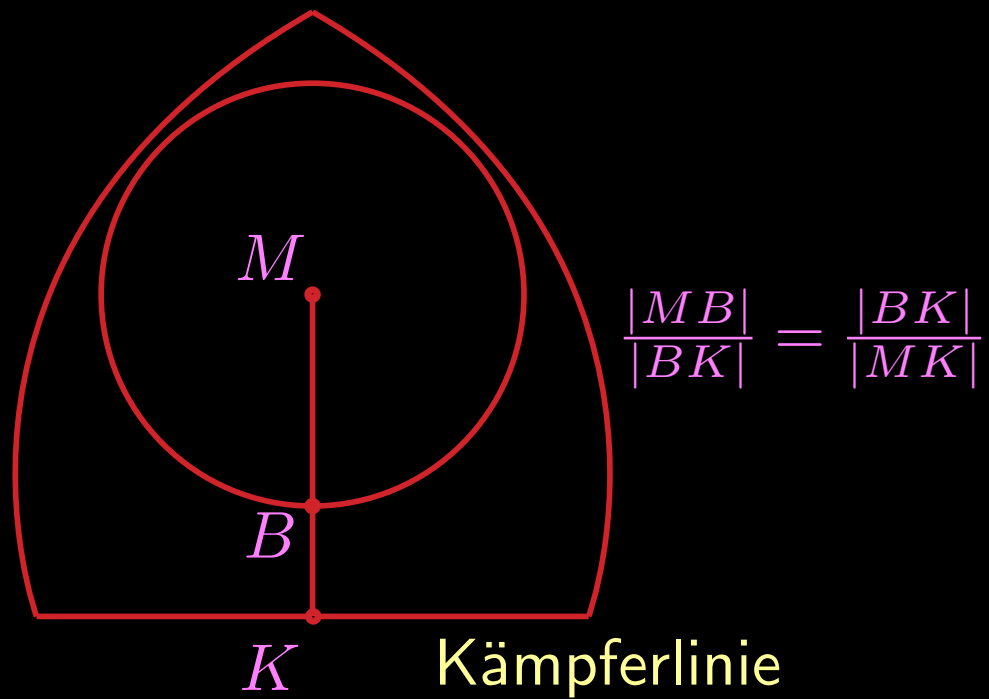


Le Corbusier (1887-1965)

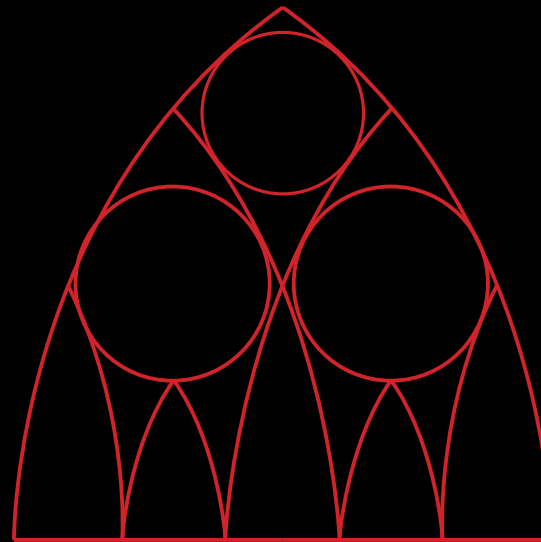
*„... Ein Mensch
mit erhobenem Arm liefert
Hauptpunkte der
Raumverdrängung – Fuss,
Solarplexus, Kopf,
Fingerspitze des
erhobenen Armes – drei
Intervalle, die eine Reihe
von goldenen Schnitten
ergeben, die man nach
Fibonacci benennt ...“*

Gotische Kirchenfenster und „Goldener Schnitt“

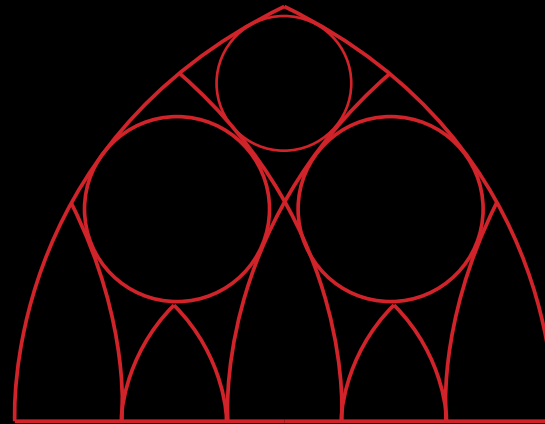




Fensterformen mit guter Gesamtwirkung: $b = h$ (die Höhen der beiden Spitzbögen mit gleicher Basisbreite stehen dann etwa im goldenen Schnittverhältnis (wenige als $1/4$ Fehlerprozent)).



Fensterformen mit guter Gesamtwirkung:
Die Höhe h steht zur Höhe des Spitzbogens, der den größeren Passkreis enthält im goldenen Schnittverhältnis.



**Raffael de Santi (1483-1520). Die sixtinische Madonna
– Bildkomposition nach dem „Goldenen Schnitt“**

obere Linie: ca. 0.64
der Gesamthöhe
untere Linie: 0.619
von oberer Linie



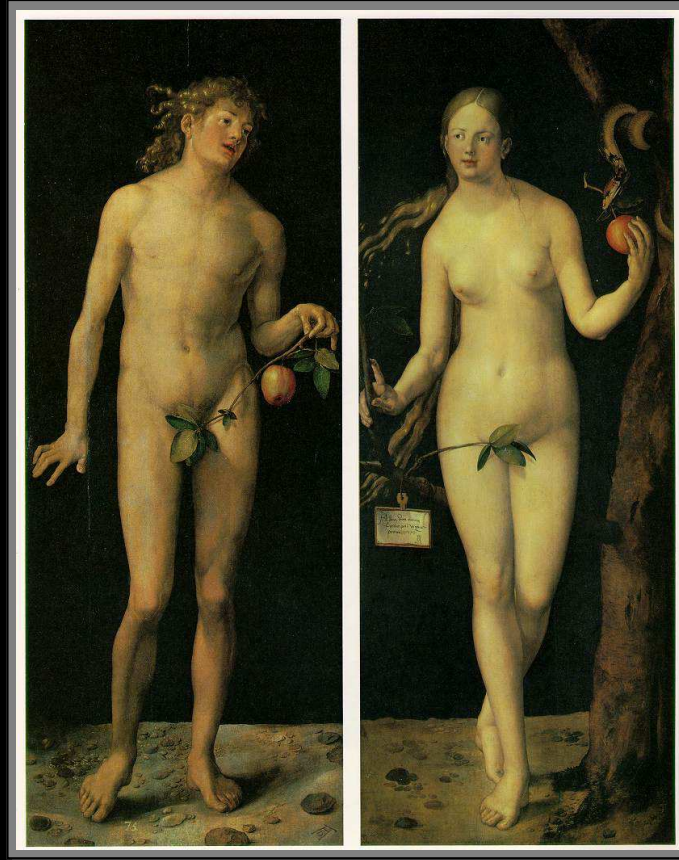
Raffael de Santi (1483-1520). Die sixtinische Madonna – Bildkomposition nach dem „Goldenen Schnitt“

m: Minor
M: Major



Albrecht Dürer (1471-1528). Adam und Eva

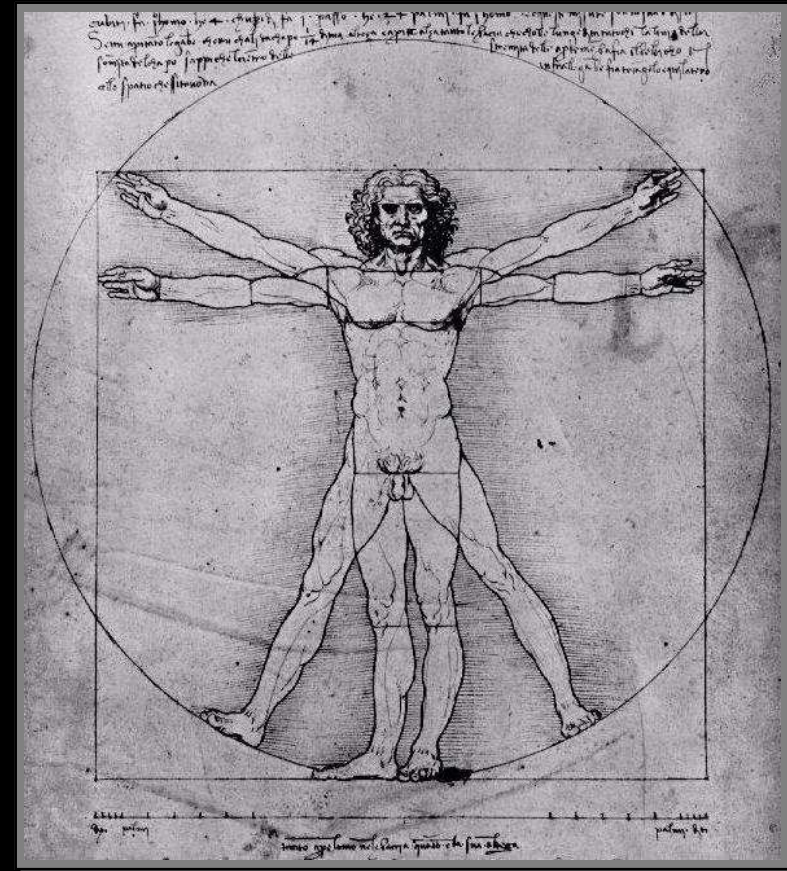
Kopf der Schlange
teilt die Bildhöhe im
Verhältnis des Golde-
nen Schnittes.



Proportionsstudie nach Vitruv – Die „idealen“ menschlicher Proportionen

Proportionsstudie nach Vitruv – Die „idealen“ menschlicher Proportionen

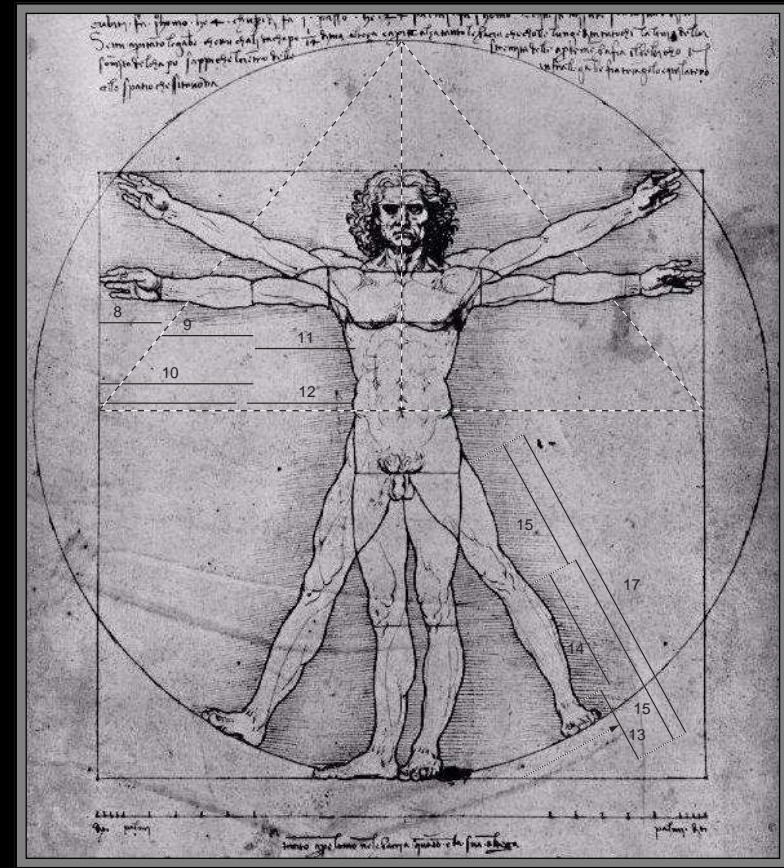
- Leonardo da Vinci (1452-1519), Luca Pacioli (1445-1514)
- Römischer Architekt Marcus Vitruvius Pollio (geb. 84. v. Chr.)
- der ideale Mensch passt genau in Kreis und Quadrat
- Markstein der Kunstgeschichte
- Symbol für die italienische Renaissance und damit für das Streben nach Harmonie zwischen Mensch und Universum



Goldener Schnitt als göttliche Proportion des Menschen

Goldener Schnitt als göttliche Proportion des Menschen

- Proportionsstudie nach Vitruv – Die „idealen“ menschlicher Proportionen
- Unterkörper : Oberkörper =
Gesamtlänge : Unterkörper
- Der Bauchnabel teilt die Körperhöhe im Verhältnis des Goldenen Schnittes, wie die Fingerspitzen der entspannt hängenden Arme.
- Auch sollte das Handgelenk den Abstand der Fingerspitzen von der Ellbogenbeuge am besten in diesem Verhältnis teilen.



Körperstudie nach Le Corbusier (1887-1965)

Körperstudie nach Le Corbusier (1887-1965)

- Architekt, Architekturtheoretiker, Maler; hatte Ambitionen für mathematische Ordnungsprinzipien in der Kunst und Architektur

Körperstudie nach Le Corbusier (1887-1965)

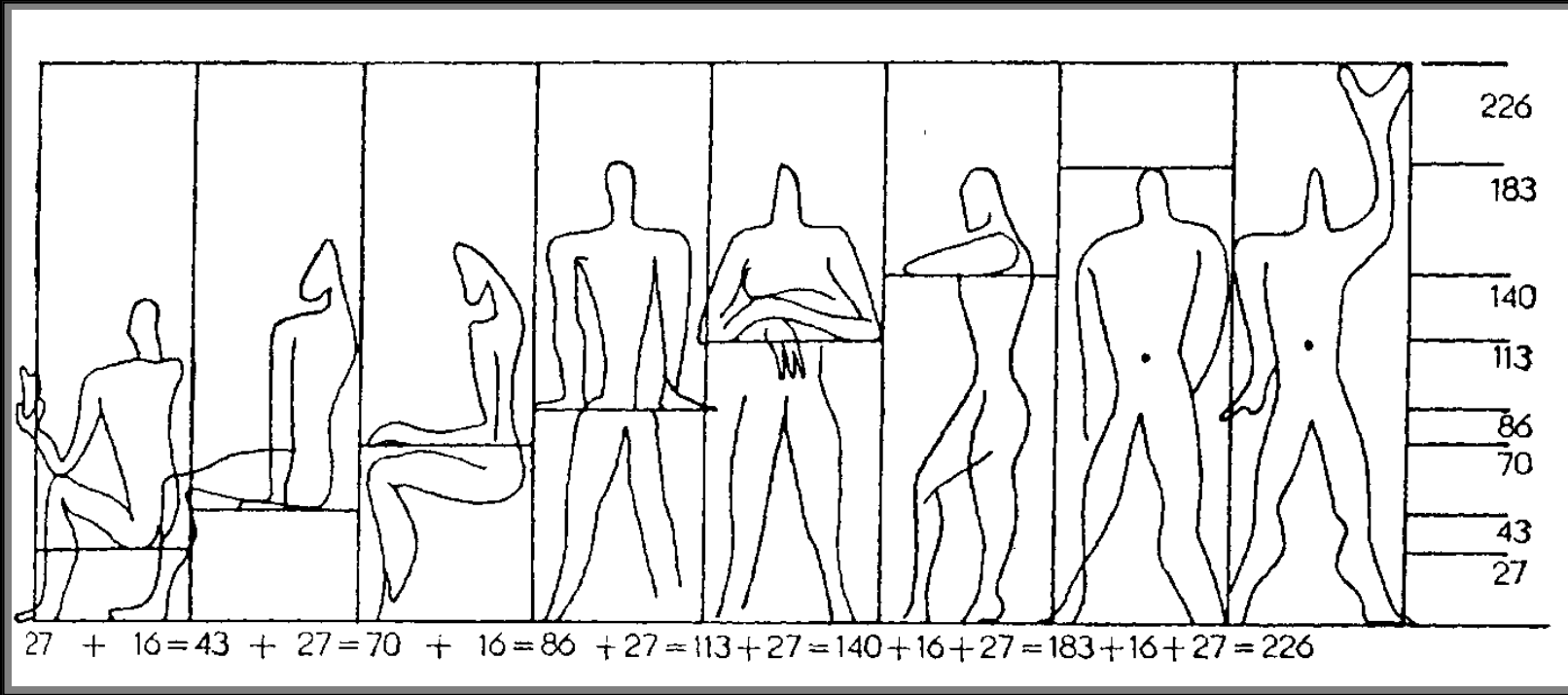
- Architekt, Architekturtheoretiker, Maler; hatte Ambitionen für mathematische Ordnungsprinzipien in der Kunst und Architektur
- widmete sich der Entwicklung des Modulars, eines einheitlichen Maßsystems, das auf ähnlichen Bestrebungen von Renaissancekünstlern beruhte

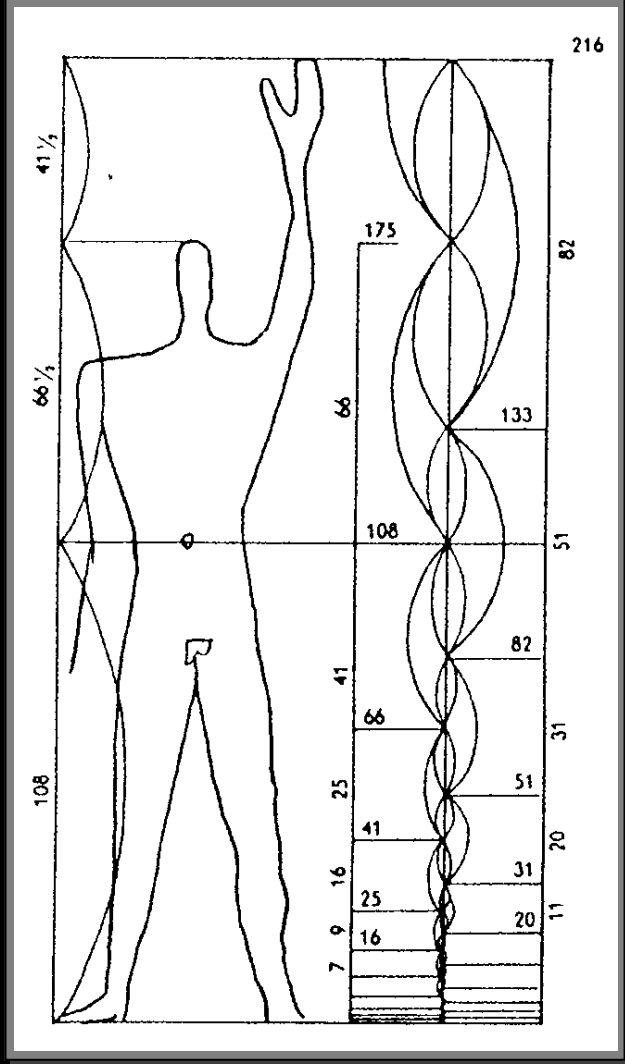
Körperstudie nach Le Corbusier (1887-1965)

- Architekt, Architekturtheoretiker, Maler; hatte Ambitionen für mathematische Ordnungsprinzipien in der Kunst und Architektur
- widmete sich der Entwicklung des Modulars, eines einheitlichen Maßsystems, das auf ähnlichen Bestrebungen von Renaissancekünstlern beruhte
- markierte drei Intervalle des menschlichen Körpers, die eine nach Fibonacci bekannte Goldene Schnitt-Reihe bildeten: der Fuß, der Solarplexus, der Kopf, die Finger der erhobenen Hand

Körperstudie nach Le Corbusier (1887-1965)

- Architekt, Architekturtheoretiker, Maler; hatte Ambitionen für mathematische Ordnungsprinzipien in der Kunst und Architektur
- widmete sich der Entwicklung des Modulars, eines einheitlichen Maßsystems, das auf ähnlichen Bestrebungen von Renaissancekünstlern beruhte
- markierte drei Intervalle des menschlichen Körpers, die eine nach Fibonacci bekannte Goldene Schnitt-Reihe bildeten: der Fuß, der Solarplexus, der Kopf, die Finger der erhobenen Hand
- die durch die mathematische Teilung des „Goldenen Schnittes“ entstehenden Bruchzahlen wurden von ihm bis zu den Differenzen von 7 mm aufgerundet und danach auf volle Zentimeter (Gebrauchswerten) abgerundet





„Mona Lisa“ von Leonardo da Vinci

„Mona Lisa“ von Leonardo da Vinci

Doch auch in der Renaissance wurde oftmals auf dieses Verhältnis zurückgegriffen. So ist Leonardo da Vincis Mona Lisa auf einem goldenen Dreieck aufgebaut, also einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Schenkel sich zur Basis nach dem goldenen Schnitt verhalten, so, wie es auch beim Pentagramm zu finden ist. Bildbreite ist die Basis eines goldenen Dreiecks mit den Basiswinkeln von 72° .

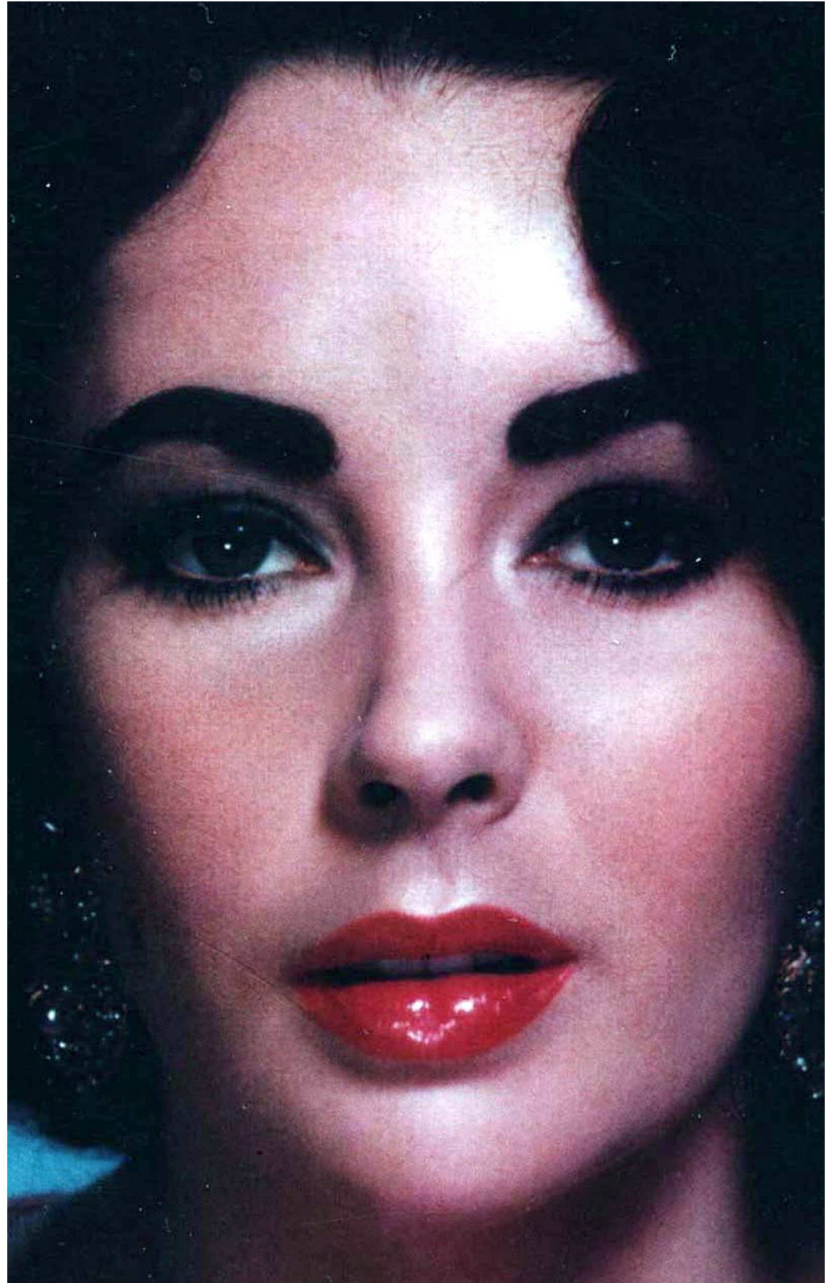
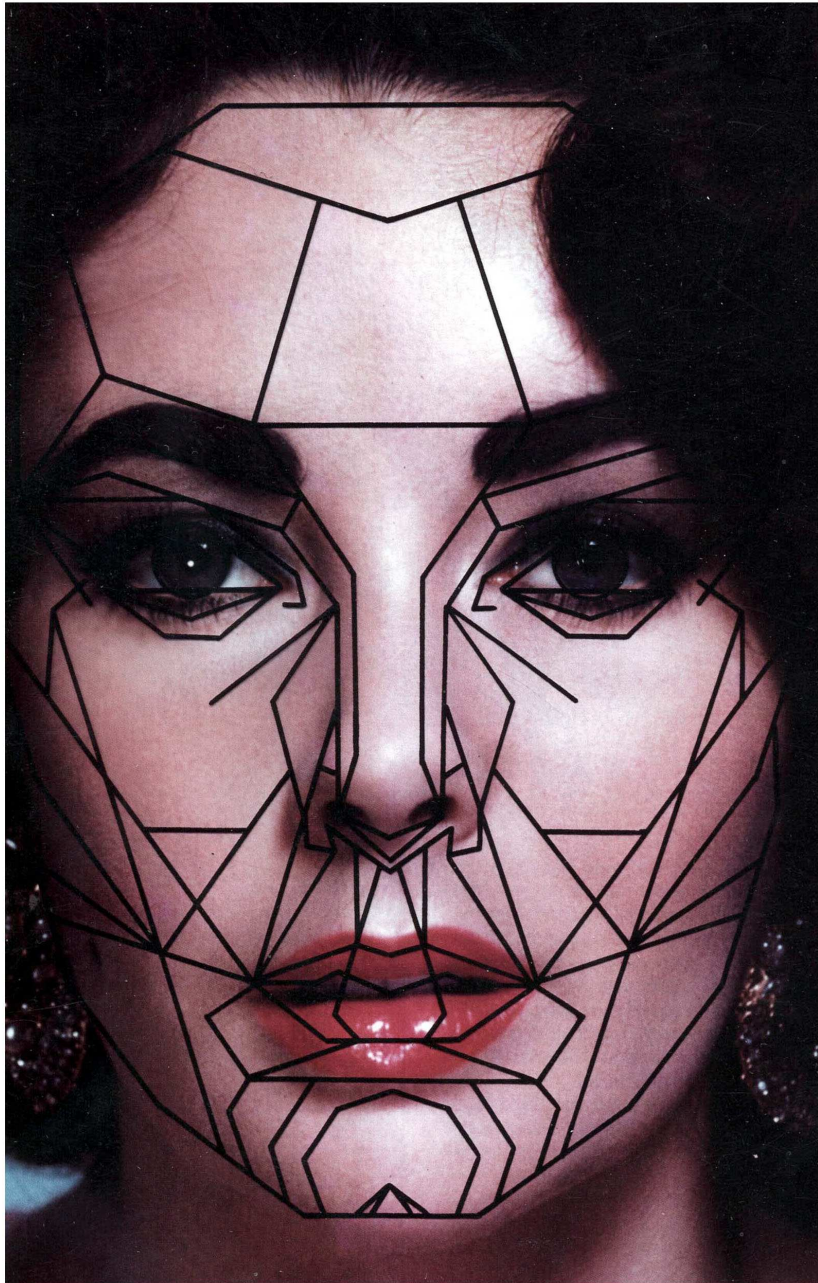


Liz Taylor im „Beauty-Check“

Der amerikanische Schönheitschirurg Stephen Marquardt will die „ultima-tive Schönheitsformel“ gefunden zu haben. 20 Jahre wertete er alles aus, was zum Thema Schönheit erforscht wurde und fand eine Formel für das ideale Maß für Schönheit.

Das Ideal ist, wenn die Distanz von den Füßen bis zum Nabel 1.618-mal die Länge vom Nabel bis zum Scheitel misst. Die Breite eines „perfekten“ Mundes beträgt 1.618-mal die Breite der Nase ...

Liz Taylor galt über viele Jahre praktisch als „schönste Frau der Welt“. Mit der „Goldenen-Schnitt-Schönheitsschablone“, die Stephan Marquardt nach seiner Idealformel konstruierte, lässt sich nachweisen, dass sie es auch „theoretisch“ ist: Keine Abweichung vom Maß 1:1.618 bei den Proportionen ihres Gesichts.



Albrecht Dürer



- geboren 21. Mai 1471 in Nürnberg, gestorben 6. April 1528 in Nürnberg
- Kupferstich „MELENCOLIA I“ 1514
- Bildkomposition nach den Regeln des Goldenen Schnittes

Der goldene Schnitt und die Musik

Richtiger **Goldener Schnitt** muss **drei Töne ins Verhältnis bringen**, da sich doch der eine Ton zum anderen verhalten soll wie der andere zur Frequenzsumme beider, also z. B. **3 : 5 : 8** (**prächtiger Dreiklang**), bei den höheren Zahlen ergibt sich allerdings logischerweise ein schwebend-ausgewogenes Verhältnis der drei, eben der Goldene Schnitt, und der Grenzwert ist ein „übermäßiger Dreiklang“, also kein in sich ruhender Klangkristall, wie die natürliche Obertonreihe, sondern so ein zwar harmonisches, aber sehr dynamisch gespreitztes, gestrecktes Gefüge, spannungsreich „gekrümmt“.

ROOT POSITION

This musical score section is titled "ROOT POSITION". It features multiple staves for different instruments. The top staff shows a melodic line with a dynamic marking of *mp*. Below it, there are staves for woodwinds and strings. Percussion parts include Cymbal, Dominant, and Side Drum. The score includes various musical notations such as notes, rests, and dynamic markings.

INVERSION

This musical score section is titled "INVERSION". It features multiple staves for different instruments. The top staff shows a melodic line with a dynamic marking of *mp*. Below it, there are staves for woodwinds and strings. Percussion parts include Cymbal, Dominant, and Side Drum. The score includes various musical notations such as notes, rests, and dynamic markings.

ROOT POSITION INVERSION

This diagram compares the "ROOT POSITION" and "INVERSION" of a chord structure. It shows two columns of notes on a staff. The "ROOT POSITION" column has notes labeled "Tonic", "Cym", "Dominant", and "Cym". The "INVERSION" column has notes labeled "Tm". Below the staff, there are labels for "Positive" and "Negative" in both positions. At the bottom, the word "POSITIVE" is written.

- Geigen- und Flötenbau: Frequenzen im Verhältnis der Fibonacci-zahlen
- Béla Bartók (1881-1945): Goldener Schnitt als beherrschendes Grundprinzip. **Sonate für zwei Klavire und Schlagzeug** ist bis in das kleinste Detail nach dessen Grundregeln strukturiert.

So dauert z. B. die gesamte Sonate exakt 6432 Achtelnoten lang, der zweite (langsame) Satz beginnt nach 3975 Achtelnoten

$$3975 \cdot \mu = 6431,7, \quad \mu = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Dies ist kein Einzelfall.

Bartók holte sich viele Anregungen aus der Musik des Volkes und es heißt, Bartóks Lieblingsblume sei die Sonnenblume gewesen und er habe sich stets über Tannenzapfen auf dem Tisch gefreut, zwei deutliche Erscheinungsformen des Goldenen Schnittes in der Natur.

Der Goldene Schnitt in der Pflanzenwelt

Sonnenblume

- Kern spiralförmig angeordnet
- jeder Kern gehört zu zwei Spiralen, die sich unterschiedlich steil von der Mitte nach außen winden
- Anzahl der Kerne in diesen beiden Spiralen sind oft aufeinander folgende Fibonaccizahlen (34 und 55 oder 55 und 89)



Ananas, Tannenzapfen

zeigen oftmals ebenfalls solche Fibonacci-Doppelspiralmuster



Blüten

- Viele Pflanzen weisen Fünfeckformen (fünfstrahlige Symmetrie) auf,
- Beispiel: **Heckenrose**



- häufig fünfstrahlige Symmetrie
- Beispiel: **Glockenblume**



Blattstand (Phyllotaxis)

- Anordnung der Blätter eines Astes so, dass sie sich möglichst wenig gegenseitig beschatten und die Luft wegnehmen
- **Linde**: Die Blätter eines Astes stehen abwechselnd gegenüber ($\frac{1}{2}$ -Phyllotaxis)
- **Buche, Haselnuss**: Die jeweils nächsten Blätter wachsen um 120° gedreht ($\frac{1}{3}$ -Phyllotaxis)
- **Eiche, Apfelbaum**: $\frac{2}{5}$ -Phyllotaxis (d. h. $\frac{2}{5}$ -Drehungen bis zum nächsten Blatt, das 6. Blatt steht wieder über dem ersten)

- Weiden: $\frac{5}{13}$ -Phyllotaxis

Jede Drehung um $\frac{5}{13}$ in der einen Richtung ist aber gleich einer Drehung um $\frac{8}{13}$ in der anderen Richtung, sodass man bei all diesen Beispielen sogar aufeinander folgende **Fibonacci-Zahlen** findet. Somit stellen die Brüche Näherungen des **Goldenen Schnittes** dar.

Storchenschnabel



Springkrautpflanze

Goldener Winkel: $137,4^\circ$



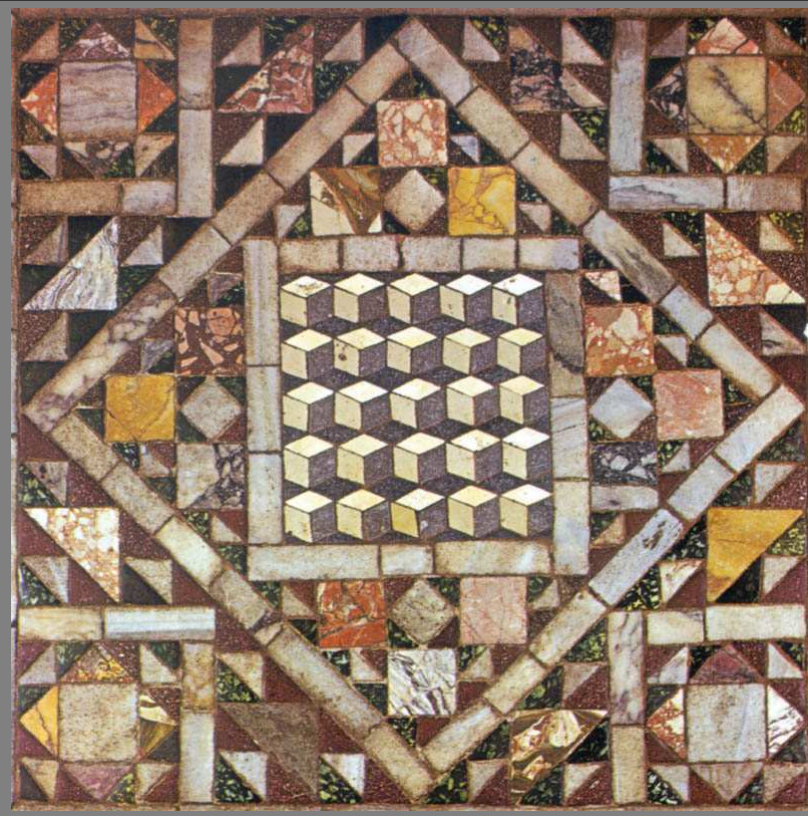
Symmetrie und die Kunst der Ornamente

Zentralsymmetrie

Eine Figur ist zentralsymmetrisch, wenn alle zulässigen Deckabbildungen

- Drehungen um einen gemeinsamen Mittelpunkt oder
- Spiegelungen an einer Geraden durch diesen Punkt sind.

Als Beispiel einer zentralsymmetrischen Figur stellt das Fußbodenmosaik des Markusdoms in Venedig dar.



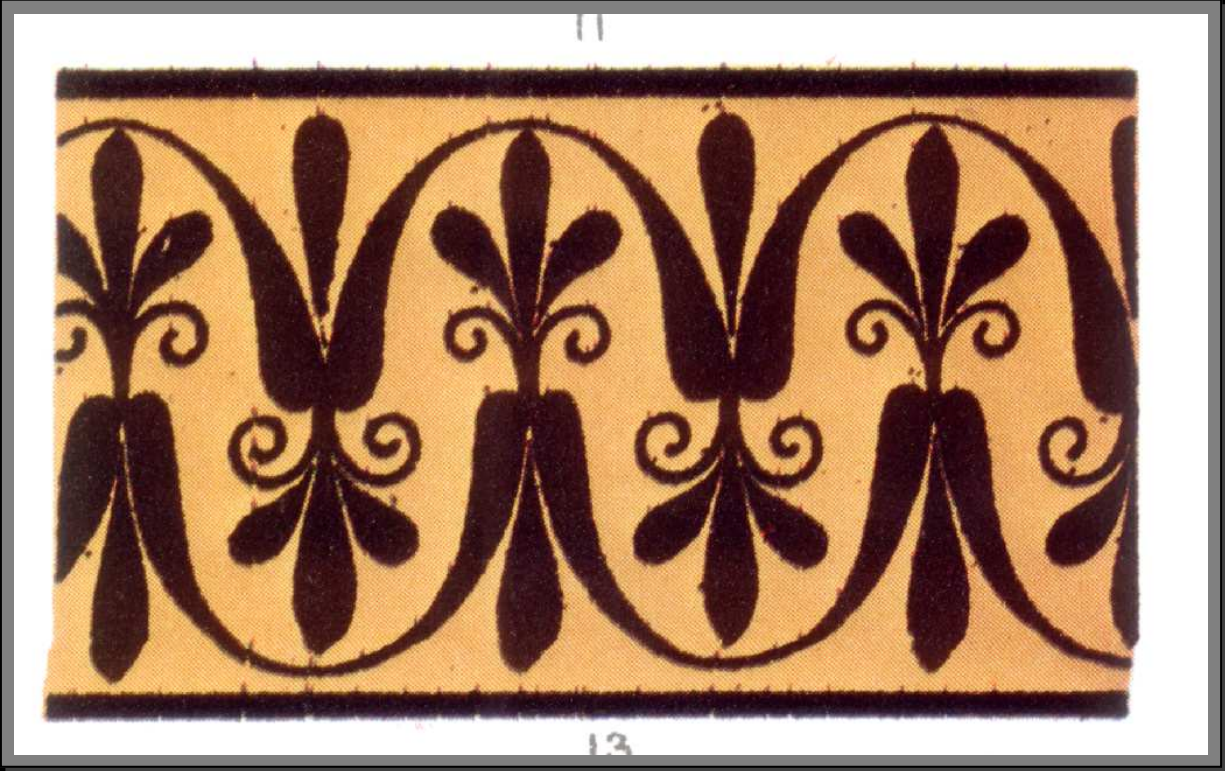
Fries-Symmetrie

Ein Fries ist ein periodisches Ornament, welches zwischen zwei parallelen Geraden eingeschlossen ist. Eine Friessymmetrie liegt vor, wenn die symmetrische Figur eine endliche Breite, aber eine „unendliche“ Länge und folgende Eigenschaften besitzt:

- Verschiebungen in sich,
- Drehungen um 180° ,
- Spiegelungen an Längs- und / oder Querachsen mit sich selbst.

Somit muss das Fries periodisch sein.

Griechische Bandornament:



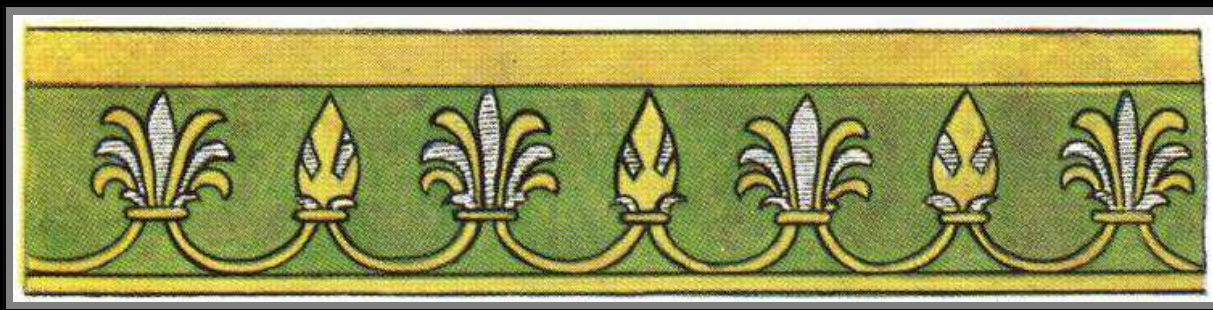
Fries Babylon:



Fries antikes Olympia:



Fries Chorsabad (Assyrien)



„Daß zwei Dinge sich auf eine schöne Art vereinigen ohne ein drittes, ist unmöglich. Denn es muss ein Band zwischen ihnen entstehen, das sie vereinigt. Das kann die Proportion am besten vollbringen. Denn wenn von irgend drei Zahlen die mittlere sich zu der kleinsten verhält, wie die größte zu der mittleren selbst und umgekehrt, die kleinste zu der mittleren wie die mittlere zur größten, dann wird das Letzte und das Erste das Mittlere und das Mittlere Erstes und Letztes, alles wird also mit Notwendigkeit dasselbe, und da es dasselbe wird, bildet es ein Einziges.“

Platon: Timaios



Luca Pacioli