

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Globale versus lokale Strukturen von Raum-Zeiten

Domenico Giulini

ZARM Bremen
ITP und Riemann-Zentrum
Leibniz Universität Hannover

Tutorium der AGjDPG
DPG-Frühjahrstagung 2017
Bremen, 13. März

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

- ▶ **Universalität des freien Falls (UFF):** Testteilchen haben die Eigenschaft, dass ihr freier Fall im Gravitationsfeld nur vom Anfangsereignis (Zeit und Ort) und der Anfangsgeschwindigkeit abhängt, nicht jedoch von der Wahl des Testteilchens.
- ▶ **Lokale Lorentz-Invarianz (LLI):** Raumzeitlich hinreichend gut lokalisierte Experimente, in denen von der Einwirkung der Gravitation angesehen werden kann (freier Fall), zeichnen keine bevorzugte Raumrichtung und keinen Bewegungszustand aus.
- ▶ **Lokale Positionsinvariant (LPI):** Raumzeitlich hinreichend gut lokalisierte Experimente, in denen von der Einwirkung der Gravitation angesehen werden kann (freier Fall), zeichnen keine bevorzugte Zeit und keinen bevorzugten Ort aus.
- ▶ **Universalität des Uhrengangs (UCR),
Universalität der gravitativen Rotverschiebung (UGR):** Unterschiedliche Uhren, die zwei raum-zeitliche Ereignisse auf gleichen Weltlinien verbinden, zeigen die gleiche Dauer. Baugleiche Uhren, die zwei Ereignisse auf unterschiedlichen Weltlinien verbinden, zeigen einen Unterschied in den Dauern, die nur vom Weltlinienpaar abhängt.

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

- ▶ Als Folge des Äquivalenzprinzip gilt: Alle physikalischen Aspekte der Gravitation lassen sich durch die Geometrie der Raum-Zeit ausdrücken.
- ▶ Nicht-trivialer Aspekt dabei ist, dass alle Materiekomponenten die *gleiche* Geometrie sehen. Es gibt also nur eine Raumzeitgeometrie, unabhängig von Energie (Compton-Wellenlänge), Teilchenart (Boson oder Fermion, massiv, masselos), etc.
- ▶ Die Raumzeit (M, g) ist eine glatte (mindestens C^3), 4-dimensionale, parakompakte und Hausdorff'sche Mannigfaltigkeit M mit Lorentzmetrik $g_{\alpha\beta}$ ($g \in ST_2^0(M)$).
- ▶ Testteilchen bewegen sich ohne Einwirkung äußerer Kräfte auf Geodätischen bezüglich g . Die durch UFF definierte Pfadstruktur ist also die des Levi-Civita Zusammenhangs von g .
- ▶ Alle die Gravitation und Trägheit betreffenden physikalischen Aspekte werden durch das Paar (M, g) bestimmt. Kräfte werden durch weitere Felder auf M repräsentiert. Die Gravitation ist keine Kraft sondern Teil der Struktur, die kräftefreie (inertiale) Bewegung erst definiert (Hermann Weyls „Führungsfeld“).

Mathematische Umsetzung 2

- ▶ Als wesentliche Konsequenz des Äquivalenzprinzips ergibt sich die Substituierbarkeit der gravito-inertialen unter die geometrische Struktur.
- ▶ Diese Geometrisierung ist *universell*, d.h. betrifft die allen Materiekomponenten *gemeinsame* Raum-Zeit. Die an die Dynamik der Materie koppelnde geometrische Struktur ist für alle Materieformen die gleiche und nicht etwa abhängig von Energie („gravity's rainbow“), Ladungstyp („fifth force“) oder sonstigen Materieeigenschaften.
- ▶ Kennt man das dynamische Gesetz einer bestimmten Materieform im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie, also als Poincaré invariantes Gesetz, dann kann man sowohl den Einfluss eines allgemeinen Gravitationsfeldes (g_{ab}) auf die Dynamik der Materie (\rightarrow Kopplungsschema), als auch den Einfluss der Materie auf das Gravitationsfeld (\rightarrow Einstein-Gleichungen) bestimmen:

$$\eta_{ab} \rightarrow g_{ab}, \quad (1a)$$

$$\partial_a \rightarrow \nabla_a := \partial_a + \Gamma_a, \quad (1b)$$

$$T_{ab} \rightarrow \frac{-2}{\sqrt{-\det\{g_{ij}\}}} \frac{\delta S_m(\eta = g, \partial = \nabla)}{\delta g^{ab}}. \quad (1c)$$

Hier ist $\Gamma_a(p) = \Gamma_{ab}^c(p) \partial_c \otimes dx^b \in \text{End}(T_p M)$, mit

$$\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (-\partial_d g_{ab} + \partial_b g_{da} + \partial_a g_{db}). \quad (2)$$

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Einstein-Gleichung: Übliche Form

- ▶ Die Einstein-Gleichungen bilden ein nichtlineares aber quasilineares gekoppeltes System von 10 partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die 10 Funktionen $g_{ab}(t, \vec{x})$. Diese sollen an jedem Punkt die Koeffizienten einer symmetrischen, nicht-ausgearteten Bilinearform der Signatur $(-, +, +, +)$ bilden (Lorentzmetrik). Das DGL-System zerfällt in 6 Entwicklungsgleichungen hyperbolischen und 4 Zwangsbedingungen elliptischen Charakters.

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa T_{ab} \quad (3)$$

$$T_{ab} := \mathbf{T}(e_a, e_b) = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & -c\vec{\mathcal{M}} \\ -\vec{\mathcal{S}}/c & \vec{\Sigma} \end{pmatrix} \quad (4)$$

\mathcal{E} = Energiedichte, $\vec{\mathcal{S}}$ = Energie-Stromdichte, $\vec{\mathcal{M}}$ = Impulsdichte,
 $\vec{\Sigma}$ = Impuls-Stromdichte.

- ▶ Physikalische Dimension der Linken Seite ist $[\text{Krümmung}] = 1/[\text{Länge}]^2$, der rechten Seite $[\text{Energiedichte}] = c^2[\text{Massendichte}]$. Die Konstante $\kappa = 8\pi G/c^4$ transformiert also eine Energiedichte in eine Krümmung, bzw. $c^2\kappa = 8\pi G/c^2$ eine Massendichte in eine Krümmung:

$$c^2\kappa \approx \left(\frac{1}{1.5\text{AU}}\right)^2 \cdot \rho_W^{-1} \approx \left(\frac{1}{10\text{km}}\right)^2 \cdot \rho_N^{-1}. \quad (5)$$

Hier ist $\text{AU} = 1.5 \times 10^{11} \text{m}$, $\rho_W = 10^3 \text{kg/m}^3$ (Wasser) und $\rho_N = 5 \times 10^{17} \text{kg/m}^3$ (maximale Dichte von Kernmaterie in Neutronensternen).

Intermezzo: Krümmung

- ▶ Der Riemann'sche Krümmungstensor genügt

$$R_{ab\ cd} = -R_{ba\ cd} = -R_{ab\ dc} = R_{cd\ ab} \quad R_{a(bc\ d)} = 0, \quad (6)$$

$$\#\text{Riem} = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1) \quad (7)$$

- ▶ Kovariant geschrieben können punktweise $R_{ab\ cd}(p)$ als Komponenten einer symmetrischen Bilinearform $\mathbf{Riem}|_p$ auf $T_pM \wedge T_pM$ aufgefasst werden, die wie üblich durch Ihre quadratische Form bestimmt ist. Letztere, geeignet normiert, nennt man die Schnittkrümmung (sectional curvature):

$$\text{Sec}(X, Y) := \frac{\mathbf{Riem}(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)g(X, Y)}. \quad (8)$$

Ihre Interpretation ist wie folgt: Die geodätische Fläche tangential an $\text{Span}\{X, Y\} \subset T_pM$ hat Gauß'sche Krümmung $\text{Sec}(X, Y)$.

- ▶ Ricci- und skalare Krümmung sind gegeben durch Spurbildungen: $R_{bd} := R^a{}_{bad}$ und $R := g^{ab}R_{ab}$. Diese bestimmen \mathbf{Riem} bis auf \mathbf{Weyl} :

$$\mathbf{Riem} = \mathbf{Weyl} + \frac{1}{n-2} \left(\mathbf{Ric} - \frac{1}{2(n-1)} \mathbf{Scal} \right) \odot g \quad (9)$$

mit $k \odot \ell(e_1, e_2, e_3, e_4) = k_{13}\ell_{24} + k_{24}\ell_{13} - k_{14}\ell_{23} - k_{23}\ell_{14}$.

- ▶ Es ist

$$\#\mathbf{Weyl} = \#\mathbf{Riem} - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{12}n(n+1)[n(n-1) - 6], \quad (10)$$

$$n = 4 \Rightarrow \#\mathbf{Weyl} = \#\mathbf{Ric} = \frac{1}{2}\#\mathbf{Riem} = 10. \quad (11)$$

$$\text{Ein}(g) = \kappa \mathbf{T} \quad (12)$$

Punktweise Gleichheit zweier symmetrischer Bilinearformen \Leftrightarrow Gleichheit der zugehörigen quadratischen Formen \Leftrightarrow Gleichheit der zugehörigen quadratischen Formen ausgewertet auf einer hinreichend großen Menge von Vektoren, z.B. den zeitartig-normierten. Ist also e_0 zeitartig und $\{e_1, e_2, e_3\}$ Kompletzierung zu einer ON-Basis (bezügl. Lorentz-Metrik g), dann

$$\text{Sec}(e_1, e_2) + \text{Sec}(e_2, e_3) + \text{Sec}(e_3, e_1) = \kappa \mathbf{T}(e_0, e_0) \quad (13)$$

- ▶ Die rechte Seite von (13) gibt die von einem tangential zu e_0 bewegten Beobachter lokal gemessene Energiedichte an, die linke Seite die in seinem lokalen Ruheraum gemessene Summe der räumlichen Schnittkrümmungen.
- ▶ Die Einstein-Gleichungen lassen sich also auf die Aussage reduzieren, dass für jeden Beobachter die Materie-Energiedichte eine mittlere räumliche Krümmung im Verhältnis κ erzeugt; vgl. (5).
- ▶ Achtung: Jede Metrik g ist Lösung der Einstein-Gleichung zu *einem* Energie-Impuls-Tensor \mathbf{T} . Erst die Einschränkung auf "physikalische" \mathbf{T} beschränkt auch die möglichen Metriken (Gravitationsfelder), aber nur im Ricci- und nicht im Weyl-Anteil der Krümmung. Letzterer repräsentiert die eigenen Freiheitsgrade des Gravitationsfeldes.

Phys. Grundlagen

Mathematische
Umsetzung

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

Kausalität

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

Cauchy-Problem

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Welche Lösungen wollen wir zulassen?

Definition der Raumzeit

Definition 1

Eine n -**dimensionale Raumzeit** ist eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit folgenden Eigenschaften und Zusatzstrukturen:

- ▶ M erfüllt das Hausdorff'sche (T_2) Trennungssaxiom: Je zwei ungleiche Punkte besitzen disjunkte offene Umgebungen.
- ▶ M erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom: Die Topologie von M besitzt abzählbare Basis.

Soweit folgt: Da M als topologische Mannigfaltigkeit automatisch lokal-kompakt ist, ist sie auch metrisierbar.

- ▶ M besitzt differenzierbare Struktur; o.B.d.A. C^∞ .
- ▶ M besitzt eine Lorentzmetrik $g \in ST_{(2)}^0 M$; mindestens stückweise C^3 .
- ▶ (M, g) ist zeitorientierbar: Es existiert $\nu \in ST_0^1 M$ mit $g(\nu, \nu) < 0$.

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit

- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Definition 2

Sei M eine Menge und $U \subseteq M$ eine Untermenge. Eine *Karte* (von U) auf M ist ein Paar (U, ϕ) , wobei $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive Abbildung ist. U heißt *Kartengebiet*, ϕ *Kartenabbildung* und $\phi(U) := V \subseteq \mathbb{R}^n$ *Kartenbild*.

Definition 3

Eine \mathcal{S} -Mannigfaltigkeit ist eine Menge M mit einem *Atlas* bestehend aus *Karten* $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$, so dass gilt:

- ▶ Die Mengen U_α *überdecken* M , d.h. $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.
- ▶ Die Abbildungen ϕ_α erhalten das Strukturmerkmal \mathcal{S} ; das heißt, ist $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, dann sind

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} \Big|_{\phi_\beta(U_{\alpha\beta})} : \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}), \quad (14a)$$

$$\phi_{\beta\alpha} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \Big|_{\phi_\alpha(U_{\alpha\beta})} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \quad (14b)$$

Abbildungen, die \mathcal{S} erhalten bzw. die Eigenschaft \mathcal{S} besitzen. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Eigenschaft von Abbildungen, das Strukturmerkmal \mathcal{S} zu erhalten, nach Komposition solcher Abbildungen bestehen bleibt.

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur

- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

- ▶ Steht \mathcal{S} für die topologische Struktur, d.h. sind die Abbildungen (14) des Kartenwechsels stetig, dann wird M zu einem topologischen Raum durch die Forderung, dass alle Kartenabbildungen $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig sein mögen. Die Menge aller Urbilder $\phi^{-1}(V)$ offener Mengen $V \subset \mathbb{R}^n$ bilden dann eine Subbasis der Topologie von M . Sie ist die grösste Topologie bezüglich der alle Kartenabbildung stetig sind.
- ▶ Diese Topologie muss a priori weder Hausdorff'sch (T_2) sein noch das 2. Abzählbarkeitsaxiom (A_2) erfüllen. In der Regel – aber nicht immer – fordert man diese Eigenschaften zusätzlich. Insbesondere ist für T_2 -Mannigfaltigkeiten A_2 äquivalent zur Parakompaktheit. (Ein topologischer Raum ist parakompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung besitzt.)
- ▶ Parakompaktheit impliziert die Existenz einer *Zerlegung der Eins*, also einer zur lokal endlichen Überdeckung U_α gehörigen Funktionenfamilie $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow [0, 1]$ mit $\text{supp}(f_\alpha) \subset U_\alpha$ und $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$.
- ▶ Parakompaktheit ist von sehr großen Nutzen, da sie gestattet lokal definierte Strukturen global zu erweitern, sofern diese Strukturen konvex-linear kombiniert werden dürfen (z.B. Maß, Riemann-Metrik, etc.).

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

- ▶ Ist etwa g' eine Riemann'sche Metrik auf \mathbb{R}^n , dann ist $g := \sum_{\alpha} f_{\alpha} \phi_{\alpha}^* g'$ eine Riemannsche Metrik auf M , wenn $(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})$ eine lokal endlicher C^1 -Atlas ist. Also besitzt jede C^1 Mannigfaltigkeit Riemann'sche Metriken und Zusammenhänge.
- ▶ Eine Riemann'sche Metrik auf M definiert eine Distanzfunktion (Infimum aller Längen verbindender Kurven) und eine metrische Topologie. Diese ist stets gleich der Mannigfaltigkeitstopologie (Hopf Rinow).
- ▶ Für Lorentz-Metriken (Signatur $(1, n - 1)$) treffen die obigen Punkte nicht zu: Weder besitzt jede C^1 -Mannigfaltigkeit eine Lorentz Metrik noch definierte eine Lorentzmetrik g eine Distanzfunktion oder eine Topologie. Mit Topologie einer Lorentzmannigfaltigkeit ist stets die Mannigfaltigkeitstopologie gemeint.
- ▶ Ist g' eine Riemann'sche Metrik (die immer existiert) und $S_p := \{v \in T_p M \mid g'(v, v) = 1\}$. Ist g eine Lorentzmetrik dann definiert $\text{Inf}_{S_p} \{g(v, v)\}$ ein Antipodalpaar $\xi_p = \{v_p, -v_p\} \subset T_p M$. Umgekehrt definiert jedes stetige Feld $p \rightarrow \xi_p = \{v_p, -v_p\}$ eine Lorentzmetrik $g = g' - 2v^b \otimes v^b$, wo $v^b := g(v, \cdot)$.

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Satz 4

Eine Mannigfaltigkeit M besitzt eine Lorentzmetrik genau dann, wenn sie eine eindimensionale Distribution $p \mapsto \text{Span}\{v_p\} \subset T_p M$ besitzt. Dies ist immer der Fall, wenn M nicht kompakt ist. Ist M kompakt (mit oder ohne Rand), dann ist dies genau dann der Fall wenn $\chi(M) = 0$ (Euler Charakteristik).

Definition 5

Sei g Lorentzmetrik; dann heißt $v \in TM$ zeit-, licht- oder raumartig je nachdem $g(v, v) < 0, = 0$ oder > 0 . Existiert auf ganz M ein bezüglich g zeitartiges Vektorfeld, dann heißt das Paar (M, g) zeitorientierbar.

Satz 6

Nicht jede Lorentzmetrik auf M ist zeitorientierbar. Existiert aber überhaupt eine Lorentzmetrik, dann immer auch eine zeitorientierbare. Ist (M, g) nicht zeitorientierbar, dann existiert doppelte Überlagerung $p: \tilde{M} \rightarrow M$, so dass $(\tilde{M}, \tilde{g} := p^*g)$ zeitorientierbar.

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Satz 7

Ist M geschlossen und g Lorentzmetrik, dann existiert eine zeitartige geschlossene Kurve; d.h. $\gamma : S^1 \rightarrow M$ mit $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0$.

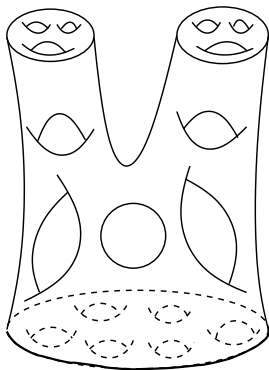
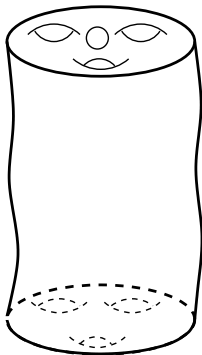
Satz 8

Ist M geschlossen und besitzt Lorentzmetrik, dann ist die Ordnung der Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ unendlich und damit die universelle Überlagerung \tilde{M} von M nicht kompakt.

Beweis.

$$\chi(M) = B_0 - B_1 + B_2 - B_3 + B_4 = 2B_0 + B_2 - 2B_1 = 0 \Rightarrow B_1 > 0 \Rightarrow |\pi_1(M)| = \infty.$$

Geschlossene M mit Lorentzmetrik entstehen also immer durch $\pi_1(M)$ -Identifikationen nicht-kompakter Lorentz Mannigfaltigkeiten $(\tilde{M}, \tilde{g} = p^*g)$ mit $p : \tilde{M} \rightarrow M$ universelle Überlagerung.



Satz 9

Zu je zwei geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten Σ_i und Σ_f existiert immer eine zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit (M, g) , so dass $\partial M = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ raumartig. Sind Σ_i und Σ_f nicht homöomorph, dann besitzt (M, g) geschlossene zeitartige Kurven. Ist $M = \Sigma \times [0, 1]$ dann existiert natürlich immer eine kausale Lorentzmetrik; $v = \partial/\partial t$.

Phys. Grundlagen

Mathematische
Umsetzung

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

Kausalität

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

Cauchy-Problem

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

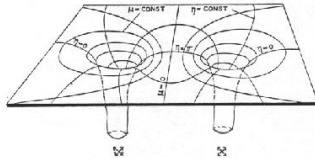
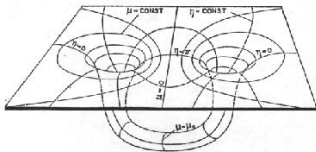
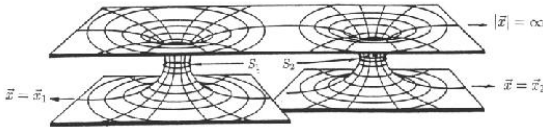
- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

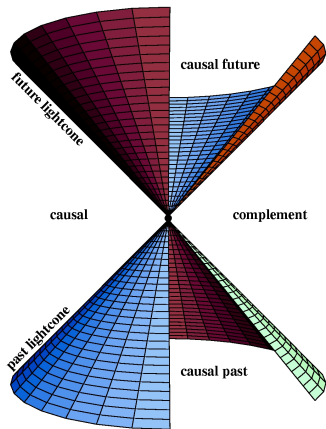
Keine Obstruktionen für die räumliche Topologie

Beispiel: Zwei schwarze Löcher



Satz 10

Zu jeder topologischen 3-Mannigfaltigkeit Σ (geschlossen oder mit einer endlichen Anzahl von Enden) existieren Anfangsdaten (asymptotisch flache Enden) (h_{ab}, K_{ab}) , die die 4 Zwangsbedingungen unter den Einstein-Gleichungen erfüllen und nach den verbleibenden 6 Evolutionsgleichungen zeitentwickelt werden können.



- ▶ Die chronologische und kausale Zukunft/Vergangenheit eines Ereignisses $p \in M$ besteht aus allen Punkten $q \in M$, die mit p durch eine zukunfts-/vergangenheitsgerichtete zeitartige bzw. kausale (nicht raumartige) Kurve verbunden werden können.
- ▶ Während die chronologische Zukunft/Vergangenheit von p eine offene Teilmenge in M darstellt, ist die kausale Zukunft/Vergangenheit von p i.a. weder offen noch abgeschlossen.
- ▶ Man schreibt oft $q \gg p$ / $q \ll p$ falls q in der chronologischen Zukunft/Vergangenheit von p liegt und $q > p$ / $q < p$ falls dies für die entsprechende kausale Beziehung gilt. \gg und \ll sind offene und transitive Relationen.

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Kausalitätsverhältnisse 2

Definition 11

Sei (M, g) Lorentzmannigfaltigkeit mit Zeitorientierung $v \in STM$.

$$\begin{aligned} I^\pm(p) &= \{q \in M \mid q \gg p / q \ll p\} \\ &= \{q \in M \mid \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \quad \gamma(0) = p, \gamma(1) = q, \\ &\quad g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0, \quad \pm g(\dot{\gamma}, v) < 0\} \\ &= \text{chronologische Zukunft (+) / Vergangenheit (-) von } p \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} J^\pm(p) &= \{q \in M \mid q > p / q < p\} \\ &= \{q \in M \mid \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \quad \gamma(0) = p, \gamma(1) = q, \\ &\quad g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \leq 0, \quad \pm g(\dot{\gamma}, v) < 0\} \\ &= \text{kausale Zukunft (+) / Vergangenheit (-) von } p \end{aligned} \quad (16)$$

Entsprechend für $U \subset M$:

$$I^\pm(U) := \bigcup_{p \in U} I^\pm(p), \quad J^\pm(U) := \bigcup_{p \in U} J^\pm(p). \quad (17)$$

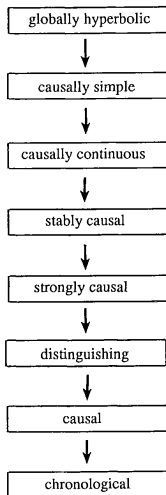
Satz 12

$\text{int}(J^\pm(U)) = I^\pm(U)$ und $J^\pm(U) \subseteq \overline{I^\pm(U)}$ mit = g.d.w. $J^\pm(U)$ abgeschl.

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

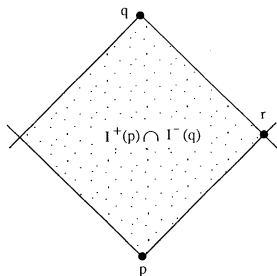


- ▶ chronologisch: \nexists geschlossenen zeitartigen Kurven; $p \notin I^\pm(p)$.
- ▶ kausal: \nexists geschlossenen kausalen Kurven; $p \notin J^\pm(p)$.
- ▶ unterscheidend: $q \neq p \Rightarrow I^\pm(p) \neq I^\pm(q)$.
- ▶ stark kausal: \nexists "fast" geschlossenen kausalen Kurven. Das heißt: Jedes offene $U \ni p$ besitzt offenes $V \ni p$, so dass der Schnitt jeder kausalen Kurve durch p mit V zusammenhängend ist. (\Rightarrow Alexandrov- = Mannigfaltigkeits-Topologie.)
- ▶ stabil kausal: g ist kausal und besitzt offene Umgebung U (in C^0 -Topologie), so dass alle $g' \in U$ kausal sind. ($\Rightarrow \exists$ Zeitfunktion).
- ▶ kausal stetig: die mengenwertigen Abbildungen $p \mapsto I^\pm(p)$ sind außerhalb stetig. Das heißt: Für jedes kompakte $K \in M - \overline{I^\pm(p)}$ existiert offenes $U \ni p$, so dass $K \in M - \overline{I^\pm(q)} \forall q \in U$.
- ▶ kausal einfach: unterscheidend und $J^\pm(p)$ sind abgeschlossen.
- ▶ global hyperbolisch: stark kausal und $J^+(p) \cap J^-(q)$ sind kompakt.

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit



- ▶ Ist $q \gg p$ dann ist die „Diamant-Menge“ $D(p, q) := I^+(p) \cap I^-(q)$ offen und nicht leer. Die von diesen erzeugte Topologie heißt *Alexandrov-Topologie* von (M, g) . Sie ist gröber-gleich der M-Topologie, mit gleich $\Leftrightarrow (M, g)$ stark kausal.

Satz 13 (Zeeman, Alexandrov)

Ist (M, η) Minkowskiraum der Dimension $n > 2$ und $f : M \rightarrow M$ Bijektion die in beiden Richtungen die Relation \gg (oder $>$, oder \geq) erhält, dann ist f die Komposition einer Poincaré-Transformation und einer Streckung $x \mapsto \lambda x$.

Satz 14 (Malament, Hawking-McCarthy-King, Levichev)

Ist $f : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ eine Bijektion zweier unterscheidender $\dim(M_{1,2}) > 2$ Lorentzmannigfaltigkeiten, wobei $x \gg y \Leftrightarrow f(x) \gg f(y)$ (oder $>$). Dann sind (M_1, g_1) und (M_2, g_2) konform isometrisch.

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Kausale Abhängigkeitsgebiete

Definition 15

Eine Menge S in einer Raumzeit (M, g) heißt *achronal*, wenn keine zwei ihrer Punkte durch eine zeitartige Kurve verbunden werden können.

Definition 16

Sei $S \subset M$. Das *zukünftige/vergangene Abhängigkeitsgebiet* $D^\pm(S) \subseteq M$ von S umfasst die Menge der Punkte $p \in M$ mit der Eigenschaft, dass jede nicht fortsetzbare vergangenheitsgerichtete/zukunftsgerichtete kausale Kurve durch p die Menge S schneidet. $D(S) := D^+(S) \cup D^-(S)$ heißt das *totale Abhängigkeitsgebiet*.

Definition 17

Sei $S \subset M$ abgeschlossen und achronal. Dann heißt S *Cauchyfläche* von (M, g) wenn $D^\pm(S) = M$. Ist $D^\pm(S) \subset M$ dann heißt $H^\pm(S) := \partial D^\pm(S)$ der *Cauchy-Horizont* von S in M .

Satz 18

(M, g) ist *global hyperbolisch genau dann*, wenn (M, g) eine *Cauchy-Fläche* besitzt. In diesem Fall ist topologisch $M \cong \Sigma \times \mathbb{R}$ mit einer Zeitfunktion $t: M \rightarrow \mathbb{R}$ deren Levelflächen $t^{-1}(\tau) = \Sigma \times \{\tau\}$ *Cauchyflächen* sind.

Satz 19

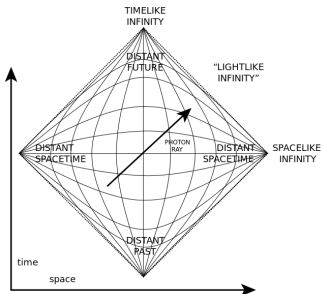
Ist (M, g) *global hyperbolisch* und $p < q$. Dann gibt es eine *kausale Geodätische* von p nach q (i.a. nicht eindeutig) deren *Bogenlänge größer oder gleich der Bogenlänge aller anderen kausalen Kurven* von p nach q ist.

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

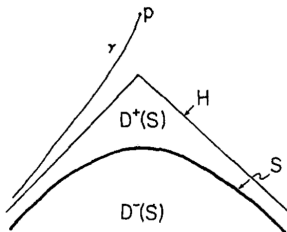
- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Konform reskalierter Minkowskiraum



Cauchy-Horizont für hyperboloidale raumartige Hyperflächen.



$$g = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$= \Phi^2(T, R) \left[\underbrace{-dT^2 + dR^2 + \sin^2(2R)d\Omega^2}_{\subset \text{Einstein Universum} \cong \mathbb{R} \times S^3} \right] \quad (18a)$$

\subset Einstein Universum $\cong \mathbb{R} \times S^3$

wobei

$$t \pm r = \tan(T \pm R), \quad -\pi/2 < T \pm R < \pi/2, \quad R \geq 0 \quad (18b)$$

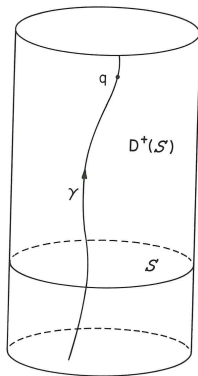
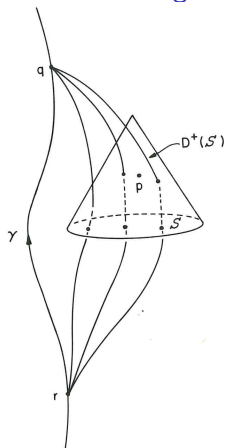
$$\Phi(T, R) = \sec(T + R) \sec(t - R) \quad (18c)$$

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Kritisches zum Begriff: „Vorher“-Sage



Definition 20

Ist $q \in M$, dann ist das *Vorhersagegebiet* (*domain of prediction*) $P(q) \subset M$ definiert als die Menge der Punkte $p \in M - I^-(q)$ mit der Eigenschaft, dass jede vergangenheitsgerichtete, nicht fortsetzbare zeitartige Kurve durch p die chronologische Vergangenheit $I^-(q)$ schneidet. Im Minkowskiraum ist $P(q) = \emptyset$, im vollständigen statischen Einstein-Universum $P(q) = M - I^-(q)$ (letzteres ist nur in geschlossenen Universen wahr).

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

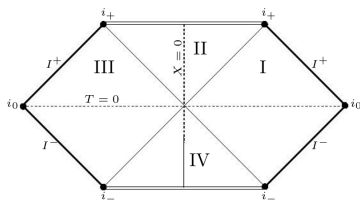
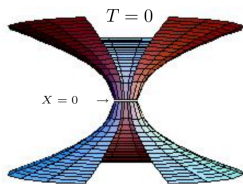
Maximale Fortsetzung: Von Schwarzschild nach Kruskal

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage

- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit



$$g = \frac{4r_0^3}{r} \exp(-r/r_0) (-dT^2 + dX^2) + r^2 d^2\Omega \quad (19a)$$

$$\left(\frac{r}{r_0} - 1\right) \exp(r/r_0) = X^2 - T^2 \quad (19b)$$

Diese globale Karte (T, X) entsteht aus Schwarzschild-Koordinaten (t, r) durch

$$T = \exp(r/2r_0) \begin{cases} \sqrt{(r/r_0) - 1} \sinh(t/2r_0) & \text{für } r \geq r_0 \\ \sqrt{1 - (r/r_0)} \cosh(t/2r_0) & \text{für } r \leq r_0 \end{cases} \quad (20a)$$

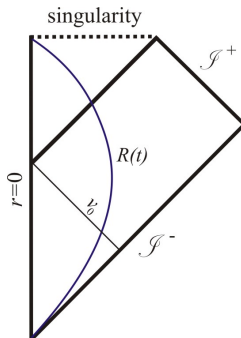
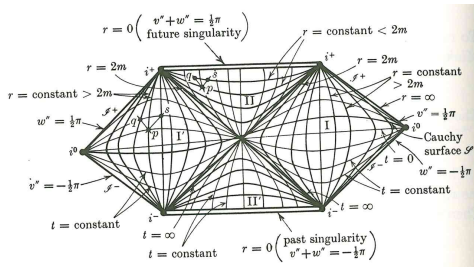
$$X = \exp(r/2r_0) \begin{cases} \sqrt{(r/r_0) - 1} \cosh(t/2r_0) & \text{für } r \geq r_0 \\ \sqrt{1 - (r/r_0)} \sinh(t/2r_0) & \text{für } r \leq r_0 \end{cases} \quad (20b)$$

Was ist ein Schwarzes Loch?

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit



Definition 21

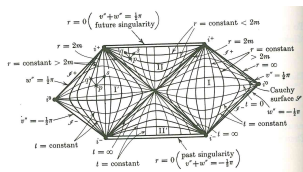
Sei (M, g) eine asymptotisch flache Raumzeit. Dann heißt die Region $M - J^-(\mathcal{I}^+)$ *Schwarzes Loch* und ihr Rand $H^+ := \partial(J^-(\mathcal{I}^+))$ (*zukünftiger Ereignishorizont*). Entsprechend heißt $M - J^+(\mathcal{I}^-)$ *weißes Loch*.

Maximale Fortsetzung: Schwarzschild versus Reissner-Nordström und Kerr

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

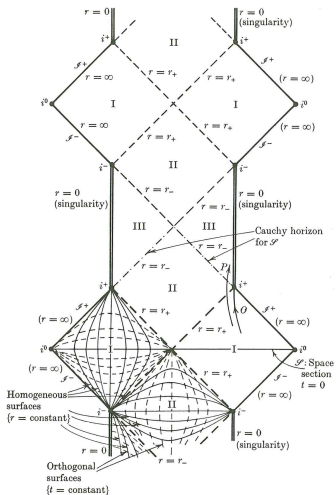
- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

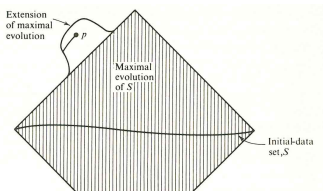
- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit



Unterschiede:

- ▶ Singularität: raum- bzw. zeitartig.
- ▶ Globale Hyperbolizität: Existenz von Cauchy-Horizonten (unendliche Blauverschiebung und als Folge Instabilität).
- ▶ Fall durch Horizont: Singularität oder Reisen zu anderen asymptotisch-flachen „Universen“.





Satz 22

Das Anfangswertproblem der materiefreien Einstein-Gleichungen ART hat zu den (geeignet regulären) Daten (S, h, K) eine (bis auf Diffeom.) eindeutige maximale Cauchy-Entwicklung in $D^+(S)$.

Unklar bleibt, ob die Raumzeit über die Cauchy-Entwicklung in $D^+(S)$ hinaus fortsetzbar ist (wie im Fall der Reissner-Nordström- oder Kerr-Daten). Wenn ja, besitzt S in der Fortsetzung ein Cauchy-Horizont.

Satz 23 (starke kosmische Zensur, vermutet)

„Generische“ und „physikalisch sinnvolle“ Anfangsdaten besitzen keine Fortsetzung (im Sinne isometrischer Einbettung) über die maximale Cauchy-Entwicklung hinaus. Damit bleibt die Raumzeit prognostizierbar.

Satz 24 (schwache kosmische Zensur, vermutet)

„Generische“ und „physikalisch sinnvolle“ asymptotisch-flache Anfangsdaten besitzen ein affin-vollständiges \mathcal{I}^+ dessen kausale Vergangenheit global hyperbolisch ist. Das heißt: Keine Bildung nackter Singularitäten nach endlicher Zeit in realistischen Kollapsszenarien. (Anfänglich vorhandene weisse Löcher werden dadurch nicht ausgeschlossen.)

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Definition 25 (Intendierte Version)

Eine Raumzeit (M, g) heißt *singulär*, wenn sie nicht fortsetzbar und kausal-geodätisch unvollständig ist.

Satz 26 (kosmologische Situation)

Ist (M, g) global hyperbolisch mit $\mathbf{Ric}(X, X) \geq 0$ ($\forall X$ zeitartig) und besitzt (M, g) Cauchy-Fläche Σ mit mittlerer extrinsischer Krümmung $K \leq C < 0$. Dann existiert mindestens eine vergangenheitsgerichtete zeitartige Geodätische ausgehend von Σ die spätestens nach der Eigenlänge $3/|C|$ nicht fortgesetzt werden kann.

Satz 27 (asymptotisch-flache Situation)

Ist (M, g) global hyperbolisch mit $\mathbf{Ric}(X, X) \geq 0$ ($\forall X$ lichtartig) und besitzt (M, g) nicht-kompakte Cauchy-Fläche Σ die eine gefangene Fläche T enthält mit $\theta_0 = \max_T(\theta) < 0$. Dann existiert mindestens eine zukunftsgerichtete lichtartige Geodätische ausgehend von T die spätestens nach dem affinen Parameter $2/|\theta_0|$ nicht fortgesetzt werden kann.

Bemerkung 28

In beiden vorhergehenden Sätzen kann die globale Hyperbolizität durch schwächere Kausalitätsbedingungen ersetzt werden. Der Grund für geodätische Unvollständigkeit kann, muss aber nicht lokaler Natur im Sinne lokal divergierender geometrischer Invarianten (Krümmung) liegen.

Phys. Grundlagen

Mathematische
Umsetzung

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

Kausalität

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

Cauchy-Problem

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur

- Singularitäten

- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Definition 29 (Glymour, Malament 1977)

Zwei Raumzeiten (M, g) und (M', g') heißen *durch Beobachtung ununterscheidbar (observationally indistinguishable)* wenn zu jedem $p \in M$ ein $p' \in M'$ und zu jedem $p' \in M'$ ein $p \in M$ existiert, so dass $(I^-(p), g)$ und $(I^-(p'), g')$ isometrisch sind.

Satz 30 (Manchak 2009)

Sei (M, g) eine Raumzeit für die $I^-(p) \neq M$ für alle $p \in M$. Dann existiert zu (M, g) eine nicht-isometrische aber durch Beobachtung ununterscheidbare Raumzeit (M', g') .

Bemerkung 31

Im Sinne obiger Definition sind z.B. der Minkowski-Raum, und sein Halbraum $t < 0$ ununterscheidbar. Zahlreiche Beispiele ergeben sich durch Überlagerungsräume. Eine stärkere Definition würde verlangen, dass zu jeder zeitartigen Kurve γ in (M, g) eine ebensolche in (M', g') existiert, und umgekehrt, so dass $(I^-(\gamma), g)$ und $(I^-(\gamma'), g')$ isometrisch sind.

– THE END –

Phys. Grundlagen

Mathematische
Umsetzung

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

Kausalität

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

Cauchy-Problem

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit

Definition 29 (Glymour, Malament 1977)

Zwei Raumzeiten (M, g) und (M', g') heißen *durch Beobachtung ununterscheidbar* (*observationally indistinguishable*) wenn zu jedem $p \in M$ ein $p' \in M'$ und zu jedem $p' \in M'$ ein $p \in M$ existiert, so dass $(I^-(p), g)$ und $(I^-(p'), g')$ isometrisch sind.

Satz 30 (Manchak 2009)

Sei (M, g) eine Raumzeit für die $I^-(p) \neq M$ für alle $p \in M$. Dann existiert zu (M, g) eine nicht-isometrische aber durch Beobachtung ununterscheidbare Raumzeit (M', g') .

Bemerkung 31

Im Sinne obiger Definition sind z.B. der Minkowski-Raum, und sein Halbraum $t < 0$ ununterscheidbar. Zahlreiche Beispiele ergeben sich durch Überlagerungsräume. Eine stärkere Definition würde verlangen, dass zu jeder zeitartigen Kurve γ in (M, g) eine ebensolche in (M', g') existiert, und umgekehrt, so dass $(I^-(\gamma), g)$ und $(I^-(\gamma'), g')$ isometrisch sind.

– THE END –

Phys. Grundlagen

Mathematische
Umsetzung

- Einsteingleichungen
- Krümmung
- geom. Bedeutung
- Raum-Zeit
- lokale Struktur
- Topologie
- Existenz L-Metrik
- top. Obstruktionen

Kausalität

- Verhältnisse
- Begriffe
- Topologie
- Abh.-Gebiete

Cauchy-Problem

- Minkowski
- Vorher-Sage
- Kruskal
- schwarzes Loch
- max. Fortsetzung
- kosm. Zensur
- Singularitäten
- Unterscheidbarkeit
- Unterscheidbarkeit