Kapitel 2

Lineare Algebra

2.1 Lineare Gleichungssysteme und lineare Unterräume

Wir legen im Folgenden immer einen festen Körper zugrunde, den wir mit K bezeichnen. Die Elemente von K werden auch *Skalare* genannt.

Die Elemente aus K^n (die "n-Tupel") werden von nun ab als "Spaltenvektoren" geschrieben, beispielsweise so:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dementsprechend nennen wir die Elemente von K^n auch *Vektoren*.

Man definiert eine Addition von Vektoren in K^n komponentenweise:

$$+ : K^n \times K^n \longrightarrow K^n \ , \quad (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Außerdem definiert man eine so genannte *Skalarmultiplikation*:

$$\cdot : K \times K^n \longrightarrow K^n \ , \quad (a, \underline{x}) \mapsto \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

Definition Wir setzen $\underline{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; dies ist der *Nullvektor*. Außerdem setzen wir

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i - \text{te Zeile}\ ; \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

dies ist der i-te *Standardvektor*.

Bemerkung Die Addition ist also eine Verknüpfung auf K^n. Die Skalarmultiplikation ist hingegen keine Verknüpfung auf K^n. Wir wissen bereits, dass K^n mit der Addition eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\underline{0}$ ist (siehe Unterabschnitt über Produkte in Abschnitt 1.5).

Ein *lineares Gleichungssystem (LGS)* über K ist ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}X_1 + \cdots + a_{1,n}X_n & = & b_1 \\ a_{2,1}X_1 + \cdots + a_{2,n}X_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}X_1 + \cdots + a_{m,n}X_n & = & b_m \end{array} \tag{2.1}$$

mit $a_{i,j} \in K$ und den "Unbestimmten" $X_1, \ldots, X_n$.

Wir wollen die Lösungsmenge so eines Gleichungssystems explizit bestimmen.

Zunächst eine Definition.

Definition Ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}X_1 + \cdots + a_{1,n}X_n & = & 0 \\ a_{2,1}X_1 + \cdots + a_{2,n}X_n & = & 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}X_1 + \cdots + a_{m,n}X_n & = & 0 \end{array} \tag{2.2}$$

(d.h. mit "trivialer rechter Seite") heißt *homogenes lineares Gleichungssystem*. Ein lineares Gleichungssystem wie (2.1) heißt auch *inhomogenes lineares Gleichungssystem*.

Wenn man ein konkretes inhomogenes System (2.1) zugrundelegt und die rechte Seite durch Nullen ersetzt, erhält man das *zugehörige homogene lineare Gleichungssystem.*

Bemerkung Ein "inhomogenes System" kann auch eine "triviale rechte Seite" haben, d.h. ein "homogenes System" ist ein Spezialfall eines inhomogenen Systems.

Notation Gegeben ein LGS, wird die Lösungsmenge mit $\mathbb{L}$ bezeichnet. Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS wird mit $\mathbb{L}_h$ bezeichnet.

Notation Sei $A \subseteq K^n$ eine Teilmenge und $\underline{x} \in K^n$. Dann definieren wir

$$\underline{x} + A := \{\underline{x} + \underline{a} \mid \underline{a} \in A\} .$$

Bemerkung Man kann (insbesondere für $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$ oder $n = 3$) die Menge $\underline{x} + A$ als eine Parallelverschiebung von A interpretieren.

Folgerung 2.1 *Sei ein LGS (2.1) gegeben. Wir nehmen an, dass das LGS lösbar ist und fixieren eine Lösung $\underline{x}_0$. Dann gilt*

$$\mathbb{L} = \underline{x}_0 + \mathbb{L}_h .$$

Der *Beweis* ist einfach.

Bemerkung Eine Lösung $\underline{x}_0$ wie in der Folgerung heißt auch "spezielle Lösung". Man sagt: Man erhält alle Lösungen eines inhomogenen LGS, indem man eine spezielle Lösung sowie alle Lösungen des zugehörigen homogenen LGS berechnet.

Definition Ein *linearer Unterraum* von K^n ist eine Teilmenge U von K^n mit den folgenden Eigenschaften.

- $\underline{0} \in U$
- $\forall \underline{x}, \underline{y} \in U : \underline{x} + \underline{y} \in U$
- $\forall \underline{x} \in U \, \forall a \in K : a\underline{x} \in U$

Bemerkung Ein linearer Unterraum ist also insbesondere eine Untergruppe von $(K^n, +)$.

Folgerung 2.2 *Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist ein linearer Unterraum.*

Der *Beweis* ist wiederum einfach.

Definition Sei A eine Teilmenge von K^n. Dann ist A ein *affiner Unterraum* von K^n falls es ein $\underline{x}_0 \in K^n$ und einen linearen Unterraum U von K^n mit $A = \underline{x}_0 + U$ gibt.

Lemma 2.3 *Seien $\underline{x}_0, \underline{y}_0 \in K^n$ und $U, V \subseteq K^n$ lineare Unterräume mit $\underline{x}_0 + U = \underline{y}_0 + V$. Dann ist $U = V$ und $\underline{x}_0 - \underline{y}_0 \in U$.*

Beweis. Es ist $(\underline{y}_0 - \underline{x}_0) + V = U$. Da $\underline{0} \in V$ ist $\underline{y}_0 - \underline{x}_0 \in U$ (und somit auch $\underline{x}_0 - \underline{y}_0 \in U$). Analog zeigt man, dass auch $\underline{x}_0 - \underline{y}_0 \in V$.

Sei nun $\underline{u} \in U$. Dann ist $\underline{x}_0 - \underline{y}_0 + \underline{u} \in V$. Somit ist auch $\underline{u} = \underline{x}_0 - \underline{y}_0 + \underline{u} - (\underline{x}_0 - \underline{y}_0) \in V$. Wir haben gesehen, dass $U \subseteq V$. Analog zeigt man, dass $V \subseteq U$. □

Definition Sei A ein affiner Raum mit $A = \underline{x}_0 + U$. Dann heißt U der *zu A gehörige lineare Unterraum.* Dieser Unterraum wird mit U_A bezeichnet.

Beachten Sie, dass nach dem obigen Lemma dieser lineare Unterraum nur von A abhängt.

Der Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen ist durch die folgende Folgerung gegeben.

Folgerung 2.4 *Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines inhomogenen LGS ist ein affiner Unterraum, und die Lösungsmenge $\mathbb{L}_h$ des zugehörigen homogenen LGS ist der zu diesem affinen Unterraum gehörige lineare Unterraum.*

Dies folgt aus Folgerung 2.2 und Folgerung 2.1. □

Definition Ein *(endliches) System von Vektoren* in K^n ist ein Tupel von Vektoren in K^n, einschließlich des *leeren Tupels.*

Ich erinnere hier an die Definition von *Tupel von Elementen einer Menge.* Sei X eine beliebige Menge, und sei $r \in \mathbb{N}$. Dann ist ein r-*Tupel* auf X eine Abbildung $\{1, \ldots, r\} \longrightarrow X$. In diesem Sinne definieren wir das *leere Tupel* (0-Tupel) als die eindeutige Abbildung $\emptyset \longrightarrow X$ (dies wurde schon in Fußnote 7 angeschnitten).

Ein System von Vektoren schreiben wir auch als $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ anstatt $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r)$. Ich betone, dass dann $r = 0$ *immer zugelassen* ist, womit gemeint ist, dass keine Vektoren gegeben sind.

Wenn wir alle Elemente eines solchen Systems von Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ $(r \geq 1)$ aufaddieren, erhalten wir den Vektor $\sum_{i=1}^{r} \underline{x}_i$. Wir definieren die Summe über das *leere System* als $\underline{0}$.

(Dies ist u.a. durch das Folgende gerechtfertigt: Wenn nun $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ ein System ist und $\underline{x}$ ein beliebiger Vektor ist, ist immer (auch für $r = 0$) $\underline{x}_1 + \cdots + \underline{x}_r + \underline{x}$ die Summe der Vektoren des Systems $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r, \underline{x}$.

Definition Sei $U \subseteq K^n$ ein linearer Unterraum, und seien $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \in U$ $(r \geq 0)$. Dann bilden $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ eine *Basis* von U, wenn gilt: Für alle $\underline{x} \in U$ gibt es eindeutig bestimmte $a_1, \ldots, a_r \in K$ mit

$$\underline{x} = a_1\underline{x}_1 + \cdots + a_r\underline{x}_r \ .$$

Bemerkungen Der lineare Unterraum $\underline{0}$ hat das leere System als Basis.

Die Standardaufgaben zu linearen Gleichungssystemen lauten nun wie folgt:

- Gegeben ein homogenes lineares Gleichungssystem, finde eine Basis des Lösungsraums $\mathbb{L} = \mathbb{L}_h$!
- Gegeben ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, finde eine Basis von $\mathbb{L}_h$ sowie eine "spezielle Lösung" $\underline{x}_0 \in \mathbb{L}_h$!

Diese Aufgaben kann man mit dem *Gauß-Algorithmus* lösen, den wir im nächsten Abschnitt behandeln.

Doch zunächst noch weitere Begriffe.

Sei im Folgenden U immer ein linearer Unterraum, und seien $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \in U$ $(r \geq 0)$.

Definition Die Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ bilden ein *Erzeugendensystem* von U, wenn gilt: Für alle $\underline{x} \in U$ gibt es $a_1, \ldots, a_r \in U$ so dass $\underline{x} = a_1\underline{x}_1 + \cdots + a_r\underline{x}_r$.

Man sagt dann auch, dass U von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ *erzeugt* wird.

Definition Der von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ *erzeugte lineare Unterraum* ist

$$\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K := \{a_1\underline{x}_1 + \cdots + a_k\underline{x}_k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K\} \ .$$ [1]

[1] Man schreibt auch $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle$. Vorsicht: Hier besteht u.U. Verwechslungsgefahr mit der von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ erzeugten abelschen Untergruppe von K^n (Siehe Beispiel 1.33.)

Bemerkung Der vom leeren System erzeuge lineare Unterraum ist $\{0\}$.

Man sieht leicht, dass dies in der Tat ein linearer Unterraum ist. Genauer ist dies der kleinste lineare Unterraum von K^n, der $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ enthält. (Vergleichen Sie dies mit Beispiel 1.33!) Offensichtlich wird er von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ erzeugt.

Wir haben das folgende offensichtliche Lemma.

Lemma 2.5 *$\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ ist genau dann ein Erzeugendensystem von U, wenn $U = \langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K$.*

Definition Seien $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \in K^n$, und sei $\underline{x} \in K^n$. Dann heißt $\underline{x}$ *linear abhängig* von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$, wenn es $a_1, \ldots, a_r \in K$ mit

$$\underline{x} = a_1 \underline{x}_1 + \cdots + a_r \underline{x}_r$$

gibt. Wenn dies nicht der Fall ist, heißt $\underline{x}$ linear unabhängig von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$.

Bemerkung Der Nullvektor ist von jedem System linear abhängig, auch vom leeren System.

Lemma 2.6 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- *$\underline{x}$ ist linear unabhängig von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$.*
- $x \notin \langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K$.
- $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K \subsetneq \langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r, \underline{x} \rangle_K$.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind offensichtlich äquivalent, und die zweite impliziert die dritte.

Es ist zu zeigen, dass die dritte Aussage die zweite impliziert bzw. dass das Gegenteil der zweiten Aussage das Gegenteil der dritten Aussage impliziert.

Es gelte also $x \in \langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K$. Dann ist $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K$ ein linearer Unterraum, der $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r, \underline{x}$ enthält, und es ist auch der kleinste solche lineare Unterraum. Denn: Sei V ein weiterer Unterraum mit dieser Eigenschaft. Dann enthält V auch $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$, und somit enthält V auch $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K$.

Der kleinste lineare Unterraum, der $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r, \underline{x}$ enthält, ist jedoch $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r, \underline{x} \rangle_K$. Damit ist $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K = \langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r, \underline{x} \rangle_K$. □

Definition Die Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ heißen *linear unabhängig*, wenn keiner der Vektoren von den anderen linear abhängig ist, mit anderen Worten, falls für alle $i = 1, \ldots, r$ gilt: $\underline{x}_i$ ist linear unabhängig von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{i-1}, \underline{x}_{i+1}, \ldots, \underline{x}_r$.

Lemma 2.7 *Seien $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \in K^n$. Dann sind diese Vektoren genau dann linear unabhängig, wenn gilt:*

$$\forall a_1, \ldots, a_r \in K : a_1\underline{x}_1 + \cdots + a_r\underline{x}_r = 0 \longrightarrow a_1 = \cdots = a_r = 0 \; .$$

Beweis. Wir zeigen, dass die Vektoren genau dann linear abhängig sind, wenn das Kriterium im Lemma nicht gilt.

Wenn die Vektoren linear abhängig sind, ist das Kriterium im Lemma offensichtlich falsch.

Sei nun das Kriterium im Lemma falsch. Dann gibt es $a_1, \ldots, a_r$, nicht alle $= 0$, so dass $a_1\underline{x}_1 + \cdots + a_r\underline{x}_r = 0$. Sei $a_i \neq 0$. Dann ist also

$$\underline{x}_i = -\frac{a_1}{a_i}\underline{x}_1 - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_i}\underline{x}_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}\underline{x}_{i+1} - \cdots - \frac{a_r}{a_i}\underline{x}_r \; ,$$

d.h. $\underline{x}_i$ ist linear abhängig von den anderen Vektoren. □

Bemerkung Man sagt: "Das System $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ ist genau dann linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor nur auf triviale Weise als Linearkombination der $\underline{x}_i$ darstellen lässt."

Bemerkung Man sollte immer versuchen, das Kriterium im obigen Lemma anzuwenden, wenn man zeigen will, dass ein System von Vektoren linear unabhängig ist.

Definition

- ein "maximales linear unabhängiges System" ist ein linear unabhängiges System so dass für alle Vektoren $\underline{x}$ gilt: Das System $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r, \underline{x}$ ist linear abhängig.

- ein "minimales Erzeugendensystem" ist ein Erzeugendensystem so dass für alle $i = 1, \ldots, r$ gilt: $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{i-1}, \underline{x}_{i+1}, \ldots, \underline{x}_r$ ist kein Erzeugendensystem.

Übungsaufgabe Es gibt einen Zusammenhang zwischen den obigen Definitionen und den Begriffen "maximales Element" / "minimales Element" bei Ordnungsrelationen. Welche Menge und welche Ordnungsrelation sollte man betrachten, damit sich die obige Definition aus den allgemeinen Definitionen von Ordnungsrelationen ergeben?

Folgerung 2.8 *Sei U ein linearer Unterraum, und seien $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \in U$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ ist eine Basis von U.

b) $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von U.

c) $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ ist ein maximales linear unabhängiges System von U..

d) $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ ist ein minimales Erzeugendensystem von U.

Beweis. Wir zeigen, dass alle Aussagen äquivalent zur Aussage b) sind. Zunächst zeigen wir, dass jede der Aussagen a), c), d) (für sich) die Aussage b) impliziert.

Es gelte a). Dann haben wir insbesondere ein Erzeugendensystem. Es ist zu zeigen, dass das System auch linear unabhängig ist. Seien dazu $a_1, \cdots, a_r \in K$ mit $a_1\underline{x}_1 + \cdots a_r\underline{x}_r = \underline{0}$. Wir haben auch $0\,\underline{x}_1 + \cdots 0\,\underline{x}_r = \underline{0}$. Hieraus folgt $a_1 = 0, \ldots, a_r = 0$ aufgrund der Eindeutigkeit der "Darstellung von $\underline{0}$". Damit gilt b).

Es gelte nun c). Dann haben wir also ein linear unabhängiges System. Es ist zu zeigen, dass wir auch ein Erzeugendensystem haben. Sei dazu $\underline{x} \in U$. Dann ist nach Voraussetzung das System $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r, \underline{x}$ linear abhängig. Es gibt also $a_1, \ldots, a_r, a \in K$, nicht alle $= 0$, mit $a_1\underline{x}_1 + \cdots + a_r\underline{x}_r + a\underline{x} = \underline{0}$. Wenn nun $a = 0$ wäre, dann wären die Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ linear abhängig, was aber nach Voraussetzung nicht der Fall ist. Also ist $a \neq 0$. Damit gilt $\underline{x} = -\frac{a_1}{a}\underline{x}_1 - \cdots - \frac{a_r}{a}\underline{x}_r$. Damit gilt wiederum b).

Es gelte nun d). Dann haben wir also ein Erzeugendensystem. Es ist zu zeigen, dass wir auch ein linear unabhängiges System haben. Sei dazu $i = 1, \ldots, r$. Nach Voraussetzung ist $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{i-1}, \underline{x}_{i+1}, \underline{x}_r \rangle_K \subsetneq U = \langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K$ (siehe auch Lemma 2.5). Damit ist nach Lemma 2.6 $\underline{x}_i$ linear unabhängig von den anderen Vektoren.

Es gelte nun b).

Wir zeigen zuerst a). Offensichtlich können wir jeden Vektor in der gewünschten Weise darstellen. Wir müssen die Eindeutigkeit der Darstellung zeigen. Sei also $\underline{x} \in U$ und seien $a_1, \ldots, a_r \in K$ und $a_1', \ldots, a_r' \in K$ mit $\underline{x} = a_1\underline{x}_1 + \cdots + a_r\underline{x}_r = a_1'\underline{x}_1 + \cdots + a_r'\underline{x}_r$. Dann ist

$$\underline{0} = (a_1 - a_1')\underline{x}_1 + \cdots + (a_r - a_r')\underline{x}_r \; .$$

Nach Voraussetzung ist nun $a_1 - a'_1 = \cdots = a_r - a'_r = 0$, d.h. $a_1 = a'_1, \ldots, a_r = a'_r$.

Nun zu c). Da $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ ein Erzeugendensystem von U ist, ist jeder Vektor in U linear abhängig von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$. Damit gilt c).

Zu d). Sei $i = 1, \ldots, r$. Nach Voraussetzung ist $\underline{x}_i$ linear unabhängig von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{i-1}, \underline{x}_{x+1}, \underline{x}_r$, also gilt $\underline{x}_i \notin \langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{i-1}, \underline{x}_{i+1}, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K$. Damit ist insbesondere $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{i-1}, \underline{x}_{x+1}, \ldots, \underline{x}_r$ kein Erzeugendensystem von U. □

2.2 Der Gauß-Algorithmus

In diesem Abschnitt diskutieren wir, wie man lineare Gleichungssysteme explizit löst.

Gegeben sei also ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}X_1 + \cdots + a_{1,n}X_n & = & b_1 \\ a_{2,1}X_1 + \cdots + a_{2,n}X_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}X_1 + \cdots + a_{m,n}X_n & = & b_m \end{array} \tag{2.3}$$

über dem Körper K. Die Aufgabe besteht darin, zu entscheiden, ob das System lösbar ist, und gegebenenfalls eine Lösung $\underline{x}_0$ (genannt "spezielle Lösung") sowie eine Basis $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ des zugehörigen homogenen Systems zu finden. Der Lösungsraum des Systems ist dann der affine Raum

$$\underline{x}_0 + \langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \rangle_K \ .$$

Wir sagen, dass zwei lineare Gleichungssysteme *äquivalent* sind, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind. Der *vollständige Gauß-Algorithmus* (auch *Gauß-Jordan-Algorithmus* genannt) besteht nun darin, das System solange mittels bestimmter (einfacher) Operationen umzuformen, bis man eine "spezielle Lösung" sowie eine Basis des zugehörigen homogenen Systems ablesen kann.

Wir betrachten hierzu die folgenden drei Operationen.

(I) Multiplikation einer Gleichung mit einem Körperelement $\neq 0$.
(II) Vertauschen von zwei Gleichungen.
(III) Addition von c-mal Gleichung i zu Gleichung j (wobei $i \neq j$ und $c \in K$).

Zur Verdeutlichung: Die Operationen (I) und (III) sind konkret wie folgt gegeben:

(I) Sei $c \in K - \{0\}$ und $i = 1, \ldots, m$. Dann wird die i-te Gleichung aus (2.3) durch die Gleichung

$$ca_{i,1}X_1 + \cdots + ca_{i,n}X_n = cb_i$$

ersetzt.
(III) Sei $c \in K$ (c muss nicht $\neq 0$ sein, aber wenn es 0 ist, passiert nichts), und seien $i, j = 1, \ldots, m$ mit $i \neq j$. Dann wird die j-te Gleichung aus (2.3) durch die Gleichung

$$(a_{j,1} + ca_{i,1})X_1 + \cdots + (a_{j,n} + ca_{i,n})X_n = (b_j + cb_i)$$

ersetzt.

Lemma 2.9 *Operationen (I), (II), (III) überführen ein lineares Gleichungssystem in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem.*

Beweis. Die Aussage ist offensichtlich für Operationen (I) und (II), wie betrachten also Operation (III).

Seien hierzu $i, j = 1, \ldots, k (i \neq j)$ und $c \in K$. Sei nun $\underline{x}$ eine Lösung von (2.3). Dann gilt insbesondere

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

und

$$a_{j,1}x_1 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j \ .$$

Hieraus folgt:

$$(a_{j,1} + ca_{i,1})x_1 + \cdots + (a_{j,n} + ca_{i,n})x_n = (b_j + cb_i) \ ,$$

und somit erfüllt $\underline{x}$ auch das umgeformte System.

Sei nun umgekehrt $\underline{x}$ eine Lösung des umgeformten Systems. Dann gilt insbesondere

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

und

$$(a_{j,1} + ca_{i,1})x_1 + \cdots + (a_{j,n} + ca_{i,n})x_n = (b_j + cb_i) \ .$$

Damit gilt auch

$$a_{j,1}x_1 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j \ .$$

Außerdem erfüllt $\underline{x}$ auch die Gleichungen $1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m$ des ursprünglichen Systems, weil diese nicht verändert werden. □

Definition Die Operationen (I), (II), (III) heißen *elementare Umformungen.*

Der Gauß-Algorithmus besteht nun darin, mittels der Operationen (I), (II), (III) ein System (2.3) in ein System in "Treppenform" umzuformen. Bei

Gauß-Jordan-Algorithmus rechnet man noch ein wenig weiter, bis man ein System in einer bestimmten, sehr einfachen, “Treppenform” hat. Neben den elementaren Umformungen ist es noch zweckmäßig, Gleichungen der Form $0X_1 + \cdots + 0X_n = 0$ (“Nullzeilen”) wegzulassen.

Ich verdeutliche die Algorithmen an einem Beispiel.

Beispiel 2.10 Die Lösungsmenge des folgenden Systems über $\mathbb{Q}$ sei gesucht.

$$\begin{array}{rrrrrl} X_1 & -X_2 & & +X_4 & +X_5 & =1 \\ -X_1 & & +X_3 & -2X_4 & -X_5 & =0 \\ & 2X_2 & +X_3 & -X_4 & +3X_5 & =1 \\ -2X_1 & +3X_2 & +X_3 & -3X_4 & & =-1 \end{array}$$

Für die Rechnungen ist es zweckmäßig, das System in der folgenden symbolischen Form hinzuschreiben.

$$\begin{array}{rrrrr|r} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array} \tag{2.4}$$

Die Variablen in der ersten Zeile werden wir im Folgenden auch weglassen. Wir wenden Operation (III) an: Wir addieren die erste Zeile zur zweiten, und wir addieren das 2-fache der ersten Zeile zur vierten. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

Wir addieren nun $2\times$ die zweite Zeile zur dritten Zeile sowie die zweite Zeile zur vierten und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{array}$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile mit -1, die dritte mit $\frac{1}{3}$ und die vierte mit $\frac{1}{2}$ und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Nun steht in der vierten Zeile das Gleiche wie in der dritten, und wir können die vierte Zeile weglassen. (Mittels der elementaren Umformungen geht das so: Wir addieren $(-1)\times$ die dritte Zeile zur vierten. Dann erhalten wir eine "Null-Zeile", und diese können wir weglassen.) Wir erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Die ist ein lineares Gleichungssystem in so genannter *Treppenform* oder *(Zeilen-)Stufenform* (siehe unten für Definition).

Die Lösungsmenge kann nun durch "Auflösen" bestimmt werden. Hierzu geben wir uns einen belieben Vektor $\underline{x} \in K^n$ vor und setzen $\lambda := x_4, \mu := x_5$. Dann ist $\underline{x}$ genau dann eine Lösung, wenn gilt:

$$\begin{aligned} x_3 &= \lambda - \mu + 1 \\ x_2 &= x_3 - x_4 - 1 = (\lambda - \mu + 1) - \lambda - 1 = -\mu \\ x_1 &= x_2 - x_4 - x_5 + 1 = -\mu - \lambda - \mu + 1 = -\lambda - 2\mu + 1\ . \end{aligned}$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\lambda - 2\mu + 1 \\ -\mu \\ \lambda - \mu + 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in K \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in K \right\}$$

Der soeben durchgeführte Algorithmus heißt *Gauß-Algorithmus.*

Das "Auflöseverfahren" ist jedoch recht unübersichtlich und fehleranfällig. Besser ist es, noch ein wenig mit elementaren Umformungen weiterzurechnen. Das Ziel ist, dass auf allen "Treppenstufen" eine 1 steht (das sind hier die Elemente mit Indizes (1,1), (2,2), (3,3) und das ist hier schon der Fall), und dass über all diesen "Treppenstufen" nur Nullen stehen. Das bedeutet hier, dass die Elemente mit Indizes $(1, 2)$, $(1, 3)$ und $(2, 3)$ Null sein sollen.

Hierzu addieren wir zuerst die dritte Zeile zur zweiten und erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Jetzt addieren wir die zweite zur ersten und erhalten:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Dies ist ein System in so genannter *reduzierter (Zeilen-)Stufenform* oder *reduzierter Treppenform* (siehe unten für Definition).

Hieraus kann man direkt ablesen, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine "spezielle Lösung" ist.

Gesucht ist nunnoch eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Systems:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

(Die Spalte rechts des Strichs kann man nun weglassen.)

Nun gibt es einen "Ablesetrick", der wie folgt funktioniert: Man fügt neue *Zeilen*, in die Matrix ein, und zwar so: Die Zeilen enthalten nur Nullen und genau eine -1. Sie werden so eingefügt, dass man ein System mit gleich viel Spalten wie Zeilen erhält, das die folgenden Eigenschaften hat: Unter der Diagonalen stehen nur Nullen und jeder Eintrag auf der Diagonalen ist entweder eine 1 oder eine -1. In unserem Fall sieht das dann so aus:

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \text{eingefügt} \rightarrow & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \text{eingefügt} \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

(Wenn wir die Null-Zeile nicht gestrichen hätten, wäre diese nun weggefallen.)

Diejenigen *Spalten*, in denen eine -1 eingefügt wurde (mit $\uparrow$ gekennzeichnet), bilden nun eine Basis von $\mathbb{L}_h$. In unserem Fall sind dies die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Lösungsmenge des ursprünglichen Systems gleich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle_K .$$

Vergleichen Sie dies mit der zuerst berechneten Darstellung der Lösungsmenge!

Überlegen Sie sich auch, warum der "Ablesetrick" allgemein funktioniert!

Der gesamte Algorithmus bis zum "Ablesetrick" heißt *vollständiger Gauß-Algorithmus* oder *Gauß-Jordan-Algorithmus*.

Eine große Bitte. Der "Ablesetrick" (einfügen der "-1-Zeilen") ist eine grundsätzlich andere Operation als die vorangegangenen elementaren Umformungen. Deshalb sollte man das Einfügen auch entsprechend kenntlich machen, z.B. in dem man schreibt "Ich wende nun den 'Ablesetrick' an." und / oder indem man die eingefügten "-1-Zeilen" mit Bleistift schreibt.

Bevor wir das Lösen linearer Gleichungssysteme genauer betrachten zunächst eine Definition.

Definition Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$-*Matrix* über K ist eine Abbildung $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \longrightarrow K,\ (i, j) \mapsto a_{i,j}$.

So eine Matrix schreibt man oft als rechteckiges Schema mit "Klammern darum":

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Eine andere übliche Schreibweise ist $((a_{i,j}))_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$. Matrizen werden meist mit großen Buchstaben bezeichnet. Wir schreiben $K^{m\times n}$ für $K^{\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}}$, die Menge der $m \times n$-Matrizen. Andere oft benutzte Schreibweisen sind $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ oder $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Einem homogenen linearen Gleichungssystem (2.2) kann man auf offensichtliche Weise die so genannte *Koeffizientenmatrix* $A = ((a_{i,j}))_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n} \in K^{m\times n}$ zuordnen. Einem beliebigen (inhomogenen) linearen Gleichungssystem (2.3) ordnet man die so genannte *erweiterte Koeffizientenmatrix* zu. Diese entsteht, indem man rechts an die Koeffizientenmatrix A des zugehörigen homogenen Systems den Vektor $\underline{b}$ für die rechte Seite “anhängt”. Die entstehende $m \times (n+1)$-Matrix bezeichen wir mit $(A|\underline{b})$. (Der Strich dient nur der Abgrenzung und hat keine Bedeutung.)

Die elementaren Umformungen lassen sich nun als Operationen auf Matrizen auffassen. In diesem Kontext spricht man von *elementaren Zeilentransformationen*.

Umgekehrt kann man die Begriffe “(reduzierte) (Zeilen-)Stufenform” auch für Gleichungssysteme statt Matrizen anwenden (wie im Beispiel oben geschehen).

Definition Wir definieren die folgende Multiplikation von $m \times n$-Matrizen über K mit Vektoren in K^n:

$$\cdot : K^{m\times n} \times K^n \longrightarrow K^n \; , \quad (A, \underline{x}) \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{m,j} x_j \end{pmatrix}$$

Damit ist $\underline{x} \in K^n$ genau dann eine Lösung des linearen Gleichungssystems (2.1), wenn

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

gilt. Das LGS selbst können wir in der Form

$$A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{b}$$

schreiben, wobei wie oben die X_i die Unbestimmten sind.

Definition Eine Matrix in *(Zeilen-)Stufenform* bzw. in *Treppenform* ist eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix}
* & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ & \circ & \cdots & \circ \\
 & & & & * & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ & \circ & \cdots & \circ \\
 & & & & & & & & * & \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ & \circ & \cdots & \circ \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & . & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & * & \circ & \cdots & \circ \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{pmatrix} ,$$

wobei die mit $*$ bezeichneten Einträge alle $\neq 0$ sind, die mit $\circ$ bezeichneten Einträge beliebig sind, und die Einträge ohne Bezeichnung (d.h. die Einträge unter der "Treppe" 0 sind.

Mit anderen Worten: So eine Matrix hat eine "Treppe", wobei jede Treppenstufe ein Eintrag $\neq 0$ ist. Jede Treppenstufe hat Höhe 1, und neben jeder Stufe dürfen beliebige Einträge stehen. Unter der Treppe stehen nur Nullen.

Beachten Sie, dass unten auch noch 0-Zeilen stehen dürfen (diese sind durch den freien Platz unten angedeutet.)

Definition Eine Matrix in *reduzierter (Zeilen-)Stufenform* bzw. in *reduzierter Treppenform* ist eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & \circ & \cdots & \circ & 0 & \circ & \cdots & \circ & 0 & \circ & \cdots & \circ & \cdots & 0 & \circ & \cdots & \circ \\ & & & & 1 & \circ & \cdots & \circ & 0 & \circ & \cdots & \circ & \cdots & 0 & \circ & \cdots & \circ \\ & & & & & & & & 1 & \circ & \cdots & \circ & \cdots & 0 & \circ & \cdots & \circ \\ & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & . & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & \circ & \cdots & \circ \\ & & & & & & & & & & & & & & & & \end{pmatrix},$$

wobei die $\circ$'s wieder beliebige Einträge repräsentieren und unter der "Treppe" wiederum nur Nullen stehen. Mit anderen Worten: Eine Matrix in reduzierter (Zeilen-)Stufenform ist eine Matrix in (Zeilen-)Stufenform so dass
- die "Treppenstufen" alle gleich 1 sind,
- über den "Treppenstufen" nur Nullen stehen.

(Diese Bedingungen beziehen sich wirklich nur auf die Stufen, nicht auf die Elemente, die rechts daneben stehen!)

Definition Die $n \times n$ *Einheitsmatrix* ist die Matrix

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = (e_1 | \cdots | e_n) \ ,$$

wobei "wie immer" die nicht gekennzeichneten Einträge gleich Null sind. Beachten Sie, dass dies ein Spezialfall einer Matrix in reduzierter (Zeilen-)Stufenform ist.

Bemerkung Mittels des "Kronecker-Deltas" (siehe 1.10) kann man auch $I_n = ((\delta_{i,j}))_{i,j=1,\ldots,n}$ schreiben.

Ich beschreibe nun den Gauß-Algorithmus für Matrizen zur Transformation in eine Matrix in (Zeilen-)Stufenform. Ich wähle eine rekursive Beschreibung. Man würde den Algorithmus allerdings eher wohl mit Schleifen implementieren. In dem folgenden Algorithmus wird die Matrix ohne Kopien anzufertigen fortlaufend transformiert. (D.h. bei den rekursiven Aufrufen werden keine Kopien der Matrix (oder Teile der Matrix) angefertigt.)

Der Gauß-Algorithmus

Eingabe. Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$.
Ausgabe. Eine Matrix $\tilde{A}$, die aus A durch elementare Zeilentransformationen hervorgeht und in (Zeilen-)Stufenform ist.

Wenn die erste Spalte eine Nullspalte ist,
    wenn die Matrix mehr als eine Spalte hat,
        wende den Algorithmus auf die Matrix an, die entsteht,
            indem man die erste Spalte streicht.
Ansonsten
    Wähle ein i so dass $a_{i,1} \neq 0$.
    Vertausche die Zeilen i und j (Transformation (II)).
    (Für die Matrix gilt nun, dass $a_{1,1} \neq 0$.)
    Multipliziere eventuell die erste Zeile mit einer Konstanten (z.B. mit $a_{1,1}^{-1}$)
        (Transformation (I)).
    Für $i = 2, \ldots, m$: Addiere jeweils $-\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$-mal die erste Zeile zur i-ten Zeile
        (Transformation (III)).
    Wenn die Matrix mehr als eine Zeile und mehr als eine Spalte hat,
        Wende den Algorithmus auf die Matrix an, die entsteht,
            indem man die erste Zeile und die erste Spalte streicht.

Wenn die erste Spalte keine Nullspalte ist, sieht die Matrix nach dem vorletzten Schritt so aus:

$$\begin{pmatrix} * & \circ & \cdots & \circ \\ 0 & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 0 & \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

(Mit $* \neq 0$ und $\circ$ beliebig.) Im letzten Schritt wird dann der Algorithmus mit der Matrix aufgerufen, die entsteht, wenn man in dieser Matrix die erste Zeile und die erste Spalte weglässt. Das Endergebnis ist das Ergebnis dieser

Berechnung zusammen mit der ersten Zeile und der ersten Spalte der Matrix (2.5).

Sicher terminiert der Algorithmus, und der Algorithmus ist offensichtlich korrekt: Das Ergebnis des Algorithmus ist offensichtlich eine Matrix in (Zeilen-)Stufenform, die aus der ursprünglichen Matrix durch elementare Zeilentransformationen hervorgegangen ist.

Um eine Matrix in reduzierter (Zeilen-)Stufenform zu erhalten, geht man ausgehend von einer Matrix in (Zeilen-)Stufenform wie folgt vor:

Zuerst teilt man alle nicht-Nullzeilen durch ihren ersten Eintrag $\neq 0$. Dann sind also die Einträge auf allen Stufen gleich 1.

Dann "räumt" man mittels Operationen von Typ (III) die Einträge oberhalb der Stufen aus (man erzeugt Nullen). Dabei kann man die "Stufenspalten" in beliebiger Reihenfolge behandeln.

Das Ergebnis ist eine Matrix in reduzierter (Zeilen-)Stufenform. Der gesamte soeben beschriebene Algorithmus heißt *vollständiger Gauß-Algorithmus* oder *Gauß-Jordan-Algorithmus*.

Sei nun das LGS

$$A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{b}$$

gegeben. Um die Lösungsmenge zu bestimmen (genauer um eine spezielle Lösung und eine Basis des zugehörigen homogenen Systems zu bestimmen), kann man nun wie folgt vorgehen:

- Man wendet den Gauß-Algorithmus auf die Matrix $(A|\underline{b})$ an. Sei $(\tilde{A}|\tilde{b})$ das Ergebnis. Dann ist das System genau dann lösbar, wenn in der letzten Spalte keine Treppenstufe ist.

Wenn das System lösbar ist,
- erzeugt man eine Matrix in reduzierter (Zeilen-)Stufenform.
- liest man die Lösung mittels des "Ablesetricks" ab.

Bemerkung Oftmals wird im Gauß-Algorithmus noch eine weitere Operation erlaubt: Man vertauscht die Spalten und merkt sich dabei, wie man die Variablen geändert hat. (Die Variablen sollte man dann beim Rechnen "von Hand" über das System schreiben, so wie in (2.4).) Ich empfehle allerdings dringend, diese Operation nur in Ausnahmefällen anzuwenden, da sie sehr fehlerbehaftet ist. Dies gilt insbesondere für die Klausur!

Diskussion Das Wort "Algorithmus" besagt, dass zu jedem Zeitpunkt genau festgelegt sein muss, welche Operation als nächstes ausgeführt wird. In dem oben beschriebenen Gauß-Algorithmus sind allerdings wesentliche Unbestimmtheiten vorhanden:[2]
- Es ist nicht festgelegt, welche Zeile man "nach oben holt". - Es ist nicht festgelegt, unter welchen Bedingungen man eine Transformation (I) durchführen soll, und wenn, mit welcher Konstante.
Somit handelt es sich streng genommen nicht um einen Algorithmus sondern eher um ein *Algorithmenschema*.

Man erhält einen Algorithmus, indem man eine konkrete Regel vorgibt, welche Zeile ausgewählt werden soll und nach dem Vertauschen die erste Zeile mit $a_{1,1}^{-1}$ multipliziert.

Die Auswahl so einer Zeile heißt *Pivotwahl*, und dasjenige Element so einer Zeile, dass für die Elimination benutzt wird (in der obigen Darstellung das erste Element), wird *Piviotelement* genannt. Eine Möglichkeit für die Pivotwahl (in der obigen Darstellung des Gauß-Algorithmus) ist, das kleinste i mit $a_{1,i} \neq 0$ zu bestimmen und dann die 1-ste und die i-te Zeile zu vertauschen. (Dies bezieht sich wirklich nur auf die obige rekursive Darstellung des Algorithmus. Natürlich wählt man keine Zeile derjenigen Zeilen aus, die man schon behandelt hat.)

Für Rechnungen von Hand wird man jedoch eher eine Zeile mit einem "möglichst einfach aussehenden" ersten Eintrag nach oben holen.

Für Berechnungen mit Fließkommazahlen (die reelle Zahlen darstellen) mittels eines Computers sollte man darauf achten, dass nur möglichst kleine Rundungsfehler auftreten. Hierzu ist es geschickt, ein Pivotelement mit möglichst großem Absolutbetrag zu wählen. (Dies hat etwas damit zu tun, dass man durch das Pivotelement teilen muss). Es ist also optimal, das größte Element der gesamten (restlichen) Matrix zu wählen und entsprechend Zeilen und Spalten (!) umzunummerieren (nicht umzukopieren!) (kein Problem auf dem Computer).

Komplexität

Die *Komplexität* des Gauß-Jordan-Algorithmus in Körperoperationen ist leicht berechnet.

Sei eine $m \times n$-Matrix über K gegeben.

[2] Immer wenn man einen Algorithmus in Pseudocode angibt, handelt man sich bestimmte Unbestimmtheiten ein, oder anders ausgedrückt, man läßt gewisse Freiheiten bei der Implementierung. Somit ist die Abgrenzung, ob man nun einen Algorithmus oder nur ein Algorihmenschema hat, etwas ungenau.

Offensichtlich benötigen wir höchstens $m - 1$ Operationen vom Typ (II) und höchstens m Operationen vom Typ (I). Wir benötigen höchstens $(m - 1) + (m - 2) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$ Operationen vom Typ (III), um eine Matrix in (Zeilen)-Stufenform zu erzeugen. Danach benötigen wir noch höchstens $\frac{m \cdot (m-1)}{2}$ Operationen vom Typ (III), um eine Matrix in reduzierter (Zeilen-)Stufenform zu erzeugen.

Für jede dieser Operationen benötigen wir höchstens n Körperoperationen.

Damit erhalten wir:

Folgerung 2.11 *Gegeben eine $m \times n$-Matrix $A \in K^{m \times n}$, kann man in $\mathcal{O}(m^2 \cdot n)$ Körperoperationen eine reduzierte (Zeilen-)Stufenform berechnen. Insbesondere kann man die Lösungsmenge eines lineares Gleichungssystem mit n Unbestimmten und m Gleichungen in $\mathcal{O}(m^2 \cdot n)$ Körperoperationen bestimmen.*

Ich erinnere noch einmal daran, dass “Bestimmen der Lösungsmenge” bedeutet, eine “spezielle Lösung” und eine Basis der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems anzugeben.

Bemerkung Durch die Angabe der Komplexität in Körperoperationen wird wenig über das Problem ausgesagt, wie man nun möglichst schnell und möglichst exakt die Lösungsmenge eines Gleichungssystems über den reellen Zahlen mit Fließkommazahlen berechnet. Dieses Problem haben wir oben kurz angedeutet. Hierzu und zu verwandten Fragen gibt es eine umfangreiche Theorie, die in die *Numerische Mathematik* fällt.

Anwendungen

Ich gebe jetzt noch Anwendungen des Gauß-Algorithmus auf die Frage, ob ein System von Vektoren linear unabhängig bzw. ein Erzeugendensystem ist.

Es seien $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \in K^n$ gegeben. Wir betrachten nun die $n \times r$-Matrix $A = (\underline{x}_1 | \cdots | \underline{x}_r)$, die entsteht, wenn man die Vektoren $\underline{x}_1, \ldots \underline{x}_r$ als Spalten einer Matrix auffasst.

Nun sind die Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ genau dann linear unabhängig, wenn das System

$$A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{0} \tag{2.6}$$

ausschließlich die "triviale" Lösung $\underline{0}$ (und keine weitere Lösung) hat. Ob dies der Fall ist, kann man nun mit dem Gauß-Algorithmus überprüfen.

Sei nun $\tilde{A}$ eine Matrix in (Zeilen-)Stufenform, die aus A mittels elementarer Zeilenoperationen entsteht. Dann ist also das System (2.6) äquivalent zum System

$$\tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{0}\ . \tag{2.7}$$

Dieses System hat genau dann eine "nicht-triviale" Lösung (eine Lösung $\neq \underline{0}$), wenn es Spalten gibt, die keine "Treppenstufen" enthalten.

Wenn $r \geq n+1$ ist, gibt es immer eine Spalte von $\tilde{A}$, die keine "Treppenstufe" ist, und folglich gibt es immer eine "nicht-triviale" Lösung. Es gilt also:

Folgerung 2.12 $n{+}1$ *(oder mehr) Vektoren in* K^n *sind immer linear abhängig.*

Mit den obigen Überlegungen können wir auch auf die folgende Frage eine algorithmische Antwort geben:

Gebeben ein System $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \in K^n$, finde ein "Teilsystem", das eine Basis von $\langle \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r \rangle_K$ ist!

(Ein "Teilsystem" ist wie folgt definiert. Gegeben Seien $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ für ein $k \leq r$. Dann ist $\underline{x}_{i_1}, \ldots, \underline{x}_{i_k}$ ein Teilsystem von $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$.)

Hierzu definieren wir die Matrix A wie oben und berechnen mittels elementarer Zeilenumformungen eine Matrix $\tilde{A}$. Dann bilden diejenigen Spalten aus A (!), für die in $\tilde{A}$ eine Stufe steht, eine Basis.

(Denn: Die Spalten ohne Stufen von $\tilde{A}$ sind von den Spalten mit Stufen von $\tilde{A}$ linear abhängig. Und das gilt auch für A, weil die Lösungsmenge eines LGS unter elementaren Zeilentransformationen eben nicht verändert wird.)

Wir kommen nun zu der Frage, wie man entscheiden kann, ob die $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ ein Erzeugendensystem von K^n bilden. Wieder betrachten wir die Matrix A, die definiert ist wie oben, sowie eine Matrix $\tilde{A}$ in (Zeilen-)Stufenform, die aus A durch elementare Transformationen hervorgeht.

Offensichtlich ist $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ genau dann ein Erzeugendensystem von K^n, wenn für alle $\underline{b} \in K^n$ das LGS

$$A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{b} \tag{2.8}$$

lösbar ist. Diese Eigenschaft ist auch invariant unter elementaren Transformationen (warum?) und folglich äquivalent zu der Bedingung, dass das System (2.7) für alle $\underline{b} \in K^n$ lösbar ist. Dies wiederum ist dazu äquivalent, dass $\tilde{A}$ keine Nullzeile enthält. Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn $n \leq r$.

Damit erhalten wir:

Folgerung 2.13 *Jedes Erzeugendensystem von K^n besteht aus mindestens n Vektoren.*

Im Prinzip kann man mit dem Obigen auch eine algorithmische Antwort auf die Aufgabe geben, das System $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ zu einem Erzeugendensystem von K^n zu ergänzen:

Sei k die letzte Zeile von $\tilde{A}$, die keine Nullzeile ist. Dann bilden offensichtlich die Spalten von $\tilde{A}$ und die Vektoren $\underline{e}_{k+1}, \ldots, \underline{e}_n$ ein Erzeugendensystem von K^n.

Man betrachtet nun die Matrix $(\tilde{A}|\underline{e}_{k+1}|\cdots|\underline{e}_n)$. Wenn man diese Matrix mittels elementarer Umformungen umformt, bilden die Spalten immer noch ein Erzeugendensystem (siehe oben).

Wenn wir nun die elementaren Umformungen von A auf $\tilde{A}$ "rückgängig" machen (von $\tilde{A}$ nach A "zurückgehen"), und dabei die neuen Spalten auch mit umformen, erhalten wir eine Matrix $(A|N)$. Nach dem eben gesagten bilden die Spalten dieser Matrix ein Erzeugendensystem von K^n. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Wir erhalten insbesondere:

Satz 2.1 *Jede Basis von K^n besteht aus genau n Vektoren.*

Genauer haben wir die folgenden Äquivalenzen.

- $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ ist eine Basis.
- Es gilt $r = n$ und in jeder Spalte von $\tilde{A}$ ist eine Stufe.

Sei nun $\tilde{A}$ eine Matrix, die aus A durch elementare Transformationen hervorgeht und in reduzierter Zeilenstufenform ist. Dann haben wir die Äquivalenzen:

- $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ ist eine Basis.
- $\tilde{A} = I_n$.

Bemerkung Wir sehen, dass die Matrix $\tilde{A}$ eindeutig ist, wenn $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_r$ eine Basis ist. Allgemeiner kann man zeigen, dass sich jede Matrix mittels elementarer Zeilenumformungen zu genau einer Matrix in reduzierter (Zeilen-) Stufenform umformen lässt. Diese Matrix heißt dann auch die *Zeilennormalform* von A.