Exemplos - Soma de Subespaços

Exemplo 1: *O espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ *é soma direta dos subespaços* $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ *e* W $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$*. Ou seja,* $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$*.*

Temos que um elemento de U é da forma (x, y) com $y = 0$, ou seja, $(x, 0) = x(1, 0)$, para $x \in \mathbb{R}$. Assim, o conjunto U é gerado pelo elemento $(1, 0)$, isto é, $U = [(1, 0)]$.

De mesmo modo, um elemento de W é da forma $(0, y) = y(0, 1)$, para $y \in \mathbb{R}$. Assim, o conjunto W é gerado pelo elemento $(0, 1)$, isto é $W = [(0, 1)]$.

Logo, temos que a intersecção entre U e W é o elemento neutro de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $U \cap W = \{(0, 0)\}$

Além disso, $U + W = [(1, 0), (0, 1)]$.

Mas, o conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\}$ gera todo o $\mathbb{R}^2$, pois qualquer elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como a combinação linear $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$. Assim, temos que $U + W = \mathbb{R}^2$.
E como $U \cap W = \{(0, 0)\}$, temos:

$$\mathbb{R}^2 = U \oplus W$$

De fato, qualquer elemento (x, y) do $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação de um elemento de U, da forma $(x, 0)$ com um de W, da forma $(0, y)$ e o único elemento que pertence a U e a W ao mesmo tempo é a origem $(0, 0)$.

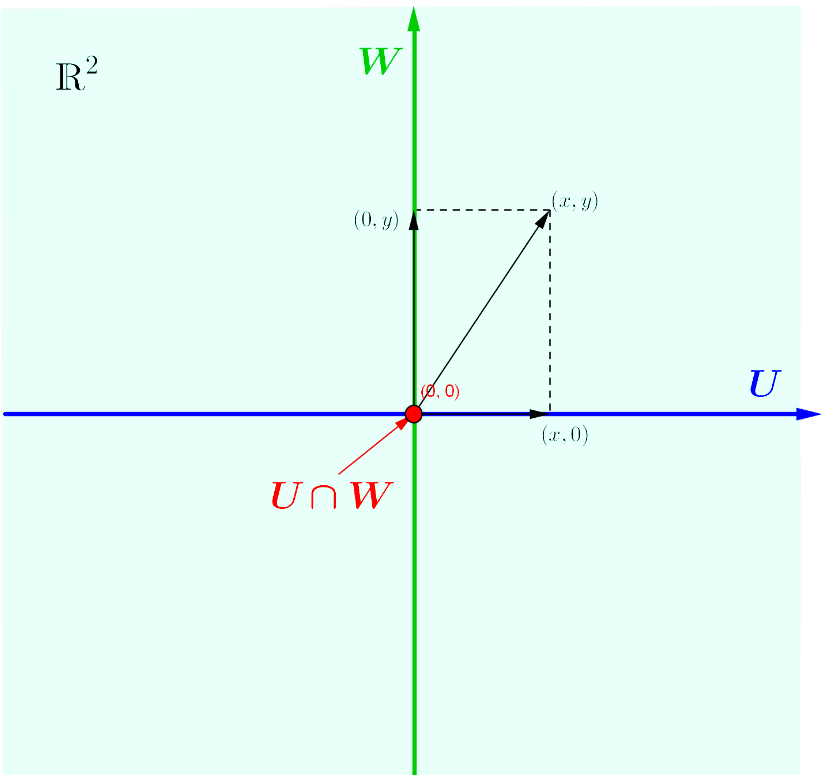

Figura 1: $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

Exemplo 2: *Considere os subespaços de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\right\} \quad e \quad W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\right\}$$

Temos que $U + W = \mathbb{R}^3$, mas não como soma direta.

Vamos determinar um conjunto de geradores para U e W. Um elemento de U pode ser escrito como $(x, y, z) = (0, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$. Assim, temos: $U = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$.
Um elemento de W pode ser escrito da forma $(x, y, z) = (x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$. Assim, $W = [(1, 0, 0), (0, 0, 1)]$.

Desse forma, temos que $U + W = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$, pois é a união dos conjuntos geradores de U e de W. Como o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ gera todo o $\mathbb{R}^3$, uma vez que qualquer elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, temos que $U + W = \mathbb{R}^3$.

Mas, $U \cap W = [(0, 0, 1)]$, ou seja, $U \cap W$ é diferente do elemento neutro do $\mathbb{R}^3$, assim, $\mathbb{R}^3 = U + W$, mas não como soma direta.

Exemplo 3: *Sejam* $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = d \text{ e } b = c \right\}$ *e* $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = c \text{ e } b = d \right\}$ *subespaços vetoriais de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$*. Determine* $U + W$*.*

Vamos encontrar um conjunto de geradores para U e para W. Impondo as condições $a = d$ e $b = c$, um elemento de U é escrito da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}$$

Assim, $U = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right]$.

Impondo as condições $a = c$ e $b = d$, um elemento de W pode ser escrito da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}$$

Assim, $W = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right]$.

Dessa forma, temos que:

$$U + W = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right]$$

.

Exemplo 4: *Sejam* $U = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$ *e* $W = \{B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid B^t = -B\}$ *subespaços vetoriais de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*. Temos que* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = U \oplus W$*.*

O exemplo pode ser visto da seguinte forma: Toda matriz $n \times n$ pode ser escrita como combinação de uma matriz simétrica com uma antissimétrica.
Vamos determinar de forma única duas matrizes, A e B com $A \in U$ simétrica e $B \in W$ antissimétrica, tais que $M = A + B$, com M uma matriz qualquer:

Temos que $A^t = A$ e $B^t = -B$, assim:

$$\begin{cases} M = A + B \\ M^t = A^t + B^t = A - B \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos: $M + M^t = 2A \Rightarrow A = \frac{M+M^t}{2}$.

Agora, subtraindo as duas equações do sistema, temos: $M - M^t = 2B \Rightarrow B = \frac{M-M^t}{2}$.

Dessa forma, determinamos de forma única duas matrizes A e B, com $A \in U$ e $B \in W$, de modo que $M = A + B$, para $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Assim, temos que $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = U \oplus W$.