

Dreiecksgeometrie

Wolfgang STRÖHER

DREIECKSGEOMETRIE

VORBEMERKUNGEN

Die Länge einer Strecke

Die Länge einer Strecke ist stets eine *positive reelle Zahl*.

$$g \text{ --- } \overset{A}{\circ} \text{ --- } a = AB \text{ --- } \underset{B}{\circ} \text{ ---} \quad 0 < a \in \mathbb{R}, \quad g = (A, B)$$

Das Teilverhältnis dreier Punkte einer Geraden

$$\text{--- } \overset{A}{\circ} \text{ --- } \overset{C}{\circ} \text{ --- } \underset{B}{\circ} \text{ ---}$$
$$|T(ABC)| = \frac{AC}{BC} \quad T(ABC) = \lambda \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

Das Teilverhältnis $T(ABC)$ der drei Punkte A, B, C auf derselben Geraden ist eine (*positive oder negative*) *reelle Zahl*.

$T(ABC) < 0$: \Leftrightarrow wenn C zwischen A und B liegt

$T(ABC) > 0$: \Leftrightarrow wenn C nicht zwischen A und B liegt.

Sind A, B, C drei *verschiedene* Punkte, so gilt

$\lambda < 0$ C zwischen A und B

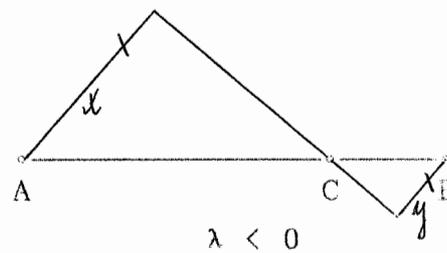
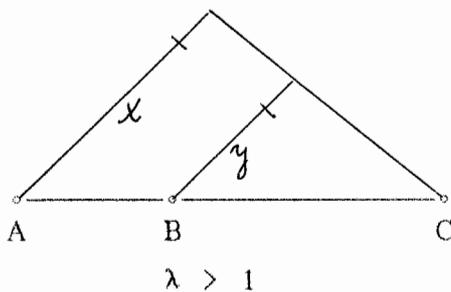
$\lambda = -1$ C ist *Mittelpunkt* der Strecke AB

$\lambda > 1$ C rechts von B

$\lambda = 1$ unmöglich, wenn $A \neq B$ (C wäre "Fernpunkt")

$\lambda < 1$ C links von A

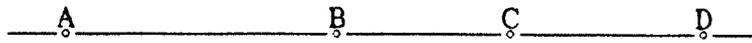
Beispiel: Konstruktion des Teilungspunktes C der Strecke AB bei gegebenem Teilverhältnis $\lambda = \frac{x}{y}$



Die Lage des Punktes C ist durch Angabe des Teilverhältnisses $T(ABC)$ eindeutig bestimmt.

Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden

Unter dem Doppelverhältnis der Punkte C, D bezüglich der Punkte A, B versteht man den Ausdruck



$$D(ABCD) := \frac{T(ABC)}{T(ABD)}$$

Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden ist eine (positive oder negative) reelle Zahl.

$D(ABCD) > 0 \Leftrightarrow C$ und D sind *beide* entweder im Innern oder Äußern der Strecke AB

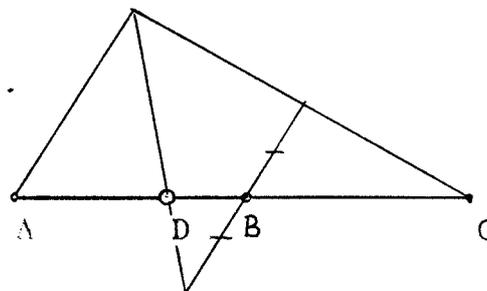
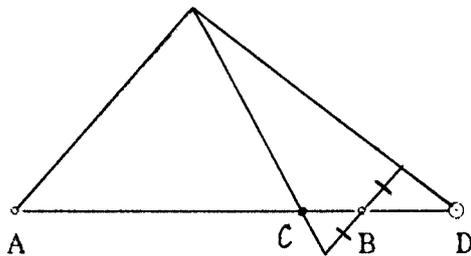
$D(ABCD) < 0 \Leftrightarrow$ *einer* der Punkte C bzw. D liegt im Innern, der andere im Äußern der Strecke AB

$D(ABCD) = -1 \Leftrightarrow$ *harmonische Lage* der Punkte C, D bezüglich der Punkte A und B .

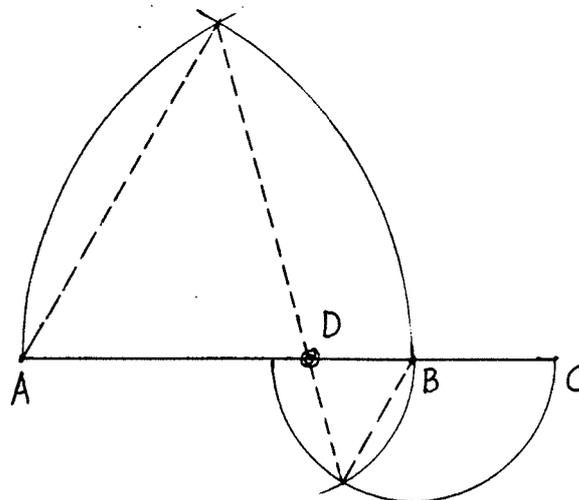
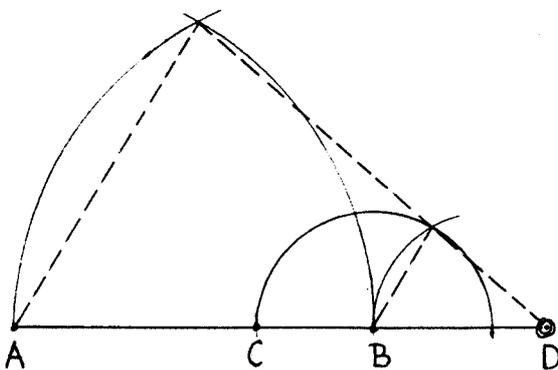
Sind die Punkte A, B, C gegeben, so ist D durch Angabe des Doppelverhältnisses $D(ABCD)$ eindeutig bestimmt. Sei nämlich $D(ABCD) = d$ und $T(ABC) = t$ gegeben, so folgt

$$D(ABCD) = \frac{T(ABC)}{T(ABD)} = \frac{t}{T(ABD)} = d \Rightarrow T(ABD) = \frac{t}{d}$$

Beispiel: Konstruktion des 4. harmonischen Punktes D bezüglich der gegebenen Punkte A, B, C .

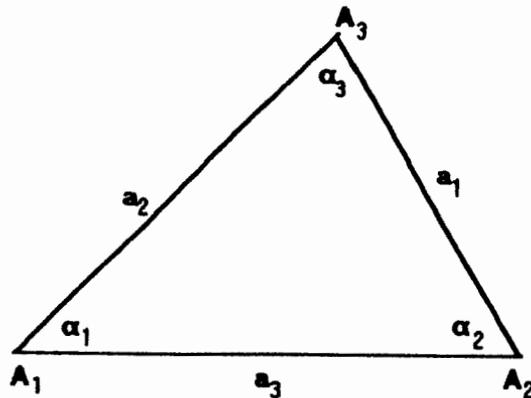


Liniensparende Konstruktion des 4. harmonischen Punktes mit Hilfe des Zirkels:



Bezeichnungsweisen für das ebene Dreieck

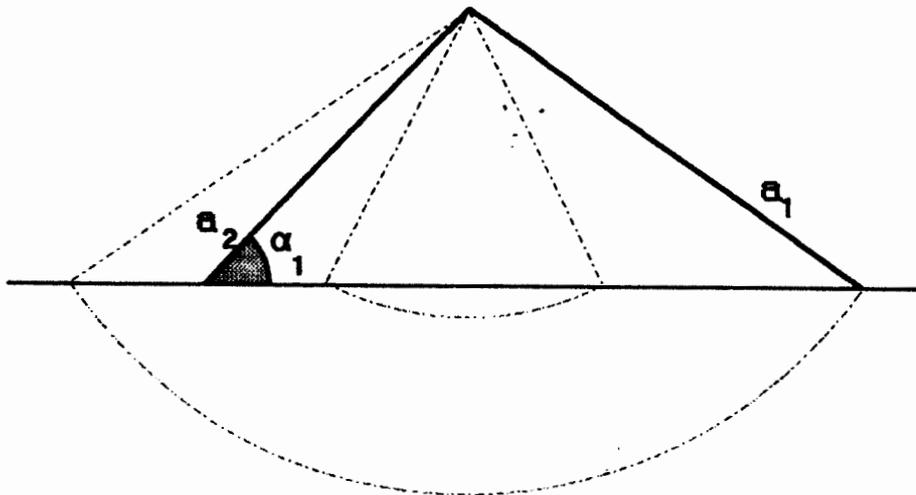
Die heute übliche Bezeichnungsweise geht auf Leonhard EULER (1707-1783) zurück. Das Dreieck mit den Ecken A_1, A_2, A_3 bezeichnet man mit $\Delta A_1A_2A_3$ oder kurz mit $A_1A_2A_3$. Die Längen der Seiten bezeichnen wir wie die Seiten selbst, z.B. $A_2A_3 = a_1$



Kongruenzsätze ($=$, \cong , \equiv)

SWS, SSS, WSW, SWW, WSS... "casus ambiguus"

Beim WSS-Satz ist das Dreieck nur dann eindeutig bestimmt, wenn der Winkel der größeren der beiden gegebenen Seiten gegenüberliegt



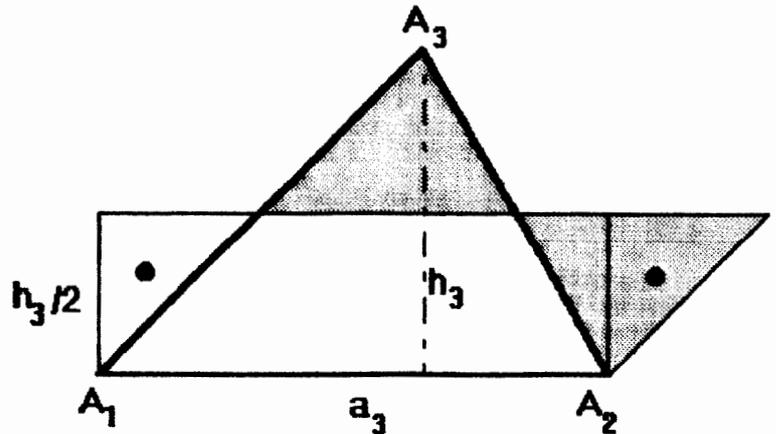
Ähnlichkeitssätze (\sim , \cong)

1. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in allen drei Winkeln übereinstimmen (Definition der Ähnlichkeit von Dreiecken)
2. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn entsprechende Seiten dasselbe Verhältnis aufweisen
3. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen

4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen, die anliegenden Seiten eines weiteren Winkels gleiches Verhältnis besitzen und die dritten Winkel gleichzeitig spitz, stumpf oder Rechte sind (entspricht dem "casus ambiguus")

Die Fläche eines Dreiecks

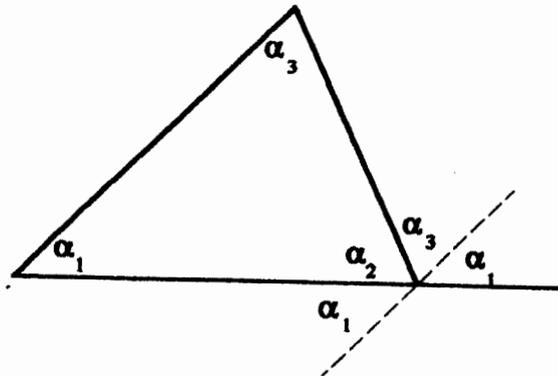
$$2F = a_1 h_1 = a_2 h_2 = a_3 h_3$$



Die Winkelsumme eines Dreiecks, Außenwinkelsatz

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2R$$

Jeder Außenwinkel ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel



Das rechtwinkelige Dreieck

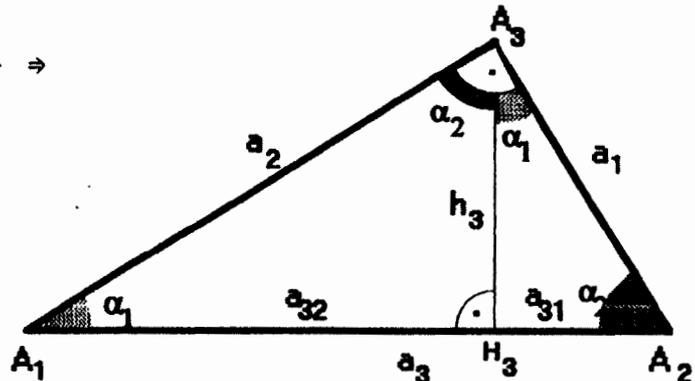
$$\Delta A_3 A_1 H_3 \sim \Delta A_2 A_3 H_3 \Rightarrow \frac{a_{32}}{h_3} = \frac{h_3}{a_{31}} \Rightarrow$$

$$h_3^2 = a_{31} a_{32} \quad \text{Höhensatz}$$

$$\Delta A_1 A_2 A_3 \sim \Delta A_3 A_2 H_3 \sim \Delta A_1 A_3 H_3 \Rightarrow \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_2}{a_{31}} \quad \text{und} \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_1}{a_{32}} \Rightarrow$$

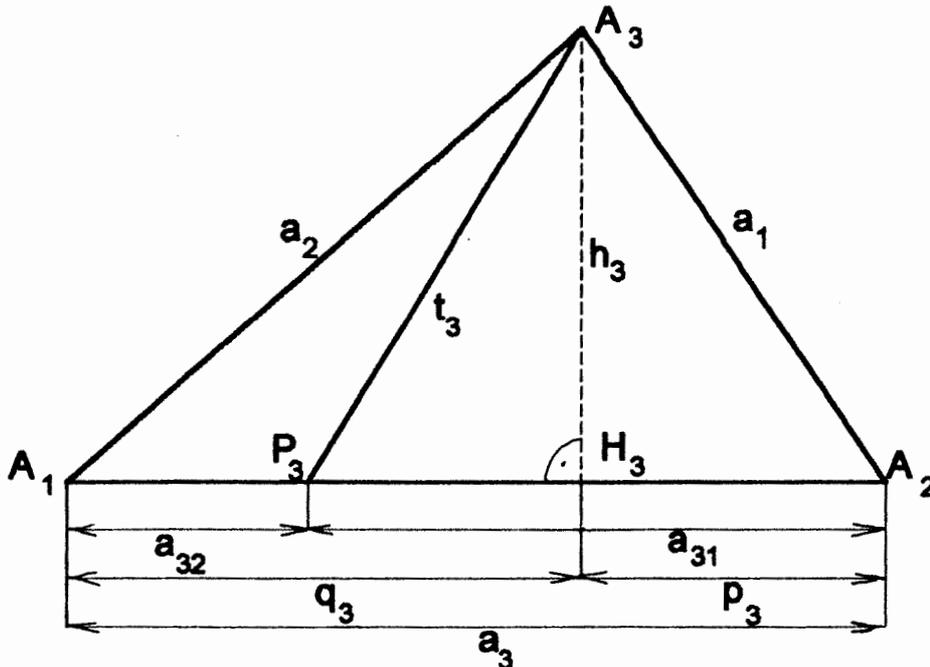
$$a_1^2 = a_3 \cdot a_{31}, \quad a_2^2 = a_3 \cdot a_{32} \quad \text{Kathetensätze}$$

$$a_1^2 + a_2^2 = a_3(a_{31} + a_{32}) = a_3^2$$



$$a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 \quad \text{Lehrsatz des PYTHAGORAS}$$

Der Transversalen-Satz von Matthew STEWART (1717–1785)



Wir wählen P_3 beliebig auf A_1A_2 . Gesucht ist die Länge der Transversalen $t_3 = A_3P_3$. Es gilt

$$a_{31} + a_{32} = a_3, \quad p_3 + q_3 = a_3 \quad (1)$$

Nach PYTHAGORAS folgt

$$h_3^2 = a_2^2 - q_3^2 = a_1^2 - p_3^2 = t_3^2 - (q_3 - a_{32})^2 \quad (2)$$

Wegen (1) ergibt sich aus dem 2. und 3. Term von (2)

$$a_2^2 - (a_3 - p_3)^2 = a_1^2 - p_3^2 \Rightarrow a_2^2 - a_3^2 + 2a_3p_3 - p_3^2 = a_1^2 - p_3^2 \Rightarrow 2a_3p_3 = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow$$

$$p_3 = \frac{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2}{2a_3}, \quad q_3 = a_3 - p_3 = \frac{a_3^2 + a_2^2 - a_1^2}{2a_3}$$

Für die Höhenabschnitte auf der Dreieckseite a_3 gilt:

$$p_3 = \frac{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2}{2a_3}, \quad q_3 = \frac{a_3^2 + a_2^2 - a_1^2}{2a_3}$$

Die Höhenabschnitte auf den anderen Dreiecksseiten ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Indizes

Aus dem 2. und 4. Term von (2) folgt

$$a_2^2 - q_3^2 = t_3^2 - q_3^2 + 2q_3 a_{32} - a_{32}^2 \Rightarrow t_3^2 = a_2^2 + a_{32}^2 - 2q_3 a_{32} = a_2^2 + a_{32}^2 - 2a_{32} \cdot \frac{a_3^2 + a_2^2 - a_1^2}{2a_3}$$

Erweiterung mit a_3 ergibt

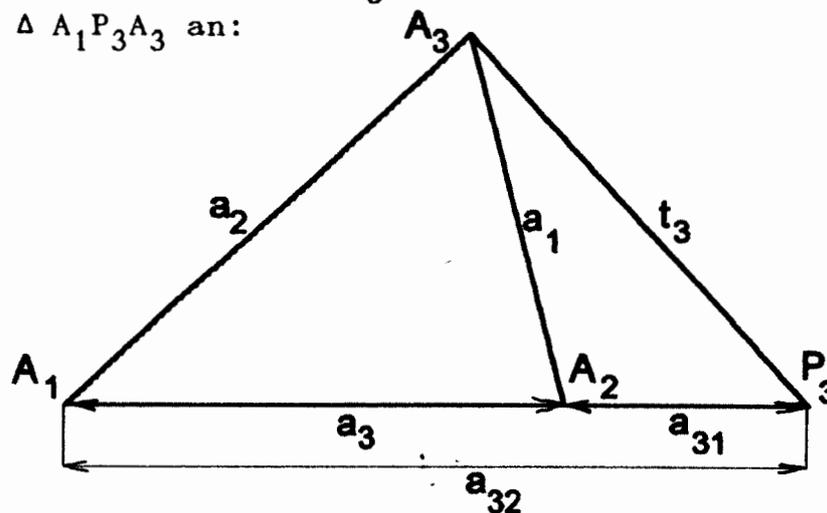
$$a_3 t_3^2 = a_2^2 \frac{(a_3 - a_{32})}{a_{31}} - a_3 a_{32} \frac{(a_3 - a_{32})}{a_{31}} + a_1^2 a_{32} = a_2^2 a_{31} - a_3 a_{31} a_{32} + a_1^2 a_{32}$$

Satz von STEWART

$$a_3(t_3^2 + a_{31} a_{32}) = a_1^2 a_{32} + a_2^2 a_{31}$$

+ zykl.

Bei anderer Lage des Punktes P_3 wenden wir den Satz von STEWART auf das Dreieck $\Delta A_1 P_3 A_3$ an:



$$a_{32}(a_1^2 + a_3 a_{31}) = a_2^2 a_{31} + t_3^2 a_3$$

$$a_3(t_3^2 - a_{31} a_{32}) = a_1^2 a_{32} - a_2^2 a_{31}$$

+ zykl.

Es ist zweckmäßig, die Lage des Punktes P_3 durch sein Teilverhältnis bezüglich $A_1 A_2$ festzulegen. Dabei dient die zweite Formel als Vorbild, da hier das Teilverhältnis ein positives Vorzeichen hat. Dann ist

$$\lambda_3 = |\lambda_3| = |T(A_1 A_2 P_3)| = \frac{A_1 P_3}{A_2 P_3} = \frac{a_{32}}{a_{31}} > 0 \Rightarrow \lambda_3 a_{31} = a_{32} = a_3 + a_{31} \Rightarrow$$

$$a_{31}(\lambda_3 - 1) = a_3 \Rightarrow a_{31} = \frac{a_3}{\lambda_3 - 1}, \quad a_{32} = a_3 + \frac{a_3}{\lambda_3 - 1} = \frac{\lambda_3 a_3}{\lambda_3 - 1}$$

Demnach folgt aus der 2. Formel

$$a_3 \left(t_3^2 - \frac{\lambda_3 a_3^2}{(\lambda_3 - 1)^2} \right) = a_1^2 \frac{\lambda_3 a_3}{\lambda_3 - 1} - a_2^2 \frac{a_3}{\lambda_3 - 1}$$

$$t_3^2 = \frac{\lambda_3 a_3^2 + (\lambda_3 - 1)(a_1^2 \lambda_3 - a_2^2)}{(\lambda_3 - 1)^2} \quad \lambda_3 = T(A_1 A_2 P_3) \quad + \text{zykl.}$$

Satz von STEWART

Anwendungen des Satzes von STEWART

Berechnung der Höhe h_3

$$\begin{aligned} h_3^2 &= a_1^2 - p_3^2 = a_1^2 - \frac{(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)^2}{4a_3^2} = \frac{4a_1^2 a_3^2 - (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)^2}{4a_3^2} = \\ &= \frac{[2a_1 a_3 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2][2a_1 a_3 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2]}{4a_3^2} = \frac{[(a_1 + a_3)^2 - a_2^2][a_2^2 - (a_1 - a_3)^2]}{4a_3^2} = \\ &= \frac{[a_1 + a_2 + a_3][a_1 + a_3 - a_2][a_2 + a_1 - a_3][a_2 - a_1 + a_3]}{4a_3^2} \end{aligned}$$

Setzen wir

$$2s := a_1 + a_2 + a_3$$

so folgt etwa: $a_1 + a_3 - a_2 = 2s - 2a_2 + \text{zykl.}$, also

$$h_3^2 = 4 \cdot \frac{s(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)}{a_3^2} \quad + \text{zykl.}$$

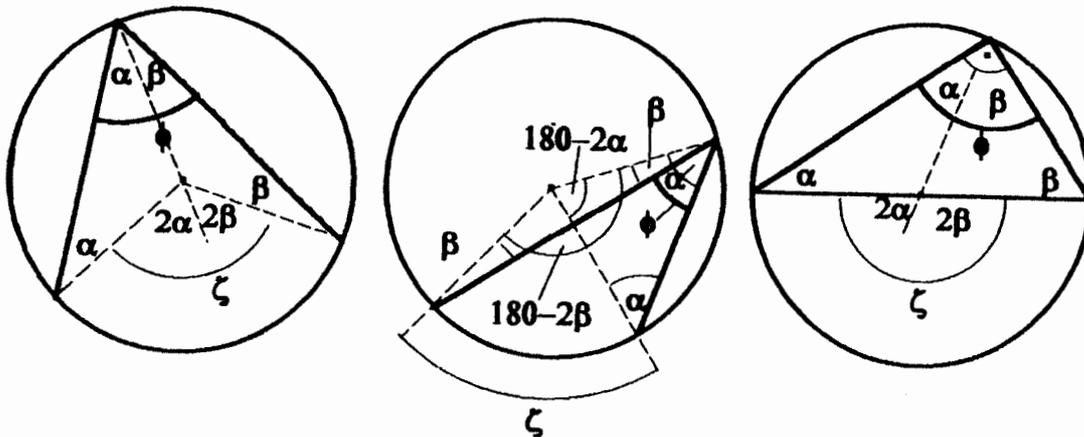
daher wegen $2F = h_3 a_3$

$$F^2 = s(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)$$

Formel von HERON von Alexandrien (ca. 60 n.Chr.). Die Formel tritt aber bereits bei ARCHIMEDES von Syrakus (287?-212 v.Chr) auf.

HILFSSÄTZE ÜBER KREISE

Der Peripheriewinkelsatz, der Satz von THALES



$$\zeta = 2(\alpha + \beta)$$

$$\phi = \alpha + \beta = \zeta/2$$

$$\zeta = 180 - 2\beta - (180 - 2\alpha)$$

$$= 2(\alpha - \beta)$$

$$\phi = \alpha - \beta = \zeta/2$$

$$\zeta = 2(\alpha + \beta) = 180$$

$$\phi = \alpha + \beta = \zeta/2 = 90$$

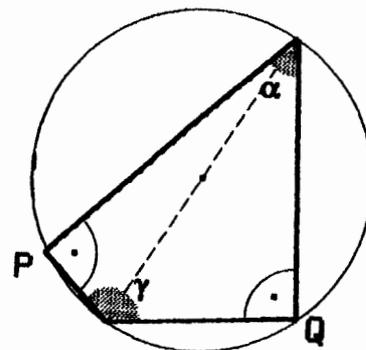
Der Zentriwinkel ist immer doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel über demselben Bogen. Daher sind alle Peripheriewinkel über demselben Bogen gleich groß.

Der Sonderfall $\phi = 90^\circ$ ist der Satz von THALES von Milet (ca. 600 v.Chr.)

Supplementäre Peripheriewinkel

Peripheriewinkel über supplementären Bögen sind supplementär

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

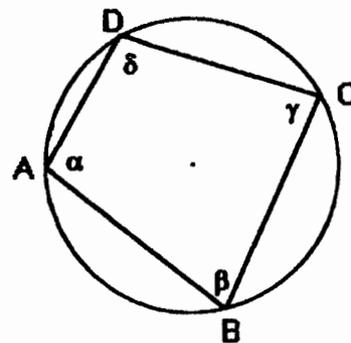


Das Sehnenviereck

Gegenüberliegende Winkel eines Sehnenvierecks sind supplementär

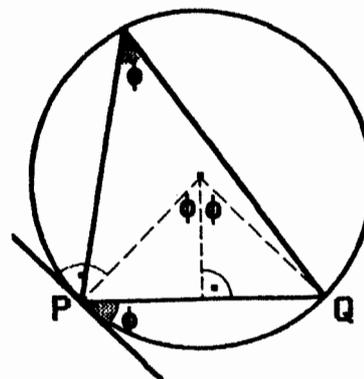
$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta + \delta = 180^\circ$$



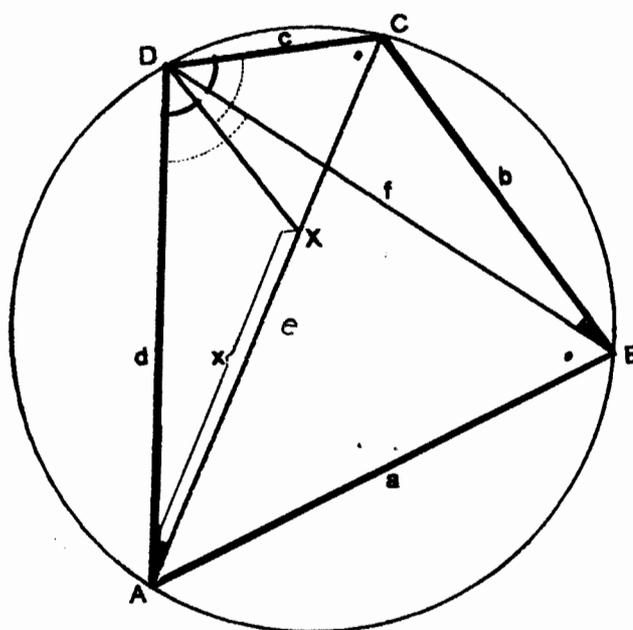
Der Sehnen-Tangentenwinkel

Der Sehnen-Tangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel über demselben Bogen



DER SATZ VON PTOLEMAIOS

PTOLEMAIOS von Alexandrien (um 150 n.Chr. ägyptischer Herkunft)



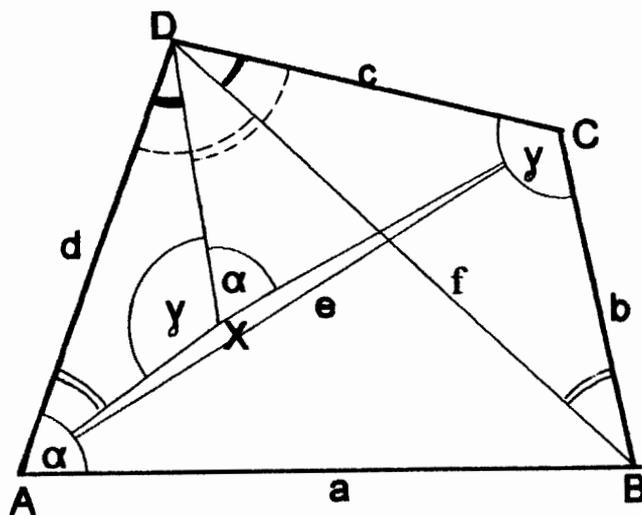
Wir konstruieren die Gerade DX so, daß gilt $\angle ADX := \angle BDC$. Dann ist auch $\angle ADB = \angle XDC$. Daraus folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke

$$\begin{array}{l} \Delta BDC \sim \Delta ADX \Rightarrow \frac{b}{f} = \frac{x}{d} \Rightarrow x = \frac{bd}{f} \\ \Delta ABD \sim \Delta XCD \Rightarrow \frac{a}{f} = \frac{e-x}{c} \Rightarrow e-x = \frac{ac}{f} \end{array} \quad +$$

$$e = \frac{ac+bd}{f}$$

$ef = ac + bd$ Satz von PTOLEMAIOS

Der Satz von PTOLEMAIOS ist für das Sehnenviereck charakteristisch.
 Bei allen anderen konvexen Vierecken gilt
 $ef < ac + bd$



Wir gehen von einem konvexen Viereck ABCD aus, das kein Sehnenviereck ist, daher ist

$$\alpha + \gamma \neq 180^\circ$$

Wir konstruieren den Punkt X, indem wir $\angle ADX := \angle BDC$ und $\angle DAX := \angle DBC$ machen. Daraus folgt $\angle AXD = \angle BCD = \gamma$ und daher

$$\Delta AXD \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{DA}{DX} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{DX}{DC} \quad (1)$$

Da in den Dreiecken ΔABD und ΔXCD die Winkel $\angle ADB = \angle XDC$ übereinstimmen und die entsprechenden Seiten nach (1) gleiches Verhältnis aufweisen, sind die Dreiecke ΔABD und ΔXCD ähnlich und stimmen daher in allen Winkeln überein. Es gilt also

$$\angle DXC = \angle DAB = \alpha$$

Wegen $\alpha + \gamma \neq 180^\circ$ liegen die Punkte A, X, C nicht auf einer Geraden. Sie bilden daher ein nichtausgeartetes Dreieck ΔACX , für welches die Dreiecksungleichung

$$AX + XC > AC = e \quad (2)$$

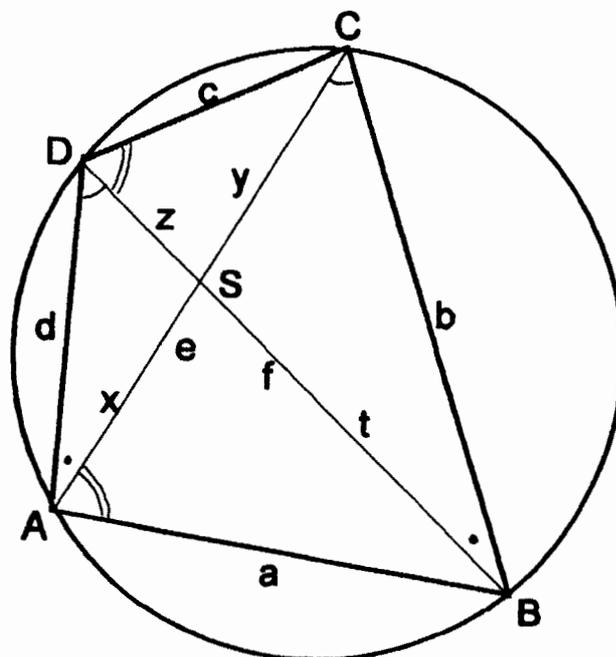
gilt. Ferner ist (1)

$$\Delta AXD \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{AX}{d} = \frac{b}{f} \Rightarrow AX = \frac{bd}{f}$$

$$\Delta XCD \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{XC}{c} = \frac{a}{f} \Rightarrow XC = \frac{ac}{f}$$

Einsetzen in die Dreiecksungleichung (2) ergibt $ac + bd \geq ef$. Das Gleichheitszeichen gilt nur beim Sehnenviereck.

Andere Herleitung des Satzes von PTOLEMAIOS sowie weitere Sätze
über das Sehnenviereck



$$\Delta ASD \sim \Delta BSC \Rightarrow d:x:z = b:t:y \Rightarrow t = \frac{bx}{d}, y = \frac{bz}{d}$$

$$\Delta ABS \sim \Delta DCS \Rightarrow a:t:x = c:y:z \Rightarrow z = \frac{cx}{a}, y = \frac{ct}{a}$$

Daraus folgt unmittelbar

$y = \frac{b}{d}z = \frac{bc}{ad}x$ $z = \frac{c}{a}x$ $t = \frac{b}{d}x$

Alle Diagonalenabschnitte eines Sehnenviereckes lassen sich durch einen von ihnen, etwa x , ausdrücken

Aus diesen Beziehungen ergibt sich weiters

$\frac{x}{y} = \frac{ad}{bc}$ $\frac{t}{z} = \frac{ab}{cd}$

Die Abschnitte einer Diagonale verhalten sich wie die Produkte der in den Endpunkten der Diagonale zusammenstoßenden Seiten

Ferner gilt

$$e = x+y = \frac{ad+bc}{ad}x$$

$$f = z+t = \frac{ab+cd}{ad}x$$

Division dieser Beziehungen liefert

$$\boxed{\frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{ab+cd}} \quad (\#)$$

Der Diagonalenabschnitt x ergibt sich durch Anwendung des Satzes von STEWART auf die Transversale x des Dreiecks ΔBDA

$$\begin{aligned} f(x^2 + tz) &= a^2z + d^2t \Rightarrow f\left(x^2 + \frac{bc}{ad}x^2\right) = a^2 \frac{c}{a}x + d^2 \frac{b}{d}x \Rightarrow \\ &\Rightarrow f\left(x + \frac{bc}{ad}x\right) = \frac{f}{ad}(ad+bc)x = (ac+bd) \end{aligned}$$

Daraus folgt einerseits wegen $\frac{bc}{ad}x = y$

$f(x+y) = fe = ac+bd$ der Satz von PTOLEMAIOS. Andererseits folgt daraus

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{ad}{f} \cdot \frac{ac+bd}{ad+bc} \\ y &= \frac{bc}{f} \cdot \frac{ac+bd}{ad+bc} \\ z &= \frac{cd}{f} \cdot \frac{ac+bd}{ad+bc} \\ t &= \frac{ab}{f} \cdot \frac{ac+bd}{ad+bc} \end{aligned}}$$

Weiters ergibt sich

$$f = z+t = \frac{1}{f} \cdot \frac{ac+bd}{ad+bc} (cd+ab) \Rightarrow f^2 = \frac{(ac+bd)(cd+ab)}{ad+bc}$$

Nach PTOLEMAIOS folgt weiter

$$e = \frac{ac+bd}{f} \Rightarrow e^2 = \frac{e}{f} (ac+bd) \stackrel{(\#)}{=} \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$$

Daher also

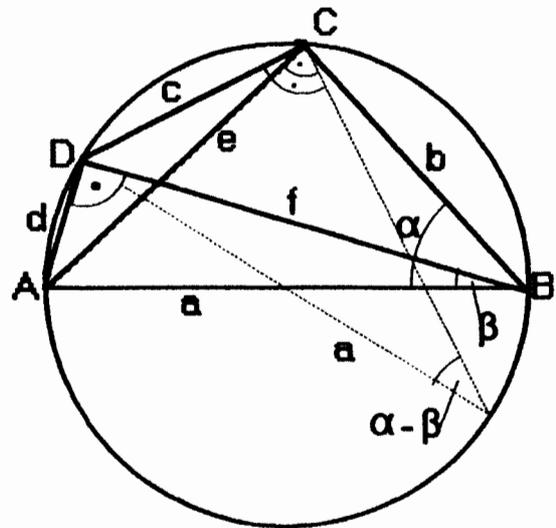
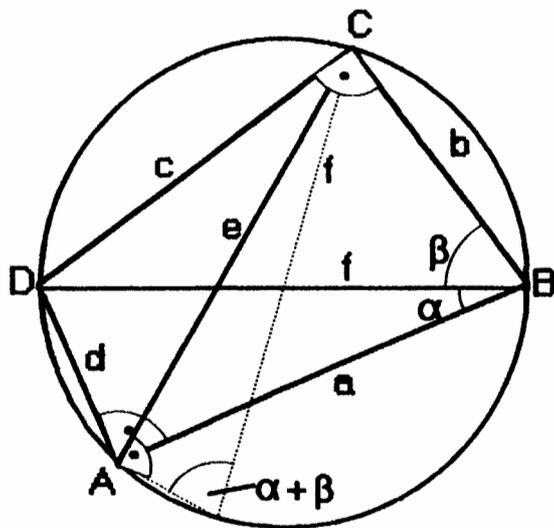
$$\boxed{e^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}, \quad f^2 = \frac{(ac+bd)(cd+ab)}{ad+bc}}$$

Damit lassen sich alle oben auftretenden Größen aus den Seiten des Sehnenvierecks berechnen.

Anwendungen des Satzes von PTOLEMAIOS

In der Antike wurde der Satz von PTOLEMAIOS an Stelle der heute verwendeten Winkelfunktionen gebraucht. Als Beispiel zeigen wir die Äquivalenz des Satzes von PTOLEMAIOS mit den Additionstheoremen

$$\begin{array}{l|l} d = f \cdot \sin \alpha, & a = f \cdot \cos \alpha \\ c = f \cdot \sin \beta, & b = f \cdot \cos \beta \\ e = f \cdot \sin(\alpha+\beta) & \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} d = a \cdot \sin \beta, \quad f = a \cdot \cos \beta \\ e = a \cdot \sin \alpha, \quad b = a \cdot \cos \alpha \\ c = a \cdot \sin(\alpha-\beta) \end{array} \right.$$



$$\underline{ef = ac + bd}$$

$$f^2 \sin(\alpha + \beta) = f^2 \cos \alpha \cdot \sin \beta + f^2 \sin \alpha \cdot \cos \beta \quad | \quad a^2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = a^2 \sin(\alpha - \beta) + a^2 \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\underline{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta} \quad | \quad \underline{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

Substitution $\alpha | 90 - \alpha$

$$\sin(90 - (\alpha - \beta)) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\underline{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Substitution $\alpha | 90 - \alpha$

$$\sin(90 - (\alpha + \beta)) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\underline{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

In den Summenformeln setzen wir $\alpha = \beta$

$$\underline{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

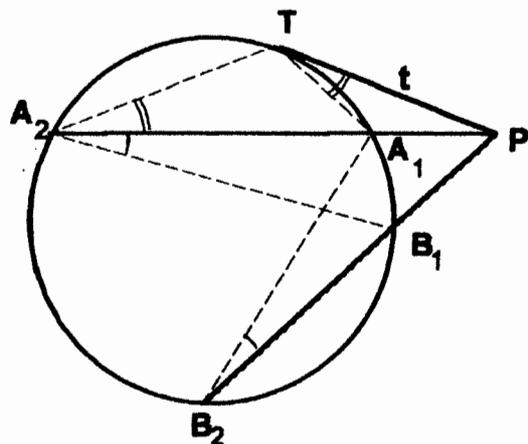
$$\underline{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

POTENZSÄTZE AM KREIS

$$\Delta PA_2B_1 \sim \Delta PB_2A_1 \Rightarrow \frac{PA_2}{PB_1} = \frac{PB_2}{PA_1}$$

$$\Delta PTA_2 \sim \Delta PA_1T \Rightarrow \frac{PA_2}{PT} = \frac{PT}{PA_1}$$

$$\boxed{PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2 = PT^2 = t^2}$$

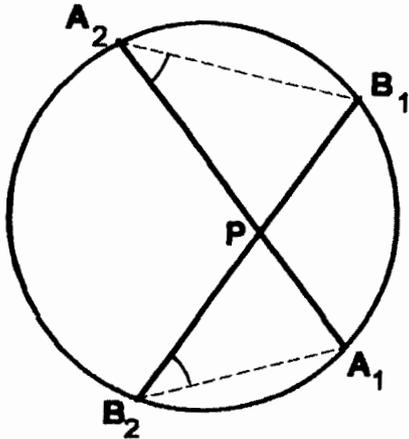
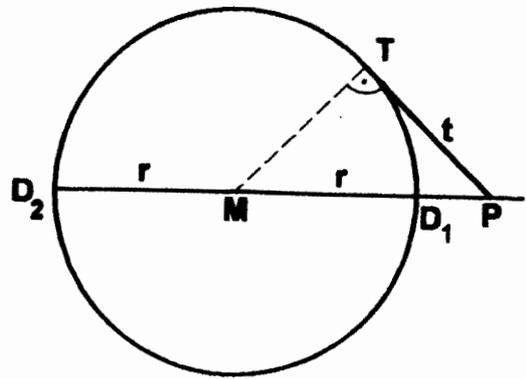


Sonderfall

$$PD_1 \cdot PD_2 = PT^2 = t^2$$

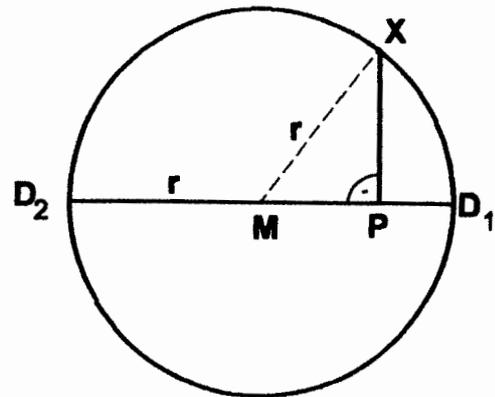
$$(PM-r)(PM+r) = PM^2 - r^2 = PT^2 = t^2$$

$$PT^2 = PM^2 - r^2 = t^2$$



$$\Delta PB_1A_2 \sim \Delta PA_1B_2 \Rightarrow \frac{PA_2}{PB_1} = \frac{PB_2}{PA_1}$$

$$PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2$$



Sonderfall

$$PD_1 \cdot PD_2 = (r-MP)(r+MP) = r^2 - PM^2$$

$$PD_1 \cdot PD_2 = r^2 - PM^2 = PX^2$$

Schneidet eine durch P gehende Gerade einen Kreis k in den beiden Punkten A_1 und A_2 , so ist der Wert des Produktes $PA_1 \cdot PA_2$ der Längen der beiden Strecken PA_1 und PA_2 von der Wahl der Geraden unabhängig. Man erteilt diesem Wert ein *positives Vorzeichen*, wenn P *außerhalb des Kreises* liegt, ein *negatives Vorzeichen*, wenn P im *Innern des Kreises* liegt.

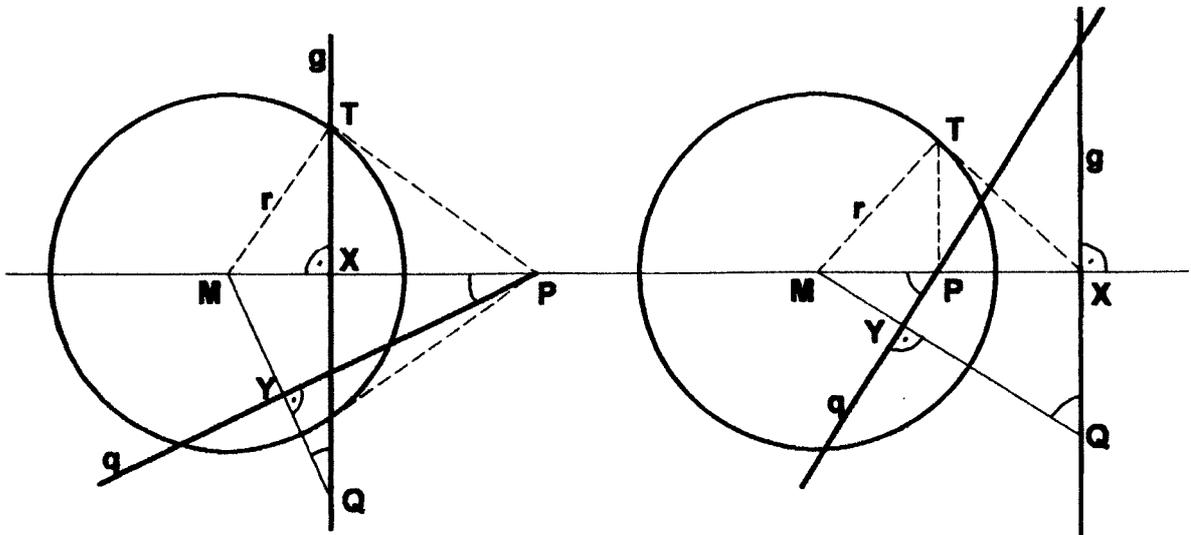
Man nennt dieses Produkt die *Potenz des Punktes P bezüglich des Kreises k* und schreibt

$$\Pi(k, P) := PM^2 - r^2 \quad \dots \quad \text{Definition}$$

$$|\Pi(k, P)| = PA_1 \cdot PA_2$$

$$\Pi(k, P) = \begin{cases} < 0 & \dots \text{ P im Innern von k} \\ > 0 & \dots \text{ P im Äußern von k} \\ = 0 & \dots \text{ P auf k} \end{cases}$$

POL UND POLARE AM KREIS



Legt man an einen Kreis von einem außerhalb gelegenen Punkt P die Tangenten und zeichnet die Verbindungsgerade g der Berührungspunkte der Tangenten, so heißt g die *Polare des Punktes P bezüglich des Kreises*. Dem rechtwinkligen Dreiecke MPT entnimmt man mit Hilfe des Kathetensatzes

$$r^2 = MP \cdot MX$$

Da g bei Kenntnis von X bestimmt ist, kann man auch die Polare eines im Innern des Kreises liegenden Punktes konstruieren.

Es liege Q auf der Polaren g von P. Ferner sei q die Normale aus P auf MQ. Dann ist q die Polare von Q. Es gilt nämlich

$$\Delta QXM \sim \Delta PYM \Rightarrow \frac{MX}{MQ} = \frac{MY}{MP} \Rightarrow MQ \cdot MY = MP \cdot MX = r^2$$

Durchläuft ein Punkt Q eine Gerade g, so geht die Polare q von Q stets durch den Pol P von g.

Dreht sich eine Gerade q um einen ihrer Punkte P, so durchläuft ihr Pol Q die Polare g von P.

DIE INVERSION (SPIEGELUNG) AM KREIS

Gegeben sei der feste Punkt O , das *Inversionszentrum*. Die Abbildung

$$\iota: \varepsilon \setminus \{O\} \longrightarrow \varepsilon$$

$$X \longrightarrow X'$$

O, X, X' kollinear, $T(XX'O) > 0$

heißt *Inversion mit dem Zentrum O* , wenn gilt

$$OX \cdot OX' = r^2 = \text{const.}$$

Die Punkte des *Inversionskreises* $i\{O, r\}$ sind *Fixpunkte* der Abbildung. Wegen

$$\iota^2 = \text{id}$$

ist die Inversion *involutorisch*. Aus dem Kathetensatz folgt

$$r^2 = OX \cdot OX' = x \cdot x' \Rightarrow x' = \frac{r^2}{x}$$

Die Durchmesserendpunkte A, B auf einem *Inversionsstrahl*, das ist die durch das Inversionszentrum O gehende Verbindungsgerade *inverser Punkte X, X'* , werden durch X, X' harmonisch getrennt:

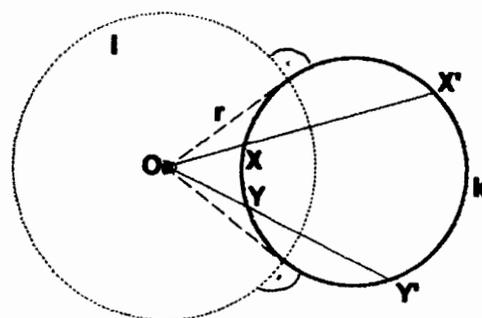
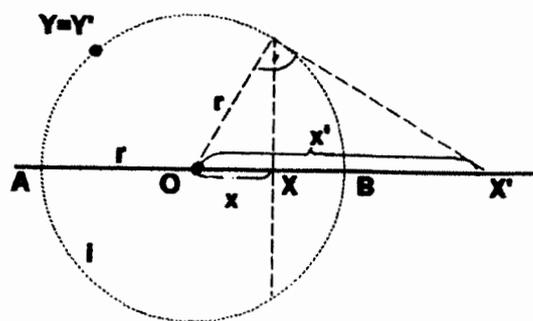
$$D(ABXX') = -1$$

Es gilt nämlich

$$\left. \begin{aligned} T(ABX) &= - \frac{AX}{BX} = - \frac{r+x}{r-x} \\ T(ABX') &= + \frac{AX'}{BX'} = \frac{x'+r}{x'-r} = \frac{\frac{r^2}{x}+r}{\frac{r^2}{x}-r} = \frac{r+x}{r-x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(ABXX') = -1$$

Je zwei Paare inverser Punkte sind konzyklisch

Sei nämlich X, X' ein inverses Punktepaar, d.h. es gelte $OX \cdot OX' = r^2$, sei ferner Y ein beliebiger weiterer Punkt. Für den Umkreis k des Dreiecks $XX'Y$ stellt dann r^2 die Potenz von O bezüglich k dar. Da nach dem Potenzsatz für den zweiten Schnittpunkt Y' von OY mit k gilt: $OY \cdot OY' = OX \cdot OX' = \Pi(k, O) = r^2$, liegt auch der zu Y inverse Punkt Y' auf k . r stellt die Länge der Tangenten-



strecke aus O an k dar. Der Inversionskreis schneidet daher k orthogonal.

Jeder den Inversionskreis orthogonal schneidende Kreis geht in sich selbst über

Ferner gilt

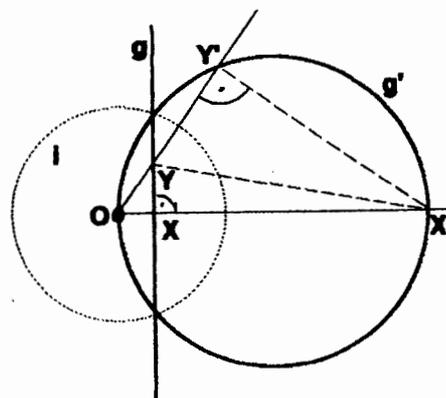
Jede nicht durch O gehende Gerade g geht in einen Kreis g' durch O über.
Umgekehrt wird jeder Kreis durch O in eine nicht durch O gehende Gerade übergeführt.

Der Lotfußpunkt X aus O auf g gehe nach X' über. Ein beliebiger Punkt Y von g habe das Bild Y' . Dann müssen die inversen Punktepaare X, X' und Y, Y' auf demselben (nicht eingezeichneten) Kreis $XX'YY'$ liegen. Wegen des rechten Winkels bei X muß YX' ein Durchmesser dieses Kreises sein. Nach THALES muß dann auch bei Y' ein rechter Winkel

$$\angle YY'X' = \angle OY'X' = 90^\circ$$

auftreten. Y' bewegt sich daher bei variablem Y auf dem Thaleskreis über OX' .

Umgekehrt sei der Kreis über OX' gegeben. Dann geht X' nach X über. Y' geht nach Y über und $X'XY'Y$ liegen auf demselben (nicht dargestellten) Kreis. Wegen des rechten Winkels bei Y' ist YX' ein Durchmesser von $X'XY'Y$, d.h. alle Y müssen auf dem 2. Schenkel des rechten Winkels $\angle YXX' = 90^\circ$ liegen.



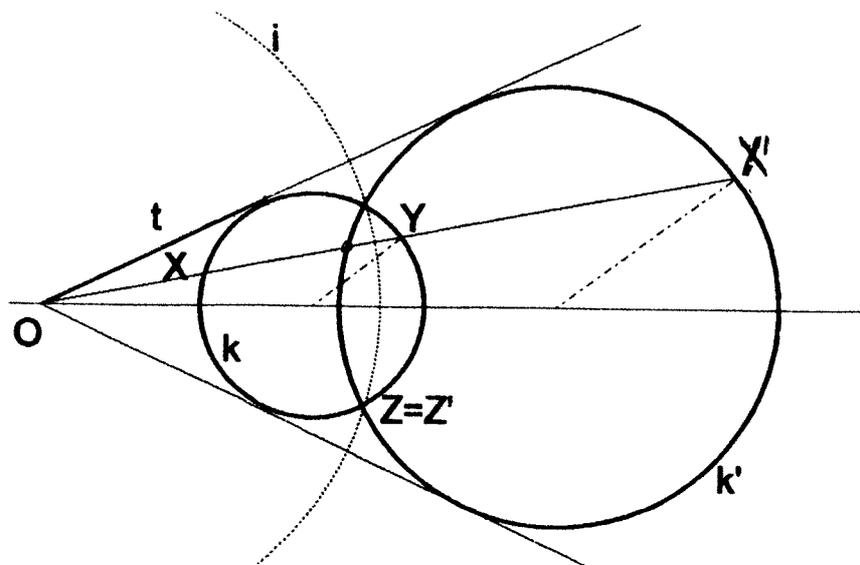
Durch eine Inversion geht ein Kreis allgemeiner Lage wieder in einen Kreis über

Sei k der gegebene Kreis und seien X und Y zwei Punkte auf demselben Strahl durch O . Dann gilt nach dem Potenzsatz für die Potenz von O bezüglich k

$$\Pi(k, O) = OX \cdot OY = t^2$$

Für den zu X inversen Punkt X' gilt

$$OX \cdot OX' = r^2$$



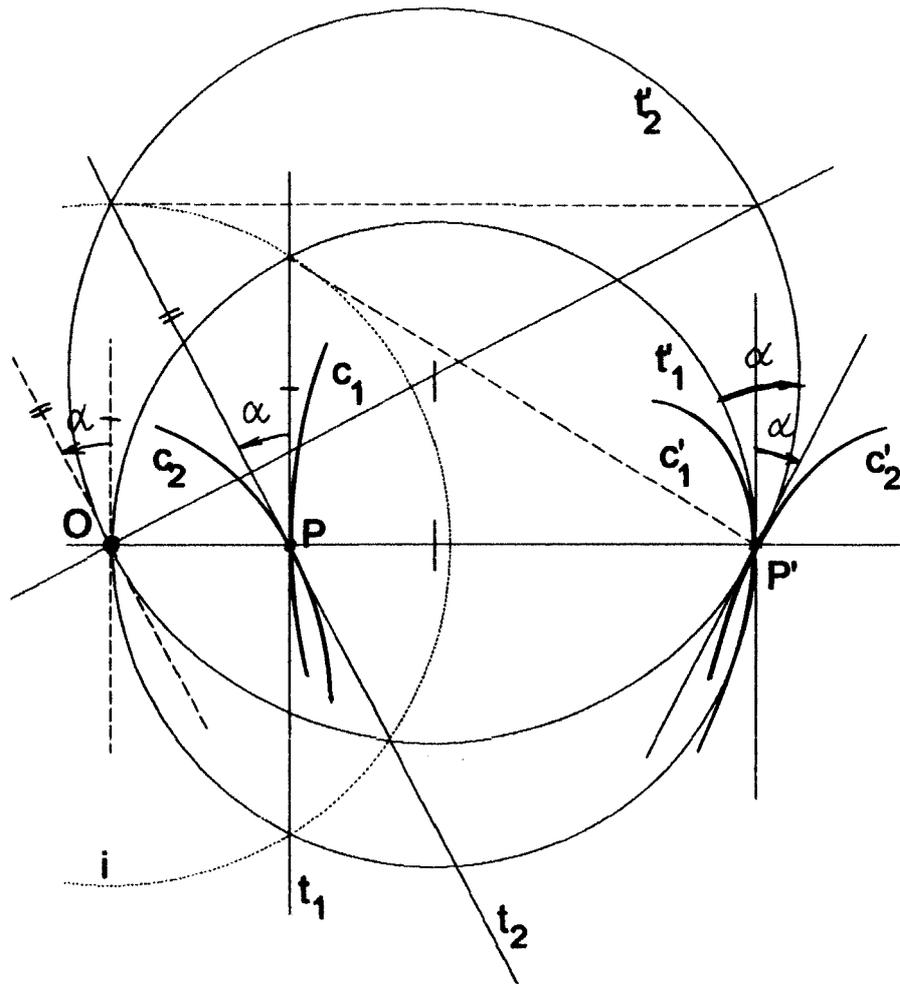
Division beider Ausdrücke ergibt

$$\frac{OX'}{OY} = \frac{r^2}{t^2} = \lambda^2 = \text{const.} \Rightarrow OX' = \lambda^2 \cdot OY$$

Das Bild von k geht daher aus k durch eine zentrische Ähnlichkeit mit dem Zentrum O und dem Ähnlichkeitsfaktor λ^2 hervor. Daher ist k' ein Kreis.

Die Inversion ist eine *isogonale Abbildung* der Ebene in sich. Kurven, die einander in einem Punkt schneiden, haben Bilder, die einander im entsprechenden Punkt unter demselben Winkel, aber entgegengesetztem Winkeldrehhsinn schneiden.

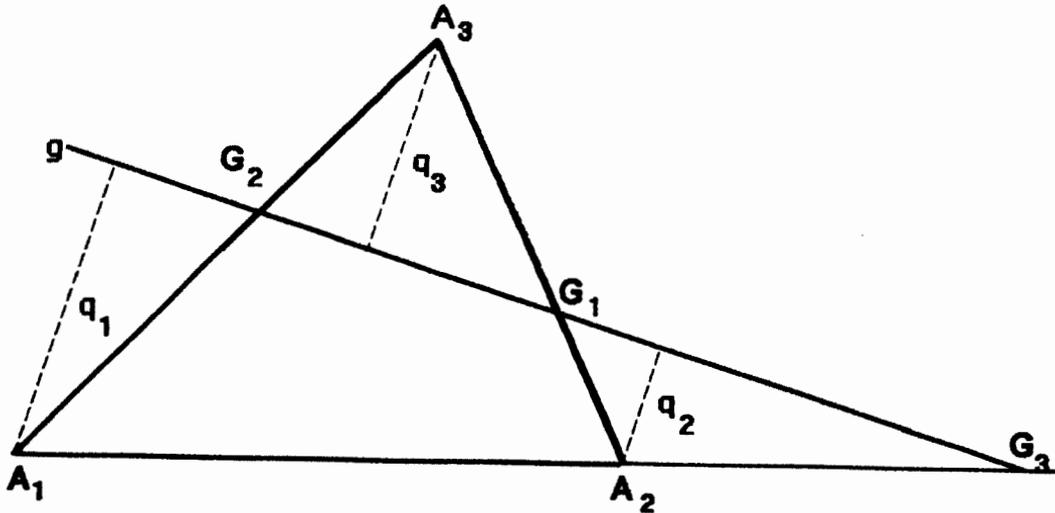
Seien c_1 und c_2 die beiden Kurven, die einander in P unter dem Winkel α schneiden, d.h. die beiden Kurventangenten t_1 und t_2 schneiden einander unter dem Winkel α . Durch die Inversion gehen die beiden Kurven nach c'_1 bzw. c'_2 über. Die beiden Tangenten t_1 bzw. t_2 werden in die durch O gehenden Kreise t'_1 bzw. t'_2 abgebildet, deren Tangenten in O wieder den Winkel α aufweisen. Aus Symmetriegründen hat der Schnittpunkt der beiden Kreise t'_1 und t'_2 im Punkte P' ebenfalls die Größe α . Da t_1 und t_2 die Kurven c_1 und c_2 in P berühren, werden deren Bilder c'_1 und c'_2 von den Kreisen t'_1 und t'_2 berührt. Daher ist α auch der Schnittwinkel der Bildkurven c'_1 und c'_2 .



DREIECKSGEOMETRIE IM EIGENTLICHEN SINNE

Der Satz von MENELAOS

MENELAOS von Alexandrien (ca. 100 n.Chr.)



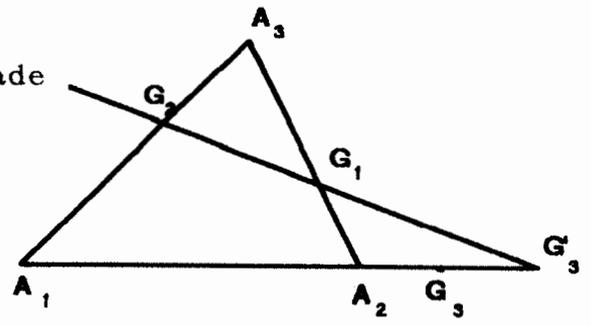
$$\left. \begin{aligned}
 T(A_1A_2G_3) &= \frac{A_1G_3}{A_2G_3} = \frac{q_1}{q_2} \\
 T(A_2A_3G_1) &= -\frac{A_2G_1}{A_3G_1} = -\frac{q_2}{q_3} \\
 T(A_3A_1G_2) &= -\frac{A_3G_2}{A_1G_2} = -\frac{q_3}{q_1}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{T(A_1A_2G_3) \cdot T(A_2A_3G_1) \cdot T(A_3A_1G_2) = +1}$$

Satz von MENELAOS

Drei von den Ecken eines Dreiecks $\Delta A_1A_2A_3$ verschiedene Punkte G_1, G_2, G_3 auf den Seiten $(A_2A_3), (A_3A_1), (A_1A_2)$ liegen genau dann auf einer Geraden g , wenn die Beziehung von MENELAOS gilt

Die Umkehrung beweisen wir indirekt: Es gelte die Beziehung von MENELAOS für die drei Punkte G_1, G_2, G_3 . Die Verbindungsgerade $g = (G_1, G_2)$ schneide (A_1A_2) in G'_3 . Dann gilt

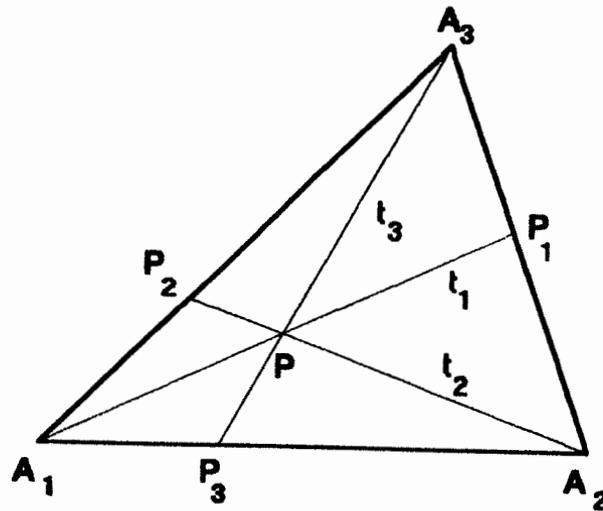
$$\begin{aligned}
 T(A_1A_2G'_3) \cdot T(A_2A_3G_1) \cdot T(A_3A_1G_2) &= +1 = \\
 T(A_1A_2G_3) \cdot T(A_2A_3G_1) \cdot T(A_3A_1G_2) &\Rightarrow \\
 T(A_1A_2G'_3) &= T(A_1A_2G_3) \Rightarrow G_3 = G'_3, \text{ da die Lage}
 \end{aligned}$$



eines Punktes durch das Teilverhältnis eindeutig bestimmt ist.

Der Satz von CEVA

Giovanni CEVA (1648-1734, wirkte in Mantua)



Wir wenden den Satz von MENELAOS auf folgende Dreiecke an

$$\Delta A_1 P_3 A_3 \dots T(A_1 P_3 A_2) \cdot T(P_3 A_3 P) \cdot T(A_3 A_1 P_2) = + 1$$

$$\Delta P_3 A_2 A_3 \dots T(P_3 A_2 A_1) \cdot T(A_2 A_3 P_1) \cdot T(A_3 P_3 P) = + 1$$

Daraus durch Produktbildung

$$T(A_1 P_3 A_2) \cdot T(P_3 A_3 P) \cdot T(A_3 A_1 P_2) \cdot T(P_3 A_2 A_1) \cdot T(A_2 A_3 P_1) \cdot T(A_3 P_3 P) = + 1$$

Auflösung unter Berücksichtigung des Vorzeichens ergibt

$$\frac{A_1 A_2}{P_3 A_2} \cdot \left(-\frac{P_3 P}{A_3 P}\right) \cdot \left(-\frac{A_3 P_2}{A_1 P_2}\right) \cdot \left(\frac{P_3 A_1}{A_1 A_2}\right) \cdot \left(-\frac{A_2 P_1}{A_3 P_1}\right) \cdot \left(-\frac{A_3 P}{P_3 P}\right) = + 1$$

Durchkürzen und Zusammenfassen ergibt:

$$(-1) \cdot \left(\left(-\frac{A_1 P_3}{A_2 P_3}\right) \cdot \left(-\frac{A_2 P_1}{A_3 P_1}\right) \cdot \left(-\frac{A_3 P_2}{A_1 P_2}\right) \right) = + 1$$

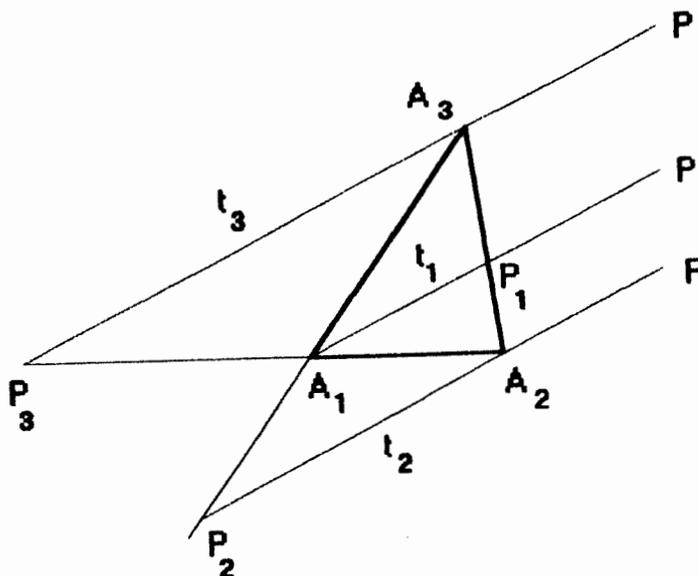
Daraus folgt

$$\boxed{T(A_1 A_2 P_3) \cdot T(A_2 A_3 P_1) \cdot T(A_3 A_1 P_2) = - 1}$$

Beziehung von CEVA

Der Satz von CEVA gilt auch dann, wenn P ein Fernpunkt ist. Mehrfa-

che Anwendung des Strahlensatzes ergibt



$$\left. \begin{aligned}
 T(A_1A_2P_3) &= + \frac{A_1P_3}{A_2P_3} = + \frac{P_1A_3}{A_2A_3} \\
 T(A_2A_3P_1) &= - \frac{A_2P_1}{A_3P_1} = - \frac{A_2P_1}{A_3P_1} \\
 T(A_3A_1P_2) &= + \frac{A_3P_2}{A_1P_2} = + \frac{A_3A_2}{P_1A_2}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &\text{Produktbildung ergibt} \\
 &T(A_1A_2P_3) \cdot T(A_2A_3P_1) \cdot T(A_3A_1P_2) = \\
 &\frac{P_1A_3}{A_2A_3} \cdot \left(-\frac{A_2P_1}{A_3P_1}\right) \cdot \frac{A_3A_2}{P_1A_2} = -1
 \end{aligned}$$

Wie oben ergibt sich also $T(A_1A_2P_3) \cdot T(A_2A_3P_1) \cdot T(A_3A_1P_2) = -1$

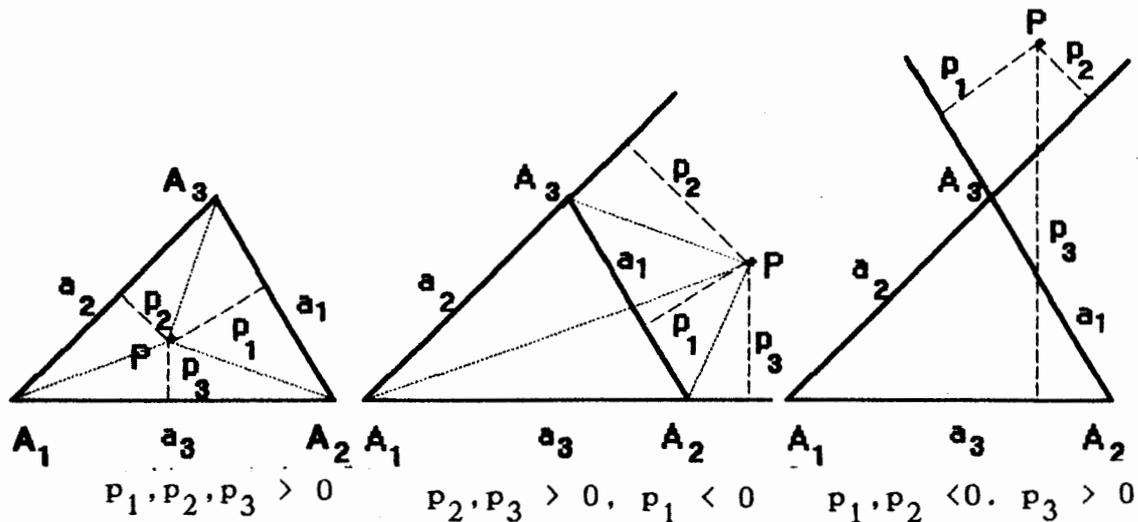
Die Eckentransversalen durch die von den Eckpunkten verschiedenen Punkte P_1, P_2, P_3 auf den Seiten $(A_2A_3), (A_3A_1), (A_1A_2)$ gehen genau dann durch denselben Punkt P (oder sind parallel), wenn die Bedingung von CEVA gilt

Die Umkehrung zeigt man wieder indirekt.

Dreieckskoordinaten eines Punkte

Jede Dreiecksseite a_i teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Wir bezeichnen jene Halbebene als *positiv*, in welcher der dritte Punkt A_i des Dreiecks liegt. Jedem Punkt P der Ebene ordnen wir in Bezug auf die Dreiecksseite a_i einen Zahlenwert p_i zu, den wir die *i-te Dreiecksordinate* des Punktes nennen. Der Koordinate p_i erteilen wir ein positives Vorzeichen, wenn der entsprechende Punkt in der posi-

tiven, durch a_i erzeugten Halbebene liegt. Der Betrag $|p_i|$ der Koordinate ist gleich dem Wert des Abstandes des Punktes von a_i .



Es können nie alle drei Dreieckskoordinaten eines Punktes negativ sein.

Jeder Punkt P , der nicht auf einer Dreiecksseite liegt, bildet mit je zwei Eckpunkten A_i, A_j des Dreiecks ein Dreieck $\Delta A_i A_j P$, wobei die Reihenfolge der Indizes i, j, k der Dreiecksseiten stets dem Zyklus $(ijk) = (123)$ angehört. Ist der Umlaufsinn des Dreiecks $\Delta A_i A_j P$ positiv, d.h. wird das Dreieck im positiven Winkelzählsinn umlaufen, so ordnen wir dem Flächeninhalt $F(A_i A_j P)$ einen positiven Wert zu. Andernfalls bezeichnen wir den Flächeninhalt als negativ. Dann gilt

$$F(A_1 A_2 A_3) = F(A_1 A_2 P) + F(A_2 A_3 P) + F(A_3 A_1 P)$$

Dadurch ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Dreieckskoordinaten eines Punktes P .

$$2F = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 \quad a_i > 0, \quad p_i \gtrless 0$$

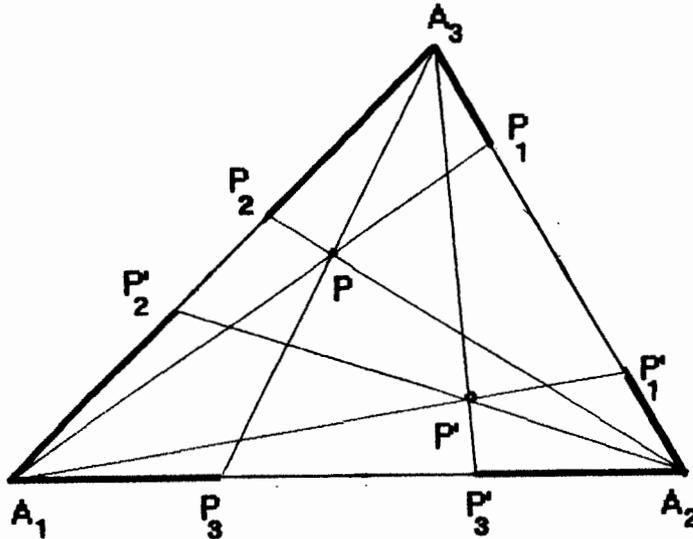
Ist das Dreieck gleichseitig, so folgt der

Satz von VIVIANI: Die Summe der Koordinaten eines beliebigen Punktes bezüglich eines gleichseitigen Dreiecks ist konstant gleich der Höhe des Dreiecks

Vincento VIVIANI (1622-1703), Schüler von GALILEI, erbaute für TORRICELLI das erste Barometer

Beweis: $a_1 = a_2 = a_3 = a \Rightarrow 2F = a \cdot h = a(p_1 + p_2 + p_3) \Rightarrow h = p_1 + p_2 + p_3$

**Die isotome Abbildung (Verwandtschaft der Seitengegenpunkte)
bezüglich eines Dreiecks**



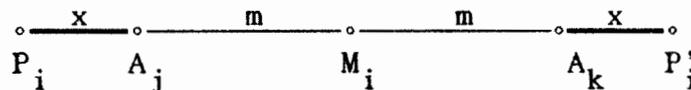
Wir wählen einen beliebigen (von den Dreiecksecken A_i verschiedenen) Punkt P der Ebene und zeichnen die Eckentransversalen A_iP , welche die gegenüberliegende Dreiecksseite $a_i = (A_jA_k)$ im Punkte P_i schneiden. Nach CEVA gilt dann

$$T(A_1A_2P_3) \cdot T(A_2A_3P_1) \cdot T(A_3A_1P_2) = -1 \quad (*)$$

Nunmehr bestimmen wir auf jeder Dreiecksseite (A_jA_k) einen weiteren Punkt P'_i derart, daß die Strecken $A_jP_i = A_kP'_i$ gleich sind, jedoch so, daß gilt

$$\text{sgn } T(A_jA_kP_i) = \text{sgn } T(A_jA_kP'_i)$$

das bedeutet, daß P_i und P'_i entweder beide im Innern oder beide im Äußern der Strecke A_jA_k liegen. Die Konstruktion des Punktes P'_i kann daher auch durch Spiegelung von P_i an der Seitenmitte M_i der Strecke A_jA_k erfolgen.



Dann gilt

$$\left. \begin{aligned} T(A_jA_kP_i) &= \frac{A_jP_i}{A_kP_i} = \frac{x}{2m+x} \\ T(A_jA_kP'_i) &= \frac{A_jP'_i}{A_kP'_i} = \frac{2m+x}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T(A_jA_kP'_i) = \frac{1}{T(A_jA_kP_i)}$$

Daraus folgt mit (*)

$$T(A_1 A_2 P'_3) \cdot T(A_2 A_3 P'_1) \cdot T(A_3 A_1 P'_2) = \frac{1}{T(A_1 A_2 P_3) \cdot T(A_2 A_3 P_1) \cdot T(A_3 A_1 P_2)} = -1$$

Nach CEVA gehen daher auch die Eckentransversalen $A_i P'_i$ durch denselben Punkt P' . Auf Grund obiger Konstruktion ist daher eine Abbildung der Ebene in sich definiert:

$$\begin{aligned} \tau: \varepsilon \setminus \{A_1, A_2, A_3\} &\longrightarrow \varepsilon \\ P &\longrightarrow \tau(P) = P' \end{aligned}$$

die *isotome Abbildung* der Ebene. Wegen

$$\tau^2 = id$$

ist die isotome Abbildung *involutorisch*.

Die isotome Abbildung wurde 1866 von M.G.de LONGCHAMPS angegeben.

DER WINKELBEGRIFF

In der Elementargeometrie versteht man unter einem *Winkel* das System von zwei Halbstrahlen a_1 und a_2 , die von demselben Punkte O ausgehen. a_1 und a_2 heißen die *Schenkel* des Winkels, O sein *Scheitel*.

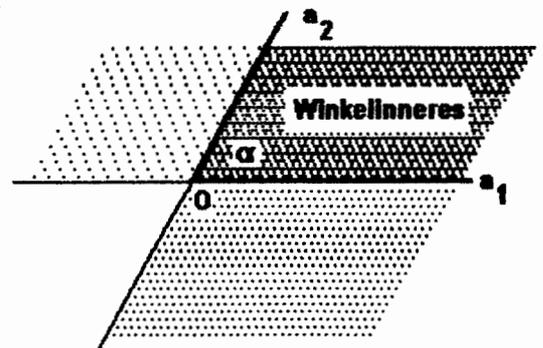
Die Trägergerade jedes Winkelschenkels teilt die Ebene in zwei Halbebenen, von denen je eine dadurch ausgezeichnet ist,

daß der andere Winkelschenkel in ihr liegt. Der Durchschnitt der beiden ausgezeichneten Halbebenen bildet das *Innere* des Winkels.

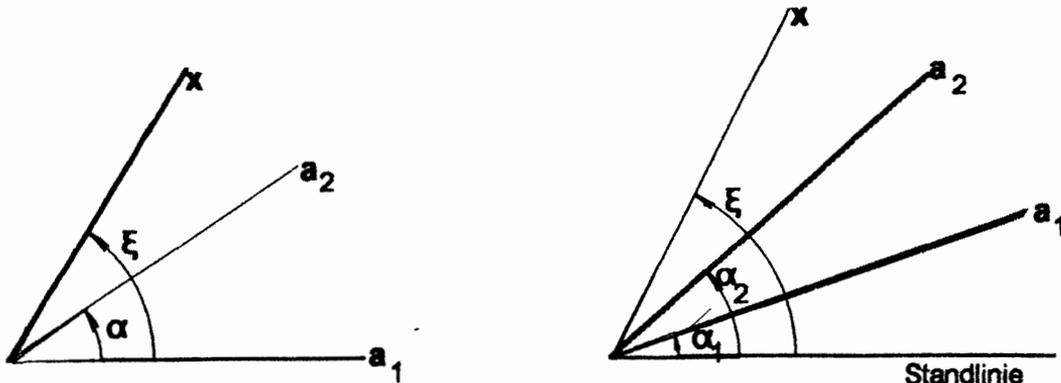
Die *Winkelgröße* wird in der *positiv orientierten Ebene* gemessen, sodaß gilt

$$0 \leq \alpha \leq 180^\circ \text{ bzw. } 0 \geq \alpha \geq -180^\circ$$

Winkelmaße $> 180^\circ$ werden kaum angewendet. Ein Winkel ist erst durch die Angabe *zweier Winkelfunktionen* eindeutig festgelegt.



Das Sinusverhältnis dreier Halbgeraden



Unter dem Sinusverhältnis der Halbgeraden x bezüglich der beiden (von demselben Punkt ausgehenden) Halbgeraden a_1 und a_2 versteht man den Ausdruck

$$S(a_1 a_2 x) := \frac{\sin(a_1 x)}{\sin(a_2 x)} = \frac{\sin \xi}{\sin(\xi - \alpha)}$$

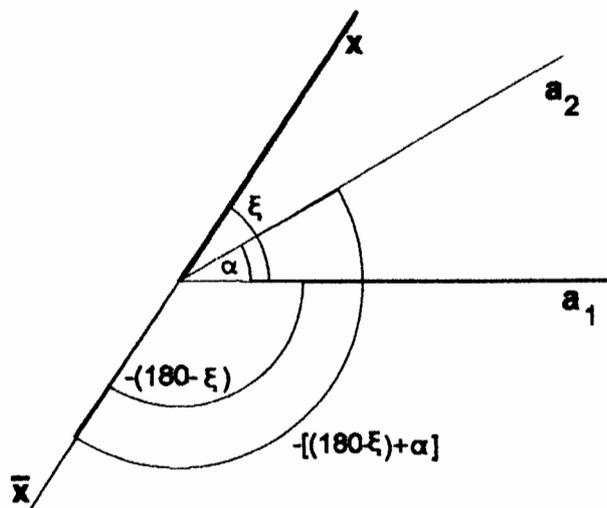
oder allgemeiner

$$S(a_1 a_2 x) = \frac{\sin(\xi - \alpha_1)}{\sin(\xi - \alpha_2)}$$

Das Sinusverhältnis dreier Halbgeraden ist von der Wahl der Standlinie unabhängig.

Entgegengesetzte Halbgerade

$$\begin{aligned} \underline{S(a_1 a_2 \bar{x})} &= \frac{\sin(a_1 \bar{x})}{\sin(a_2 \bar{x})} = \\ &= \frac{-\sin(180 - \xi)}{-\sin[180 - (\xi - \alpha)]} = \frac{\sin \xi}{\sin(\xi - \alpha)} = \\ &= \underline{S(a_1 a_2 x)} \end{aligned}$$

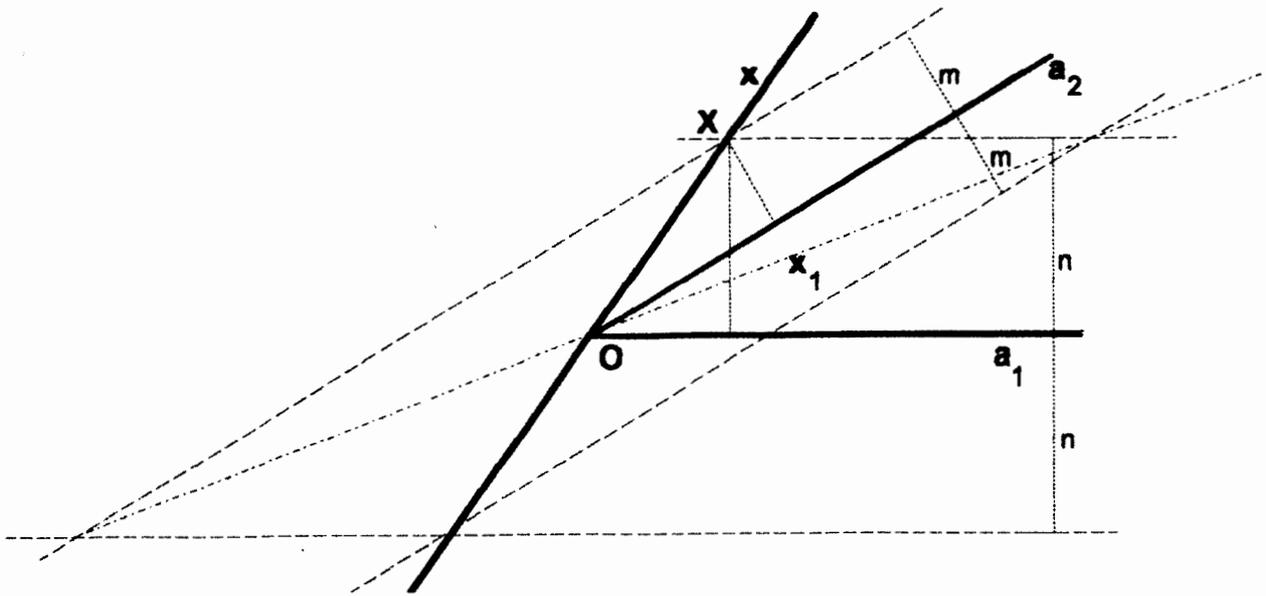


Zwei entgegengesetzte Halbgerade haben bezüglich zweier Bezugshalbgeraden dasselbe Sinusverhältnis

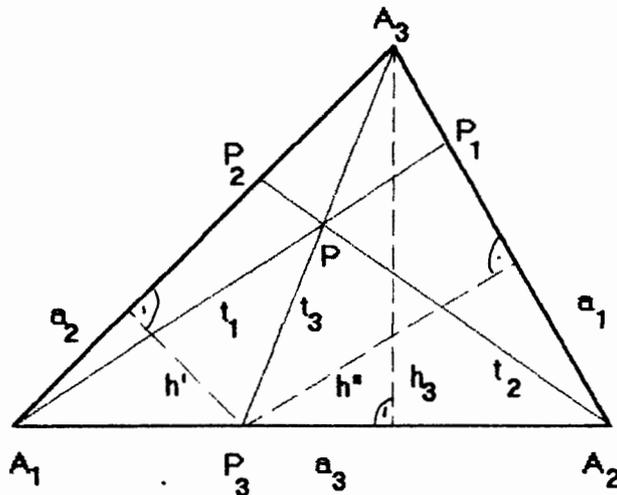
Umgekehrt gilt

Durch Angabe des Sinusverhältnisses bezüglich zweier Halbgeraden ist eine volle Gerade eindeutig bestimmt

Beispiel: Es sei $S(a_1 a_2 x) := \frac{n}{m}$. Zu den Bezugslinien a_1 und a_2 ziehen wir Parallele, die proportional zu den gegebenen Größen n und m sind. Man erkennt unmittelbar, daß für eine der Halbgeraden von x die gewünschte Beziehung gilt. Für eine Halbgerade von x_1 gilt $S(a_1 a_2 x_1) = -\frac{n}{m}$



Darstellung des Satzes von CEVA durch Sinusverhältnisse



$$2F(A_1P_3A_3) = A_1P_3 \cdot h_3 = a_2 \cdot h' = a_2 \cdot A_3P_3 \cdot \sin(a_2 t_3)$$

$$2F(P_3A_2A_3) = A_2P_3 \cdot h_3 = a_1 \cdot h'' = a_1 \cdot A_3P_3 \cdot \sin(t_3 a_1)$$

Als Quotient ergibt sich

$$\frac{A_1P_3}{A_2P_3} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\sin(a_2 t_3)}{\sin(t_3 a_1)}$$

also

$$\begin{aligned} T(A_1A_2P_3) &= -\frac{A_1P_3}{A_2P_3} = -\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\sin(a_2 t_3)}{\sin(t_3 a_1)} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\sin(a_2 t_3)}{\sin(a_1 t_3)} = \\ &= \frac{a_2}{a_1} \cdot S(a_2 a_1 t_3) < 0 \end{aligned}$$

Zyklische Vertauschung ergibt daher insgesamt

$$T(A_1 A_2 P_3) = \frac{a_2}{a_1} \cdot S(a_2 a_1 t_3)$$

$$T(A_2 A_3 P_1) = \frac{a_3}{a_2} \cdot S(a_3 a_2 t_1)$$

$$T(A_3 A_1 P_2) = \frac{a_1}{a_3} \cdot S(a_1 a_3 t_2)$$

Produktbildung liefert daraus nach CEVA

$$\begin{aligned} T(A_1 A_2 P_3) \cdot T(A_2 A_3 P_1) \cdot T(A_3 A_1 P_2) &= \\ &= \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_1}{a_3} \cdot S(a_2 a_1 t_3) \cdot S(a_3 a_2 t_1) \cdot S(a_1 a_3 t_2) = -1 \end{aligned}$$

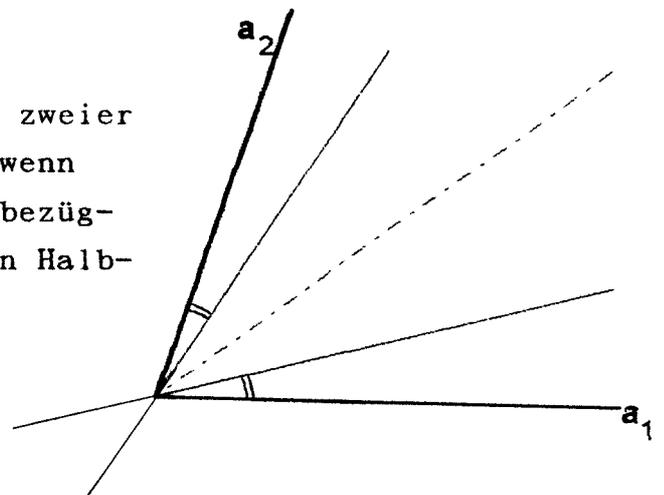
$$S(a_3 a_2 t_1) \cdot S(a_1 a_3 t_2) \cdot S(a_2 a_1 t_3) = -1$$

"Winkel-CEVA"

Man beachte die Reihenfolge der Indizes!

Isogonale Gerade

Zwei volle Gerade nennt man bezüglich zweier *Halbgeraden* a_1, a_2 *isogonal verwandt*, wenn die eine das Spiegelbild der anderen bezüglich der Winkelsymmetralen des von den Halbgeraden gebildeten Winkels ist.



Liegen zwei Punkte X und Y auf zwei bezüglich der Halbgeraden a_1 und a_2 isogonal verwandten Geraden, so gilt für die Koordinaten x_1, x_2 bzw. y_1, y_2 bezüglich der Trägergeraden von a_1 und a_2

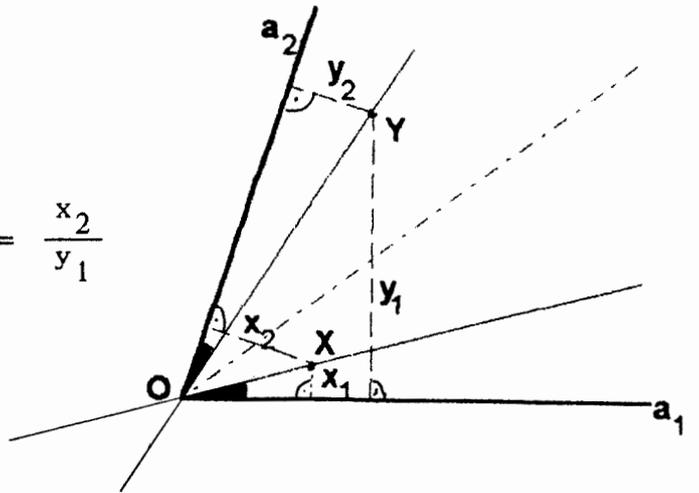
$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

Gilt umgekehrt für zwei Punkte diese Beziehung, so sind die durch diese Punkte und den Schnittpunkt von a_1 und a_2 hindurchgehenden Geraden isogonal verwandt.

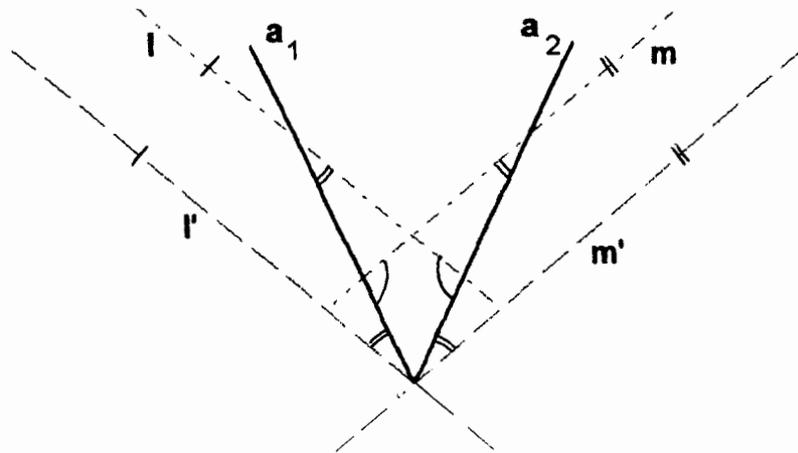
Aus der Winkelgleichheit folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{OX}{x_1} = \frac{OY}{y_2} &\Leftrightarrow \frac{OX}{OY} = \frac{x_1}{y_2} \\ \frac{OX}{x_2} = \frac{OY}{y_1} &\Leftrightarrow \frac{OX}{OY} = \frac{x_2}{y_1} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$$

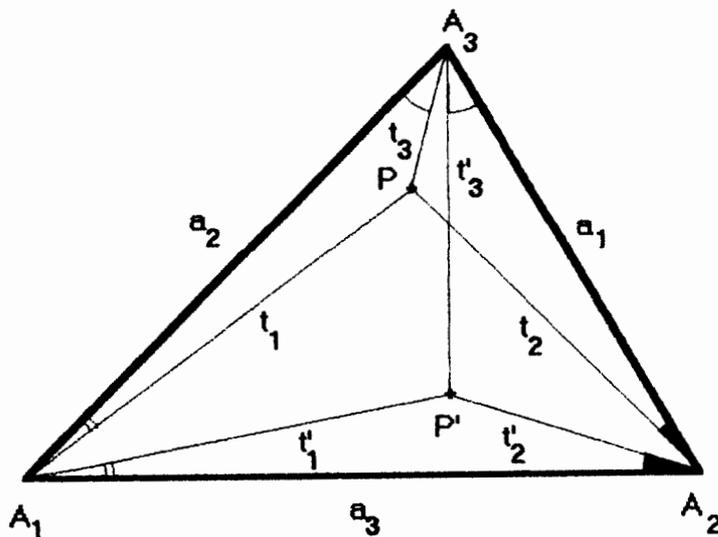
daher $x_1 y_1 = x_2 y_2$



Zwei Gerade l, m heißen *antiparallel* bezüglich der Halbgeraden a_1, a_2 , wenn sie parallel sind zu zwei bezüglich a_1, a_2 isogonal verwandten Geraden l', m'



Isogonale Abbildung bezüglich eines Dreiecks
(Verwandsch⁴ft der Winkelgegenpunkte)



In der Ebene des Dreiecks $\Delta A_1 A_2 A_3$ wählen wir einen (von den Dreiecksseiten verschiedenen) Punkt P und verbinden ihn mit den Dreiecksseiten durch die Transversalen t_1, t_2, t_3 . Dann gilt der "Winkel-CEVA"

$$S(a_3 a_2 t_1) \cdot S(a_1 a_3 t_2) \cdot S(a_2 a_1 t_3) = -1$$

Sucht man zu den Transversalen t_i die jeweils bezüglich der von A_i ausgehenden Halbgeraden $[A_i A_j]$ und $[A_i A_k]$ isogonal verwandten Transversalen t'_i , so gilt wegen

$$\sphericalangle a_3 t'_1 = -\sphericalangle a_2 t_1, \sphericalangle a_1 t'_2 = -\sphericalangle a_3 t_2, \sphericalangle a_2 t'_3 = -\sphericalangle a_1 t_3$$

$$\sphericalangle a_2 t'_1 = -\sphericalangle a_3 t_1, \sphericalangle a_3 t'_2 = -\sphericalangle a_1 t_2, \sphericalangle a_1 t'_3 = -\sphericalangle a_2 t_3$$

Daher unter Berücksichtigung der Vorzeichen

$$\begin{aligned} S(a_3 a_2 t'_1) \cdot S(a_1 a_3 t'_2) \cdot S(a_2 a_1 t'_3) &= \\ &= \frac{\sin(a_3 t'_1)}{\sin(a_2 t'_1)} \cdot \frac{\sin(a_1 t'_2)}{\sin(a_3 t'_2)} \cdot \frac{\sin(a_2 t'_3)}{\sin(a_1 t'_3)} = \\ &= \frac{\sin(a_2 t_1)}{\sin(a_3 t_1)} \cdot \frac{\sin(a_3 t_2)}{\sin(a_1 t_2)} \cdot \frac{\sin(a_1 t_3)}{\sin(a_2 t_3)} = \\ &= \frac{1}{S(a_3 a_2 t_1)} \cdot \frac{1}{S(a_1 a_3 t_2)} \cdot \frac{1}{S(a_2 a_1 t_3)} = -1 \end{aligned}$$

Nach CEVA schneiden daher auch die Transversalen t'_i einander in einem Punkt P' . Es liegt daher eine Selbstabbildung der Dreiecksebene in sich vor

$$\begin{aligned} \omega: \varepsilon \setminus \{A_1, A_2, A_3\} &\longrightarrow \varepsilon \\ P &\longrightarrow \omega(P) = P' \end{aligned}$$

Wegen

$$\omega^2 = \text{id}$$

ist die Abbildung *involutorisch*. Sie heißt *isogonale Abbildung* und wurde 1865 von J.-J. MATHIEU angegeben. Isogonal verwandte Ecken-transversalen heißen auch *Symmedianen*.

Die Dreieckspolarität

Gegeben sei ein von den Dreiecksseiten verschiedenen Punkt P und die durch ihn gehenden Eckentransversalen t_1, t_2, t_3 . Diese schneiden die Dreiecksseiten in den Punkten P_1, P_2, P_3 . Nach CEVA gilt dann

$$T(A_1 A_2 P_3) \cdot T(A_2 A_3 P_1) \cdot T(A_3 A_1 P_2) = -1$$

Bestimmt man auf der Dreiecksseite a_k den 4. harmonischen Punkt G_k zu P_k bezüglich der Dreiecksseiten $A_i A_j$, so gilt

$$D(A_i A_j P_k G_k) = \frac{T(A_i A_j P_k)}{T(A_i A_j G_k)} = -1 \Rightarrow$$

$$T(A_i A_j G_k) = -T(A_i A_j P_k)$$

Daraus folgt

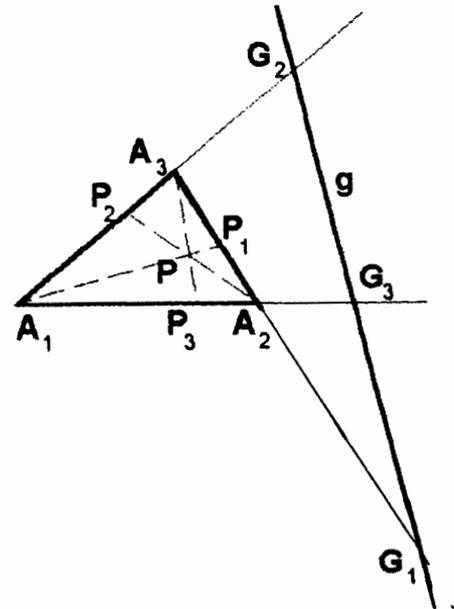
$$\begin{aligned} T(A_1 A_2 G_3) \cdot T(A_2 A_3 G_1) \cdot T(A_3 A_1 G_2) &= \\ = -T(A_1 A_2 P_3) \cdot T(A_2 A_3 P_1) \cdot T(A_3 A_1 P_2) &= +1 \end{aligned}$$

Nach MENELAOS liegen die Punkte G_i daher auf einer Geraden g , der *Dreieckspolaren* des Punktes P .

Jedem Punkt P der Ebene (mit Ausnahme der Dreieckseckpunkte) wird daher in eindeutiger Weise eine Gerade g zugeordnet und umgekehrt.

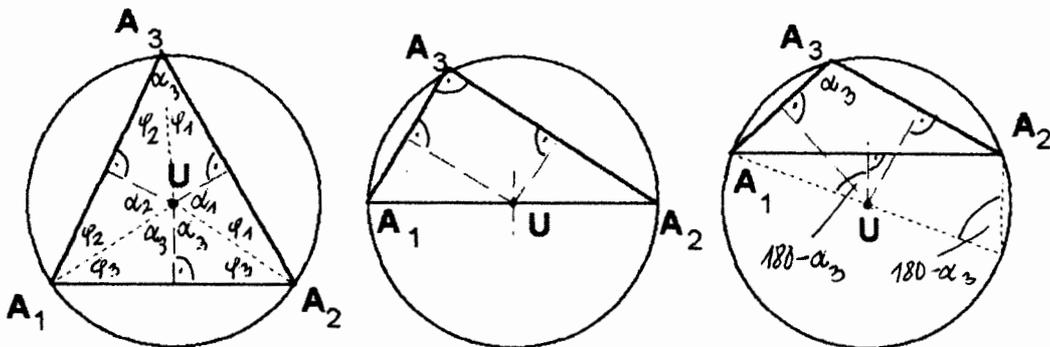
Ein Spezialfall liegt vor, wenn einer der Punkte P_k Mittelpunkt der Strecke $A_i A_j$ ist. Dann gilt (Seite 1)

$$T(A_i A_j G_k) = -T(A_i A_j P_k) = 1 \text{ und } G_k \text{ ist "Fernpunkt"}$$



SPEZIELLE PUNKTE EINES DREIECKS

Der Umkreismittelpunkt



Wir betrachten zunächst ein spitzwinkliges Dreieck ($\alpha_i < 90^\circ$). Dann ist $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 90^\circ$. Der *Umkreismittelpunkt* U hat von den Dreiecksecken gleichen Abstand. Er liegt daher im Schnittpunkt der Streckensymmetralen der Dreieckseckpunkte. Als Zentriwinkel zum Peripheriewinkel $\alpha_3 < 90^\circ$ hat der Winkel $\angle A_1 U A_2$ die Größe

$$\angle A_1 U A_2 = 2\alpha_3$$

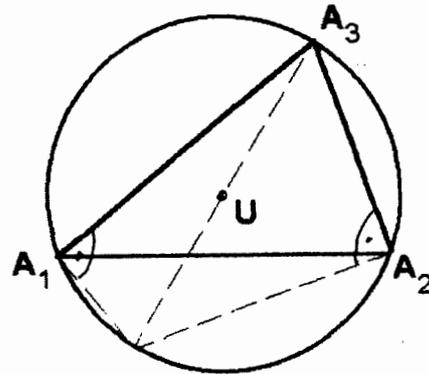
Ist $\alpha_3 = 90^\circ$, so ist $\angle A_1 U A_2 = 180^\circ$, d.h. U liegt auf $A_1 A_2$.

Ist $\alpha_3 > 90^\circ$, so ist der Winkel $180 - \alpha_3$ spitz und es ist

$$\angle A_1 U A_2 = 2(180 - \alpha_3).$$

U liegt	$\left\{ \begin{array}{l} \text{im Innern} \\ \text{auf dem Umfang} \\ \text{im Äußern} \end{array} \right\}$	des Dreiecks, wenn das
Dreieck	$\left\{ \begin{array}{l} \text{spitzwinkelig} \\ \text{rechtwinkelig} \\ \text{stumpfwinkelig} \end{array} \right\}$	ist

Praktische Konstruktion des Umkreises
unter Verwendung des Satzes von THALES



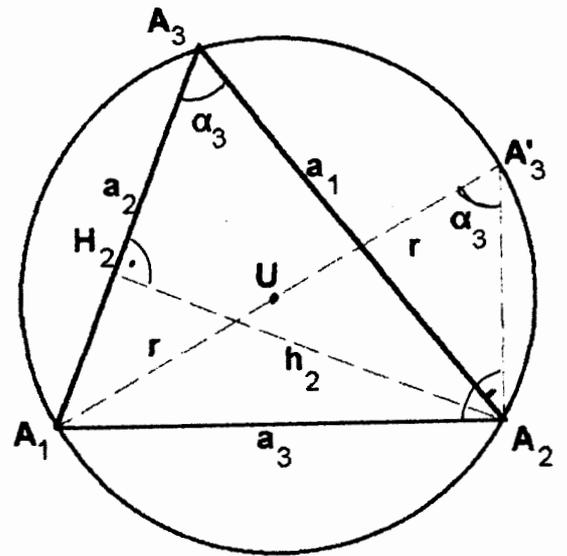
Einige Dreieckssätze, die mit Hilfe des Umkreises hergeleitet werden können

Sinussatz

$$\sin \alpha_3 = \frac{a_3}{2r}$$

Daher mit zyklischer Vertauschung

$$2r = \frac{a_1}{\sin \alpha_1} = \frac{a_2}{\sin \alpha_2} = \frac{a_3}{\sin \alpha_3} \quad (*)$$



Flächensätze

$$\Delta A_1A_2A'_3 \sim \Delta A_2H_2A_3 \Rightarrow \frac{2r}{a_3} = \frac{a_1}{h_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{a_1 a_3}{2r} \text{ . Nun ist}$$

$$2F = a_2 h_2 = \frac{a_1 a_2 a_3}{2r} \Rightarrow \boxed{4Fr = a_1 a_2 a_3} \text{ Mit Hilfe von } (*) \text{ folgt}$$

daraus: $4Fr = (2r \cdot \sin \alpha_1) \cdot (2r \cdot \sin \alpha_2) \cdot (2r \cdot \sin \alpha_3)$, also

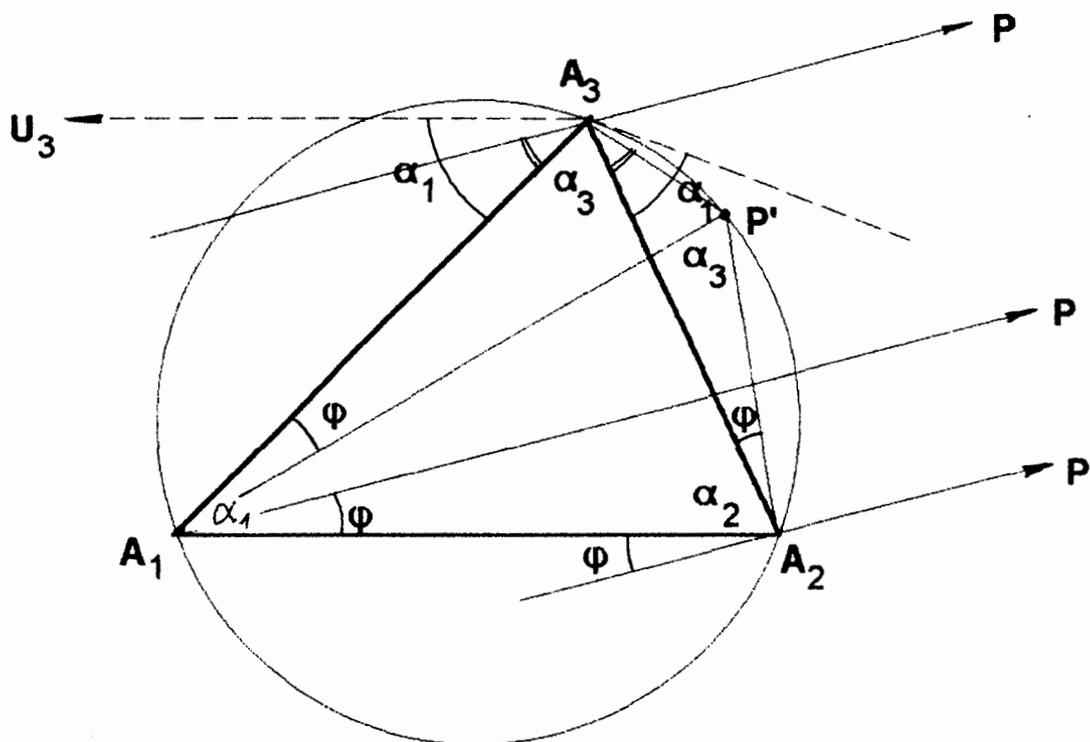
$$\boxed{F = 2r^2 \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3}$$

Aus dieser Formel folgt wegen $\sin \alpha_i = \frac{a_i}{2r}$

$F = 2r^2 \cdot \frac{a_1}{2r} \cdot \frac{a_2}{2r} \cdot \sin \alpha_3$, daher mit zyklischer Vertauschung

$$2F = a_1 a_2 \cdot \sin \alpha_3 = a_2 a_3 \cdot \sin \alpha_1 = a_3 a_1 \cdot \sin \alpha_2$$

Das isogonale Bild eines Fernpunktes ist ein Punkt des Umkreises. Umgekehrt entspricht jedem Umkreispunkt (ausgenommen A_1, A_2, A_3) ein Fernpunkt. Jeder Dreiecksseite entspricht der gegenüberliegende Dreieckseckpunkt



Im Dreieck $\Delta A_1 A_2 P'$ gilt

$$\angle A_2 A_1 P' = \alpha_1 - \varphi, \quad \angle A_1 A_2 P' = \alpha_2 + \varphi$$

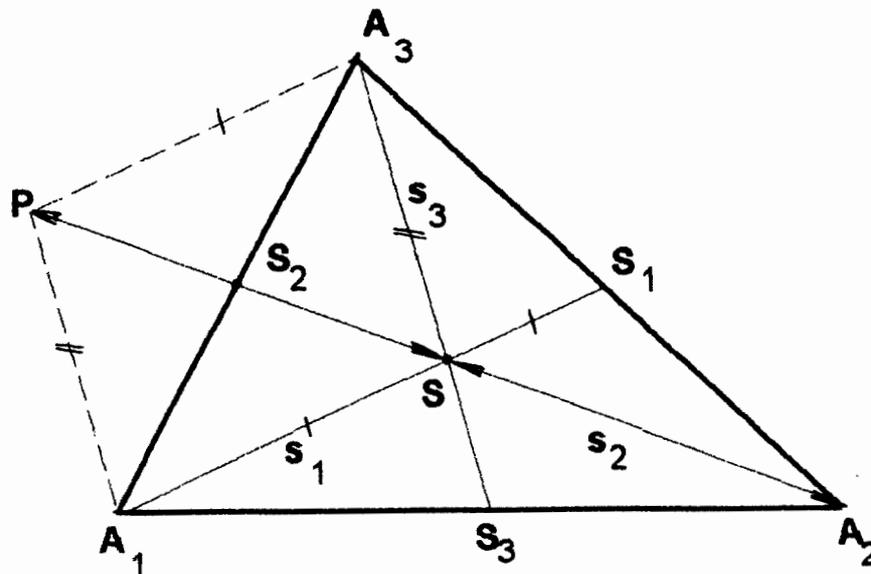
Daher gilt für den dritten Winkel dieses Dreiecks

$$\angle A_1 P' A_2 = 180 - [(\alpha_1 - \varphi) + (\alpha_2 + \varphi)] = 180 - (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_3$$

Demnach liegt P' nach dem Peripheriewinkelsatz auf dem Umkreis des gegebenen Dreiecks. Die Umkehrung des Satzes folgt unmittelbar aus der Figur.

Dem Fernpunkt einer Dreiecksseite (etwa U_3) entspricht nach dem Sehnen - Tangentensatz der gegenüberliegende Eckpunkt (hier A_3). Die Umkehrung ist in diesem Falle unbestimmt.

Schwerlinien (Medianen, Mittellinien), Schwerpunkt



Die drei *Schwerlinien* s_1, s_2, s_3 schneiden einander im *Schwerpunkt* S des Dreieckes. Der Schwerpunkt teilt jede Schwerlinie innen im Verhältnis 1:2.

$$T(A_i S_i S) = -2$$

Zum Beweis konstruieren wir zunächst die Seitenschwerpunkte S_1 und S_3 und schneiden die entsprechenden Schwerlinien s_1 und s_3 im Punkte S . Dann konstruieren wir den Punkt $S_2 := (A_2 S) \cap a_2$ und zeigen $A_1 S_2 = S_2 A_3$. Zu diesem Zweck wählen wir den Hilfspunkt P so, daß gilt $A_2 S = SP$. Dann ist die Gerade SS_1 Verbindungslinie der Seitenmitten im Dreieck $\Delta PA_2 A_3 \Rightarrow PA_3 \parallel SS_1$. Ganz analog gilt im Dreieck $\Delta PA_1 A_2$: $PA_1 \parallel SS_3$. Im Parallelogramm $\# A_1 S A_3 P$ halbieren einander die Diagonalen. Daher ist $A_1 S_2 = S_2 A_3$ und $A_2 S_2$ ist Schwerlinie. Weiters gilt $A_2 S = SP = 2 \cdot SS_2$ wie behauptet.

Auf Grund der Konstruktion des Schwerpunktes gilt

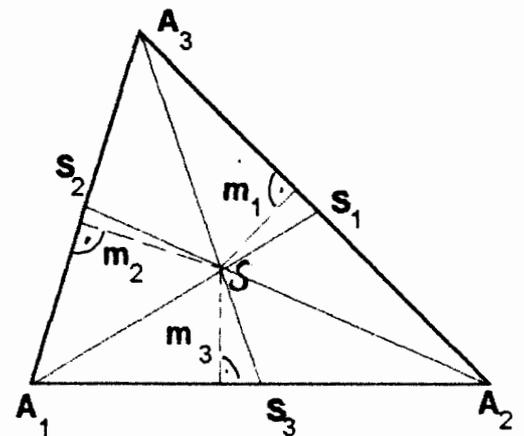
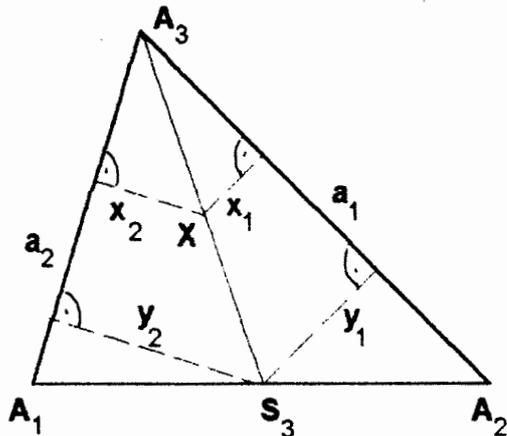
Der Schwerpunkt entspricht sich in der isotomen Abbildung selbst

$$\tau(S) = S$$

Der Schwerpunkt ist der Dreieckspol der Ferngeraden

Die Koordinaten eines Punktes einer Schwerlinie bezüglich der anliegenden Seiten verhalten sich umgekehrt wie die Längen dieser Seiten.

Die Koordinaten des Schwerpunktes bezüglich der Dreiecksseiten verhalten sich umgekehrt wie die Längen dieser Seiten bzw. umgekehrt wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel



$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{A_3 X}{A_3 S_3} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$2F(A_1 S_3 A_3) = 2F(S_3 A_2 A_3) = a_2 y_2 = a_1 y_1 \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{x_1}{x_2}$$

und zyklisch

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3}$$

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3}$$

wegen $a_i = 2r \cdot \sin \alpha_i$ gilt auch

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{1}{\sin \alpha_1} : \frac{1}{\sin \alpha_2} : \frac{1}{\sin \alpha_3}$$

Länge einer Schwerlinie: Nach STEWART haben wir zu setzen

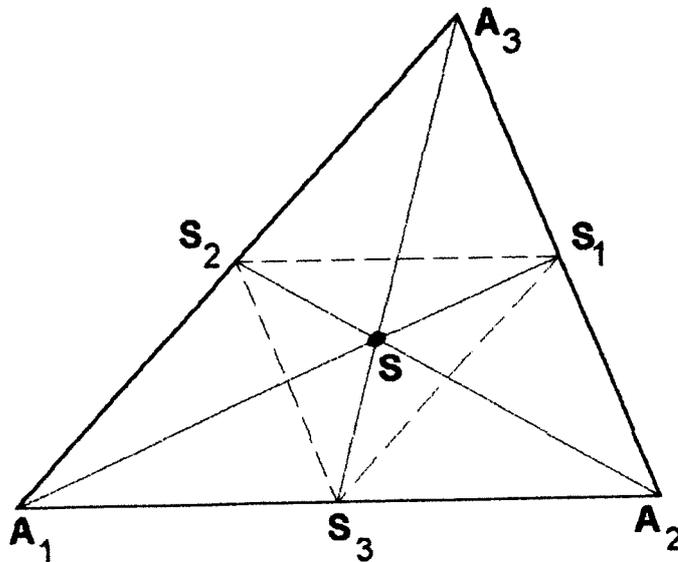
$$t_3 = s_3, a_{31} = a_{32} = \frac{a_3}{2}, \text{ daraus folgt}$$

$$a_3 \left(s_3^2 + \frac{a_3^2}{4} \right) = a_1^2 \cdot \frac{a_3}{2} + a_2^2 \cdot \frac{a_3}{2} \Rightarrow s_3^2 = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} - \frac{a_3^2}{4}, \text{ also}$$

$$s_3^2 = \frac{2(a_1^2 + a_2^2) - a_3^2}{4} \quad \text{und zyklisch}$$

Das Mittendreieck

Das Mittendreieck entsteht aus dem Urdreieck durch eine *zentrische Ähnlichkeit* mit dem Schwerpunkt S als Ähnlichkeitszentrum.



$$\begin{aligned} \sigma: A_1 &\longrightarrow S_1 \\ A_2 &\longrightarrow S_2 \\ A_3 &\longrightarrow S_3 \end{aligned} \quad \sigma(A_i) = S_i, \quad T(A_i S_i S) = -\frac{A_i S}{S_i S} = -2 = \frac{1}{\lambda}$$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ ist das Ähnlichkeitsverhältnis und es gilt $SS_i = |\lambda| A_i S$.
Für die zentrische Ähnlichkeit σ gilt

$$\begin{aligned} \sigma: \varepsilon \setminus \{S\} &\longrightarrow \varepsilon \\ X &\longrightarrow X' = \sigma(X) \\ T(XX'S) &= -2 = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Man nennt den Punkt $X' = \sigma(X)$ komplementär zu X . Der Punkt $X = \sigma^{-1}(X')$ heißt zu X antikomplementär.

Urdreieck und Mittendreieck haben einen gemeinsamen Schwerpunkt.

Der Höhenschnittpunkt

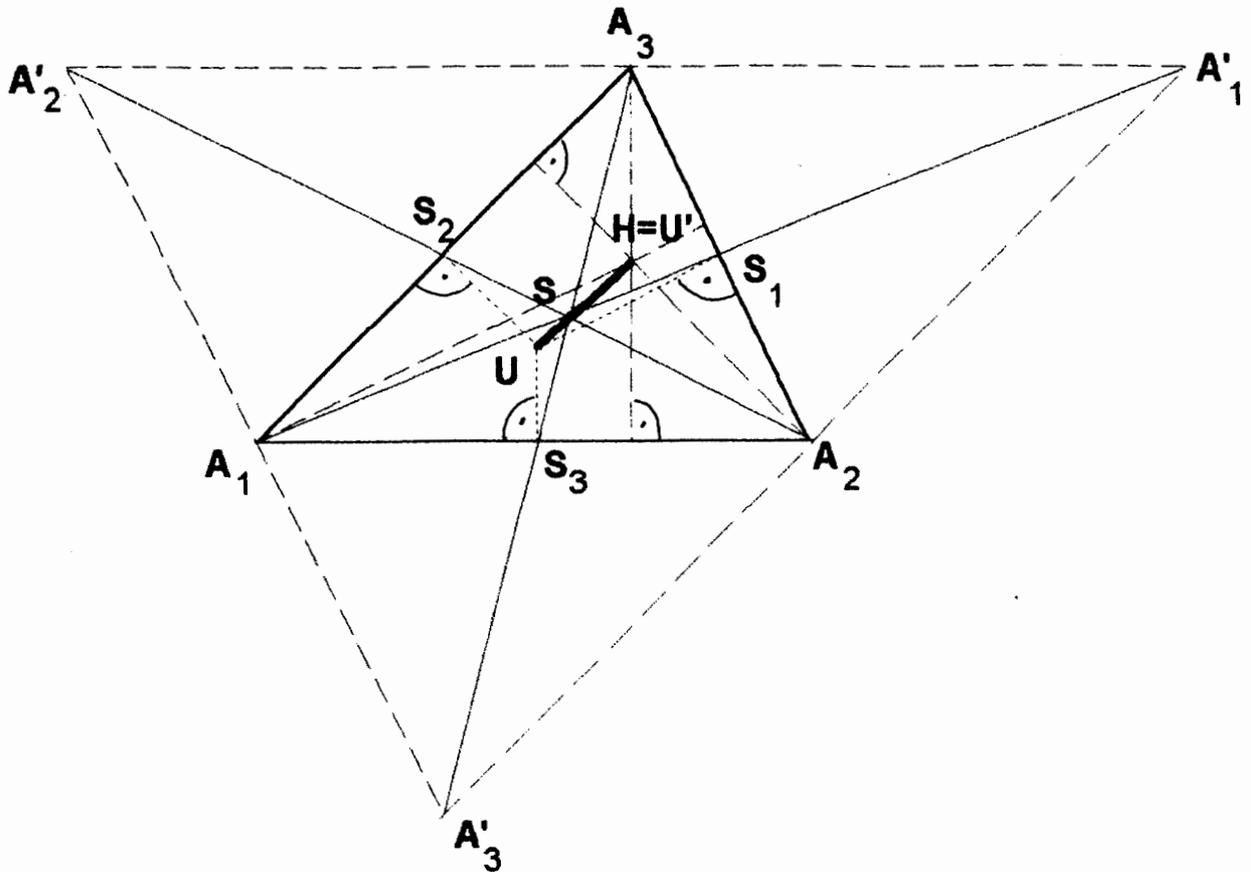
Wir zeichnen das Außendreieck¹ $\Delta A'_1 A'_2 A'_3$ des gegebenen Urdreiecks $\Delta A_1 A_2 A_3$. Dann sind die Höhen des Urdreiecks die Seitensymmetralen des Außendreiecks, die einander in U' (dem Umkreismittelpunkt des Außendreiecks) schneiden².

$$U' = H$$

Da das Urdreieck das Mittendreieck des Außendreiecks ist, haben

¹ Bezeichnung von C.G. REUSCHLE 1853

² Der Beweis stammt von Karl Friedrich GAUSS (1777-1855).
Veröffentlicht durch SCHUMACHER in der Übersetzung von Lazare
Nicolas Marguérite CARNOTS (1753-1823) Géométrie des position
1810/13



beide denselben Schwerpunkt $S = S'$ und es gilt

$$A_i = \sigma(A_i')$$

Durch die Komplementärabbildung geht der Umkreismittelpunkt U' des Außendreiecks in den Umkreismittelpunkt U des Urdreiecks über. Wegen $U' = H$ gilt also

$$\sigma(H) = U$$

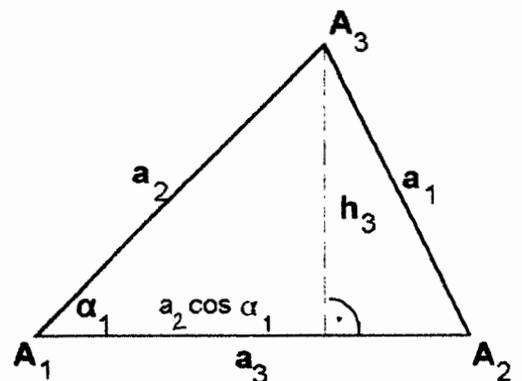
Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks liegen auf der Geraden von EULER (1765) und es gilt $T(HUS) = -2$ bzw. $HS = 2 \cdot US$

Der Kosinussatz

$$h_3^2 = a_2^2 - a_2^2 \cos^2 \alpha_1 = a_1^2 - (a_3 - a_2 \cos \alpha_1)^2 \Rightarrow$$

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_3 \cdot \cos \alpha_1$$

und zyklisch



Höhenschnittpunkt und Umkreis

Da die rechtwinkligen Dreiecke $\Delta A_2A_3H_3$ und $\Delta A_2A_1H_1$ im Winkel α_2 übereinstimmen, gilt auch

$$\angle A_2A_3H_3 = \angle A_2A_1H_1 = \varphi$$

und analog

$$\angle A_1A_2H_2 = \angle A_1A_3H_3 = \psi$$

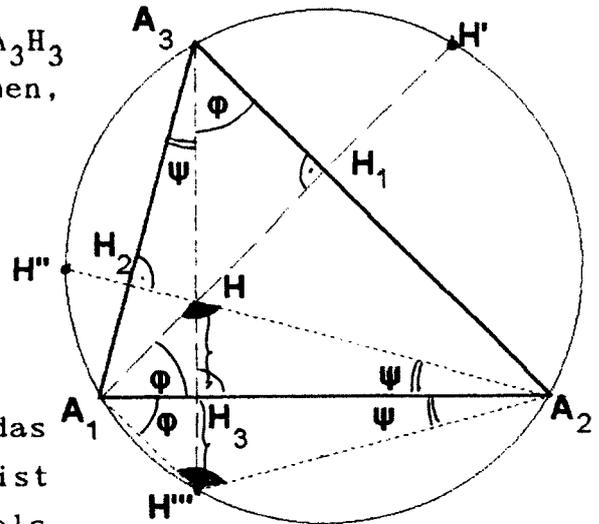
Im ΔA_1A_2H gilt daher

$$\angle A_1HA_2 = 180 - (\varphi + \psi) = 180 - \alpha_3$$

Spiegelt man H an (A_1A_2) , so entsteht das $\Delta A_1H''A_2$ mit $\angle A_1H''A_2 = 180 - \alpha_3$. Dies ist

aber das Supplement des Peripheriewinkels $\angle A_1A_3A_2 = \alpha_3$. H'' liegt daher auf dem

Umkreis



Die Spiegelpunkte des Höhenschnittpunktes an den Dreiecksseiten liegen auf dem Umkreis

DIE SÄTZE VON MIQUEL

TAFEL I

Auf den Seiten des Dreiecks $\Delta A_1A_2A_3$ seien die Punkte $Q_1Q_2Q_3$ beliebig, aber von $A_1A_2A_3$ verschieden, gewählt. Dann gehen die Umkreise der Dreiecke $\Delta A_1Q_2Q_3$, $\Delta A_2Q_3Q_1$, $\Delta A_3Q_1Q_2$ durch denselben Punkt Q . $\Delta Q_1Q_2Q_3$ heißt MIQUELsches Dreieck, Q heißt Punkt von MIQUEL, die Umkreise heißen MIQUELsche Kreise

Wir zeichnen zunächst die Umkreise von $\Delta A_1Q_2Q_3$ und $\Delta A_2Q_3Q_1$. Die beiden Kreise haben außer Q_3 noch einen Punkt Q gemein. In den Sehnenvierecken

$$A_1Q_3QQ_2 \quad | \quad A_2Q_1QQ_3$$

gilt wegen der Supplementarität gegenüberliegender Winkel

$$\angle Q_2QQ_3 = 180 - \alpha_1 \quad | \quad \angle Q_1QQ_2 = 180 - \alpha_2$$

Deren Nebenwinkel haben daher die Größen α_1 bzw. α_2 . Im Viereck

$A_3Q_1QQ_2$ sind daher die gegenüberliegenden Winkel

$$\alpha_3 \text{ und } \angle Q_1QQ_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = 180 - \alpha_3$$

supplementär. $A_3Q_1QQ_2$ ist demnach ein Sehnenviereck, hat daher einen Umkreis q.e.d.

Wegen der Komplementarität gegenüberliegender Winkel in den betrachteten Sehnenvierecken gilt

$$\angle A_1Q_2Q = \angle A_2Q_3Q = \angle A_3Q_1Q$$

Die Strecken QQ_i bilden mit den Seiten A_jA_k gleiche Winkel
(ijk) = (123)

Wir betrachten das von den Mitteln M_1, M_2, M_3 der MIQUELSchen Kreise gebildete Dreieck. Da die Seite $M_iM_j \perp QQ_k$ ist (als Verbindung der Mittelpunkte zweier Kreise und deren gemeinsamer Sehne), und im Sehnenviereck über dem Durchmesser QM_3 gilt

$$\angle M_1M_3M_2 = 180 - \angle Q_1QQ_2 = 180 - (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_3 \text{ und zykl.}$$

Das Mittendreieck $\Delta M_1M_2M_3$ der MIQUELSchen Kreise ist zum gegebenen $\Delta A_1A_2A_3$ Dreieck ähnlich

Zu einem gegebenen Punkt Q gibt es unendlich viele MIQUELSche Dreiecke. Alle zum selben Punkt gehörigen MIQUELSchen Dreiecke sind ähnlich

Wählt man nämlich einen Kreis beliebig durch A_2 und Q (sein Mittelpunkt sei M'_2), so schneidet er auf A_2A_3 den Punkt Q'_1 , auf A_1A_2 den Punkt Q'_3 aus. Der Umkreis von Q'_1A_3Q liefert auf A_1A_3 den Punkt Q'_2 . Entsprechend dem bereits geführten Beweis muß der Umkreis von $A_1Q'_2Q'_3$ durch Q gehen.

Zum Nachweis der Ähnlichkeit aller so konstruierten Dreiecke ziehen wir die Hilfslinie A_3Q_3 und betrachten die Dreiecke

$$\Delta Q_2Q_3A_3 \dots \text{Außenwinkelsatz} \Rightarrow \angle A_1Q_2Q_3 = \angle Q_2Q_3A_3 + \angle Q_2A_3Q_3$$

$$\Delta Q_3Q_1A_3 \dots \text{Außenwinkelsatz} \Rightarrow \angle A_2Q_1Q_3 = \angle Q_1Q_3A_3 + \angle Q_1A_3Q_3$$

Addition dieser Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \angle A_1Q_2Q_3 + \angle A_2Q_1Q_3 &= \underbrace{(\angle Q_2Q_3A_3 + \angle Q_1Q_3A_3)}_{\angle Q_2Q_3Q_1 =: \varphi_3} + \underbrace{(\angle Q_2A_3Q_3 + \angle Q_1A_3Q_3)}_{\alpha_3} = \\ &= \varphi_3 + \alpha_3 \end{aligned} \quad (*)$$

Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\left. \begin{aligned} \angle A_1 Q_2 Q_3 &= \angle A_1 Q Q_3 \\ \angle A_2 Q_1 Q_3 &= \angle A_2 Q Q_3 \end{aligned} \right\} +$$

$$\angle A_1 Q_2 Q_3 + \angle A_2 Q_1 Q_3 = \angle A_1 Q Q_3 + \angle A_2 Q Q_3 = \angle A_1 Q A_2 \stackrel{(*)}{=} \varphi_3 + \alpha_3 =: \lambda_3$$

Also

$$\varphi_3 = \lambda_3 - \alpha_3 \quad \text{und zyklisch}$$

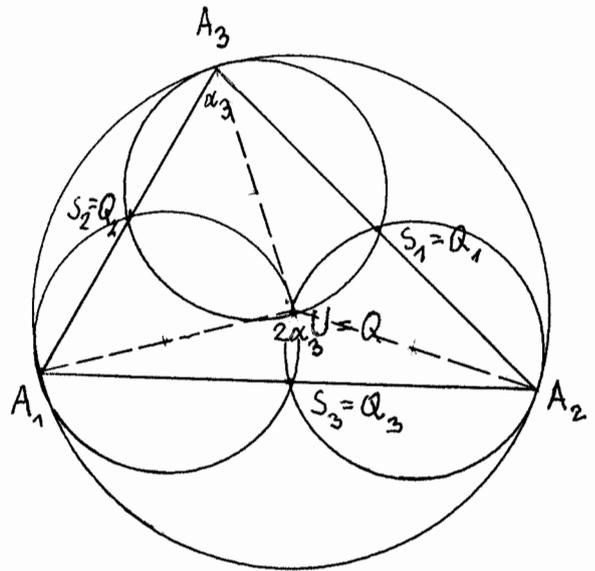
D.h. der Winkel φ_3 des MIQUELSchen Dreiecks bei Q_3 hängt nur von der Lage des MIQUELSchen Punktes ab.

Wählt man den Umkreismittelpunkt U als MIQUELSchen Punkt, so sind alle MIQUELSchen Dreiecke dem gegebenen Dreieck $\Delta A_1 A_2 A_3$ ähnlich

Man erkennt unmittelbar, daß das Mittendreieck $\Delta S_1 S_2 S_3$ eines der möglichen MIQUELSchen Dreiecke ist. Wegen

$$\Delta S_1 S_2 S_3 \sim \Delta A_1 A_2 A_3$$

gilt dies für alle MIQUELSchen Dreiecke. Die zum Mittendreieck gehörigen MIQUELSchen Kreise berühren den Umkreis.



FUßPUNKTEDREIECKE

TAFEL 2

Die Fußpunktedreiecke sind spezielle MIQUELSche Dreiecke zu einem MIQUELSchen Punkt P . ($F_i = Q_i$). Die MIQUELSchen Kreise sind zweifache THALESkreise, z.B. $A_1 F_3 P F_2$. Für die Winkel des MIQUELSchen Dreiecks $\Delta F_1 F_2 F_3$ galt

$\varphi_1 = \lambda_1 - \alpha_1$	Winkel des Fußpunktedreiecks
$\varphi_2 = \lambda_2 - \alpha_2$	
$\varphi_3 = \lambda_3 - \alpha_3$	

e Da P seiner Lage nach bekannt ist, sind die Winkel $\lambda_i := \angle A_j P A_k$ sowie die Abstände $l_i := PA_i$ bekannte Größen.

Hinweis: Bei Anwendung von Winkelfunktionen sowie bei der Berechnung von Flächeninhalten ist der Winkeldrehsinn bzw. der Umlaufsinn zu beachten!

Mit Hilfe des MIQUELSchen Kreises entnimmt man (vgl. S.32)

$$\sin \alpha_1 = \frac{f_1}{l_1} = \frac{a_1}{2r} \quad (r \dots \text{Umkreisradius})$$

$f_1 = l_1 \cdot \sin \alpha_1 = \frac{a_1 l_1}{2r}$
$f_2 = l_2 \cdot \sin \alpha_2 = \frac{a_2 l_2}{2r}$
$f_3 = l_3 \cdot \sin \alpha_3 = \frac{a_3 l_3}{2r}$

Seitenlängen des Fußpunktedreiecks

Es sei X_1 der Punkt des Umkreises auf der Verlängerung von A_1P . Dann gilt im ΔPA_2X_1 unter Heranziehung des Peripheriewinkelsatzes und des Außenwinkelsatzes

$$\angle PX_1A_2 = \alpha_3 \text{ und } \angle PA_2X_1 = \lambda_3 - \alpha_3 = \varphi_3$$

Die Anwendung des Sinussatzes auf das genannte Dreieck ergibt

$$\sin \varphi_3 = \frac{PX_1}{l_2} \sin \alpha_3$$

Für den Flächeninhalt des Fußpunktedreiecks ergibt sich (S.32)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= F(F_1F_2F_3) = \frac{1}{2} f_1 f_2 \cdot \sin \varphi_3 = \\ &= \frac{1}{2} (l_1 \cdot \sin \alpha_1) (l_2 \cdot \sin \alpha_2) \cdot \frac{PX_1}{l_2} \sin \alpha_3 = \\ &= \frac{1}{2} (l_1 \cdot PX_1) \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 \quad (*) \end{aligned}$$

Nun stellt $l_1 \cdot PX_1$ den Betrag der Potenz des Punktes P bezüglich des Umkreises dar, daher gilt nach Seite 14

$$l_1 \cdot PX_1 = -\Pi(u, P) = -(PU^2 - r^2) = r^2 - PU^2$$

Ferner gilt für den Flächeninhalt des Urdreiecks

$$F = 2r^2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 \Rightarrow \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 = \frac{F}{2r^2}$$

$\bar{\sigma} = -\frac{F}{4r^2} \cdot \Pi(u, P) = \frac{F}{4r^2} (r^2 - PU^2)$
--

Die (vorzeichenbehaftete) Fläche des Fußpunktedreiecks ist proportional der Potenz von P bezüglich des Umkreises

Die Menge aller Punkte, deren Fußpunktdreiecke konstanten Inhalt \mathcal{F} haben, liegen auf einem mit U konzentrischem Kreis

Da die Potenz eines Umfangspunktes verschwindet, gilt

Satz von William WALLACE (1768-1843) : Ein Punkt liegt genau dann auf dem Umkreis eines Dreiecks, wenn seine Fußpunkte in gerade Linie liegen (WALLACE - Gerade)

Das Fußpunktdreieck des Umkreismittelpunktes (Mittendreieck) hat maximalen Flächeninhalt $\mathcal{F} = \frac{1}{4} F$

Obiger Satz stellt die Lösung einer von C. HARKEMA (St. Petersburg) gestellten Aufgabe dar (Nouvelles Annales de Mathematiques 1875).

DER PUNKT VON TORRICELLI

Evangelista TORRICELLI (1608-1647)

TAFEL 3

Über den drei Seiten des Dreiecks $\Delta A_1A_2A_3$ werden nach außen die gleichseitigen Dreiecke $\Delta A_1A_2T_3$, $\Delta A_2A_3T_1$, $\Delta A_3A_1T_2$ errichtet. Die Umkreise dieser Dreiecke schneiden einander in einem Punkt (Punkt von TORRICELLI).

Beweis: Die Umkreise von $\Delta A_1A_2T_3$, $\Delta A_3A_1T_2$ schneiden einander im Punkte T . Dann folgt aus dem Peripheriewinkelsatz

$$\angle A_1TA_2 = \angle A_1TA_3 = 120^\circ$$

als Supplemente der Peripheriewinkel bei T_3 und T_2 . Daraus ergibt sich aber

$$\angle A_2TA_3 = 120^\circ$$

T muß daher auf dem Umkreis von ΔA_2A_3T liegen.

Weiters folgt aus dem Peripheriewinkelsatz

$$\angle T_2TA_1 = \angle T_2TA_3 = \angle T_3TA_1 = 60^\circ \Rightarrow \angle T_3TA_3 = 180^\circ \Rightarrow T_3TA_3 \text{ kollinear}$$

Die Verbindungslinien A_iT_i ($i = 1, 2, 3$) gehen durch den Punkt von TORRICELLI

Nach dem SWS-Satz gilt

$$\Delta A_1A_3T_1 = \Delta T_2A_3A_2 \Rightarrow A_1T_1 = A_2T_2 \text{ u. zykl.}$$

Die Strecken $A_i T_i$ ($i = 1, 2, 3$) haben dieselbe Länge

Der Punkt von TORRICELLI liegt im $\left\{ \begin{array}{l} \text{Innern} \\ \text{Äußern} \end{array} \right\}$ des Dreiecks, wenn

$\left\{ \begin{array}{l} \text{kein} \\ \text{ein} \end{array} \right\}$ Winkel $> 120^\circ$ ist. Ist $\alpha_i = 120^\circ$, so ist $T \equiv A_i$

Der Punkt von TORRICELLI löst folgendes

Problem von Pierre FERMAT (1601-1665): Im *Innern* eines Dreiecks ist jener Punkt zu bestimmen, dessen Abstandssumme von den Eckpunkten ein Minimum ist:

$$TA_1 + TA_2 + TA_3 = \min!$$

Beweis: Es sei X ein beliebiger

Punkt *im Innern* von $\Delta A_1 A_2 A_3$.

Wir drehen das Dreieck $\Delta A_1 X A_3$

um A_3 durch einen Winkel von

60° so, daß die neue Lage T_2

von A_1 und der Eckpunkt A_2 auf

verschiedenen Seiten von

$A_1 A_3$ liegen. Das $\Delta X A_3 X'$ ist

gleichseitig und für die fragliche Abstandssumme gilt

$$XA_1 + XA_2 + XA_3 = T_2 X' + X' X + XA_2$$

Nun sind aber T_2 und A_2 feste

Punkte. Der kleinsten Summe

links entspricht als kürzeste

Verbindung die Gerade $T_2 A_2$. Die

Ausgangslage von X muß daher

auf dieser Geraden liegen und durch Drehung um 60° wieder auf diese

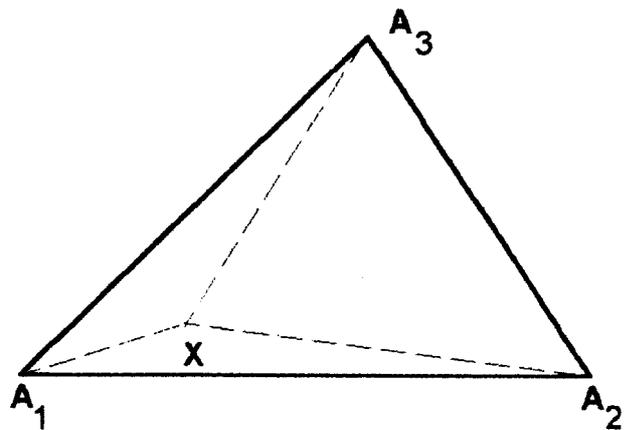
Gerade gelangen. TT' bildet daher die Basis eines gleichseitigen

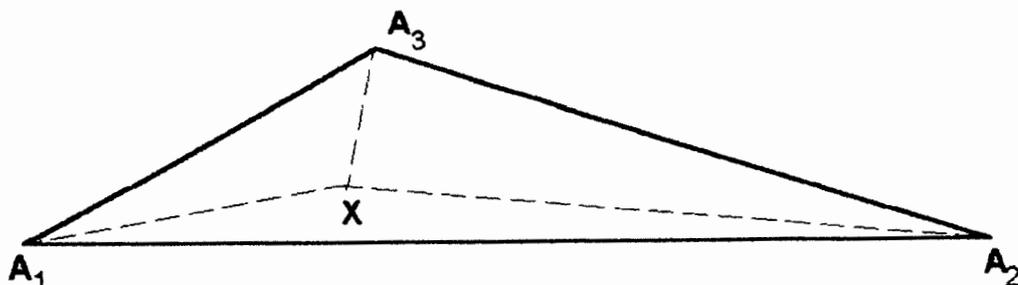
Dreiecks mit der Spitze in A_3 . Daher ist $\angle A_2 T A_3 = 120^\circ$. T liegt also

auf dem TORRICELLI-Kreis über $A_2 A_3$. Da dies zyklisch gelten muß,

ist der gesuchte Punkt der Punkt von TORRICELLI. T liegt im Innern

des Dreiecks, wenn kein Winkel $\geq 120^\circ$ ist.





Dann gilt auch hier

$$XA_1 + XA_2 + XA_3 = T_2 X' + X'X + XA_2$$

Da

$$\angle A_1 A_3 A_2 + \angle A_1 A_3 T_2 = \alpha_3 + 60^\circ \geq 180^\circ$$

ist, liegen die Punkte A_1 und A_3 auf derselben Seite von $T_2 A_2$ und A_3 liegt im Innern des Vierecks $A_2 X X' T_2$.

Mehrfache Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt folgende Beziehungen

$$\Delta T_2 X' Y \dots T_2 X' + X' Y \geq T_2 Y = T_2 A_3 + A_3 Y \quad (1)$$

$$\Delta X' X Y \dots X' X + X Y \geq X' Y \quad (2)$$

$$\Delta A_3 Y A_2 \dots A_3 Y + Y A_2 \geq A_3 A_2 \quad (3)$$

Einsetzen von (2) in (1) ergibt

$$T_2 X' + X' X + X Y \geq T_2 A_3 + A_3 Y \quad (4)$$

Addition von (4) und (3) ergibt

$$T_2 X' + X' X + (X Y + A_3 Y) + Y A_2 \geq T_2 A_3 + A_3 Y + A_3 A_2 \Rightarrow \frac{T_2 X'}{X A_1} + \frac{X' X}{X A_3} + \frac{(X Y + Y A_2)}{X A_2} \geq \frac{T_2 A_3 + A_3 A_2}{A_1 A_3}$$

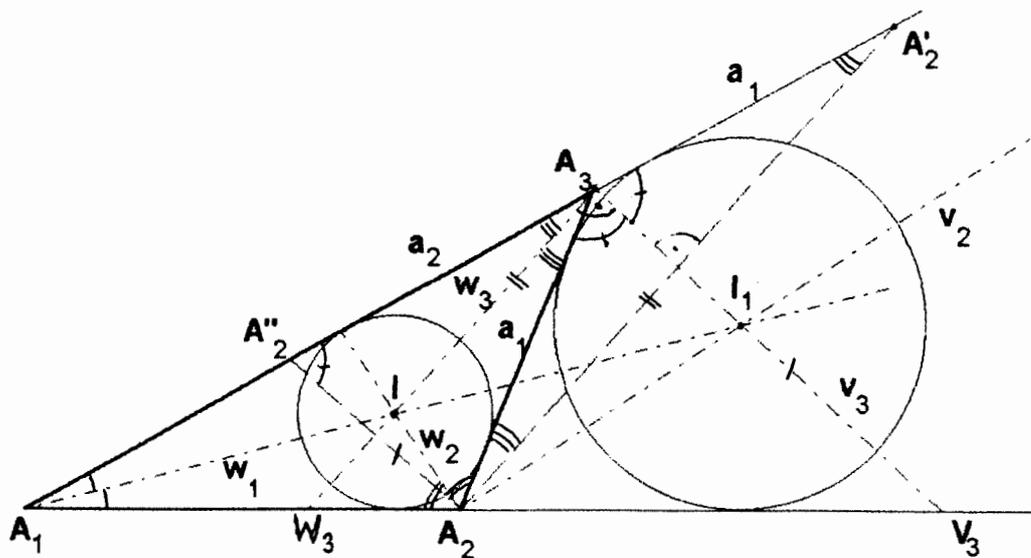
Daher

$$X A_1 + X A_2 + X A_3 \geq A_1 A_3 + A_3 A_2 = \text{const.}$$

Wir können die Summe $X A_1 + X A_2 + X A_3$ beliebig an $A_1 A_3 + A_3 A_2$ annähern, indem wir X beliebig nahe an A_3 wählen. Da die Eckpunkte des Dreiecks nicht als innere Punkte gelten, hat in diesem Falle die Aufgabe von FERMAT keine Lösung.

Die Winkelhalbierenden der Dreieckswinkel

Jeder Punkt der Winkelhalbierenden w_i hat von den Seiten a_j und a_k gleichen Abstand $(ijk) = (123)$. Der Schnittpunkt $I = w_1 \cap w_2$ hat daher



von a_2, a_3 und a_3, a_1 gleichen Abstand und liegt demnach auch auf w_3 .

$$I = w_1 n w_2 n w_3 \quad \text{Inkreismittelpunkt}$$

Verlängert man die Seite $A_1 A_3$ bis A'_2 , sodaß $A_3 A'_2 = a_1$ ist, so ist das Dreieck $\Delta A_2 A'_2 A_3$ gleichschenkelig und sein Außenwinkel $\angle A_1 A_3 A_2$ daher doppelt so groß wie jeder der Innenwinkel bei A_2 bzw. A'_2 . Aus der Gleichheit der Winkel $\angle W_3 A_3 A_2 = \angle A_3 A'_2 A_2$ folgt $W_3 A_3 \parallel A_2 A'_2$. Daher ergibt der Strahlensatz: $A_1 W_3 : W_3 A_2 = a_2 : a_1$.

Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden teilt jede Dreiecksseite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten:

$$T(A_1 A_2 W_3) = -\frac{a_2}{a_1}, \quad T(A_2 A_3 W_1) = -\frac{a_3}{a_2}, \quad T(A_3 A_1 W_2) = -\frac{a_1}{a_3}$$

Aus dem Satz von STEWART in der Fassung von Seite 7 folgt daher

$$w_3^2 = \frac{-\frac{a_2}{a_1} a_3^2 - \frac{a_1 + a_2}{a_1} \left(-a_1^2 \frac{a_2}{a_1} - a_2^2\right)}{\frac{(a_1 + a_2)^2}{a_1^2}} = \frac{-a_1 a_2 a_3^2 + (a_1 + a_2)(a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2)}{(a_1 + a_2)^2}$$

$$= a_1 a_2 \frac{-a_3^2 + (a_1 + a_2)(a_1 + a_2)}{(a_1 + a_2)^2}, \text{ also}$$

Länge der Winkelhalbierenden

$$w_3^2 = a_1 a_2 \frac{(a_1 + a_2)^2 - a_3^2}{(a_1 + a_2)^2}$$

und zyklisch

Für die Abschnitte $A_1 W_3 = a_{32}$, $W_3 A_2 = a_{31}$ gilt

$$a_{32} + a_{31} = a_3, \quad \frac{a_{32}}{a_{31}} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_{31} \frac{a_2}{a_1} + a_{31} = a_3 \Rightarrow a_{31}(a_1 + a_2) = a_1 a_3$$

$$a_{31} = \frac{a_1 a_3}{a_1 + a_2}, \quad a_{32} = a_3 - \frac{a_1 a_3}{a_1 + a_2} = \frac{a_2 a_3}{a_1 + a_2}$$

$$a_{31} = \frac{a_1 a_3}{a_1 + a_2}, \quad a_{32} = \frac{a_2 a_3}{a_1 + a_2}$$

Abschnitte von w_3 auf a_1
u. zykl.

Die Höhe im Dreieck $\Delta A_2 A_3 A_2'$ stellt die Winkelhalbierende v_3 des Außenwinkels bei A_3 dar. Deren Punkte sind von a_1 und der Verlängerung von a_2 gleich weit entfernt. Daher ist der Schnittpunkt $I_i = v_j \cap v_k$ von a_j und a_k gleich weit entfernt, liegt also auch auf v_i .

$$I_i = w_i \cap v_j \cap v_k \quad (ijk) = (123) \quad \text{Mittelpunkte der Ankreise}$$

Trägt man die Strecke $A_3 A_2'' = a_1$ von A_3 auf $A_1 A_3$ in Richtung von A_1 auf, so ist das Dreieck $\Delta A_2 A_3 A_2''$ gleichschenkelig. Sein Außenwinkel $\angle A_2 A_3 A_2'$ ist daher doppelt so groß wie $\angle A_2 A_2'' A_3$. Daher ist $A_3 V_3 \parallel A_2 A_2''$ und es gilt

$$\frac{A_1 V_3}{A_2 V_3} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow T(A_1 A_2 V_3) = \frac{a_2}{a_1} = -T(A_1 A_2 W_3) \Rightarrow D(A_1 A_2 W_3 V_3) = -1$$

Die Halbierenden eines Dreieckswinkels und dessen Nebenwinkels sind orthogonal.

Die Schnittpunkte der Halbierenden eines Dreieckswinkels und seines Außenwinkels trennen die Eckpunkte der gegenüberliegenden Dreiecksseite harmonisch

Nach STEWART folgt

$$v_3^2 = \frac{\frac{a_2}{a_1} a_3^2 + \frac{a_2 - a_1}{a_1} (a_1^2 \frac{a_2}{a_1} - a_2^2)}{(a_2 - a_1)^2} = \frac{a_1 a_2 a_3^2 + (a_2 - a_1)(a_1^2 a_2 - a_1 a_2^2)}{(a_2 - a_1)^2}$$

$$v_3^2 = a_1 a_2 \frac{a_3^2 - (a_1 - a_2)^2}{(a_1 - a_2)^2}$$

Länge der Halbierenden des Nebenwinkels
u. zykl.

Für $A_1 V_3 = a'_{32}$, $A_2 V_3 = a'_{31}$ gilt

$$a_3 + a'_{31} = a'_{32}, \quad \frac{a'_{32}}{a'_{31}} = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{daraus}$$

$$a'_{31} = \frac{a_1 a_3}{a_2 - a_1}, \quad a'_{32} = \frac{a_2 a_3}{a_2 - a_1}$$

Abschnitte von v_3 auf a_1
u. zykl.

DER KREIS VON APOLLONIOS¹

APOLLONIOS von Perge (262?-190? v.Chr.)

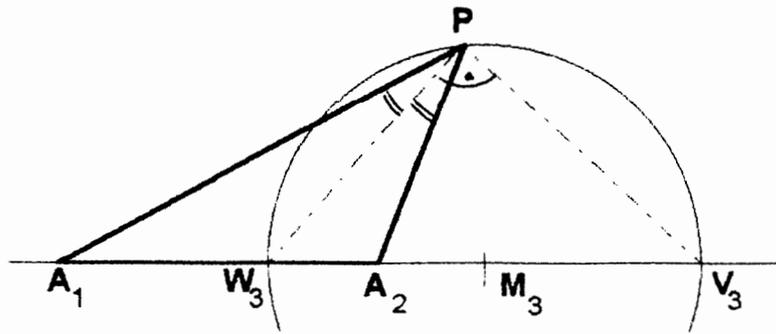
Die Menge aller Punkte der Ebene, die von zwei festen Punkten A_1, A_2 konstantes Abstandsverhältnis $m_1:m_2$ besitzen, ist ein Kreis (Kreis von APOLLONIOS)

Gegeben seien die Punkte A_1, A_2 und das Verhältnis $|m_1:m_2| = \lambda \neq 1$.
Gesucht ist die Menge der Punkte mit

$$\lambda = \left| \frac{A_1 P}{A_2 P} \right| = \left| \frac{m_1}{m_2} \right|$$

Wir konstruieren zunächst einen beliebigen Punkt P , für den gilt $A_1 P:A_2 P = m_1:m_2 = \lambda$. Im Dreieck $\Delta A_1 P A_2$ zeichnen wir die Halbierenden von Innen- und Außenwinkel und erhalten so die Punkte W_3 und V_3 . Für diese Punkte gilt

¹ Der nach APOLLONIOS benannte Kreis tritt bereits bei ARISTOTELES (384-322 v.Chr.) auf



$$|T(A_1 A_2 W_3)| = |T(A_1 A_2 V_3)| = m_1 : m_2 = \lambda$$

W_3 und V_3 sind also durch Vorgabe von $m_1 : m_2$ unabhängig von der Wahl von P eindeutig bestimmt. Daher ist für jede Wahl von P der THALES-Kreis über $W_3 V_3$ derselbe. Jeder Punkt der gesuchten Menge muß also auf diesem Kreis liegen.

Für den Radius R_3 des APOLLONischen Kreises gilt

$$2R_3 = W_3 V_3 = A_1 V_3 - A_1 W_3 = a'_{23} - a_{23} = \frac{a_2 a_3}{a_2 - a_1} - \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_1}$$

$$= \frac{2a_1 a_2 a_3}{a_2^2 - a_1^2}$$

$R_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{ a_2^2 - a_1^2 } = \lambda_3 \frac{a_3}{ \lambda_3^2 - 1 }, \quad \lambda_3 = \frac{a_2}{a_1}$	Radius des APOLLONischen Kreises u. zykl.
--	---

Ferner gilt

$$A_1 M_3 = A_1 W_3 + R_3 = a_{23} + R_3 = \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_1} + \frac{a_1 a_2 a_3}{a_2^2 - a_1^2} = \frac{a_2^2 a_3}{a_2^2 - a_1^2}$$

$$A_2 M_3 = A_1 M_3 - a_3 = \frac{a_2^2 a_3}{a_2^2 - a_1^2} - a_3 = \frac{a_1^2 a_3}{a_2^2 - a_1^2}$$

$T(A_1 A_2 M_3) = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \lambda_3^2$	Teilverhältnis des Mittelpunktes des APOLLONischen Kreises u. zykl.
--	---

In einem Dreieck sei $a_1 < a_2 < a_3$. Dann gilt für die APOLLONischen Radien

$$R_1 = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_3^2 - a_2^2}, \quad R_2 = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_3^2 - a_1^2}, \quad R_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_2^2 - a_1^2}$$

Daher

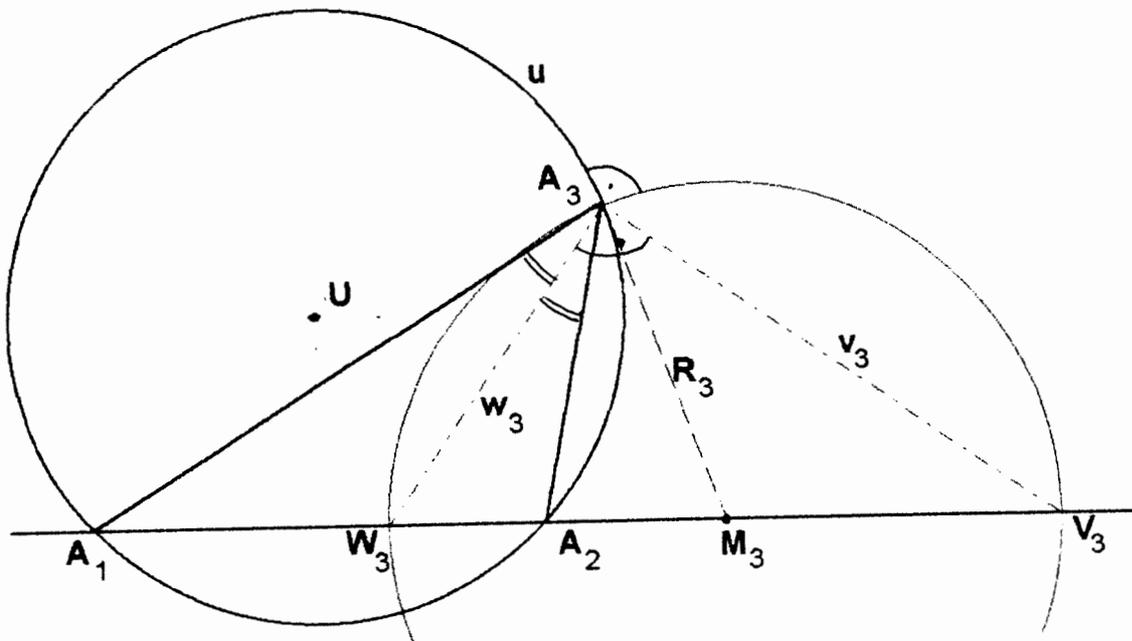
$$a_3^2 - a_2^2 = \frac{a_1 a_2 a_3}{R_1}, \quad a_3^2 - a_1^2 = \frac{a_1 a_2 a_3}{R_2}, \quad a_2^2 - a_1^2 = \frac{a_1 a_2 a_3}{R_3}$$

daraus wegen $a_3^2 - a_1^2 = (a_3^2 - a_2^2) + (a_2^2 - a_1^2)$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \quad a_1 < a_2 < a_3$$

Beziehung zwischen den APOLLONischen Radien eines Dreiecks

Jeder APOLLONische Kreis schneidet den Umkreis des Dreiecks $\Delta A_1 A_2 A_3$ orthogonal



Wir berechnen die Potenz von M_3 bezüglich des Umkreises u

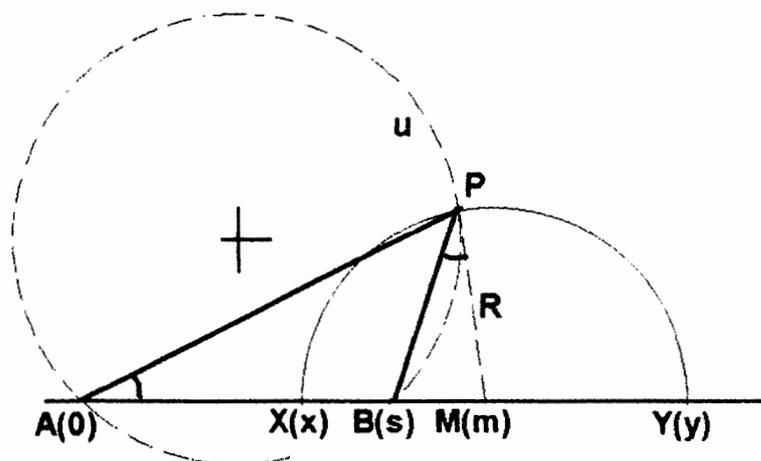
$$\Pi(u, M_3) = M_3 A_1 \cdot M_3 A_2 = \frac{a_2^2 a_3}{a_2^2 - a_1^2} \cdot \frac{a_1^2 a_3}{a_2^2 - a_1^2} = \frac{a_1^2 a_2^2 a_3}{(a_2^2 - a_1^2)^2} = R_3^2$$

Der Radius R_3 ist also gleich der Tangentenstrecke aus M_3 an u .

Nunmehr können wir die Umkehrung des Satzes von Seite 47 zeigen:

Jeder Punkt eines APOLLONischen Kreises hat von den entsprechenden Dreieckspunkten konstante Abstandverhältnisse. Zum Nachweis wählen wir die Punkte A und B und teilen die von ihnen gebildete Strecke durch die Punkte X und Y harmonisch

Dann gilt



$$T(ABX) = -\frac{AX}{BX} = -\frac{x}{s-x}, \quad T(ABY) = \frac{AY}{BY} = \frac{y}{y-s}$$

Definitionsgemäß gilt bei harmonischer Lage

$$T(ABX) = -T(ABY) \Rightarrow -\frac{x}{s-x} = -\frac{y}{y-s} \Rightarrow y = \frac{sx}{2x-s}$$

Für die Koordinate m des Mittelpunktes M der Strecke XY findet man

$$m = \frac{x+y}{2} = \frac{x^2}{2x-s}$$

und die Länge R der Strecke $MX = MY$ beträgt

$$R = m-x = \frac{x(s-x)}{(2x-s)}$$

Wir errichten über der Strecke XY als Durchmesser den Kreis k und wählen auf ihm einen beliebigen Punkt P . Sei u des Umkreis des Dreiecks ΔABP . Dann hat der Punkt M bezüglich u die Potenz

$$\Pi(u, M) = MA \cdot MB = m \cdot (m-s) = \frac{x^2}{2x-s} \left(\frac{x^2}{2x-s} - s \right) = \frac{x^2(s-x)^2}{(2x-s)^2} = R^2$$

Die Tangentenstrecke aus M an u hat also die Länge R . Der Umkreis u wird demnach von k orthogonal geschnitten. Nach dem Sehnen-Tangentensatz gilt: $\angle PAM = \angle BPM$. Daher sind die Dreiecke $\Delta AMP \sim \Delta PMB$ ähnlich. Demnach gilt

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PM}{BM} = \frac{R}{m-s} = \frac{x(s-x)}{(2x-s)} \cdot \frac{(2x-s)^2}{x^2(s-x)^2} = \frac{2x-s}{x(s-x)} = \text{const.}$$

**Gegenseitige Lage der drei APOLLONischen Kreise eines Dreiecks
Isodynamische Punkte. Gerade von LEMOINE**

TAFEL 4

Wir betrachten zunächst die beiden APOLLONischen Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_3 . Sie schneiden einander in den Punkten P und Q. Nach der Definition des APOLLONischen Kreises gilt

$$\left. \begin{aligned} \frac{PA_1}{PA_2} &= \frac{a_2}{a_1} \\ \frac{PA_2}{PA_3} &= \frac{a_3}{a_2} \end{aligned} \right\} \times \Rightarrow \frac{PA_1}{PA_3} = \frac{a_3}{a_1} \Rightarrow \text{Auch der dritte APOLLONische Kreis geht durch P und Q}$$

Die drei APOLLONischen Kreise eines Dreiecks haben zwei Punkte gemeinsam (isodynamische Punkte¹)

Da alle Kreise durch zwei Punkte ihre Mittelpunkte auf der Streckensymmetralen der beiden Punkte haben, gilt

Die Mittelpunkte der drei APOLLONischen Kreise eines Dreiecks liegen auf einer Geraden, der Geraden von LEMOINE

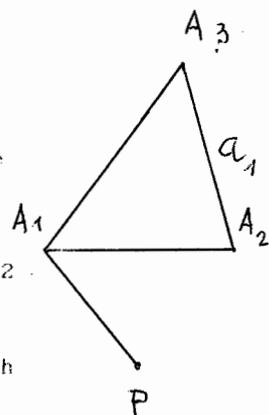
Émile LEMOINE (1840–1912) 1882

Die Fußpunktdreiecke der Punkte eines APOLLONischen Kreises sind gleichschenkelig.
Speziell:
Die Fußpunktdreiecke der beiden isodynamischen Punkte sind gleichseitig

Nach Seite 41 gilt nämlich für die Seitenlängen des Fußpunktdreiecks eines Punktes X

$$\begin{aligned} f_1 &= XA_1 \cdot \sin \alpha_1 \\ f_2 &= XA_2 \cdot \sin \alpha_2 \\ f_3 &= XA_3 \cdot \sin \alpha_3 \end{aligned}$$

¹Erklärung der Bezeichnung "isodynamisch": Gegeben sei das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ und ein Punkt P. Man nennt das Produkt $PA_1 \cdot A_2 A_3 = PA_1 \cdot a_1$ die Potenz (Dynamis) von P bezüglich des Dreieckseckpunktes A_1 . Die Menge aller Punkte gleicher Potenz bezüglich der Eckpunkte A_1 und A_2 ist der APOLLONische Kreis durch A_3 , denn es ist $PA_1 \cdot a_1 = PA_2 \cdot a_2 \Rightarrow \frac{PA_1}{PA_2} = \frac{a_2}{a_1}$. Die oben konstruierten Punkte P und Q haben bezüglich aller Dreiecksecken dieselbe Potenz.



Da alle APOLLONischen Kreise den Umkreis des Dreiecks orthogonal schneiden, sind die beiden isodynamischen Punkte bezüglich des Umkreises invers (Seite 16)

Wählen wir X auf dem APOLLONischen Kreis durch A_3 , so folgt mit Hilfe des Sinussatzes

$$\frac{XA_1}{XA_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{XA_1}{XA_2} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = 1 \Rightarrow \underline{f_1 = f_2}$$

Ist $X = P$ ein isodynamischer Punkt, so folgt $f_1 = f_2 = f_3$

Zusammenhänge zwischen In- und Umkreis sowie den Ankreisen

TAFEL 5

Es seien J_i die Berührungspunkte des Inkreises mit den Dreiecksseiten a_i und J_{ki} die Berührungspunkte des k-ten Ankreises mit den Dreiecksseiten a_i . Dann gelten folgende Beziehungen

Für den Inkreis:

$$A_1J_2 = A_1J_3 = x \text{ (Tangentenstrecken aus } A_1 \text{ an den Inkreis)}$$

$$A_2J_3 = A_2J_1 = a_3 - x$$

$$A_3J_1 = A_3J_2 = a_2 - x = a_1 - (a_3 - x)$$

Aus der letzten Beziehung folgt $2x = a_2 - a_1 + a_3$. Daher gilt

$$2s = a_1 + a_2 + a_3$$

$$A_1J_2 = A_1J_3 = s - a_1$$

$$A_2J_3 = A_2J_1 = s - a_2$$

$$A_3J_1 = A_3J_2 = s - a_3$$

(1)

Für die Ankreise:

$$A_1J_{12} = A_1J_{13}, A_1J_{22} = A_1J_{23}, A_1J_{32} = A_1J_{33}$$

$$A_2J_{23} = A_2J_{21}, A_2J_{33} = A_2J_{31}, A_2J_{13} = A_2J_{11}$$

$$A_3J_{31} = A_3J_{32}, A_3J_{11} = A_3J_{12}, A_3J_{21} = A_3J_{22}$$

Ferner gilt

$$A_1J_{12} = a_2 + A_3J_{12} = a_2 + A_3J_{11} = a_2 + (a_1 - A_2J_{11}) = a_1 + a_2 - A_2J_{13} =$$

$$= a_1 + a_2 - (A_1J_{13} - a_3) = a_1 + a_2 + a_3 - A_1J_{12} \Rightarrow 2A_1J_{12} = a_1 + a_2 + a_3 = 2s$$

$$A_1J_{12} = A_1J_{13} = s$$

$$A_2J_{23} = A_2J_{21} = s$$

$$A_3J_{31} = A_3J_{32} = s$$

(2)

$$A_1 J_{22} = A_1 J_{23} = A_3 J_{32}^{-a_3} = s - a_3$$

$\begin{aligned} A_1 J_{22} &= A_1 J_{23} = s - a_3 \\ A_2 J_{33} &= A_2 J_{31} = s - a_1 \\ A_3 J_{11} &= A_3 J_{12} = s - a_2 \end{aligned}$	(3)
--	-----

$$A_1 J_{32} = A_3 J_{32}^{-a_2} = s - a_2$$

$\begin{aligned} A_1 J_{32} &= A_1 J_{33} = s - a_2 \\ A_2 J_{13} &= A_2 J_{11} = s - a_3 \\ A_3 J_{21} &= A_3 J_{22} = s - a_1 \end{aligned}$	(4)
--	-----

$\begin{aligned} s - a_1 &= A_1 J_2 = A_1 J_3 = A_2 J_{31} = A_2 J_{33} = A_3 J_{21} = A_3 J_{22} \\ s - a_2 &= A_2 J_3 = A_2 J_1 = A_3 J_{12} = A_3 J_{11} = A_1 J_{32} = A_1 J_{33} \\ s - a_3 &= A_3 J_1 = A_3 J_2 = A_1 J_{23} = A_1 J_{22} = A_2 J_{13} = A_2 J_{11} \end{aligned}$	(5)
--	-----

Beziehungen zum Flächeninhalt

$$F := F(A_1 A_2 A_3) = F(A_1 A_2 I) + F(A_2 A_3 I) + F(A_3 A_1 I)$$

$$2F = a_3 \rho + a_1 \rho + a_2 \rho = (a_1 + a_2 + a_3) \rho = 2s \rho$$

$F = \rho s$	(6)
--------------	-----

Mit Hilfe der Ankreismittelpunkte ergibt sich

$$F = F(A_1 A_2 I_1) + F(A_3 A_1 I_1) - F(A_3 A_2 I_1)$$

$$2F = a_3 \rho_1 + a_2 \rho_1 - a_1 \rho_1 = (a_3 + a_2 - a_1) \rho_1 = (2s - 2a_1) \rho_1 \Rightarrow F = (s - a_1) \rho_1$$

$F = (s - a_1) \rho_1 = (s - a_2) \rho_2 = (s - a_3) \rho_3$	(7)
--	-----

Für die halben Dreieckswinkel gilt

	I	II	III	IV	V
A	$\tan \frac{\alpha_1}{2}$	$\frac{\rho}{s - a_1}$	$\frac{\rho_1}{s}$	$\frac{s - a_3}{\rho_2}$	$\frac{s - a_2}{\rho_3}$
B	$\tan \frac{\alpha_2}{2}$	$\frac{\rho}{s - a_2}$	$\frac{\rho_2}{s}$	$\frac{s - a_1}{\rho_3}$	$\frac{s - a_3}{\rho_1}$
C	$\tan \frac{\alpha_3}{2}$	$\frac{\rho}{s - a_3}$	$\frac{\rho_3}{s}$	$\frac{s - a_2}{\rho_1}$	$\frac{s - a_1}{\rho_2}$

Die in den Zeilen A,B,C stehenden Ausdrücke sind zeilenweise gleich

$$AI = AII \quad \dots \quad \tan \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\rho}{A_1 J_3} \stackrel{(1)}{=} \frac{\rho}{s-a_1} \quad \text{u. zykl.}$$

$$AI = AIII \quad \dots \quad \tan \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\rho_1}{A_1 J_{13}} \stackrel{(2)}{=} \frac{\rho_1}{s} \quad \text{u. zykl.}$$

$$AI = AIV \quad \dots \quad \tan \frac{\alpha_1}{2} = \frac{A_1 J_{23}}{\rho_2} \stackrel{(4)}{=} \frac{s-a_3}{2} \quad \text{u. zykl.}$$

$$AI = AV \quad \dots \quad \tan \frac{\alpha_1}{2} = \frac{A_1 J_{33}}{\rho_3} \stackrel{(3)}{=} \frac{s-a_2}{\rho_3} \quad \text{u. zykl.}$$

Anwendungen der Tabelle

$$\left. \begin{aligned} AII = AIII \quad \dots \quad \frac{\rho}{s-a_1} &= \frac{\rho_1}{s} \Rightarrow \rho s = \rho_1 (s-a_1) \\ BII = BV \quad \dots \quad \frac{\rho}{s-a_2} &= \frac{s-a_3}{\rho_1} \Rightarrow \rho \rho_1 = (s-a_2)(s-a_3) \end{aligned} \right\} \text{mult.} \quad (*)$$

$$\rho^2 \rho_1 s = \rho_1 (s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)}{s}}$$

Inkreisradius
ausgedrückt durch
die Seiten (9)

Wegen (6) folgt aus (9)

$$F = \sqrt{s(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)}$$

Flächenformel von
HERON (10)

Vertauscht man in der ersten Zeile von (*) die Seiten der Gleichung und bildet wieder das Produkt beider Zeilen, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 (s-a_1) &= \rho s \\ \rho \rho_1 &= (s-a_2)(s-a_3) \end{aligned} \right\} \text{mult.}$$

$$\rho_1^2 \rho (s-a_1) = \rho s (s-a_2)(s-a_3)$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{s(s-a_2)(s-a_3)}{(s-a_1)}}$$

Ankreisradien ausgedrückt
durch die Seiten
u. zykl. (11)

$$\left. \begin{aligned} AI = AII \quad \dots \quad \tan \frac{\alpha_1}{2} &= \frac{\rho}{s-a_1} \\ AI = AIII \quad \dots \quad \tan \frac{\alpha_1}{2} &= \frac{\rho_1}{s} \\ BII = BV \quad \dots \quad \rho \rho_1 &= (s-a_2)(s-a_3) \end{aligned} \right\} \text{mult.}$$

$$\boxed{\tan^2\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{(s-a_2)(s-a_3)}{s(s-a_1)}} \quad \begin{array}{l} \text{Halber Winkel ausgedrückt} \\ \text{durch die Seiten} \\ \text{u. zykl.} \end{array} \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{AII} = \text{AV} \quad \dots \quad \rho\rho_3 = (s-a_1)(s-a_2) \\ \text{AIII} = \text{AIV} \quad \dots \quad \rho_1\rho_2 = s(s-a_3) \end{array} \right\} \text{mult.}$$

$$\hline \rho\rho_1\rho_2\rho_3 = s(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3) \quad (\underline{10}) \quad F^2$$

$$\boxed{F = \sqrt{\rho\rho_1\rho_2\rho_3}} \quad (13)$$

Aus (7) folgt

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{s-a_1}{F}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{s-a_2}{F}, \quad \frac{1}{\rho_3} = \frac{s-a_3}{F} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} = \frac{(s-a_1)+(s-a_2)+(s-a_3)}{F} = \frac{3s-2s}{F} = \frac{s}{F} \quad (\underline{6}) \quad \frac{1}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}} \quad (14)$$

Aus (6) und (7) folgt

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - \rho \stackrel{(\underline{6})(7)}{=} \frac{F}{s-a_1} + \frac{F}{s-a_2} + \frac{F}{s-a_3} - \frac{F}{s} =$$

$$= F \frac{s[(s-a_2)(s-a_3)+(s-a_1)(s-a_3)+(s-a_1)(s-a_2)] - (s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)}{\underbrace{s(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)}_{F^2}} =$$

$$= \frac{1}{F} \{s[3s^2 - s \underbrace{(a_1+a_2+a_3+a_1+a_2+a_3)}_{4s} + (a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)] -$$

$$\quad - [s^3 - s^2(a_1+a_2+a_3) + s(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3) - a_1a_2a_3]\} =$$

$$= \frac{1}{F} \{s[3s^2 - 4s^2 + (a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)] - [s^3 - 2s^3 + s(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3) - a_1a_2a_3]\} =$$

$$= \frac{1}{F} \{a_1a_2a_3\} = 4r \quad (\text{Seite 32})$$

$$\boxed{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - \rho = 4r} \quad (15)$$

DER PUNKT VON GERGONNE

Joseph Diaz GERGONNE (1771-1859)

TAFEL 5

Der Berührungspunkt J_3 des Inkreises auf A_1A_2 teilt die Dreiecksseite a_1 im Verhältnis

$$\left. \begin{aligned} T(A_1A_2J_3) &= - \frac{A_1J_3}{A_2J_3} \binom{1}{\underline{1}} - \frac{s-a_1}{s-a_2} \\ T(A_2A_3J_1) &= - \frac{A_2J_1}{A_3J_1} \binom{1}{\underline{1}} - \frac{s-a_2}{s-a_3} \\ T(A_3A_1J_2) &= - \frac{A_3J_2}{A_1J_2} \binom{1}{\underline{1}} - \frac{s-a_3}{s-a_1} \end{aligned} \right\} \text{mult.}$$

$$T(A_1A_2J_3)T(A_2A_3J_1)T(A_3A_1J_2) = -1$$

Daher gilt nach CEVA

Die Transversalen A_iJ_i schneiden einander im Punkt von GERGONNE

$$G = A_1J_1 \cap A_2J_2 \cap A_3J_3$$

Betrachten wir das Dreieck $\Delta A_1J_1A_3$. Es wird von der Transversalen J_2GA_2 geschnitten. Dann gilt nach MENELAOS

$$\begin{aligned} T(A_1J_1G)T(J_1A_3A_2)T(A_3A_1J_2) &= 1 \Rightarrow T(A_1J_1G) \cdot \frac{J_1A_2}{A_3A_2} \cdot \left(-\frac{A_3J_2}{A_1J_2}\right) \binom{1}{\underline{1}} \\ &= T(A_1J_1G) \cdot \frac{s-a_2}{a_1} \cdot \left(-\frac{s-a_3}{s-a_1}\right) = 1, \text{ daher gilt zyklisch} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(A_1J_1G) &= - \frac{a_1(s-a_1)}{(s-a_2)(s-a_3)} \\ T(A_2J_2G) &= - \frac{a_2(s-a_2)}{(s-a_3)(s-a_1)} \\ T(A_3J_2G) &= - \frac{a_3(s-a_3)}{(s-a_1)(s-a_2)} \end{aligned}$$

Produktbildung ergibt

$$T(A_1J_1G)T(A_2J_2G)T(A_3J_3G) = - \frac{a_1a_2a_3}{(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)} \cdot \frac{s}{s} = - \frac{4Fr}{F^2} \cdot s =$$

$$= -\frac{4r}{F/s} = -\frac{4r}{\rho} \text{ also}$$

$$T(A_1 J_1 G) T(A_2 J_2 G) T(A_3 J_3 G) = -\frac{4r}{\rho}$$

Ähnliche Überlegungen gelten auch für die Berührungspunkte mit den Ankreisen. Man bezeichnet jene Punkte, die sich als Schnitte je dreier Ankreistransversalen ergeben und welche im Winkelfeld eines Dreieckswinkels liegen, gleichfalls als GERGONNESche Punkte

G_1, G_2, G_3 :

$$G_i = A_i J_{ii} \cap A_j J_{ij} \cap A_k J_{ik} \quad (ijk) = (123)$$

DER PUNKT VON NAGEL

Christian Heinrich NAGEL (1803-1882) 1836

TAFEL 5

Der Berührungspunkt J_{33} des dritten Ankreises teilt $A_1 A_2$ im Verhältnis

$$\left. \begin{aligned} T(A_1 A_2 J_{33}) &= -\frac{A_1 J_{33}}{A_2 J_{33}} \quad (3)(4) - \frac{s-a_2}{s-a_1} \\ T(A_2 A_3 J_{11}) &= -\frac{A_2 J_{11}}{A_3 J_{11}} \quad (3)(4) - \frac{s-a_3}{s-a_2} \\ T(A_3 A_1 J_{22}) &= -\frac{A_3 J_{22}}{A_1 J_{22}} \quad (3)(4) - \frac{s-a_1}{s-a_3} \end{aligned} \right\} \text{mult.}$$

$$T(A_1 A_2 J_{33}) T(A_2 A_3 J_{11}) T(A_3 A_1 J_{22}) = -1$$

Daher gilt nach CEVA

Die Transversalen $A_i J_{ii}$ schneiden einander im Punkt von NAGEL

$$N = A_1 J_{11} \cap A_2 J_{22} \cap A_3 J_{33}$$

Schneidet man das Dreieck $\Delta A_1 A_2 J_{22}$ mit der Transversalen $A_3 N J_{33}$, so gilt nach MENELAOS

$$T(A_1 A_2 J_{33}) T(A_2 J_{22} N) T(J_{22} A_1 A_3) = 1 \Rightarrow T(A_2 J_{22} N) \cdot \left(-\frac{A_1 J_{33}}{A_2 J_{33}} \right) \cdot \frac{J_{22} A_3}{A_1 A_3} =$$

$$= T(A_2 J_{22} N) \cdot \left(-\frac{s-a_2}{s-a_1} \right) \cdot \frac{s-a_1}{a_2} = 1, \text{ also analog zu Seite 56}$$

$$\left. \begin{aligned} T(A_2 J_{22} N) &= -\frac{a_2}{s-a_2} \\ T(A_3 J_{33} N) &= -\frac{a_3}{s-a_3} \\ T(A_1 J_{11} N) &= -\frac{a_1}{s-a_1} \end{aligned} \right\} \text{ mult.}$$

$$\boxed{T(A_1 J_{11} N) T(A_2 J_{22} N) T(A_3 J_{33} N) = -\frac{4r}{\rho}}$$

Ähnliche Überlegungen gelten auch für die restlichen Berührungspunkte mit den Ankreisen. Man bezeichnet jene Punkte, die sich als Schnitte je zweier Ankreistransversalen mit einer Inkreistransversalen ergeben und welche im Winkelfeld eines Scheitelwinkels eines Dreieckswinkels liegen, gleichfalls als NAGELsche Punkte N_1, N_2, N_3 :

$$\boxed{N_i = A_i J_i \cap A_j J_k \cap A_k J_j \quad (ijk) = (123)}$$

Wegen der Beziehungen

$$\begin{aligned} A_1 J_{33} &\stackrel{(3)}{=} s-a_2 \stackrel{(1)}{=} A_2 J_3 \\ A_2 J_{11} &\stackrel{(3)}{=} s-a_3 \stackrel{(1)}{=} A_3 J_1 \\ A_3 J_{22} &\stackrel{(3)}{=} s-a_1 \stackrel{(1)}{=} A_1 J_2 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\boxed{N \text{ und } G \text{ entsprechen einander in der isotomen Abbildung } \tau(N) = G, \tau(G) = N}$$

Zusammenhang von I und N

$$\boxed{\text{TAFEL 6}}$$

Wir konstruieren den Inkreis und den 2. Ankreis und bestimmen I, N, S . Diese beiden Kreise sind ähnlich mit dem Ähnlichkeitszentrum A_2 . Der Radius $I_2 J_{22}$ des Ankreises geht durch diese Ähnlichkeit über in ei-

nen parallelen Radius IK_2 des Inkreises. J_{22} und K_2 liegen auf demselben Ähnlichkeitsstrahl. Ferner gilt $J_2K_2 \perp A_1A_3$.

Wegen $A_3J_2 \stackrel{(S)}{\cong} A_1J_{22}$ ist S_2 Mittelpunkt der Strecke J_2J_{22} . Daher ist im $\Delta J_{22}K_2J_2$ die Strecke IS_2 die Verbindung zweier Seitenmitten woraus folgt

$$IS_2 \parallel J_{22}K_2 \parallel NA_2 \parallel J_{22}A_2$$

und zyklisch

$$IS_3 \parallel J_{33}K_3 \parallel NA_3 \parallel J_{33}A_3$$

In den Dreiecken ΔIS_2S_3 und ΔNA_2A_3 sind demnach die Seiten IS_2 und NA_2 bzw. die Seiten IS_3 und NA_3 parallel. Als Mittelline im $\Delta A_1A_2A_3$ ist auch S_2S_3 zu A_2A_3 parallel. Wegen der Parallelität aller drei Seiten folgt daher

$$\Delta IS_2S_3 \text{ zentratisch \u00e4hnlich zu } \Delta NA_2A_3$$

mit dem \u00c4hnlichkeitszentrum S . I und N entsprechen daher einander.

Wegen $\sigma(A_3) = S_3$, $\sigma(A_2) = S_2$ folgt $\sigma(N) = I$

$$\sigma(N) = I, \sigma^{-1}(I) = N, NS = 2 \cdot IS$$

Der Inkreismittelpunkt ist *komplement\u00e4r* zum NAGELschen Punkt, N ist *antikomplement\u00e4r* zu I .

Ferner gilt wegen $N = \tau(G)$

$$\sigma(\tau(G)) = (\sigma \circ \tau)(G) = I$$

Es ist

$$\sigma(\Delta A_1A_2A_3) = \Delta S_1S_2S_3$$

$$\sigma(N) = I \equiv \text{NAGELscher Punkt von } \Delta S_1S_2S_3$$

Da durch eine \u00c4hnlichkeit der NAGELsche Punkt eines Dreiecks in den NAGELschen Punkt des entsprechenden Dreiecks \u00fcbergeht, gilt

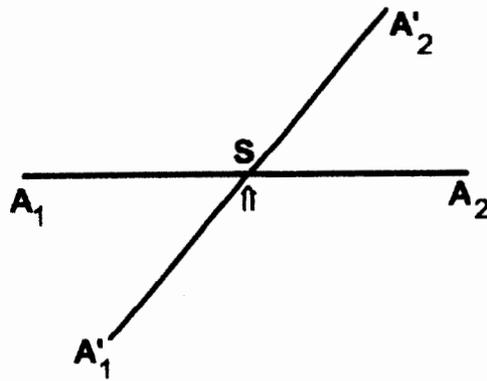
Der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks ist der NAGELsche Punkt seines Mittendreiecks

Umgekehrt:

Der NAGELsche Punkt eines Dreiecks ist der Inkreismittelpunkt seines Au\u00dfendreiecks

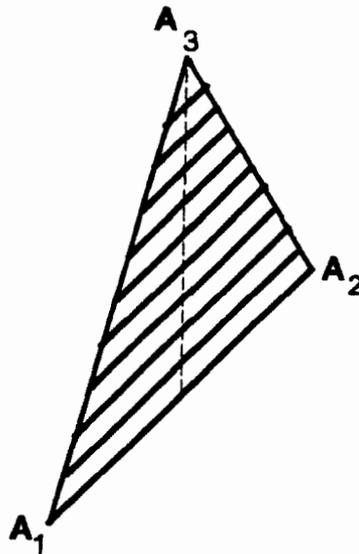
Zum Begriff des Schwerpunktes

Schwerpunkt eines homogenen Stabes.



Unterstützt man einen homogenen Stab genau in der Mitte, so bleibt er in jeder Lage im Gleichgewicht. Sein Mittelpunkt ist sein Schwerpunkt S . Im Sinne der Statik kann der Stab durch seine im Schwerpunkt angebrachte Masse ersetzt werden.

Schwerlinie und Schwerpunkt einer homogenen Dreiecksfläche.



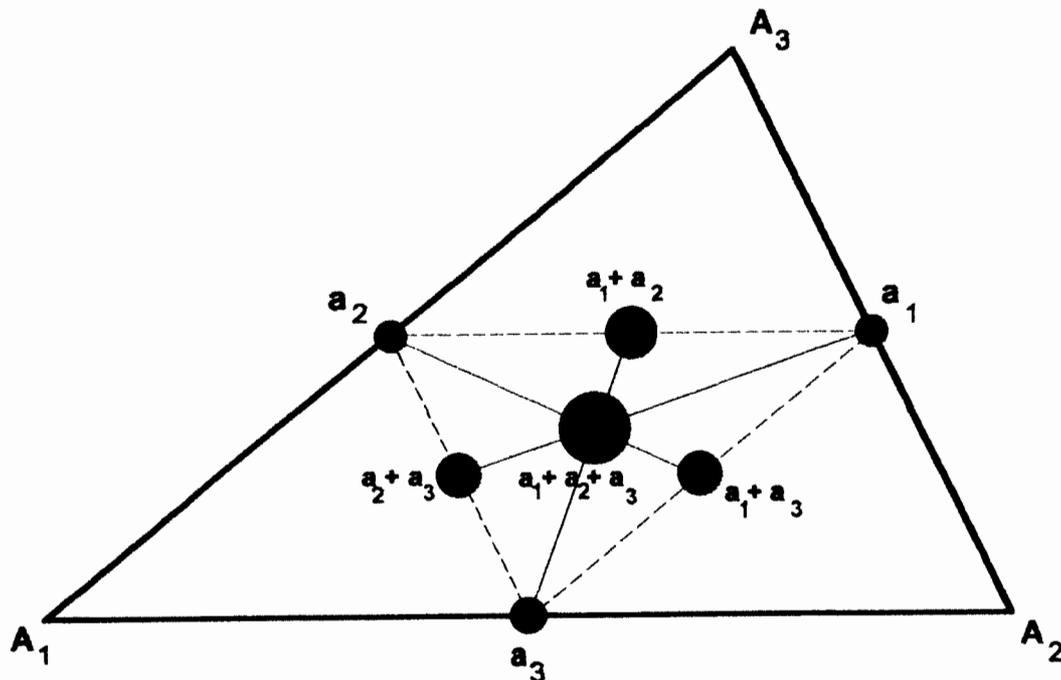
Man denke sich die Dreiecksfläche in Streifen parallel zu einer Dreiecksseite zerlegt. Jeder dieser Streifen hat dann seinen Schwerpunkt im Mittelpunkt. Alle Schwerpunkte dieser Streifen liegen auf einer Geraden, der Schwerlinie. Denkt man sich das Dreieck an einem Eckpunkt A_3 aufgehängt, so bleibt das Dreieck in Ruhe, wenn die Schwerlinie die Richtung des Schwerelotes hat. Der Schnittpunkt aller drei Schwerlinien ist der Schwerpunkt S des Dreiecks. Unterstützt man die homogene Dreiecksfläche in

diesem Punkt, so bleibt sie in jeder Lage im Gleichgewicht.

Statisch kann das Dreieck durch seine im Schwerpunkt angebrachte Masse ersetzt werden.

Bringt man in den Ecken eines Dreiecke drei gleiche Massen an, so können diese gleichermaßen durch eine im Schwerpunkt angebrachte Gesamtmasse ersetzt werden.

Der Umfangsschwerpunkt eines Dreiecks



Ist der Umfang eines Dreiecks homogen mit Masse belegt, so kann man jede Seite durch ihre in der Seitenmitte angebrachte Masse a_i ersetzen. Es ist der Schwerpunkt der i.a. voneinander verschiedenen Massen a_1, a_2, a_3 zu suchen. Je zwei dieser Massen lassen sich wieder durch eine Masse der Größe a_i+a_j ersetzen, welche im Schwerpunkt dieser beiden Einzelmassen anzubringen ist. Nach dem Hebelgesetz von ARCHIMEDES teilt dieser Schwerpunkt die Verbindungsstrecke im umgekehrten Verhältnis der Größen dieser Massen. Er liegt daher auf der Winkelhalbierenden durch a_k .

Der Umfangsschwerpunkt eines Dreiecks liegt im Inkreismitelpunkt seines Mittendreiecks

DAS HÖHENFUßPUNKTEDREIECK (ORTHOZENTRISCHES DREIECK)

TAFEL 7

Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $\Delta H_1 A_1 A_2$ und $\Delta H_3 A_3 A_2$ folgen die Winkelgleichheiten (zykl.):

$$\begin{aligned} \angle H_1 A_1 A_2 &= \angle H_3 A_3 A_2 \\ \angle H_2 A_2 A_3 &= \angle H_1 A_1 A_3 \\ \angle H_3 A_3 A_1 &= \angle H_2 A_2 A_1 \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} A_1 H_2 &= a_3 \cdot \cos \alpha_1, & A_1 H_3 &= a_2 \cdot \cos \alpha_1 \\ A_2 H_3 &= a_1 \cdot \cos \alpha_2, & A_2 H_1 &= a_3 \cdot \cos \alpha_2 \\ A_3 H_1 &= a_2 \cdot \cos \alpha_3, & A_3 H_2 &= a_1 \cdot \cos \alpha_3 \end{aligned} \quad (*)$$

Aus (*) folgt

$$\frac{A_1 H_2}{A_1 H_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{A_1 A_2}{A_1 A_3}$$

Daher stimmen die Dreiecke $\Delta A_1 A_2 A_3$ und $\Delta A_1 H_2 H_3$ im Winkel α_1 überein und die anliegenden Seiten haben dasselbe Verhältnis. Die Dreiecke sind daher *ungleichsinnig ähnlich*. Es gilt zyklisch:

$$\begin{aligned} \Delta A_1 A_2 A_3 &\approx \Delta A_1 H_2 H_3 \Rightarrow \alpha_2 = \angle H_2, \alpha_3 = \angle H_3 \\ \Delta A_2 A_3 A_1 &\approx \Delta A_2 H_3 H_1 \Rightarrow \alpha_3 = \angle H_3, \alpha_1 = \angle H_1 \\ \Delta A_3 A_1 A_2 &\approx \Delta A_3 H_1 H_2 \Rightarrow \alpha_1 = \angle H_1, \alpha_2 = \angle H_2 \end{aligned}$$

Alle Dreiecke $\Delta A_k H_1 H_m$ mit $(klm) = (123)$ sind untereinander *gleichsinnig ähnlich*. Gemäß (*) sind die Ähnlichkeitsfaktoren dieser Dreiecke der Reihe nach $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$. Daher gilt

Seitenlängen des orthozentrischen Dreiecks

$$\begin{aligned} H_2 H_3 &= a_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ H_3 H_1 &= a_2 \cdot \cos \alpha_2 \\ H_1 H_2 &= a_3 \cdot \cos \alpha_3 \end{aligned}$$

Spitzwinkliger Fall

Stumpfwinkliger Fall

Winkel des orthozentrischen Dreiecks

$\angle H_2 H_1 H_3 = 180 - 2\alpha_1$	$\angle H_2 H_1 H_3 = 2\alpha_1$
$\angle H_3 H_2 H_1 = 180 - 2\alpha_2$	$\angle H_3 H_2 H_1 = 2\alpha_2 - 180$
$\angle H_1 H_3 H_2 = 180 - 2\alpha_3$	$\angle H_1 H_3 H_2 = 2\alpha_3$

Spitzwinkliger Fall

Im zweifachen THALESkreis über A_1H gilt für den Peripheriewinkel über dem Bogen HH_3

$$\angle H_3A_1H = \angle H_3H_2H$$

Ebenso gilt im THALESkreis über A_3H für den Peripheriewinkel über HH_1

$$\angle H_1A_3H = \angle H_1H_2H$$

Die Höhen bzw. Seiten eines *spitzwinkligen* Dreiecks sind die Winkelhalbierenden der Winkel bzw. Außenwinkel des orthozentrischen Dreiecks. Die Punkte H bzw. A_1, A_2, A_3 sind In- bzw. Ankreismittelpunkte des orthozentrischen Dreiecks.

Zusammenhang mit dem Umkreismittelpunkt U

Für den Zentriwinkel über dem Bogen A_1A_3 des Umkreises gilt

$$\angle A_1UA_3 = 2\alpha_2$$

daher

$$\angle S_2UA_3 = \alpha_2$$

Im rechtwinkligen Dreieck ΔUS_2A_3 ist

$$\angle UA_3S_2 = 90 - \alpha_2$$

Analog ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck

$\Delta H_3A_3A_2$

$$\angle H_3A_3A_2 = 90 - \alpha_2 = \angle UA_3S_2$$

Es ergibt sich daher

Stumpfwinkliger Fall

Im zweifachen THALESkreis über A_1A_2 gilt für den Peripheriewinkel über dem Bogen H_1A_2

$$\angle H_1A_1A_2 = \angle H_1H_2A_1$$

Ebenso gilt im THALESkreis über A_2A_3 für den Peripheriewinkel über A_2H_3

$$\angle A_2A_3H_3 = \angle A_2H_2H_3$$

Es gilt nebenstehender Satz, nur muß H mit dem Eckpunkt am stumpfen Winkel des Dreiecks vertauscht werden und die Schenkel des stumpfen Winkels mit den darauf normalen Seiten des orthozentrischen Dreiecks.

Für den Zentriwinkel zum Komplement des Peripheriewinkels über dem Bogen A_1A_3 gilt

$$\angle A_1UA_3 = 2(180 - \alpha_2)$$

daher

$$\angle S_2UA_3 = 180 - \alpha_2$$

Im rechtwinkligen Dreieck ΔS_2UA_3 ist

$$\angle UA_3S_2 = \alpha_2 - 90$$

Analog ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck

$\Delta H_3A_3A_2$

$$\angle H_3A_3A_2 = \alpha_2 - 90 = \angle UA_3S_2$$

Der Höhenschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt U eines Dreiecks sind isogonal verwandt

$$\omega(H) = U, \quad \omega(U) = H$$

In der Ähnlichkeit der Dreiecke $\Delta A_1A_2A_3 \approx \Delta H_1H_2A_3$ entsprechen einander die Höhen. Da die Höhe im $\Delta A_1A_2A_3$ mit A_2A_3 den Winkel

$$90 - \alpha_2$$

$$\alpha_2 - 90$$

einschließt, schließt auch die Höhe in $\Delta H_1H_2A_3$ mit der entsprechenden Seite A_3H_2 denselben Winkel ein. Diese Gerade geht aber, wie gezeigt durch den Umkreismittelpunkt U .

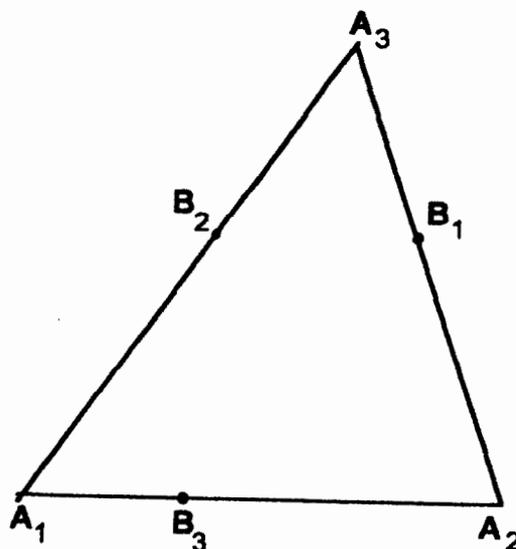
Die Eckenradien des Umkreises sind orthogonal zu den Seiten des orthozentrischen Dreiecks

Ein Blick auf die Konfiguration der Ankreismittelpunkte lehrt

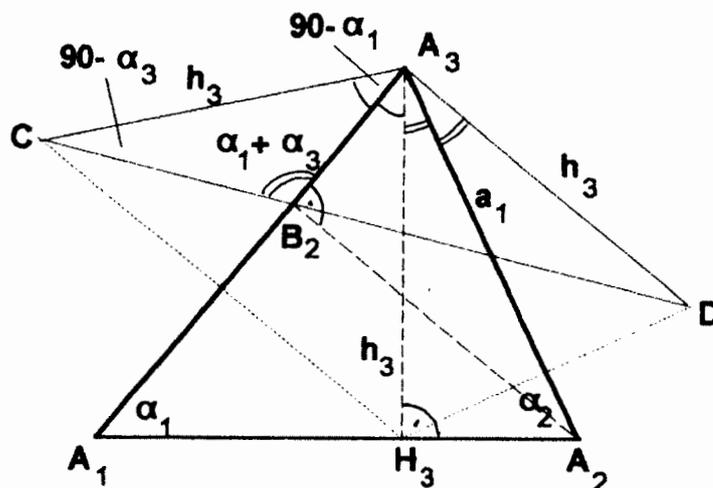
Jedes Dreieck ist das Höhenfußpunktedreieck des von seinen Ankreismittelpunkten gebildeten Dreiecks

Von allen einem *spitzwinkeligem* Dreieck eingeschriebenen Dreiecken hat das Höhenfußpunktedreieck den kleinsten Umfang

Problem von Gianfrancesco FAGNANO 1775 (Archidiakon von Sinigaglia). Die folgende Lösung wurde von Frère GABRIEL-MARIE in seinem Buch Exercices de géométrie (1. Aufl. 1875, 6. Aufl. 1920) angegeben.



Es sei $\Delta B_1 B_2 B_3$ ein beliebig eingeschriebenes Dreieck. Spiegelt man B_3 an $A_1 A_3$ bzw. $A_2 A_3$, so ergeben sich die Punkte C und D. Der Streckenzug $CB_2 + B_2 B_1 + B_1 D = B_3 B_2 + B_2 B_1 + B_1 B_3$ ist gleich dem Umfang des gegebenen Dreiecks $\Delta B_1 B_2 B_3$. Verbindet man C und D durch eine Gerade, so schneidet diese die Punkte B'_2, B'_1 aus und das Dreieck $\Delta B'_1 B'_2 B_3$ hat von allen Dreiecken mit dem festen Eckpunkt B_3 den kleinsten Umfang CD. Wie ist nun B_3 zu wählen? Im $\Delta CA_3 D$ gilt $\angle CA_3 D = 2\alpha_3$ unabhängig von der Lage von B_3 . Ferner ist $A_3 C = A_3 B_3 = A_3 D$. Alle Dreiecke $CA_3 D$ sind also gleichschenkelig mit demselben Scheitelwinkel $2\alpha_3$. Die Basis CD ist jeweils gleich dem jeweiligen Umfang. Da dieser ein Minimum sein soll, ist also das Dreieck mit der kleinsten Basis zu ermitteln. Das gesuchte gleichschenkelige Dreieck muß aber auch minimale Schenkellänge besitzen. Die kleinstmögliche Schenkellänge ist aber $A_3 C = A_3 D = A_3 B_3 = A_3 H_3$. Es existiert also ein einziges Dreieck minimalen Umfanges, dessen auf $A_1 A_2$ gelegene Ecke der Höhenfußpunkt H_3 ist. Es ist zu vermuten, daß die anderen Eckpunkte des gesuchten Dreiecks $B_2 = H_2$ und $B_3 = H_3$ sind.



Im gleichschenkeligen Dreieck $\Delta CA_3 D$ gilt

$$\angle CA_3 D = 2\alpha_3, \quad A_3 C = A_3 D = h_3 \Rightarrow \angle A_3 C D = 90 - \alpha_3$$

Ferner gilt im rechtwinkligen Dreieck $\Delta A_1 H_3 A_3$

$$\angle A_1 A_3 H_3 = 90 - \alpha_1 = \angle CA_3 B_2$$

Daher ist im $\Delta CB_2 A_3$

$$\angle CB_2 A_3 = \alpha_1 + \alpha_3 = 180 - \alpha_2$$

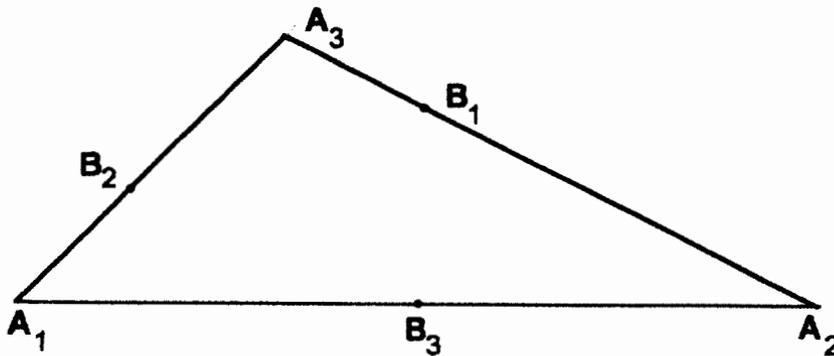
Anwendung des Sinussatzes im Dreieck $\Delta CB_2 A_3$ ergibt

$$A_3B_2 = h_3 \frac{\sin(90-\alpha_3)}{\sin(180-\alpha_2)} = h_3 \cdot \frac{\cos \alpha_3}{\sin \alpha_2}$$

wegen $h_3 = a_1 \sin \alpha_2$ folgt daher

$$A_3B_2 = a_1 \sin \alpha_2 \cdot \frac{\cos \alpha_3}{\sin \alpha_2} = a_1 \cos \alpha_3 \Rightarrow \underline{B_2 = H_2}$$

Im Falle eines *stumpfwinkligen* Dreiecks hat die Aufgabe keine Lösung.



Auch hier gilt

$$B_3B_2 + B_2B_1 + B_1B_3 = CB_2 + B_2B_1 + B_1D$$

Wählt man $B'_1B'_2$ wie im spitzwinkligen Fall, so gilt

$$B_3B'_2 + B'_2B'_1 + B'_1B_3 = CB'_2 + B'_2B'_1 + B'_1D > CD$$

Läßt man B_1 und B_2 beide nach A_3 wandern, so hat das ausgeartete Dreieck $\Delta A_3B_3A_3$ den kürzesten Umfang, denn es gilt

$$2A_3B_3 = CA_3 + A_3D < CB_2 + B_2B_1 + B_1D$$

Läßt man B_1 und B_2 über A_3 hinaus wandern, so wird der Umfang wieder größer als $2A_3B_3$.

DER SECHSPUNKTEKREIS VON TAYLOR

Henry Marten TAYLOR (1842-1927) 1882

(nicht zu verwechseln mit Brook TAYLOR 1685-1731)

TAFEL 8

Wir konstruieren zuerst das Fußpunktedreieck $\Delta H_1H_2H_3$ des Höhenschnittpunktes H , spiegeln H_3 an a_1 bzw. a_2 und erhalten so die Punkte H'_3 bzw. H''_3 . Dann liegen die Punkte $H''_3H_2H_1H'_3$ auf einer Gera-

den: es ist nämlich $\angle H_1 H_2 A_3 = \angle A_1 H_2 H_3 = \alpha_2$ (Eigenschaft des Fußpunktedreiecks) $= \angle A_1 H_2 H_3''$ (wegen der vorangegangenen Spiegelung). Dieser Sachverhalt folgt übrigens auch (Seite 64) aus dem Beweis zum Satze von FAGNANO. Dementsprechend ist die Strecke $\overbrace{H_3'' H_3'}$ der Umfang des Dreiecks $\Delta H_1 H_2 H_3$.

Nach dem Strahlensatz am Winkel $\angle H_3'' H_3 H_3'$ gilt zyklisch

$$H_{12} H_{21} \parallel H_1 H_2 \quad \text{und} \quad H_{12} H_{21} = \frac{1}{2} H_3' H_3'' = \frac{1}{2} \text{Umfang von } \Delta H_1 H_2 H_3$$

$$H_{23} H_{32} \parallel H_2 H_3 \quad \text{und} \quad H_{23} H_{32} = \frac{1}{2} \text{Umfang von } \Delta H_1 H_2 H_3$$

$$H_{31} H_{13} \parallel H_3 H_1 \quad \text{und} \quad H_{31} H_{13} = \frac{1}{2} \text{Umfang von } \Delta H_1 H_2 H_3$$

Demnach

$$H_{12} H_{21} = H_{23} H_{32} = H_{31} H_{13}$$

Nach dem Strahlensatz halbieren die Parallelen $H_{21} H_{12} \parallel H_1 H_2$ die Strecken $H_2 H_3$ bzw. $H_1 H_3$ in den Punkten X_1, X_2 .

$$\Delta X_1 X_2 X_3 \text{ ist das Mittendreieck von } \Delta H_1 H_2 H_3$$

Wegen der festgestellten Parallelitäten und den Eigenschaften des Fußpunktedreiecks treten die eingetragenen roten Winkel auf.

Ferner gilt

$$\left. \begin{aligned} A_1 H_3 = a_2 \cos \alpha_1 &\Rightarrow A_1 H_{21} = A_1 H_3 \cos \alpha_1 = a_2 \cos^2 \alpha_1 \\ A_1 H_2 = a_3 \cos \alpha_1 &\Rightarrow A_1 H_{31} = A_1 H_2 \cos \alpha_1 = a_3 \cos^2 \alpha_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_1 H_{21}}{A_1 H_{31}} = \frac{a_2}{a_3}$$

Da die Dreiecke $\Delta A_1 H_{31} H_{21}$ und das gegebene Dreieck $\Delta A_1 A_2 A_3$ im Winkel bei A_1 übereinstimmen und die anliegenden Seiten dasselbe Verhältnis aufweisen, gilt zyklisch

$$\begin{aligned} \Delta A_1 H_{31} H_{21} &\sphericalangle \Delta A_1 A_2 A_3 \\ \Delta A_2 H_{12} H_{32} &\sphericalangle \Delta A_2 A_3 A_1 \\ \Delta A_3 H_{23} H_{13} &\sphericalangle \Delta A_3 A_1 A_2 \end{aligned}$$

Daher treten an den angegebenen Stelle die blauen Winkel auf. Diese werden zusammen mit den obengenannten roten Winkeln durch die grünen Winkel auf 180° ergänzt.

Betrachten wir nun den Umkreis des Dreiecks $\Delta H_{21} H_{31} H_{32}$. Wegen

$$\angle H_{21} H_{31} H_{32} = 180 - \alpha_2$$

muß auch der Scheitel H_{23} des supplementären Winkels

$$\angle H_{21}H_{23}H_{32} = \alpha_2$$

auf diesem Kreis liegen, desgleichen der Punkt H_{12} wegen

$$\angle H_{21}H_{12}H_{32} = \alpha_2$$

und da auch die Winkel $\angle H_3 H_{32}H_{12} = 180 - \alpha_1$ und $\angle H_{31}H_{13}H_{12} = \alpha_1$ komplementär sind, liegt H_{13} auf demselben Kreis.

Die sechs Punkte H_{ij} liegen auf dem Kreis von TAYLOR

Da die Kreissehnen $H_{21}H_{12} = H_{31}H_{13} = H_{23}H_{32}$ gleich lang sind, haben sie von Mittelpunkt des TAYLORKreises gleichen Abstand.

Der Mittelpunkt M des TAYLORKreises ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\Delta X_1X_2X_3$

$\Delta H_1H_2H_3$ und $\Delta X_1X_2X_3$ als dessen Mittendreieck sind zentrisch ähnlich bezüglich des gemeinsamen Schwerpunktes S_H . Da bei dieser zentrischen Ähnlichkeit der Inkreismittelpunkt M von $\Delta X_1X_2X_3$ in den Inkreismittelpunkt H von $\Delta H_1H_2H_3$ übergeht, liegen die Punkte M, S_H und H auf einem Ähnlichkeitsstrahl und es gilt

$$HS_H = 2 \cdot S_H M$$

DER NEUNPUNKTEKREIS VON FEUERBACH

Karl Wilhelm FEUERBACH 1822 (1800-1834). Lehrte am Gymnasium von Erlangen. Der Neunpunktekreis war EULER bereits 1765 bekannt.

TAFEL 9

Wir zeichnen in $\Delta A_1A_2A_3$ die Höhenfußpunkte H_1, H_2, H_3 , ferner die Seitenmitten S_1, S_2, S_3 sowie die Halbierungspunkte L_1, L_2, L_3 der oberen Höhenabschnitte ($2HL_i = AH_i$). Dann gilt

$$\left. \begin{array}{l} \Delta A_1A_2A_3 : S_1S_2 \parallel A_1A_2, \quad A_1A_2 = 2S_1S_2 \\ \Delta A_1A_2H : L_1L_2 \parallel A_1A_2, \quad A_1A_2 = 2L_1L_2 \\ \Delta A_1HA_3 : L_1S_2 \parallel HA_3, \quad HA_3 = 2L_1S_2 \\ \Delta A_2HA_3 : L_2S_1 \parallel HA_3, \quad HA_3 = 2L_2S_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} L_1L_2 \parallel S_1S_2, \quad L_1L_2 = S_1S_2 \\ L_1S_2 \parallel L_2S_1, \quad L_1S_2 = L_2S_1 \end{array}$$

Da außerdem gilt: $A_3H_3 \perp A_1A_2 \Rightarrow L_1L_2 \perp L_1S_2 \Rightarrow L_1L_2S_1S_2$ ist eine Rechteck. Die vier Eckpunkte liegen auf demselben Kreis f mit dem Mittelpunkt F . Analog gilt zyklisch: $L_2L_3S_2S_3$ ist ein Rechteck. Da beide Rechtecke dieselbe Diagonale S_2L_2 gemeinsam haben, besitzen sie denselben Umkreis, der daher durch die Punkte S_1, S_2, S_3 sowie L_1, L_2, L_3 geht. Nach THALES liegt dann auch der Scheitel des rechten Winkels bei H_2 auf diesem Kreis über S_2L_2 .

es gilt daher

Die neun Punkte $S_1, S_2, S_3; H_1, H_2, H_3; L_1, L_2, L_3$ liegen auf dem Kreis von FEUERBACH. Der FEUERBACHkreis ist somit Umkreis aller dieser Dreiecke.

Ist U der Mittelpunkt des Umkreises, so folgt

$$\Delta S_2S_3U = \Delta L_2L_3H \quad (\text{WSW-Satz}) \Rightarrow S_2U = HL_2$$

Daher ist $\# UL_2HS_2$ ein Parallelogramm und F ist sein Diagonalschnittpunkt, demnach ist

$$HF = FU$$

Der Mittelpunkt des FEUERBACHkreises liegt auf der EULERSchen Geraden und halbiert die Strecke HU

Im Dreieck ΔUA_2H ist FL_2 Mittelparallele $\Rightarrow 2FL_2 = UA_2$

Der Radius des FEUERBACHkreises ist gleich dem halben Umkreisradius

Aus der Parallelität des Umkreisradius UA_2 und des FEUERBACH - Durchmessers S_2L_2 folgt

S und H sind die beiden Ähnlichkeitszentren des Umkreises und des FEUERBACHkreises. Der Ähnlichkeitsfaktor ist beide Male 2:1

Da F der Umkreismittelpunkt von $\Delta S_2S_2S_3$ ist, und $\sigma(\Delta A_1A_2A_3) = \Delta S_1S_2S_3$ ist, folgt

$$\sigma(U) = F$$

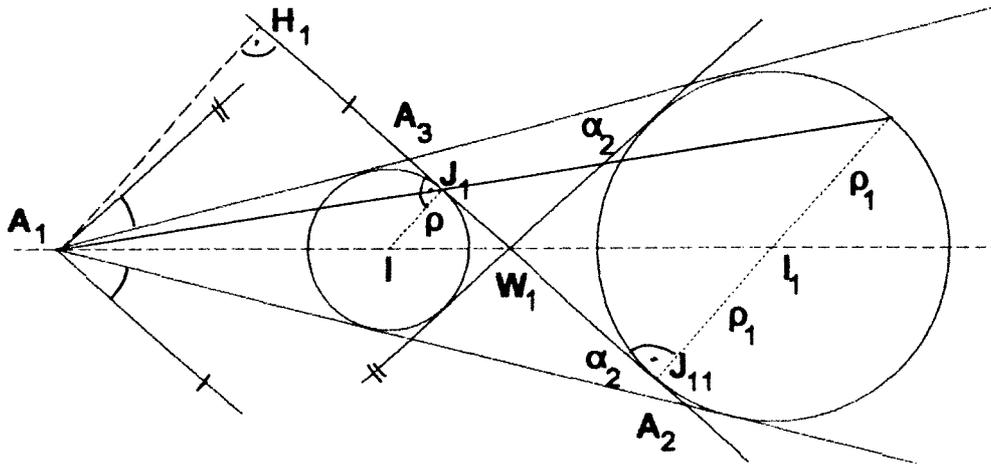
da bei einer Ähnlichkeit der Umkreismittelpunkt in den

Umkreismittelpunkt übergeht. Nach Seite 37 gilt $\sigma(H) = U$, demnach

$$\sigma^2(H) = F$$

Der Kreis von FEUEERBACH berührt den Inkreis und die drei Ankreise

Vorbemerkung: Die beiden inneren Tangente zweier Kreise liegen anti-parallel bezüglich der beiden äußeren Kreistangenten.



A_1 und W_1 sind äußerer und innerer Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Es ist

$$D(A_1 W_1 I I_1) = -1$$

Es gilt nämlich

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1 I}{A_1 I_1} &= \frac{\rho}{\rho_1} \\ \frac{W_1 I}{W_1 I_1} &= \frac{\rho}{\rho_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_1 I}{A_1 I_1} = \frac{W_1 I}{W_1 I_1} \Rightarrow \frac{A_1 I}{W_1 I} = \frac{A_1 I_1}{W_1 I_1}$$

Daher unter Berücksichtigung der Vorzeichen

$$\left. \begin{aligned} T(A_1 W_1 I) &= -\frac{A_1 I}{W_1 I} \\ T(A_1 W_1 I_1) &= \frac{A_1 I_1}{W_1 I_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(A_1 W_1 I I_1) = -1$$

Daraus folgt weiter nach dem Strahlensatz

$$\left. \begin{aligned} T(A_1 W_1 I) &= T(H_1 W_1 J_1) \\ T(A_1 W_1 I_1) &= T(H_1 W_1 J_{11}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{D(H_1 W_1 J_1 J_{11}) = -1} \quad (\ddagger)$$

TAFEL 10

Wir zeichnen im $\Delta A_1A_2A_3$ den FEUERBACHKREIS als Umkreis des Mittendreiecks $\Delta S_1S_2S_3$. Konstruiert man die Tangente in S_1 an den FEUERBACHkreis, so tritt der Winkel $\sphericalangle \alpha_3$ bei S_1 als Sehnen-Tangentenwinkel auf und daher auch als Parallelwinkel zwischen der Tangente und der Dreiecksseite a_3 . Daher ist die Tangente an den FEUERBACHkreis in S_1 zur Dreiecksseite a_1 antiparallel bezüglich der Dreiecksseiten a_2 und a_3 .

Da S_1 auch Mittelpunkt von J_1J_{11} ist, hat der Kreis k über dem Durchmesser J_1J_{11} dem Mittelpunkt S_1 . Wir verwenden k als Inversionskreis. Da der Inkreis und der Ankreis k orthogonal schneiden, gehen beide bei der Inversion an k in sich über. Da andererseits der FEUERBACHkreis f durch das Inversionszentrum S_1 geht, wird er in eine Gerade f' übergeführt, die normal auf S_1F steht. f' ist daher parallel zur FEUERBACHtangente in S_1 . Da f durch den Höhenfußpunkt H_1 geht, muß wegen (\ddagger) f' durch den zu H_1 inversen Punkt W_1 gehen. W_1 ist aber das innere Ähnlichkeitszentrum von In- und Ankreis. Da f' wegen der Parallelität zur FEUERBACHtangente antiparallel zu a_1 bezüglich a_2 und a_3 ist, stellt f' die zweite innere Tangente von In- und Ankreis dar. Die Inversion führt f' nach f über und erhält dabei die Berührung mit den in sich übergehenden In- und Ankreis.

Zusammenhang zwischen I und U

TAFEL 11

Wir bestimmen den Inkreis- und die Ankreismittelpunkte I, I_1, I_2, I_3 des gegebenen Dreiecks $\Delta A_1A_2A_3$. Dann ist $\Delta A_1A_2A_3$ das orthozentrische Dreieck von $\Delta I_1I_2I_3$. Der Umkreis von $\Delta A_1A_2A_3$ ist der FEUERBACHkreis von $\Delta I_1I_2I_3$. Er enthält daher die Seitenmitten K_1, K_2, K_3 der oberen Höhenabschnitte. Da die Winkel $\sphericalangle A_1A_3K_3 = \sphericalangle K_3A_3A_2$ gleich sind, halbiert K_3 den Bogen A_1A_2 , also geht die Seitensymmetrale von A_1A_2 durch K_3 . Wegen des Rechten Winkels $\sphericalangle M_3A_3K_3$ sind K_3 und M_3 Endpunkte desselben Durchmessers.

Der Umkreismittelpunkt U von $\Delta A_1A_2A_3$ ist der Mittelpunkt des FEUERBACHkreises von $\Delta I_1I_2I_3$.

DIE GERADEN VON WALLACE

TAFEL 12

Auf Seite 42 wurde gezeigt, daß die Fußpunkte F_1, F_2, F_3 eines Punktes P auf den Seiten eines Dreiecks $\Delta A_1 A_2 A_3$ genau dann in gerader Linie liegen, wenn P auf dem Umkreis des Dreiecks liegt.

Wir wollen zunächst diesen Satz nochmals direkt beweisen: P werde auf dem Umkreis von $\Delta A_1 A_2 A_3$ gewählt. Im zweifachen THALESkreis über $A_1 P$ gilt nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\angle A_1 F_1 F_3 = \angle A_1 P F_3 \Rightarrow \angle P A_1 F_3 = 90 - \angle A_1 P F_3$$

Für den Außenwinkel des Sehnenvierecks $A_1 A_2 A_3 P$ beim Punkt A_3 gilt daher

$$\angle F_2 A_3 P = \angle P A_1 A_2 = \angle P A_1 F_3$$

und im rechtwinkligen Dreieck $\Delta P A_3 F_2$ ist

$$\angle F_2 P A_3 = 90 - \angle F_2 A_3 P = 90 - \angle P A_1 A_2 = \angle A_1 P F_3 = \angle A_1 F_1 F_3$$

Im THALESkreis über $P A_3$ erkennt man

$$\angle F_2 P A_3 = \angle F_2 F_1 A_3$$

Daher sind die Punkte F_1, F_2, F_3 kollinear. Sie liegen auf der WALLACEgeraden w .

Wir wollen jetzt das *Hüllgebilde* der WALLACEgeraden untersuchen, wenn P den Umkreis durchläuft. Dazu spiegeln wir zunächst H an $A_1 A_2$ und erhalten den Punkt H'' auf dem Umkreis (Seite 38). Verbindet man H'' mit P , so ergibt sich auf $A_1 A_2$ der Punkt X , welcher Scheitel des gleichschenkeligen Dreiecks $\Delta H X H''$ ist. Daher gilt

$$\angle X H H'' = \angle X H'' H =: \alpha$$

Ferner ist als Wechselwinkel

$$\angle H H'' P = \angle F_3 P H'' = \alpha$$

Im Umkreis ergibt sich die Gleichheit der Peripheriewinkel

$$\angle A_3 H'' P = \angle A_3 A_1 P = \alpha$$

und im THALESkreis über $A_1 P$

$$\angle P A_1 F_1 = \angle P F_3 F_1 = \alpha$$

Daraus folgt für die WALLACEgerade w

$$w \parallel HX \quad (*)$$

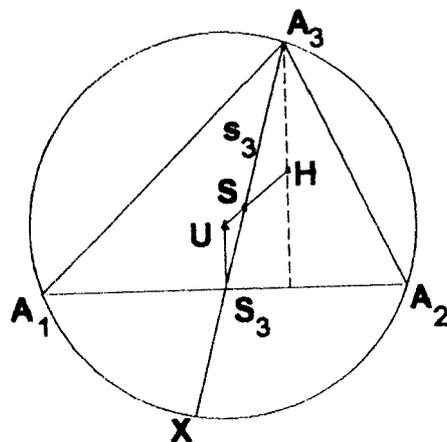
Es sei

$$M := (HP) \cap w \text{ und } Y := (PX) \cap w$$

Im rechtwinkligen Dreieck ΔXF_3P ist $\angle F_3XP = 90-\alpha$. Daher sind die beiden Dreiecke ΔPYF_3 und ΔF_3YX gleichschenkelig, woraus wegen (*) folgt, daß M Mitte von HP ist (Mittenparallele im $\Delta PH''H$). Da M aus Halbierung der Strecke PH hervorgeht, liegt M auf dem Kreis von FEUERBACH (H ... Ähnlichkeitszentrum, vgl. Seite 69). Bei dieser zentrischen Ähnlichkeit geht die Strecke H''P über in die Strecke H_3M , wobei der Winkel $\angle L_3H_3M = \alpha$ nunmehr Peripheriewinkel im FEUERBACHkreis ist. Für den Zentriwinkel im FEUERBACHkreis gilt daher $\angle MFL_3 = 2\alpha$. Demnach ergibt sich

Der Punkt M der WALLACEgeraden durchläuft den FEUERBACHkreis gegenüber dem festen System mit der Winkelgeschwindigkeit +2, während sich die Gerade gegen das feste System mit der Winkelgeschwindigkeit -1 dreht. Die Hüllkurve der WALLACEgeraden ist daher eine STEINER-Zykloide.

Die gegenseitigen Abstände von H,U,S



Für den Betrag der Potenz des Schwerpunktes bezüglich des Umkreises gilt

$$SA_3 \cdot SX = \frac{2}{3} s_3 \left(\frac{1}{3} s_3 + S_3X \right) = r^2 - SU^2$$

Die Strecke S_3X ergibt sich aus dem Betrag der Potenz von S_3 bezüglich des Umkreises

$$S_3A_1 \cdot S_3A_2 = s_3 \cdot S_3X = \frac{a_3^2}{4} \Rightarrow S_3X = \frac{a_3^2}{4s_3}$$

Daraus

$$r^2 - SU^2 = \frac{2}{9} s_3^2 + \frac{2}{3} s_3 \cdot S_3X = \frac{2}{9} s_3^2 + \frac{2}{3} s_3 \cdot \frac{a_3^2}{4s_3} = \frac{2}{9} s_3^2 + \frac{a_3^2}{6}$$

Für die Länge einer Schwerlinie galt (Seite 35)

$$s_3^2 = \frac{2(a_1^2 + a_2^2) - a_3^2}{4}$$

daraus

$$r^2 - SU^2 = \frac{2(a_1^2 + a_2^2) - a_3^2}{18} + \frac{a_3^2}{6} = \dots = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{9}$$

Daraus

$$9 \cdot SU^2 = 9 \cdot r^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

Da nach EULER gilt $HS = 2 \cdot SU$, folgt

$$9 \cdot HS^2 = 36 \cdot r^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

und wegen $HU = 3 \cdot SU$ ergibt sich

$$HU^2 = 9 \cdot r^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

Die Abstände des Umkreismittelpunktes U von I_1, I_2, I_3

TAFEL 13

Im $\Delta A_1 A_2 A_3$ zeichnen wir den Inkreismittelpunkt I und den Ankreismittelpunkt I_1 . Dann gilt im Dreieck $\Delta A_2 I A_3$

$$\angle A_2 I A_3 = 180 - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} = 180 - \frac{180 - \alpha_1}{2} = 90 + \frac{\alpha_1}{2}$$

Im Viereck $IA_2 I_1 A_3$ ist (wegen der Rechten Winkel bei A_2 bzw. A_3)

$$\angle A_2 I_1 A_3 = 180 - \left(90 + \frac{\alpha_1}{2}\right) = 90 - \frac{\alpha_1}{2}$$

Die Winkelhalbierende von α_1 trifft den Umkreis im Punkte X und es ist $\text{Bogen}(A_2 X) = \text{Bogen}(A_3 X)$. Als supplementärer Peripheriewinkel zu α_1 ergibt sich $\angle A_2 X A_3 = 180 - \alpha_1$.

Im doppelten THALESkreis über II_1 muß der zum Peripheriewinkel $\angle A_2 I_1 A_3 = 90 - \frac{1}{2} \alpha_1$ gehörige Zentriwinkel die doppelte Größe $180 - \alpha_1$ besitzen. Da dies für X zutrifft, ist X Mittelpunkt des genannten THALESkreises. Es ist also

$$XI = XA_2 = XA_3 = XI_1 \quad (\dagger)$$

Ist Y der andere Endpunkt des durch X gehenden Umkreisdurchmessers, so folgt aus Gleichheit der Peripheriewinkel $\angle XA_1A_2 = \angle XYA_2$ die Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $\Delta A_1J_3I \sim \Delta YA_2X$ und daraus ergibt sich wiederum

$$\frac{IJ_3}{IA_1} = \frac{XA_2}{XY} \Rightarrow \frac{\rho}{IA_1} = \frac{XA_2}{2r} \Rightarrow 2r\rho = IA_1 \cdot XA_2 \stackrel{(\dagger)}{\Rightarrow} \underline{2r\rho = IA_1 \cdot IX}$$

Der letzte Ausdruck ist aber der Betrag der Potenz von I bezüglich des Umkreises, sodaß gilt $IA_1 \cdot IX = 2r\rho = r^2 - IU^2$, also

$$\boxed{IU^2 = r^2 - 2r\rho} \quad (++)$$

Daraus folgt weiter wegen $IU^2 \geq 0 \Rightarrow r^2 - 2r\rho \geq 0$, also

$$\boxed{r \geq 2\rho}$$

Das Gleichheitszeichen gilt, wenn $I = U$ ist, d.h. wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Aus $\Delta A_1J_{13}I_1 \sim \Delta YA_2X$ folgt

$$\frac{I_1J_{13}}{A_1I_1} = \frac{XA_2}{YX} \Rightarrow \frac{\rho_1}{A_1I_1} = \frac{XA_2}{2r} \Rightarrow \underline{2r\rho_1 = XA_2 \cdot A_1I_1} \stackrel{(\dagger)}{\Rightarrow} \underline{XI_1 \cdot A_1I_1}$$

Der letzte Ausdruck ist die Potenz von I_1 bezüglich des Umkreises, daher gilt $2r\rho_1 = I_1U^2 - r^2$, also

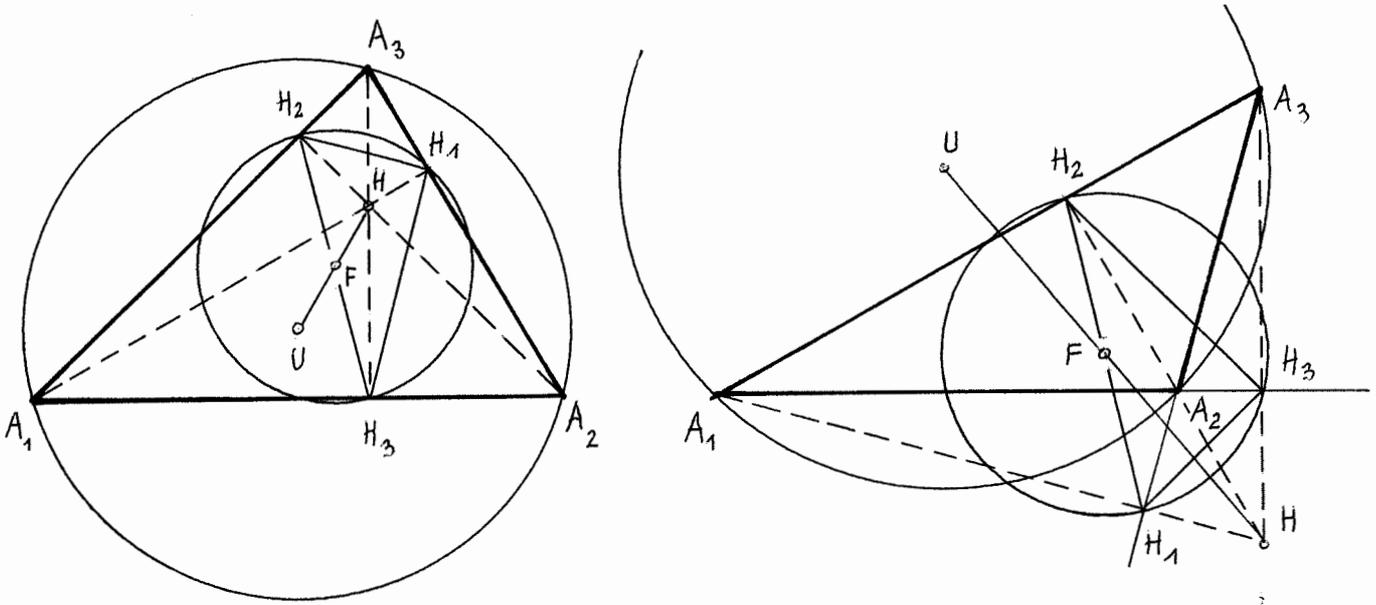
$$\boxed{\begin{aligned} I_1U^2 &= r^2 + 2r\rho_1 \\ I_2U^2 &= r^2 + 2r\rho_2 \\ I_3U^2 &= r^2 + 2r\rho_3 \end{aligned}} \quad (\#)$$

Aufsummierung von (#) und (++) ergibt mit Seite 55

$$\begin{aligned} IU^2 + I_1U^2 + I_2U^2 + I_3U^2 &= (r^2 - 2r\rho) + (r^2 + 2r\rho_1) + (r^2 + 2r\rho_2) + (r^2 + 2r\rho_3) = \\ &= 4r^2 + 2r \underbrace{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - \rho)}_{4r} = 12r^2, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\boxed{IU^2 + I_1U^2 + I_2U^2 + I_3U^2 = 12r^2}$$

Anwendung auf das orthozentrische Dreieck



Da H der Inkreismittelpunkt des orthozentrischen Dreiecks und der FEUERBACHkreis dessen Umkreis ist, gilt nach (++)

$$HF^2 = r_F^2 - 2r_F\rho_F = \frac{r^2}{4} - 2\frac{r}{2}\rho_F$$

Wegen $HU = 2HF$ folgt

$$HU^2 = r^2 - 4r\rho_F$$

Die nebenstehende Figur erleidet eine Veränderung beim stumpfen Winkel. Hier ist H Mittelpunkt eines Ankreises des orthoz. Kreises. Daher gilt wegen (#)

$$HF^2 = r_F^2 + 2r_F\rho_{2F} = \frac{r^2}{4} + r\rho_{2F}$$

Wegen $HU = 2HF$ folgt

$$HU^2 = r^2 + 4r\rho_{2F}$$

Der Abstand des Mittelpunktes F des FEUERBACHkreises vom Inkreismittelpunkt I

TAFEL 14

Wir konstruieren Um- In- und FEUERBACHkreis des Dreiecks $\Delta A_1A_2A_3$. Es sei U_2V_2 die Streckensymmetrale der Dreiecksseite A_1A_3 und A_2H_2 die dazu parallele Höhe durch A_2 . Da U_2 den Umkreisbogen A_1A_3 halbiert, ist A_2U_2 die Winkelhalbierende von α_2 , geht daher durch den Inkreismittelpunkt I.

Die Normale aus I auf U_2V_2 schneidet U_2V_2 in Z und die Höhe durch A_2 in T. Die Normale A_2Y' aus A_2 auf U_2V_2 habe den Fußpunkt Y. Dann sind die Dreiecke

$$\Delta U_2ZI \sim \Delta A_2TI \sim \Delta A_2YV_2 \quad (\bullet)$$

ähnlich und stimmen speziell in den Winkeln

$$\varphi = \angle ZU_2I = \angle IA_2T = \angle YA_2V_2 = \frac{\alpha_2}{2}$$

überein. Da der Umkreis vermöge der Abbildung σ in den FEUERBACHkreis übergeht, geht der Halbierungspunkt Y der Sehne A_2Y' in den Mittelpunkt Q der entsprechenden Sehne S_2A_3 des FEUERBACHkreises über. Es gilt also

$$\left. \begin{array}{l} \sigma(A_2) = S_2 \\ \sigma(V_2) = X \\ \sigma(Y) = Q \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma(\Delta YA_2V_2) = \Delta QS_2X$$

ΔS_2QX ist daher zu den Dreiecken (\bullet) ähnlich. Mit den angegebenen Bezeichnungen gilt daher

$$FI^2 = q^2 + (\rho - FQ)^2$$

Wegen $FX = \frac{r}{2}$ ist $FQ = \frac{r}{2} - p$, daher

$$FI^2 = q^2 + \left[\rho - \left(\frac{r}{2} - p \right) \right]^2 = q^2 + \left[p - \left(\frac{r}{2} - \rho \right) \right]^2 = q^2 + p^2 - 2p \left(\frac{r}{2} - \rho \right) + \left(\frac{r}{2} - \rho \right)^2$$

geordnet:

$$FI^2 = \left(\frac{r}{2} - \rho \right)^2 + [p^2 + q^2 - (pr - 2p\rho)] \quad (\#)$$

Nun folgt aus

$$\Delta U_2ZI \sim \Delta S_2QX \Rightarrow \frac{IU_2}{IZ} = \frac{XS_2}{XQ} \Rightarrow \frac{IU_2}{k+q} = \frac{1}{p} \Rightarrow IU_2 \cdot p = 1(k+q)$$

$$\Delta A_2TI \sim \Delta S_2QX \Rightarrow \frac{IA_2}{IT} = \frac{XS_2}{XQ} \Rightarrow \frac{IA_2}{k-q} = \frac{1}{p} \Rightarrow IA_2 \cdot p = 1(k-q)$$

Multiplikation ergibt

$$IU_1 \cdot IA_2 \cdot p^2 = 1^2(k^2 - q^2)$$

Für die Potenz von I bezüglich des Umkreises gilt (Seite 75)

$$IU_2 \cdot IA_2 = r^2 - IU^2 = 2r\rho$$

daher

$$2r\rho \cdot p^2 = 1^2(k^2 - q^2) \quad (\ddagger)$$

Da aus dem rechtwinkligen Dreieck ΔS_2QX folgt $k^2 + p^2 = 1^2$ und im rechtwinkligen Dreieck ΔXS_2R wegen des Kathetensatzes $1^2 = pr$

gilt, ergibt sich

$$pr = k^2 + p^2$$

und mit (*)

$$2r\rho \cdot p^2 = pr(k^2 - q^2) \Rightarrow 2\rho p = k^2 - q^2$$

Subtraktion der letzten beiden Ausdrücke ergibt

$$p^2 + q^2 - (pr - 2\rho p) = 0$$

Daher folgt aus (#)

$$FI^2 = \left(\frac{r}{2} - \rho \right)^2$$

also

$$FI = \left(\frac{r}{2} - \rho \right)$$

Da der Mittelpunktsabstand gleich der Differenz der Radien ist, folgt

Der Inkreis berührt den FEUERBACHkreis von innen

Wir betrachten nun den Fall eines *spitzwinkligen* Dreiecks und stellen die EULER-Gerade dar. Allgemein gilt

$$UF = FH = \frac{1}{2} UH$$

$$UI^2 = r^2 - 2r\rho$$

$$IF = \frac{r}{2} - \rho$$

Im spitzwinkligen Fall gilt (Seite 76)

$$HU = \sqrt{r^2 - 4r \cdot \rho_F}$$

Im Dreieck ΔHIU ergibt sich für die Länge der Strecke IH nach STEWART

$$HU(IF^2 + UF \cdot FH) = HI^2 \cdot UF + UI^2 \cdot FH$$

daraus

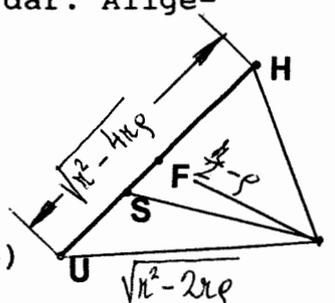
$$\begin{aligned} & \sqrt{r^2 - 4r \cdot \rho_F} \cdot \left[\left(\frac{r}{2} - \rho \right)^2 + \frac{r^2 - 4r \cdot \rho_F}{4} \right] = \\ & = HI^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{r^2 - 4r \cdot \rho_F} + (r^2 - 2r \cdot \rho) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{r^2 - 4r \cdot \rho_F} \end{aligned}$$

Also

$$HI^2 = 2 \left[\left(\frac{r}{2} - \rho \right)^2 + \frac{r^2 - 4r \cdot \rho_F}{4} \right] - (r^2 - 2r \cdot \rho) = \dots = 2\rho^2 - 2r \cdot \rho_K$$

Im spitzwinkligen Fall ergibt sich also

$$HI^2 = 2(\rho^2 - r \cdot \rho_F)$$



Ist α_1 ein stumpfer Dreieckswinkel, und bedeutet ρ_{1F} den ersten Ankreisradius des orthozentrischen Dreiecks, so ergibt sich im stumpfwinkligen Fall

$$HI^2 = 2(\rho^2 + r \cdot \rho_{1F})$$

Nach STEWART berechnet sich im Dreieck ΔUIF die Länge von IS mit

$$UF(IS^2 + US \cdot SF) = UI^2 \cdot SF + IF^2 \cdot US$$

Im spitzwinkligen Fall gilt dann

$$UH = \sqrt{r^2 - 4r \cdot \rho_F}, \quad UF = \frac{1}{2} UH = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - 4r \cdot \rho_F},$$

$$US = \frac{1}{3} UH = \frac{1}{3} \sqrt{r^2 - 4r \cdot \rho_F}, \quad SF = \frac{1}{6} UH = \frac{1}{6} \sqrt{r^2 - 4r \cdot \rho_F}$$

$$IF = \frac{r}{2} - \rho, \quad UI^2 = r^2 - 2r \cdot \rho$$

daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - 4r \cdot \rho_F} \cdot \left[IS^2 + \frac{1}{18} (r^2 - 4r \cdot \rho_F) \right] &= (r^2 - 2r \cdot \rho) \cdot \frac{1}{6} \sqrt{r^2 - 4r \cdot \rho_F} + \\ &+ \left(\frac{r}{2} - \rho \right)^2 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{r^2 - 4r \cdot \rho_F} \end{aligned}$$

Daraus für spitzwinkelige Dreiecke

$$9 \cdot IS^2 = 4r^2 + 6\rho^2 - 12r \cdot \rho + 2r \cdot \rho_F$$

Analog für Dreiecke mit dem stumpfen Winkel α_1

$$9 \cdot IS^2 = 4r^2 + 6\rho^2 - 12r \cdot \rho - 2r \cdot \rho_{1F}$$

Berchnung des Abstandes FI_2

$$TAFEL 15$$

Wie früher konstruieren wir Um- In- und FEUERBACHkreis sowie den Ankreismittelpunkt I_2 des Dreiecks $\Delta A_1 A_2 A_3$. Es sei $U_2 V_2$ die Streckensymmetrale der Dreiecksseite $A_1 A_3$ und $A_2 H_2$ die dazu parallele Höhe durch A_2 . Da U_2 den Umbogen $A_1 A_2$ halbiert, ist $A_2 U_2$ die Winkelhalbierende von α_2 , geht daher durch den Inkreismittelpunkt I sowie durch den Ankreismittelpunkt I_2 .

Die Normale aus I_2 auf U_2V_2 schneidet U_2V_2 in Z und die Höhe durch A_2 in T. Die Normale A_2Y' aus A_2 auf U_2V_2 habe den Fußpunkt Y. Dann sind die Dreiecke

$$\Delta U_2ZI_2 \sim \Delta A_2TI_2 \sim \Delta A_2YV_2 \sim \Delta S_2QX$$

wieder ähnlich. Ebenso gilt wieder $\sigma(\Delta A_2YV_2) = \Delta S_2QX$ (Seite 77).

Für den Abstand FI_2 gilt dann

$$FI_2^2 = q^2 + \left[\rho_2 + \left(\frac{r}{2} - p \right) \right]^2 = \dots = q^2 + p^2 - p(2\rho_2 + r) + \left(\rho_2 + \frac{r}{2} \right)^2 \quad (\&)$$

$$\Delta U_2ZI_2 \sim \Delta S_2QX \Rightarrow \frac{I_2U_2}{I_2Z} = \frac{XS_2}{XQ} \Rightarrow \frac{I_2U_2}{q-k} = \frac{1}{p} \Rightarrow I_2U_2 \cdot p = 1(q-k)$$

$$\Delta A_2TI_2 \sim \Delta S_2QX \Rightarrow \frac{I_2A_2}{I_2T} = \frac{XS_2}{XQ} \Rightarrow \frac{I_2A_2}{q+k} = \frac{1}{p} \Rightarrow I_2A_2 \cdot p = 1(q+k)$$

Multiplikation der beiden letzten Ausdrücke ergibt

$$I_2U_2 \cdot I_2A_2 \cdot p^2 = 1^2(q^2 - p^2)$$

Nun ist $I_2U_2 \cdot I_2A_2$ die Potenz von I_2 bezüglich des Umkreises. Daher gilt (Seite 75, (#))

$$I_2U_2 \cdot I_2A_2 = I_2U^2 - r^2 = 2r\rho_2$$

demnach

$$2r\rho_2 \cdot p^2 = 1^2(q^2 - r^2)$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken ΔS_2QX bzw. ΔXS_2R

$$1^2 = p^2 + k^2 \text{ bzw. } 1^2 = pr \Rightarrow pr = p^2 + k^2 \quad (*)$$

$$\text{also } 2r\rho_2 \cdot p^2 = pr(q^2 - k^2) \Rightarrow 2\rho_2 \cdot p = (q^2 - k^2)$$

Addiert man den Ausdruck (*), so ergibt sich

$$p(2\rho_2 + r) = p^2 + q^2$$

In Verbindung mit (&) folgt $FI_2^2 = \left(\rho_2 + \frac{r}{2} \right)^2$, also

$$FI_2 = \rho_2 + \frac{r}{2} \quad \text{u. zykl.}$$

Der FEUERBACHkreis berührt jeden der Ankreise von außen

Der Punkt von LEMOINE

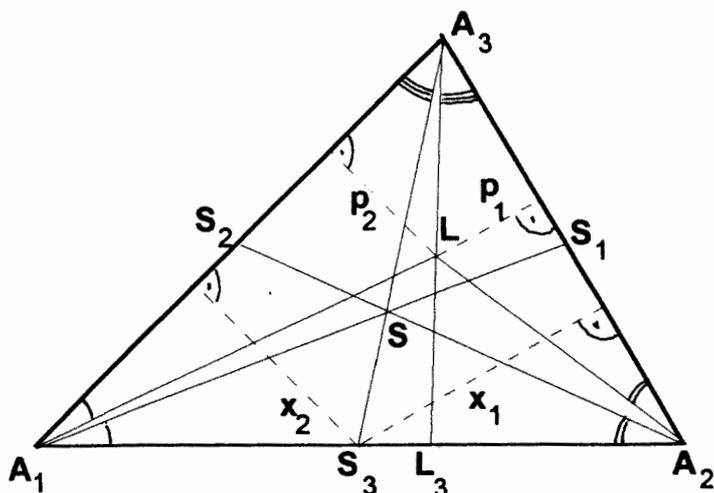
Emile Michel Hyacinthe LEMOINE (1840-1912) 1873

LEMOINE war der Begründer der neueren Dreiecksgeometrie¹

Der Winkelgegenpunkt des Schwerpunktes heißt Punkt von LEMOINE

$$\omega(S) = L$$

¹ Der Punkt heißt auch oft Punkt von Ernst Wilhelm GREBE



Nach Seite 28 gilt für die Dreieckskoordinaten der auf isogonal verwandten Geraden liegenden Punkte S_3 und L

$$x_1 p_1 = x_2 p_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{p_2}{p_1}$$

Dann folgt für die Flächeninhalte der Dreiecke $\Delta A_1 S_3 A_3$ und $\Delta S_3 A_2 A_3$

$$F(\Delta A_1 S_3 A_3) = F(\Delta S_3 A_2 A_3) = \frac{1}{2} a_1 x_1 = \frac{1}{2} a_2 x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

Daher gilt

Die Koordinaten des Punktes von LEMOINE bezüglich der Dreieckseiten verhalten sich so wie diese Seiten, bzw. wie die Sinus der entsprechenden Winkel:

$$p_1 : p_2 : p_3 = a_1 : a_2 : a_3 = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3$$

Die letzte Beziehung folgt aus dem Sinussatz. Auf Grund der Konstruktion gilt

$$A_1 S_3 = S_3 A_2, \angle A_1 A_3 S_3 = \angle L_3 A_3 A_2, \Rightarrow \angle A_1 A_3 L_3 = \angle S_3 A_3 A_2$$

Da sich die Flächeninhalte von Dreiecken gleicher Höhe verhalten wie ihre Basisstrecken, folgt

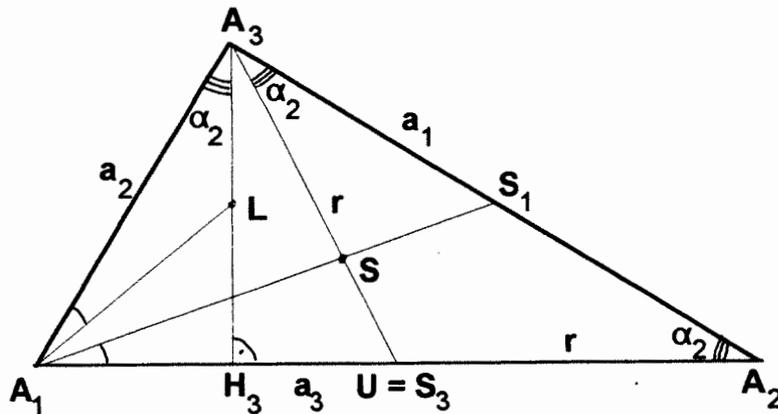
$$\begin{aligned} \frac{A_1 L_3}{A_2 L_3} &= \frac{A_1 L_3}{S_3 A_2} \cdot \frac{S_3 A_2}{A_2 L_3} = \frac{A_1 L_3}{S_3 A_2} \cdot \frac{A_1 S_3}{A_2 L_3} = \frac{F(\Delta A_1 L_3 A_3)}{F(\Delta S_3 A_2 A_3)} \cdot \frac{F(\Delta A_1 S_3 A_3)}{F(\Delta L_3 A_2 A_3)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} A_1 A_3 \cdot A_3 L_3 \cdot \sin(\angle A_1 A_3 L_3)}{\frac{1}{2} A_3 S_3 \cdot A_3 A_2 \cdot \sin(\angle S_3 A_3 A_2)} \cdot \frac{\frac{1}{2} A_1 A_3 \cdot A_3 S_3 \cdot \sin(\angle A_1 A_3 S_3)}{\frac{1}{2} L_3 A_3 \cdot A_3 A_2 \cdot \sin(\angle L_3 A_3 A_2)} = \frac{a_2^2}{a_1^2} \end{aligned}$$

$$\frac{A_1L_3}{A_2L_3} = \frac{a_2^2}{a_1^2}, \quad \frac{A_2L_1}{A_3L_1} = \frac{a_3^2}{a_2^2}, \quad \frac{A_3L_2}{A_1L_2} = \frac{a_1^2}{a_3^2}$$

bzw.

$$T(A_1A_2L_3) = -\frac{a_2^2}{a_1^2}, \quad T(A_2A_3L_1) = -\frac{a_3^2}{a_2^2}, \quad T(A_3A_1L_2) = -\frac{a_1^2}{a_3^2}$$

Sonderfall für das rechtwinkelige Dreieck:



In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt $\angle A_1A_3H_3 = \angle A_1A_2A_3 = \alpha_2$. Nach Seite 64 sind U und H isogonal verwandt, daher ist

$$\angle A_1A_3H_3 = \angle S_3A_3A_2 = \alpha_2 \quad \text{und} \quad \angle A_2A_1S_1 = \angle LA_1A_3$$

Folglich gilt

$$\Delta A_1S_1A_2 \sim \Delta A_1LA_3 \Rightarrow \frac{A_2S_1}{a_3} = \frac{A_3L}{a_2} \Rightarrow a_3 \cdot A_3L = a_2 \cdot A_2S_1 = a_2 \cdot \frac{a_1}{2} =$$

$$= F(\Delta A_1A_2A_3) = a_3 \cdot \frac{h_3}{2} = \frac{a_1 a_2}{2} = a_3 \cdot A_3L, \text{ also}$$

$$A_3L = \frac{h_3}{2}$$

Der Punkt von LEMOINE und das Tangendendreieck

TAFEL 16

Der Punkt von LEMOINE ist der GERGONNESche Punkt des Tangendendreiecks

Das Tangentendreieck $\Delta T_1 T_2 T_3$ wird von den Umkreistangenten in $A_1 A_2 A_3$ gebildet. Der Umkreis von $\Delta A_1 A_2 A_3$ ist also der Inkreis von $\Delta T_1 T_2 T_3$. Daher schneiden einander die Transversalen $T_i A_i$ im GERGONNESchen Punkt L von $\Delta T_1 T_2 T_3$.

Wir bestimmen nun die Winkelgegenpunkte $A'_i := \omega(T_i)$ der T_i bezüglich des Dreiecks $\Delta A_1 A_2 A_3$.

Da $\angle A_2 A_3 T_1$ Sehnen-Tangentenwinkel ist, folgt $\angle A_2 A_3 T_1 = \angle A_3 A_1 A_2 = \alpha_1$. Die zur Halbgeraden $[A_3 T_1$ isogonal verwandte Halbgerade ist $[A_3 A'_2$ (Winkeldrehsinn beachten!!) und wegen $\angle A_2 A_3 T_1 = \angle A_1 A_3 A'_2 = \alpha_1$ sind die Trägergeraden $(A_3 A'_2) = (A_3 A'_1)$ und $(A_1 A_2)$ parallel. Die Bildpunkte $\omega(T_i)$ sind also die Ecken des Außendreiecks $\Delta A'_1 A'_2 A'_3$ des gegebenen Dreiecks. Die Halbgeraden $[A_i A'_i$ sind daher isogonal verwandt zu den Halbgeraden $[A_i T_i$.

Da die $(A_i A'_i)$ einander im Schwerpunkt S des gegebenen Dreiecks schneiden, ist $\omega(L) = S \Rightarrow L = \omega(S)$. L ist daher der LEMOINESche Punkt von $\Delta A_1 A_2 A_3$.

Achtung: Es entsprechen einander wohl die Ecken $A'_i = \omega(T_i)$ der beiden Dreiecke $\Delta A'_1 A'_2 A'_3$ und $\Delta T_1 T_2 T_3$, nicht aber deren Seiten in der Verwandtschaft isogonaler Punkte (Quadratische Verwandtschaft!)

LEMOINEScher Punkt und LEMOINESche Gerade

TAFEL 17

Die LEMOINESche Gerade ist die Polare des LEMOINESchen Punktes bezüglich des Umkreises

Wir zeichnen die LEMOINESche l Gerade als Verbindung der Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der drei APOLLONischen Kreise und bestimmen den Schnittpunkt X des Umkreises mit dem APOLLONIischen Kreis mit dem Mittelpunkt M_3 . Da nach Seite 49 dieser Kreis den Umkreis orthogonal schneidet, sind $M_3 X$ und $M_3 A_3$ die Tangenten aus M_3 an den Umkreis und $(A_3 X) = x$ ist die Polare von M_3 bezüglich des Umkreises. Daraus folgt, daß der Pol von l bezüglich des Umkreises auf x liegen muß. Nun ist nach APOLLONIOS:

$$\frac{XA_1}{XA_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (*)$$

Ferner gilt nach PTOLEMAIOS (Seite 11) im Sehnenviereck $A_1YA_2A_3$ für die Diagonalenabschnitte $A_1S_3 = S_3A_2$

$$\frac{A_1S_3}{A_2S_3} = \frac{A_1A_3 \cdot A_1Y}{A_2A_3 \cdot A_2Y} \Rightarrow 1 = \frac{a_2 \cdot A_1Y}{a_1 \cdot A_2Y} \Rightarrow \frac{A_1Y}{A_2Y} = \frac{a_1}{a_2} \quad (*)$$

Daraus folgt

$$\Delta A_1YA_2 = \Delta A_2XA_1$$

Denn nach dem Peripheriewinkelsatz haben diese Dreiecke bei X und Y gleiche Winkel und deren anliegende Seiten sind nach (*) und (#) proportional. Daher sind diese Dreiecke zunächst ähnlich. Wegen der gemeinsamen Basis A_1A_2 sind sie sogar (ungleichsinnig) kongruent. Aus der Gleichheit der Seiten $A_1Y = A_2X$ folgt die Gleichheit der entsprechenden Kreisbögen und daher die Gleichheit der Peripheriewinkel

$$\angle A_1A_3Y = \angle A_2A_3X$$

x geht daher als Winkelgegengerade zur Schwerlinie s_3 durch L (und zyklisch).

Das Fußpunktdreieck des Punktes von LEMOINE

TAFEL 18

Die Seiten des Fußpunktdreiecks des Punktes von LEMOINE stehen auf die Schwerlinien des ursprünglichen Dreiecks normal

$$s_i \perp f_i$$

Auf Grund der Konstruktion des Punktes von LEMOINE gilt

$$\angle F_3A_2L = \angle S_2A_2A_3$$

Im Thaleskreis $A_2F_1LF_3$ folgt

$$\angle F_3F_1A_2 = \angle F_3LA_2$$

Daher

$$\Delta LF_3A_2 \sim \Delta F_1XA_2 \Rightarrow \underline{\angle LF_3A_2} = \angle F_1XA_2 = 90^\circ$$

Es sei

$$YS_2 := A_2S_2 \Rightarrow A_1Y \parallel A_2A_3 \text{ und } A_1Y = A_2A_3$$

Dann gilt

$$A_1Y \perp LF_1, A_1A_2 \perp LF_3, A_2Y \perp F_1F_3$$

Daher sind die Dreiecke ΔA_1A_2Y und ΔLF_3F_1 ähnlich, da deren Seiten wechselseitig aufeinander normal stehen. Daher stehen in diesen Dreiecken auch entsprechende Linien aufeinander normal. Nun steht die Schwerlinie A_1S_2 des Dreiecks ΔA_1A_2Y auf die Gerade F_2L des Dreiecks ΔLF_3F_1 normal. Diese letztere Linie muß daher in ΔLF_3F_1 gleichfalls Schwerlinie sein. Sie halbiert also in ihrer Verlängerung die Strecke F_1F_2 , ist mithin auch Schwerlinie des Fußpunktdreiecks $\Delta F_1F_2F_3$.

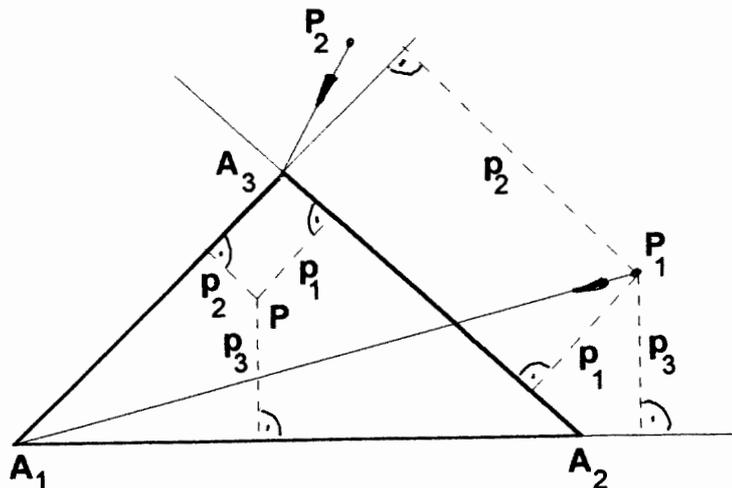
Der Punkt von LEMOINE ist der Schwerpunkt seines eigenen Fußpunktdreiecks

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔA_1A_2Y und ΔLF_3F_1 folgt auch

$$\frac{A_1Y}{A_1A_2} = \frac{LF_1}{LF_3} \Rightarrow \frac{a_1}{a_3} = \frac{p_1}{p_3} \Rightarrow a_1 : a_2 : a_3 = p_1 : p_2 : p_3$$

Es reproduziert sich daher die Aussage von Seite 81.

Der Punkt von LEMOINE ist jener Punkt der Dreiecksebene, für den die Summe der Quadrate der Dreieckskoordinaten bezüglich des gegebenen Dreiecks ein Minimum ist
(Lösung von GREBE 1847)



Der gesuchte Punkt muß jedenfalls im Innern des Dreiecks liegen. Betrachten wir nämlich etwa P_1 , so ließen sich alle Koordinaten verkleinern, wenn sich P_1 auf P_1A_1 bewegt. Ebenso ist eine Verkleinerung aller Koordinaten möglich, wenn P_2 sich auf P_2A_3 bewegt. P muß also in Innern des Dreiecks liegen.

Nach Seite 23 gilt für die Koordinaten p_1, p_2, p_3 eines beliebigen Punktes P

$$2F = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$$

Nach der aus der Vektoralgebra bekannten Identität von LAGRANGE gilt für zwei Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad a \times p = \begin{pmatrix} a_2p_3 - a_3p_2 \\ a_3p_1 - a_1p_3 \\ a_1p_2 - a_2p_1 \end{pmatrix}$$

$$(a \times p)^2 = a^2p^2 - (ap)^2 \Rightarrow a^2p^2 = (ap)^2 + (a \times p)^2$$

Auflösung nach Koordinaten ergibt

$$\underbrace{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)} = (a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3)^2 + (a_2p_3 - a_3p_2)^2 + (a_3p_1 - a_1p_3)^2 + \underbrace{(a_1p_2 - a_2p_1)^2} = 4F^2 + (a_2p_3 - a_3p_2)^2 + (a_3p_1 - a_1p_3)^2 + (a_1p_2 - a_2p_1)^2$$

Da die Seitenlängen a_i sowie die Dreiecksfläche F vorgegeben sind, wird die Quadratsumme $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ der Koordinaten ein Minimum, wenn die rechte Seite der obigen Beziehung minimiert wird. Dies ist dann der Fall, wenn gilt

$$a_2p_3 - a_3p_2 = a_3p_1 - a_1p_3 = a_1p_2 - a_2p_1 = 0 \Rightarrow \frac{p_3}{p_2} = \frac{a_3}{a_2}, \dots$$

also

$$p_1 : p_2 : p_3 = a_1 : a_2 : a_3 \Rightarrow (\text{Seite 81}) \quad \underline{P = L}$$

Der 1. Kreis von LEMOINE

TAFEL 19

Die Parallelen zu den Dreiecksseiten a_s durch den LEMOINESchen Punkt schneiden die jeweils anderen Dreiecksseiten in den Punkten K_{1m} bzw. K_{m1} ((kms) = (123)). Wegen der auftretenden Parallelwinkel gilt

$\angle A_3 K_{21} K_{12} = \angle K_{13} K_{31} A_2 = \angle S_1 S_3 A_2 = \alpha_1 \Rightarrow \angle A_1 K_{21} L = \angle A_1 S_3 S_1 = 180 - \alpha_1$
 und zyklisch. Da wegen der Definition des LEMOINESchen Punktes gilt

$$\angle K_{21} A_1 L = \angle S_3 A_1 S_1$$

folgt

$$\Delta A_1 L K_{21} \sim \Delta A_1 S_1 S_3 \Rightarrow \frac{A_1 K_{21}}{K_{21} L} = \frac{A_1 S_3}{S_3 S_1} = \frac{(a_3/2)}{(a_2/2)} = \frac{a_3}{a_2} \quad (\dagger)$$

Da die beiden Dreiecke $\Delta A_1 K_{21} K_{31}$ und $\Delta A_1 A_2 A_3$ bei A_1 den Winkel α_1 gemeinsam haben und im Parallelogramm $\# A_1 K_{31} L K_{12}$ die Seiten $K_{21} L = A_1 K_{31}$ gleich sind, folgt aus (\dagger) wegen der Proportionalität der dem Winkel α_1 anliegenden Seiten

$$\frac{A_1 K_{21}}{A_1 K_{31}} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \Delta A_1 K_{21} K_{31} \sim \Delta A_1 A_2 A_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle A_1 K_{21} K_{31} = \alpha_2 \Rightarrow \angle L K_{21} K_{31} = \alpha_3 \\ \angle A_1 K_{31} K_{21} = \alpha_3 \Rightarrow \angle L K_{31} K_{21} = \alpha_2 \end{cases}$$

Die Strecken $K_{1s} K_{ms}$ ((lms) = (123)) sind daher parallel zu den Seiten des orthozentrischen Dreiecks (siehe Tafel 7); daher gehen die Lote aus den Eckpunkten A_s auf die Strecken $K_{1s} K_{ms}$ durch den Umkreismittelpunkt U.

Im Parallelogramm $\# A_2 K_{32} L K_{12}$ ist X der Mittelpunkt, die Normale in X auf $K_{12} K_{32}$ ist daher die Streckensymmetrale dieser Strecke. Da X auch die zweite Diagonale LA_2 halbiert, ist die genannte Streckensymmetrale Mittelparallele im Dreieck $\Delta UA_2 L$ und halbiert daher die Strecke UL im Punkte M_1 .

$$\underline{UM_1 = M_1 L}$$

Da M_1 auf der Streckensymmetrale von $K_{12} K_{32}$ liegt, gilt zyklisch

$$\begin{aligned} M_1 K_{12} &= M_1 K_{32} \\ M_1 K_{23} &= M_1 K_{13} \\ M_1 K_{31} &= M_1 K_{21} \end{aligned} \quad (\#)$$

Wir betrachten den Umkreis von $\Delta K_{32} K_{12} K_{21}$. Sein Mittelpunkt liegt auf der Symmetralen von $K_{32} K_{12}$. Über der Sehne $K_{21} K_{32}$ liegt bei K_{12} der Peripheriewinkel α_3 , daher liegt nach dem Peripheriewinkelsatz auch K_{23} auf diesem Kreis, ebenso der zu α_3 supplementäre Winkel bei K_{31} . Da die Winkel über $K_{23} K_{31}$ bei K_{23} und K_{13} dieselbe Größe α_2 haben, liegt auch K_{13} auf diesem Kreis.

Die sechs Punkte K_{1m} liegen auf dem 1. Kreis von LEMOINE.
 Sein Mittelpunkt M_1 halbiert die Strecke LU. Demnach haben
 alle Strecken (#) dieselbe Länge

Aus den Ähnlichkeiten

$$\Delta A_1 A_2 A_3 \sim \begin{cases} \Delta A_1 K_{21} K_{31} & (1) \\ \Delta K_{12} A_2 K_{32} & (2) \\ \Delta K_{13} K_{23} A_3 & (3) \end{cases}$$

folgt wegen (1)

$$\frac{K_{31} K_{21}}{a_1} = \frac{A_1 K_{31}}{a_2} = \frac{A_1 K_{21}}{a_3} =: \lambda$$

also

$$\begin{aligned} K_{31} K_{21} &= \lambda a_1 \\ A_1 K_{31} &= \lambda a_2 \\ A_1 K_{21} &= \lambda a_3 \end{aligned}$$

Der Strahlensatz am Winkel A_2 ergibt

$$\frac{A_3 K_{13}}{A_1 K_{31}} = \frac{a_1}{a_3} \Rightarrow A_3 K_{13} = \frac{a_1}{a_3} \cdot A_1 K_{31} = \lambda \cdot \frac{a_1 a_2}{a_3}$$

Aus der Ähnlichkeit (3) folgt

$$A_3 K_{23} : A_3 K_{13} : K_{23} K_{13} = a_1 : a_2 : a_3$$

$$\frac{A_3 K_{23}}{A_3 K_{13}} = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow A_3 K_{23} = \frac{a_1}{a_2} \cdot A_3 K_{13} = \lambda \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_1 a_2}{a_3} = \lambda \cdot \frac{a_1^2}{a_3}$$

$$\frac{A_3 K_{13}}{K_{23} K_{13}} = \frac{a_2}{a_3} \Rightarrow K_{23} K_{13} = \frac{a_3}{a_2} \cdot A_3 K_{13} = \lambda \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_1 a_2}{a_3} = \lambda \cdot a_1$$

also

$$\begin{aligned} K_{23} K_{13} &= \lambda \cdot a_1 \\ A_3 K_{13} &= \lambda \cdot \frac{a_1 a_2}{a_3} \\ A_3 K_{23} &= \lambda \cdot \frac{a_1^2}{a_3} \end{aligned}$$

Bei A_3 ergibt der Strahlensatz

$$\frac{A_2 K_{12}}{A_1 K_{21}} = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow \underline{A_2 K_{12}} = \frac{a_1}{a_2} \cdot A_1 K_{21} = \lambda \cdot \underline{\frac{a_1 a_3}{a_2}}$$

Aus der Ähnlichkeit (2) folgt

$$\frac{A_2 K_{32}}{A_2 K_{12}} = \frac{a_1}{a_3} \Rightarrow A_2 K_{32} = \frac{a_1}{a_3} \cdot A_2 K_{12} = \lambda \cdot \frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{a_1 a_3}{a_2} = \lambda \cdot \frac{a_1^2}{a_2}$$

$$\frac{K_{12} K_{32}}{A_2 K_{12}} = \frac{a_2}{a_3} \Rightarrow K_{12} K_{32} = \lambda \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_1 a_3}{a_2} = \lambda \cdot a_1$$

demnach

$K_{12} K_{32} = \lambda \cdot a_1$ $A_2 K_{12} = \lambda \cdot \frac{a_1 a_3}{a_2}$ $A_2 K_{32} = \lambda \cdot \frac{a_1^2}{a_2}$

Daraus

$$K_{31} K_{21} = K_{23} K_{13} = K_{12} K_{32} = \lambda a_1$$

Die vom 1. LEMOINESchen Kreis zwischen den Dreiecksseiten aufgespannten Sehnen

$$K_{31} K_{21} = K_{23} K_{13} = K_{12} K_{32}$$

sind gleich lang

Wegen der Winkelgleichheit gilt

$$\Delta K_{21} L K_{23} \sim \Delta A_1 A_2 A_3$$

daraus bei Berücksichtigung von $\# A_1 K_{31} L K_{21}$

$$\frac{K_{23} K_{21}}{K_{21} L} = \frac{K_{23} K_{21}}{A_1 K_{31}} = \frac{a_2}{a_3} \Rightarrow \frac{K_{23} K_{21}}{\lambda a_2} = \frac{a_2}{a_3} \Rightarrow \underline{K_{23} K_{21}} = \lambda \cdot \underline{\frac{a_2^2}{a_3}} \quad (*)$$

Nun ist

$$A_1 A_3 = A_1 K_{21} + K_{21} K_{23} + K_{23} A_3 = \lambda a_3 + \lambda \frac{a_2^2}{a_3} + \lambda \frac{a_1^2}{a_3} = \lambda \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_3} = a_2 \Rightarrow$$

$\lambda = \frac{a_2 a_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
 Q &:= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\
 A_1 K_{31} &= \frac{a_2^2 a_3}{Q}, & A_1 K_{21} &= \frac{a_2 a_3^2}{Q} \\
 A_2 K_{12} &= \frac{a_3^2 a_1}{Q}, & A_2 K_{32} &= \frac{a_3 a_1^2}{Q} \\
 A_3 K_{23} &= \frac{a_1^2 a_2}{Q}, & A_3 K_{13} &= \frac{a_1 a_2^2}{Q} \\
 K_{32} K_{12} &= K_{13} K_{23} = K_{21} K_{31} = \frac{a_1 a_2 a_3}{Q}
 \end{aligned}$$

Aus (*) von Seite 89 folgt

$$K_{23} K_{21} = \frac{a_2^3}{Q}, \quad K_{31} K_{32} = \frac{a_3^3}{Q}, \quad K_{12} K_{13} = \frac{a_1^3}{Q}$$

Für die durch den 1. LEMOINESchen Kreis auf einer Dreieckseite erzeugten drei *Abschnitte* gilt

$$\frac{A_1 K_{31}}{a_2^2} = \frac{K_{31} K_{32}}{a_3^2} = \frac{K_{32} A_2}{a_1^2} = \frac{a_3}{Q} \quad (\text{u. zykl.})$$

Die drei Abschnitte verhalten sich also wie die *Quadrate* der Dreieckseiten.

Für die drei auf den Seiten des Dreiecks liegenden *Sehnen* des LEMOINESchen Kreises gilt

$$\frac{K_{31} K_{32}}{a_3^3} = \frac{K_{12} K_{13}}{a_1^3} = \frac{K_{23} K_{21}}{a_2^3}$$

Die drei Sehnen verhalten sich also wie die *Kuben* der Dreiecksseiten.

Der 2. Kreis von LEMOINE

Tafel 20

Die Antiparallelen zu den Dreiecksseiten a_s durch den LEMOINESchen Punkt schneiden die jeweils anderen Dreiecksseiten in den Punkten L_{lm}

bzw L_{m1} ((kms) = (123)). Wegen der Definition des Antiparallelismus gilt

$$\angle A_3 L_{12} L_{21} = \angle L_{31} L_{13} A_2 = \alpha_1 \Rightarrow \angle A_2 L_{12} L = 180 - \alpha_1$$

und zyklisch. Dadurch entstehen zunächst die gleichwinkligen Dreiecke

$$\begin{aligned} & \Delta L_{31} L L_{32}, \Delta L_{12} L L_{13}, \Delta L_{21} L L_{23} \\ & L_{31} L = L_{32} L, L_{12} L = L_{13} L, L_{21} L = L_{23} L \end{aligned} \quad (*)$$

Ferner ergeben sich die gegensinnig ähnlichen Dreiecke

$$\Delta A_1 A_2 A_3 \sim \begin{cases} \Delta A_1 L_{23} L_{32} & (1) \\ \Delta L_{13} A_2 L_{31} & (2) \\ \Delta L_{12} L_{21} A_3 & (3) \end{cases}$$

In diesen Ähnlichkeiten entspricht den Seitenmitten S_i jeweils der Punkt L, sodaß gilt

$$L_{23} L = L_{32} L, L_{21} L = L_{12} L, L_{13} L = L_{31} L$$

Zusammen mit (*) folgt daraus, daß die L_{ij} vom LEMOINESchen Punkt L alle gleichen Abstand besitzen

Die sechs Punkte L_{ij} liegen auf dem 2. Kreis von LEMOINE mit dem Mittelpunkt L

Ferner gelten die Ähnlichkeiten

$$\Delta A_1 A_2 S_1 \sim \Delta A_1 L_{23} L \quad (4)$$

$$\Delta A_2 A_3 S_2 \sim \Delta A_2 L_{31} L \quad (5)$$

$$\Delta A_3 A_1 S_3 \sim \Delta A_3 L_{12} L \quad (6)$$

und

$$\Delta A_1 A_2 S_2 \sim \Delta L_{13} A_2 L \quad (7)$$

$$\Delta A_2 A_3 S_3 \sim \Delta L_{21} A_3 L \quad (8)$$

$$\Delta A_3 A_1 S_1 \sim \Delta L_{32} A_1 L \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} (5) \Rightarrow \frac{A_3 A_2}{A_3 S_2} = \frac{A_2 L_{31}}{L_{31} L} \Rightarrow \frac{a_1}{(a_2/2)} = \frac{A_2 L_{31}}{L_{31} L} \Rightarrow A_2 L_{31} = \frac{2a_1}{a_2} L_{31} L \\ (8) \Rightarrow \frac{A_2 A_3}{A_2 S_3} = \frac{A_3 L_{21}}{L_{21} L} \Rightarrow \frac{a_1}{(a_3/2)} = \frac{A_3 L_{21}}{L_{21} L} \Rightarrow A_3 L_{21} = \frac{2a_1}{a_3} L_{21} L \end{aligned} \right\} \div$$

Division beider Ausdrücke ergibt wegen $L_{31} L = L_{21} L$ mit Hilfe des Strahlensatzes am Winkel A_1

$$\frac{A_2 L_{31}}{A_3 L_{21}} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow L_{31} L_{21} \parallel A_2 A_3. \text{ Daraus folgt}$$

$$\Delta A_1 A_2 A_3 \sim \begin{cases} \Delta A_1 L_{31} L_{21} \\ \Delta L_{32} A_2 L_{12} \\ \Delta L_{23} L_{13} A_3 \end{cases}$$

Damit ergeben sich folgende Winkelgleichheiten

$$\angle A_2 L_{32} L_{12} = \angle L_{13} L_{23} A_3 = \alpha_1 \text{ und zyklisch}$$

$$\angle L_{31} L_{21} L_{12} = \angle L_{21} L_{31} L_{12} = \alpha_1 \text{ und zyklisch}$$

Im gleichschenkeligen Dreieck $\Delta L_{12} L L_{13}$ ist $\angle L_{12} L L_{13} = 180 - 2\alpha_1$ daher

$$L_{12} L_{13} = 2LL_{12} \cdot \sin(90 - \alpha_1) = 2LL_{12} \cdot \cos \alpha_1$$

Wegen $\Delta L_{12} L L_{13} = \Delta L_{21} L L_{31}$ gilt auch $L_{21} L_{31} = 2 \cdot LL_{12} \cos \alpha_1$

$$L_{12} L_{13} : L_{23} L_{21} : L_{31} L_{32} = \cos \alpha_1 : \cos \alpha_2 : \cos \alpha_3$$

Die Längen des vom 2.LEMOINESchen Kreis auf den Dreiecksseiten ausgeschnittenen Sehnen verhalten sich wie die Kosinus der gegenüberliegenden Winkel (*Kosinus-Kreis*)

Da die Vierecke $L_{ik} L_{jk} L_{ki} L_{kj}$ dem 2.LEMOINESchen Kreis eingeschrieben sind und ihre Diagonalen durch L gehen, liegen lauter Rechtecke vor. Da diese Rechtecke auch jeweils dem Dreieck $\Delta A_1 A_2 A_3$ eingeschrieben sind, stehen jeweils die parallelen Rechteckseiten $L_{ik} L_{kj}$ und $L_{jk} L_{ki}$ auf derselben Dreiecksseite $A_i A_j$ normal ((ijk) = (123))

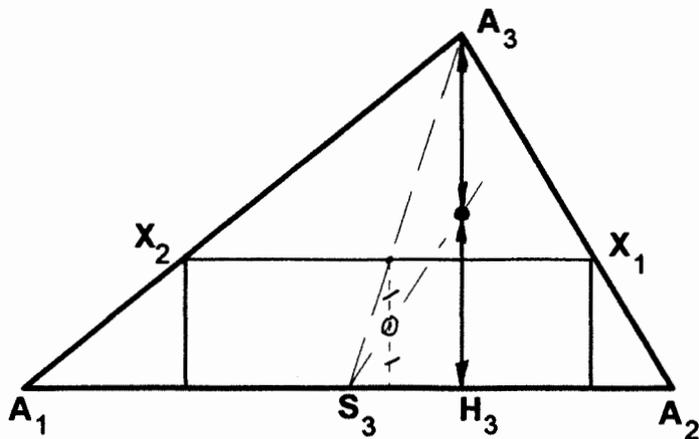
Wir zeichnen das Dreieck $\Delta L_{13} L_{21} L_{32}$. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle L_{21} L_{13} L_{32} = \angle L_{21} L_{12} L_{32} = \alpha_2$ (und zyklisch).

Analoges gilt für das Dreieck $\Delta L_{23} L_{31} L_{12}$. Die beiden Dreiecke sind kongruent, da im Rechteck $\square L_{31} L_{32} L_{13} L_{23}$ gilt $L_{31} L_{23} = L_{32} L_{13}$. Daher

$$\Delta L_{32} L_{13} L_{21} = \Delta L_{23} L_{31} L_{12} \sim \Delta A_1 A_2 A_3$$

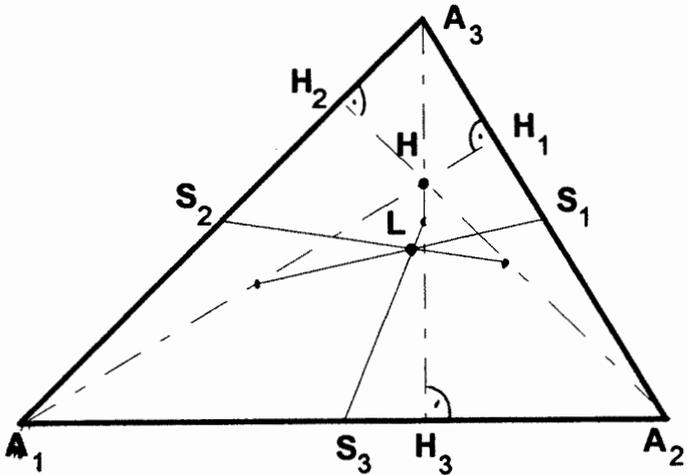
Hilfssatz:

Die Mittelpunkte aller einem Dreieck eingeschriebenen Rechtecke, deren eine Seite auf einer Dreiecksseite $A_1 A_2$ liegt, durchlaufen eine Gerade, die S_3 mit dem Mittelpunkt der Höhe h_3 verbindet (Strahlensatz).



Die Verbindungslinien der Seitenmitten S_i mit den Halbierungslinien der Höhen h_i gehen durch den LEMOINESche Punkt L

Beweis: L ist Mittelpunkt des Rechteckes $L_{31}L_{23}L_{13}L_{23}$ und zyklisch



Die Punkte von Henri Pierre Baptiste BROCARD (1875)

Der 1. BROCARDSche Punkt

Tafel 21

Wir zeichnen jene Kreise, welche A_iA_j in A_i berühren und durch den Eckpunkt A_k gehen ((ijk) = (123)). Es soll gezeigt werden, daß diese drei Kreise durch einen Punkt B_1 , den 1. BROCARDSchen Punkt, gehen. Wir schneiden zuerst die in A_1 und A_2 berührenden Kreise im Punkt B_1 . Da $\angle A_2A_1A_3 = \alpha_1$ Sehnen-Tangentenwinkel des 1. Kreises ist, hat $\angle A_1B_1A_3$ als supplementärer Peripheriewinkel die Größe $180-\alpha_1$. Analog ist $\angle A_1B_1A_2 = 180-\alpha_2$. Daher ist der Winkel

$\angle A_2B_1A_3 = 360 - (180 - \alpha_1) - (180 - \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = 180 - \alpha_3$. Daher muß auch der 3. Kreis durch B_1 gehen.

Nach dem Sehnen-Tangenten- und dem Peripheriewinkelsatz gilt

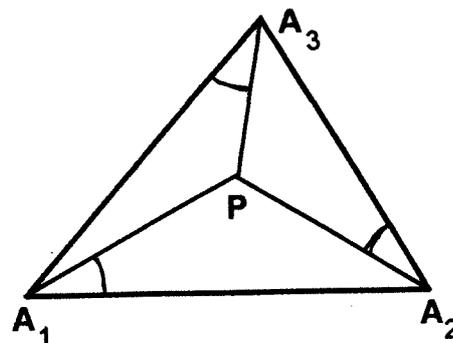
$$\beta := \angle B_1A_1A_2 = \angle B_1A_3A_1 = \angle B_1A_2A_3$$

Der Winkel β heißt *BROCARDScher Winkel*.

B_1 ist der *einzigste Punkt*, der dieser Winkelbeziehung genügt. Sei etwa P ein Punkt mit der Eigenschaft

$$\angle PA_1A_2 = \angle PA_2A_3 = \angle PA_3A_1$$

Zeichnet man den Umkreis von ΔA_1A_2P , so ist $\angle PA_1A_2$ Peripheriewinkel über der Sehne A_2P . Dann muß aber $\angle PA_2A_3$ Sehnentangentenwinkel sein, d.h. der Kreis muß A_2A_3 in A_2 berühren usw.



Verlängert man A_1B_1 bis zum Schnittpunkt X_1 mit dem in A_3 berührenden Kreis, so folgt aus $\angle A_1B_1A_2 = 180 - \alpha_2$:

$$\angle A_2B_1X_1 = \alpha_2 \text{ (Nebenwinkel)} = \angle A_2A_3X_1 \text{ (Peripheriewinkel über } A_2X_1) \Rightarrow \underline{A_3X_1 \parallel A_1A_2} \text{ (Wechselwinkel)}$$

Wegen $\angle A_2B_1A_3 = 180 - \alpha_3$ hat $\angle A_3X_1A_2$ als supplementärer Peripheriewinkel die Größe α_3 . Daher gilt

$$\Delta A_2A_3X_1 \sim \Delta A_1A_2A_3 \quad (*)$$

Ferner gilt (Wechselwinkel)

$$\angle A_3X_1B_1 = \angle B_1A_1A_2 = \beta$$

Aus (*) ergibt sich daher folgende neue Konstruktion für B_1

Tafel 22

Errichtet man über den Seiten des Dreiecks $\Delta A_1A_2A_3$ die zum gegebenen Dreieck *ungleichsinnig ähnlichen* Dreiecke

$$\left. \begin{array}{l} \Delta A_2A_3X_1 \\ \Delta X_2A_3A_1 \\ \Delta A_2X_3A_1 \end{array} \right\} \sim \Delta A_1A_2A_3$$

so gehen die Verbindungslinien X_iA_i durch den 1. BROCARDSchen Punkt.

Es gilt

$$A_3Y = h_2 \cot \beta$$

und andererseits

$$A_3 Y = A_3 H_2 + H_2 A_1 + A_1 Y = h_2 \cot \alpha_3 + h_2 \cot \alpha_1 + h_2 \cot \alpha_2$$

Daraus

$$\cot \beta = \cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 + \cot \alpha_3$$

Am Umkreis von $\Delta A_1 A_2 A_3$ stellt $\angle A_2 A_1 X_3$ den Sehnen-Tangentenwinkel zum Peripheriewinkel $\angle A_1 A_3 A_2 = \alpha_3$ dar. Daher liegt X_3 einerseits auf der Parallelen durch A_2 zu $A_1 A_3$, andererseits auf der Tangente an den Umkreis in A (und zyklisch).

Der 2. Punkt von BROCARD

Tafel 21

Zeichnet man jene Kreise, die $A_i A_k$ in A_i berühren und jeweils durch den dritten Punkt A_j gehen ((ijk) = (123)), so ergibt sich als Schnitt dieser drei Kreise der 2. BROCARDSche Punkt B_2 . Der 2. BROCARDSche Punkt von $\Delta A_1 A_2 A_3$ ist also der 1. BROCARDSche Punkt des Dreiecks $\Delta A_3 A_2 A_1$. Wie früher gilt

$$\angle B_2 A_1 A_3 = \angle B_2 A_2 A_1 = \angle B_2 A_3 A_2 \quad (\#)$$

Wir zeigen, daß auch dieser Winkel gleich β ist. Daher gilt

Die beiden BROCARDSchen Punkt sind isogonal verwandt:

$$\omega(B_1) = B_2, \quad \omega(B_2) = B_1$$

Beweis: Es sei B'_1 der zu B_1 isogonal verwandte Punkt. Dann gilt

$$\left. \begin{aligned} \angle B'_1 A_1 A_3 &= \angle B_1 A_1 A_2 \\ \angle B'_1 A_2 A_1 &= \angle B_1 A_2 A_3 \\ \angle B'_1 A_3 A_2 &= \angle B_1 A_3 A_1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Da die Winkel auf der rechten Seite alle} \\ \text{gleich groß sind, müssen auch die Winkel} \\ \text{links dieselbe Größe aufweisen} \end{array}$$

Auf Seite 94 wurde gezeigt, daß es nur einen solchen Punkt mit dieser Eigenschaft geben kann, sodaß $B'_1 = B_2$ sein muß und der Winkel (#) die Größe β besitzt

Tafel 22

Wir zeichnen das Dreieck $\Delta Y_1 Y_2 Y_3$. Es gilt (Peripheriewinkelsatz)

$$\left. \begin{aligned} \angle A_3 A_1 Y_2 &= \angle A_3 Y_1 Y_2 \\ \angle Y_3 A_2 A_3 &= \angle Y_3 Y_1 A_3 = \beta = \angle Y_2 A_1 A_2 \end{aligned} \right\} +$$

$$\angle A_3 A_1 Y_2 + \angle Y_3 A_2 A_3 = \angle A_3 A_1 Y_2 + \angle Y_2 A_1 A_2 = \angle A_3 A_1 A_2 = \alpha_1 = \angle A_3 Y_1 Y_2 + \angle Y_3 Y_1 A_3 = \angle Y_3 Y_1 Y_2 = \alpha_1$$

Daher gilt zyklisch

$$\begin{aligned}\angle Y_3 Y_1 Y_2 &= \alpha_1 \\ \angle Y_1 Y_2 Y_3 &= \alpha_2 \\ \angle Y_2 Y_3 Y_1 &= \alpha_3\end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst, daß die Dreiecke $\Delta Y_1 Y_2 Y_3$ und $\Delta A_1 A_2 A_3$ gleichsinnig ähnlich sind. Da sie den selben Umkreis besitzen, sind sie sogar gleichsinnig kongruent.

Zusammenfassung:

Die Dreiecke $\Delta Y_1 Y_2 Y_3$ und $\Delta A_1 A_2 A_3$ sind gleichsinnig kongruent und besitzen denselben Umkreis. Der 1.BROCARDSche Punkt von $\Delta A_1 A_2 A_3$ ist gleichzeitig der 2.BROCARDSche Punkt von Dreieck $\Delta Y_1 Y_2 Y_3$.

Das Dreieck $\Delta Y_1 Y_2 Y_3$ geht durch Drehung um U durch den Winkel $\angle Y_1 U A_1 = 2 \cdot \angle Y_1 Y_2 A_1 = 2\beta$ in das Dreieck $\Delta A_1 A_2 A_3$ über. Der mit $\Delta Y_1 Y_2 Y_3$ mitgeführte Punkt B_1 geht daher in den 2.BROCARDSchen Punkt B_2 von $\Delta A_1 A_2 A_3$ über.

Der 1.BROCARDSche Punkt eines Dreiecks geht durch Drehung um U durch den doppelten BROCARDSchen Winkel in den 2.BROCARDSchen Punkt über. $\Delta B_1 U B_2$ ist gleichschenkelig mit dem Scheitel U und dem Scheitelwinkel 2β .

Die Fußpunktdreiecke der BROCARDSchen Punkte

Tafel 23

Für das Fußpunktdreieck $\Delta C_1 C_2 C_3$ von B_1 folgt aus den Thaleskreisen über $A_2 B_1$ bzw. über $A_1 B_1$

$$\left. \begin{aligned}\angle B_1 C_1 C_2 &= \angle B_1 A_2 C_2 = \beta \\ \angle B_1 C_1 C_3 &= \angle B_1 A_1 C_3 = \alpha_1 - \beta\end{aligned} \right\} + \Rightarrow \angle C_3 C_1 C_2 = \alpha_1 \text{ und zyklisch}$$

Daher

$$\Delta C_1 C_2 C_3 \sim \Delta A_1 A_2 A_3$$

und analog für das 2.Fußpunktdreieck $\Delta D_1 D_2 D_3$

$$\Delta D_1 D_2 D_3 \sim \Delta A_1 A_2 A_3$$

Die Fußpunktdreiecke der beiden BROCARDSchen Punkte sind dem gegebenen Dreieck ähnlich

Der 1. BROCARDSche Punkt von $\Delta A_1A_2A_3$ ist auch der 1. BROCARDsche Punkt von $\Delta C_1C_2C_3$.
 Der 2. BROCARDSche Punkt von $\Delta A_1A_2A_3$ ist auch der 2. BROCARDsche Punkt von $\Delta D_1D_2D_3$.

Aus dem rechtwinkeligem Dreieck $\Delta A_1B_1C_1$ folgt

$$B_1C_1 = B_1A_1 \sin \beta$$

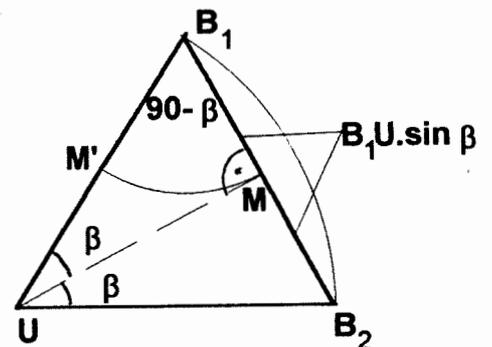
Dreht man $\Delta C_1C_2C_3$ um B_1 durch den Winkel $90-\beta$, so kommt C_1 auf A_1B_1 zu liegen und C_1C_2 wird parallel zu A_1A_2 . Dann ist das gedrehte Dreieck $\Delta C_1C_2C_3$ und das gegebene Dreieck zentrisch ähnlich mit dem Zentrum B_1 . Für das Ähnlichkeitsverhältnis gilt

$$B_1A_1 : B_1C_1 = B_1A_1 : B_1A_1 \sin \beta = 1 : \sin \beta$$

Analog ist $\Delta D_1D_2D_3$ nach Drehung um B_2 durch den Winkel $90-\beta$ (im entgegengesetzten Drehsinn wie oben) ebenfalls mit $\Delta A_1A_2A_3$ zentrisch ähnlich mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $1 : \sin \beta$

Die beiden Fußpunktdreiecke $\Delta C_1C_2C_3$ und $\Delta D_1D_2D_3$ sind kongruent und haben daher denselben Umkreisradius $r \cdot \sin \beta$

In der Ähnlichkeit der Dreiecke $\Delta A_1A_2A_3$ und $\Delta C_1C_2C_3$ entspricht dem Umkreismittelpunkt U des Dreiecks $\Delta A_1A_2A_3$ der Umkreismittelpunkt M des Dreiecks $\Delta C_1C_2C_3$. In der um den Winkel $90-\beta$ gedrehten Lage von $\Delta C_1C_2C_3$ liegen U und der gedrehte Umkreismittelpunkt M' auf einem Ähnlichkeitsstrahl durch B_1 , wobei gilt $B_1M' = B_1U \cdot \sin \beta$. Bei der Rückdrehung in die ursprüngliche Lage gelangt dann M' in den Mittelpunkt M der beiden BROCARDSchen Punkte (Seite 96 und Tafel 22), wie man nebenstehender Figur entnimmt. Dieselbe Überlegung gilt analog für den Umkreismittelpunkt von $\Delta D_1D_2D_3$.



Die Fußpunktdreiecke der BROCARDSchen Punkte haben denselben Umkreis, dessen Mittelpunkt M die Strecke B_1B_2 halbiert

Betrachten wir im Umkreis der beiden Fußpunktdreiecke das Sehnenviereck $D_3C_2C_3C_1$, so gilt

$$\angle C_1C_3C_2 = \alpha_3 \Rightarrow \angle C_1D_3C_2 = 180-\alpha_3 \Rightarrow \angle A_2D_3C_1 = \alpha_3$$

Daraus folgt wegen der auftretenden Wechselwinkel (und zyklisch)

$$\left. \begin{array}{l} D_3C_1 \parallel A_3A_1 \\ D_1C_2 \parallel A_1A_2 \\ D_2C_3 \parallel A_2A_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Wegen dieser Parallelitäten sind die Verbindungs-} \\ \text{linien der Dreiecksecken } A_i \text{ mit den Mittelpunkten} \\ \text{der Strecken } D_jC_k \text{ Schwerlinien des Dreiecks } \Delta A_1A_2A_3 \end{array}$$

Die Verbindungslinien der Dreiecksecken A_i mit den Sehnemitten D_jC_k ((ijk) = (123)) gehen durch den Schwerpunkt S von $\Delta A_1A_2A_3$

Aus dem Sehnenviereck $D_2C_1C_2C_3$ folgt

$$\angle C_1C_3C_2 = \alpha_3 \Rightarrow \angle C_1D_2C_2 = 180 - \alpha_3 \Rightarrow \angle C_2D_2A_2 = \alpha_3$$

demnach ist C_2D_2 antiparallel zu A_1A_3 (und zyklisch). Man betrachte nun Tafel 19: Die Gerade $K_{12}K_{23}$ ist ebenfalls antiparallel zu A_1A_3 und daher parallel zu C_2D_2 . Der Mittelpunkt X der Strecke $K_{12}K_{23}$ und der Mittelpunkt von C_2D_2 liegen daher auf derselben Geraden durch A_2 . Demnach gilt

Die Verbindungslinien der Ecken A_i mit den Mitten der Strecken C_iD_i gehen durch den LEMOINESchen Punkt des Dreiecks $\Delta A_1A_2A_3$

Der Zusammenhang zwischen B_1, B_2, L und U . Der Kreis von BROCARD

Tafel 24

Wir konstruieren im $\Delta A_1A_2A_3$ den LEMOINESchen Punkt L (als Hilfskonstruktion nach Seite 93). Dann konstruieren wir den 2. LEMOINESchen Kreis und zeichnen das Dreieck $\Delta L_{32}L_{21}L_{13}$. Ferner zeichnen wir die zu den Punkten L_{32}, L_{13}, L_{21} gehörigen MIQUELSchen Kreise ($L_{32}L_{13}A_2$), ($L_{13}L_{21}A_3$), ($L_{21}L_{32}A_1$). Wegen der rechten Winkel (siehe Seite 93)

$$\angle L_{13}L_{32}A_2 = \angle L_{21}L_{13}A_3 = \angle L_{32}L_{21}A_1 = 90^\circ$$

sind alle MIQUELSchen Kreise Thaleskreise. Ihr Schnittpunkt B_1 ist der MIQUELSche Punkt. Nach dem Peripheriewinkel- bzw. dem Sehnen-Tangentensatz gilt in Thaleskreis über A_1L_{32}

$$\angle B_1A_1L_{32} = \angle B_1L_{21}L_{32} = \angle B_1L_{32}L_{13}$$

Durch Übernahme des letzten Winkels als Peripheriewinkel im Thaleskreis über A_2L_{13} usw. erkennt man

Der Punkt B_1 von MIQUEL ist der 1.BROCARDsche Punkt im $\Delta A_1A_2A_3$. Er ist gleichzeitig der 1.BROCARDsche Punkt für $\Delta L_{32}L_{13}L_{21}$.

Analog gilt

$\Delta A_1A_2A_3$ und $\Delta L_{31}L_{12}L_{23}$ haben den 2.BROCARDschen Punkt gemeinsam

Dreht man Dreieck $\Delta L_{32}L_{13}L_{21}$ um B_1 durch 90° , so kommt es mit Dreieck $\Delta A_1A_2A_3$ in zentrisch ähnliche Lage. Wegen des Thaleskreises über A_1L_{32} gilt

$$\angle A_1B_1L_{32} = 90^\circ$$

daher

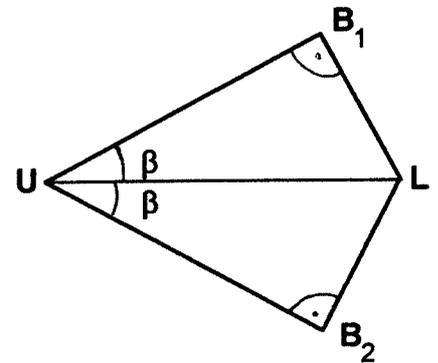
$$B_1L_{32} = A_1B_1 \cdot \tan \beta \Rightarrow \frac{B_1L_{32}}{A_1B_1} = \tan \beta$$

Daher ist das Ähnlichkeitsverhältnis von $\Delta L_{32}L_{13}L_{21}$ zu $\Delta A_1A_2A_3$ gleich $\tan \beta$.

Da L der Umkreismittelpunkt von $\Delta L_{32}L_{13}L_{21}$ ist, müssen die Punkte L und U in zentrischer Ähnlichkeitslage mit B_1 in gerader Linie liegen, wobei gilt

$$\frac{B_1L}{B_1U} = \tan \beta \Rightarrow B_1L = B_1U \cdot \tan \beta$$

In Originallage (nach Rückdrehung um 90°) gilt daher $\angle UB_1L = 90^\circ$. Wegen $\angle B_1UB_2 = 2\beta$, läßt sich die Lage von B_2 leicht rekonstruieren. Man erkennt



Die Punkte UB_1LB_2 liegen auf dem Kreis von BROCARD. Dessen Mittelpunkt halbiert die Strecke UL

Das Dreieck von Frank MORLEY

Tafel 25

Schneidet man jene Winkeldrittel der Winkel α_i und α_j , welche der Seite A_iA_j anliegen, im Punkte M_k ($(ijk) = (123)$), so bilden die Punkte $M_1M_2M_3$ ein gleichseitiges Dreieck

Euklides IX, S.40-55 (9 Beweise). Unser Beweis von J.M.CHILD

O.B.d.A. sei $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$. Wir setzen $\varphi_1 := \frac{\alpha_1}{3}$, $\varphi_2 := \frac{\alpha_2}{3}$, $\varphi_3 := \frac{\alpha_3}{3}$

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \text{ und } \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 60$$

Wir konstruieren zunächst die Punkte X und M_1 . Im Innern der Strecken A_2X und A_3X konstruieren wir die Punkte M_3 und M_2 so, daß gilt

$$\angle A_2M_1M_3 = 60 + \varphi_3$$

$$\angle A_3M_1M_2 = 60 + \varphi_2$$

Im Dreieck ΔA_2XA_3 ist M_1 der Inkreismittelpunkt, daher gilt

$$\xi := \angle A_3XM_1 = \angle A_2XM_1$$

Daher

$$2\xi + 2\varphi_2 + 2\varphi_3 = 180 \Rightarrow \underline{\xi} = 90 - (\varphi_2 + \varphi_3) = \underline{\varphi_1 + 30}$$

Daher ist im Dreieck ΔA_2M_1X

$$\angle A_2M_1X = 180 - (\xi + \varphi_2) = 150 - (\varphi_1 + \varphi_2) = 90 + \varphi_3$$

Analog

$$\angle A_3M_1X = 90 + \varphi_2$$

Daraus folgt, daß M_3 und M_2 wirklich im Innern der Strecken A_2X bzw. A_3X liegen und es ist

$$\begin{aligned} \angle M_3M_1M_2 &= \angle A_3M_1X + \angle A_2M_1X - \angle A_3M_1M_2 - \angle A_2M_1M_3 = \\ &= (90 + \varphi_2) + (90 + \varphi_3) - (60 + \varphi_3) - (60 + \varphi_2) = \underline{60^\circ} \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \angle A_2M_1A_3 &= 360 - \angle A_3M_1X - \angle A_2M_1X = 360 - (90 + \varphi_3) - (90 + \varphi_2) = \\ &= 180 - (\varphi_2 + \varphi_3) = 180 - (60 - \varphi_1) = \underline{120 + \varphi_1} \end{aligned}$$

Im Dreieck $\Delta M_1A_2M_3$ gilt

$$\angle M_1M_3A_2 = 180 - \varphi_2 - (60 + \varphi_3) = 120 - (\varphi_2 + \varphi_3) = \underline{60 + \varphi_1}$$

Analog

$$\angle A_3M_2M_1 = \underline{60 + \varphi_1}$$

Da M_1 der Inkreismittelpunkt von ΔA_3XA_2 ist, hat M_1 von den Seiten XA_2 bzw. XA_3 gleiche Abstände, die gegendiese Seiten gleich geneigten Strecken M_1M_2 und M_1M_3 sind daher gleich lang. Da sie einen Winkel von 60° einschließen, ist das Dreieck

$$\Delta M_2M_1M_3 \text{ gleichseitig .}$$

Es verbleibt noch der Nachweis, daß die Punkte M_2 und M_3 auf den Winkeldritteln von α_1 liegen.

Laut Voraussetzung gilt

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \Rightarrow A_2A_3 \leq A_3A_1 \leq A_1A_2$$

Im Dreieck $\Delta A_2 M_1 A_3$ ist ferner aus demselben Grunde wegen

$$\angle A_2 M_1 A_3 = 120 + \varphi_1 > \begin{cases} \varphi_2 \Rightarrow M_1 A_3 < A_2 A_3 \leq A_3 A_1 \leq A_1 A_2 \\ \varphi_3 \Rightarrow M_1 A_2 < A_2 A_3 \leq A_3 A_1 \leq A_1 A_2 \end{cases}$$

Trägt man von A_2 bzw. A_3 die Strecken $A_2 Y_3 := A_2 M_1$ bzw. $A_3 Y_2 := A_3 M_1$ auf $A_2 A_1$ bzw. $A_3 A_1$ ab, so liegen Y_2 bzw. Y_3 im Innern der Strecken $A_3 A_1$ bzw. $A_2 A_1$. Es folgt weiter

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_2 M_1 M_3 &= \Delta A_2 Y_3 M_3 \Rightarrow Y_3 M_3 = M_1 M_3 = M_2 M_3 \\ \Delta A_3 M_1 M_2 &= \Delta A_3 Y_2 M_2 \Rightarrow Y_2 M_2 = M_1 M_2 = M_2 M_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y_3 M_3 = Y_2 M_2$$

Ferner ist

$$\underline{\angle Y_2 M_2 M_3} = 360 - 2(60 + \varphi_1) - 60 = 180 - 2\varphi_1 = \underline{\angle Y_3 M_3 M_2}$$

In den gleichschenkeligen Dreiecken $\Delta Y_2 M_2 M_3$ und $\Delta Y_3 M_3 M_2$ gilt demnach

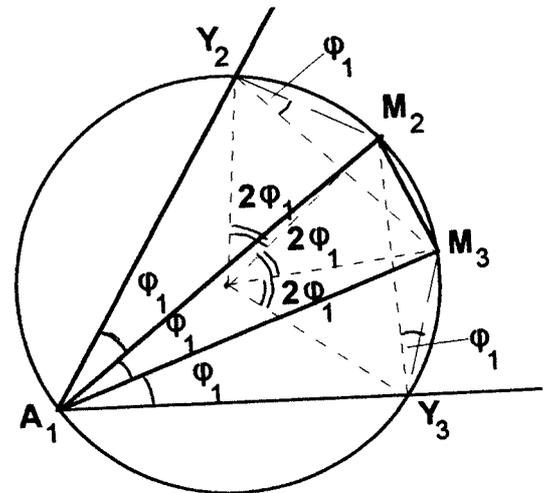
$$\underline{\angle M_2 Y_2 M_3} = \angle M_3 Y_3 M_2 = \frac{1}{2} (180 - \angle Y_2 M_2 M_3) = \frac{1}{2} (180 - 180 + 2\varphi_1) = \underline{\varphi_1}$$

Nach dem Peripheriewinkelsatz liegen daher die vier Punkte Y_2, M_2, M_3, Y_3 auf demselben Kreis. Die Zentriwinkel zu jeder der Sehnen $Y_2 M_2 = M_2 M_3 = M_3 Y_3$ ist daher $2\varphi_1$, der Zentriwinkel für den Bogen $Y_2 Y_3$ ist daher $6\varphi_1$, der zugehörige Peripheriewinkel daher $3\varphi_1 = \alpha_1$, d.h. A_1 liegt auf diesem Kreis.

Zieht man die Verbindungslinien $A_1 M_2$, $A_1 M_3$, so gilt

$$\angle Y_2 A_1 M_2 = \angle M_2 A_1 M_3 = \angle M_3 A_1 Y_3 = \varphi_1$$

Die Punkte M_2, M_3 liegen daher auf Winkeldritteln von α_1 .



Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Die Länge einer Strecke	1
Das Teilverhältnis dreier Geraden	1
Bezeichnungsweisen für das ebene Dreieck	3
Kongruenzsätze	3
Ähnlichkeitssätze	3
Winkelsumme eines Dreiecks, Außenwinkelsatz	4
Das rechtwinkelige Dreieck	4
Der Transversalensatz von Matthew STEWART	5
Anwendungen des Satzes von STEWART	7

Hilfssätze über Kreise

Der Peripheriewinkelsatz, der Satz von THALES	8
Supplementäre Peripheriewinkel	8
Der Sehnen-Tangentenwinkel	9
Der Satz von PTOLEMAIOS	9
Andere Herleitung des Satzes von PTOLEMAIOS	11
Anwendungen des Satzes von PTOLEMAIOS	12
Potenzsätze am Kreis	13
Pol und Polare am Kreis	15
Die Inversion (Spiegelung am Kreis)	16

Dreiecksgeometrie im eigentlichen Sinne

Der Satz von MENELAOS	20
Der Satz von CEVA	21
Dreieckskoordinaten eines Punktes	22
Die isotome Abbildung (Verwandtschaft der Seitengegenpunkte)	24
Der Winkelbegriff	25
Darstellung des Satzes von CEVA durch Sinusverhältnisse	27
Isogonale Gerade	28
Isogonale Abbildung bezüglich eines Dreiecks (Verwandtschaft der Winkelgegenpunkte)	29
Die Dreieckspolarität	30

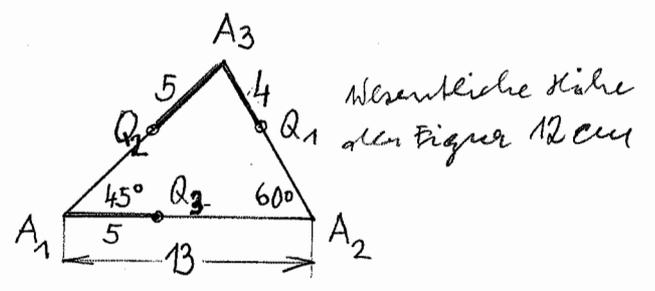
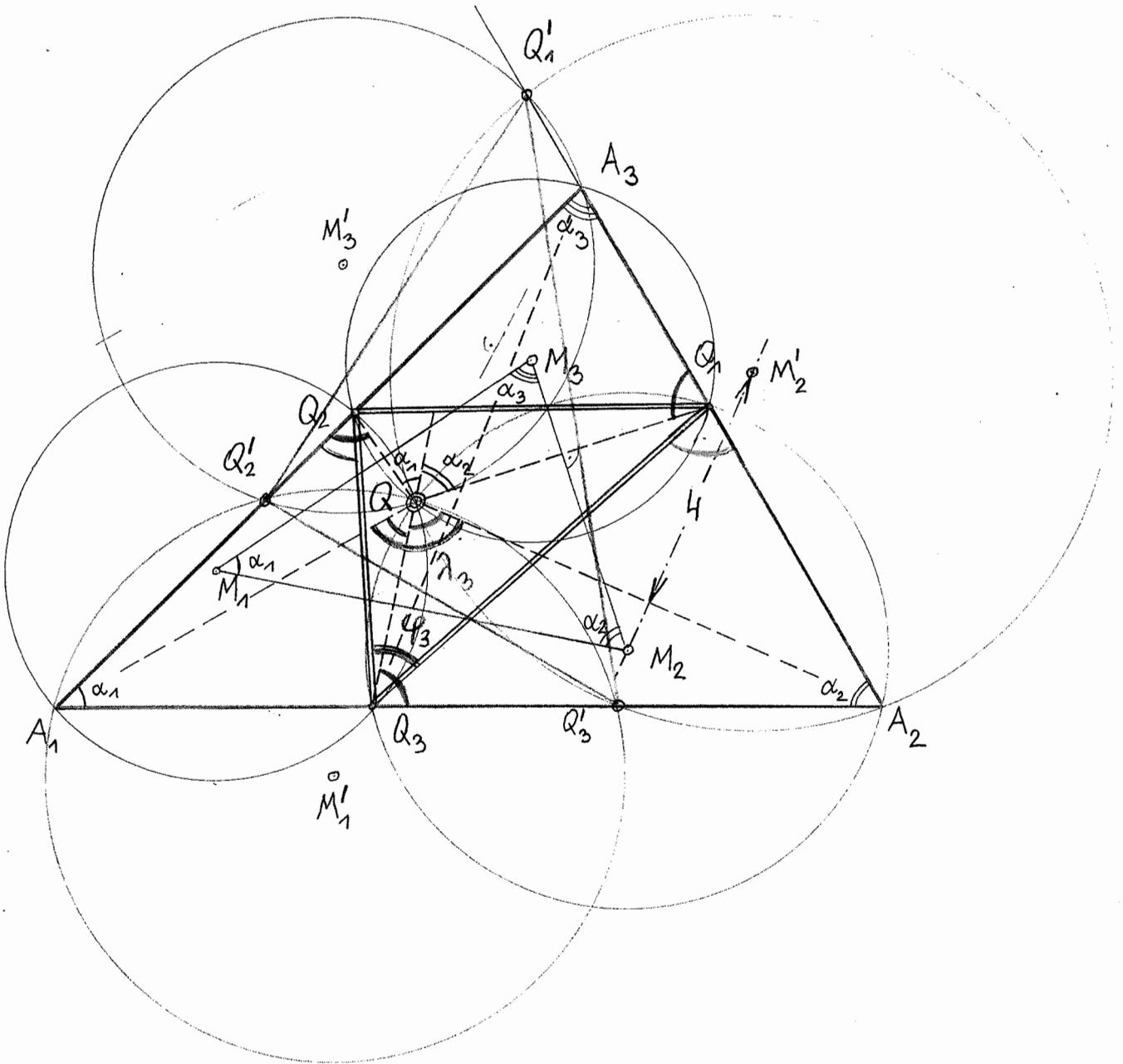
Spezielle Punkte eines Dreiecks

Der Umkreismittelpunkt	31
Einige Dreieckssätze, die mit Hilfe des Umkreises hergeleitet werden können	32
Schwerlinien (Medianen, Mittellinien), Schwerpunkt	34
Das Mittendreieck	35
Der Höhenschnittpunkt	36
Die EULERSSche Gerade	37
Der Kosinussatz	37
Höhenschnittpunkt und Umkreis	38
Die Sätze von MIQUEL	38
Fußpunktdreiecke	40
Satz von WALLACE	42

Der Punkt von TORRICELLI	42
Das Problem von FERMAT	43
Die Winkelhalbierenden der Dreieckswinkel	44
Inkreismittelpunkt	46
Der Kreis von APOLLONIOS	47
Gegenseitige Lage der drei APOLLONischen Kreise eines Dreiecks. Isodynamische Punkte.	
Gerade von LEMOINE	50
Zusammenhänge zwischen In- und Umkreis sowie den Ankreisen.....	52
Beziehungen zum Flächeninhalt.....	53
Der Punkt von GERGONNE	56
Der Punkt von NAGEL	57
Zusammenhang von I und N	58
Der Begriff des Schwerpunktes.....	60
Das Höhenfußpunktedreieck (orthozentrisches Dreieck)	62
Problem von FAGNANO.....	64
Der Sechspunktekreis von TAYLOR.....	66
Der Neunpunktekreis von FEUERBACH.....	68
Zusammenhang zwischen I und U	71
Die Geraden von WALLACE	72
Der Abstand des Mittelpunktes F des FEUERBACHkreises vom Inkreismittelpunkt I	76
Berechnung des Abstandes FI_2	79
Der Punkt von LEMOINE	80
Der Punkt von LEMOINE und das Tangentendreieck.....	82
LEMOINEScher Punkt und LEMOINESche Gerade	83
Das Fußpunktedreieck des Punktes von LEMOINE	84
Der 1. Kreis von LEMOINE	86
Der 2. Kreis von LEMOINE	90
Der 1. BROCARDSche Punkt	93
Der 2. BROCARDSche Punkt	95
Die Fußpunktedreiecke der BROCARDSchen Punkte.....	96
Der Zusammenhang zwischen B_1, B_2 , Lund U. Der Kreis von BROCARD	98
Das Dreieck von MORLEY	99
Inhaltsverzeichnis	102

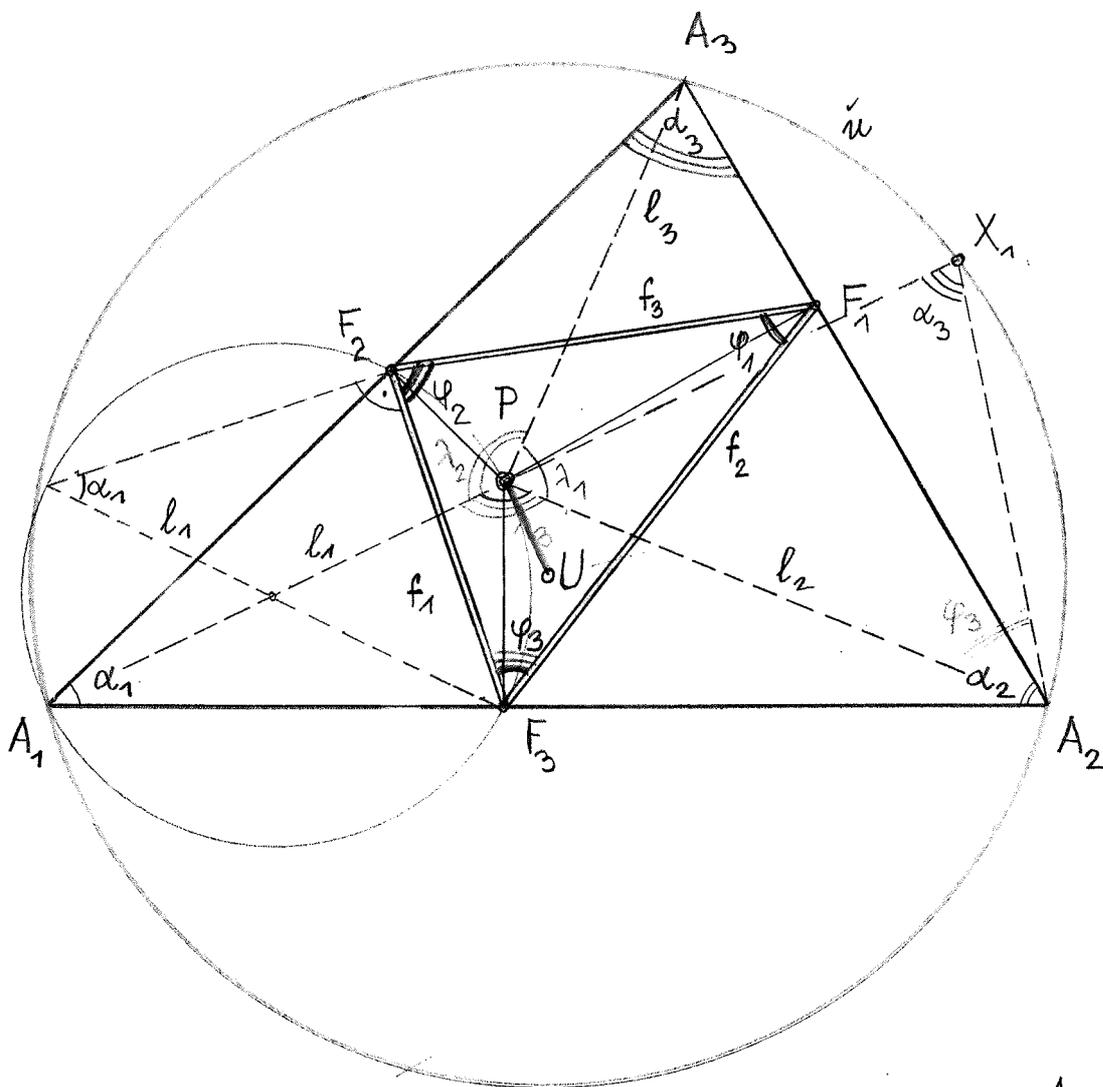
Tafel 1

Sätze von MIQUEL

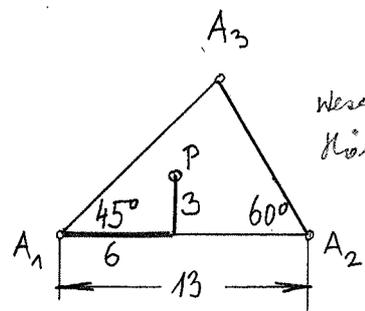


Tafel 2

Das Fußpunktedreieck



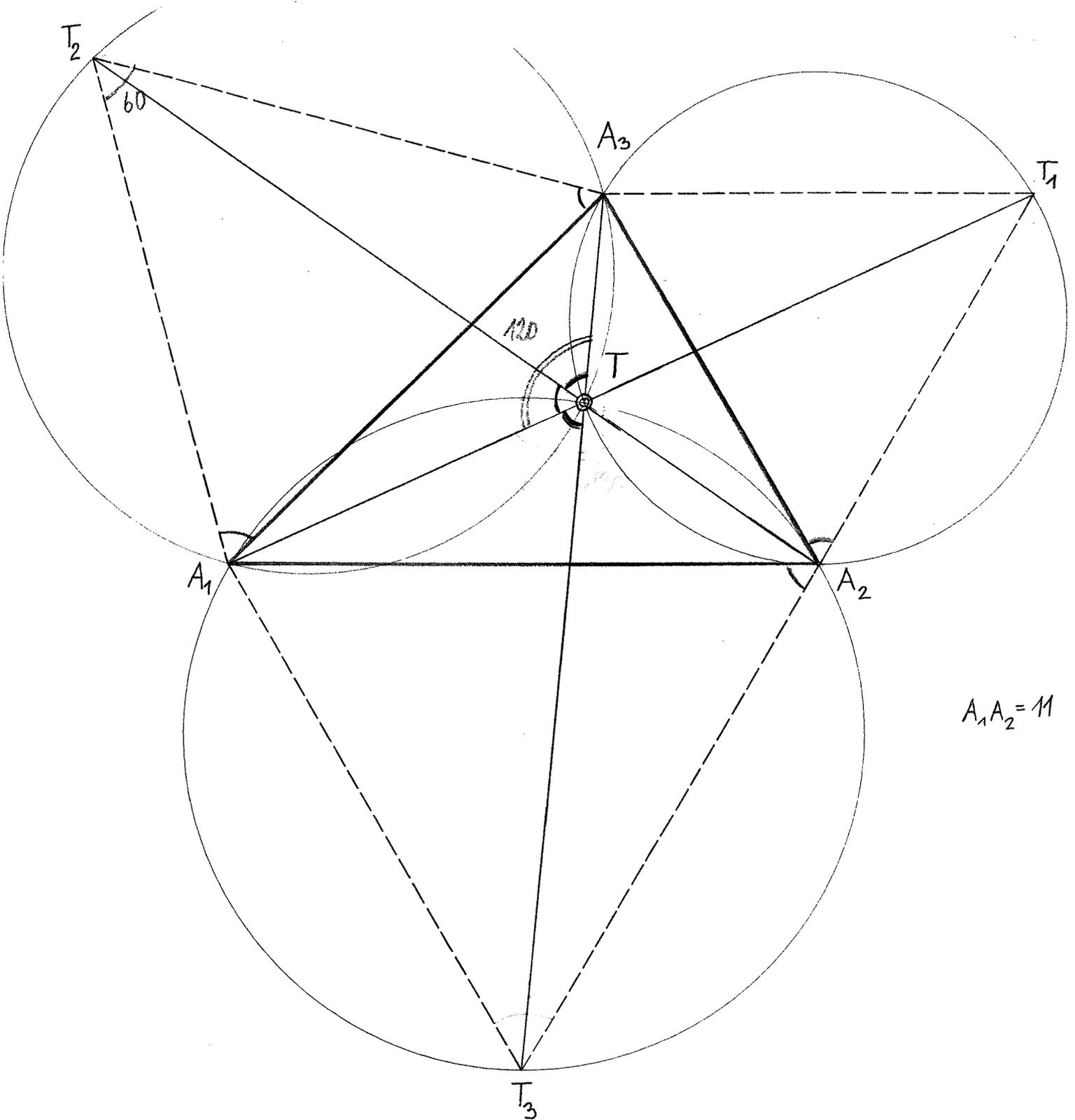
gleich Umkreis zeichnen!

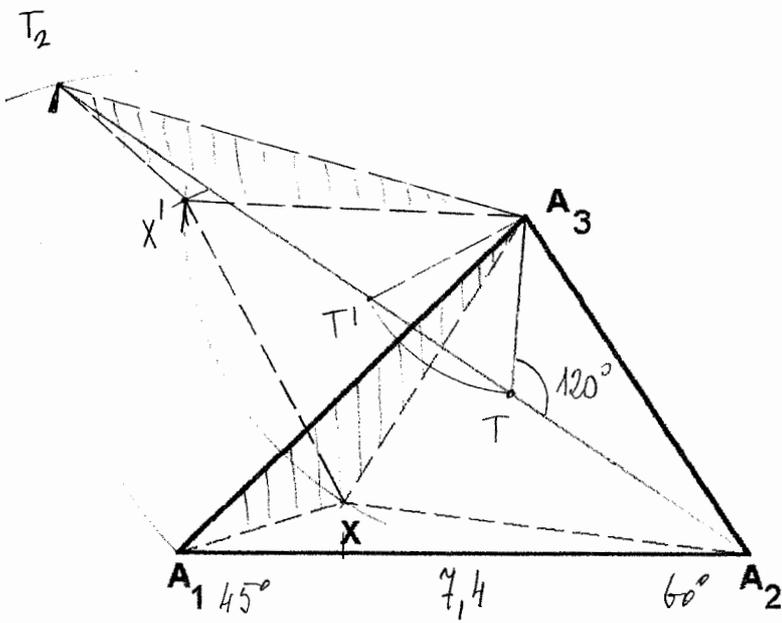


Wesentliche
Höhe 11cm

Tafel 3

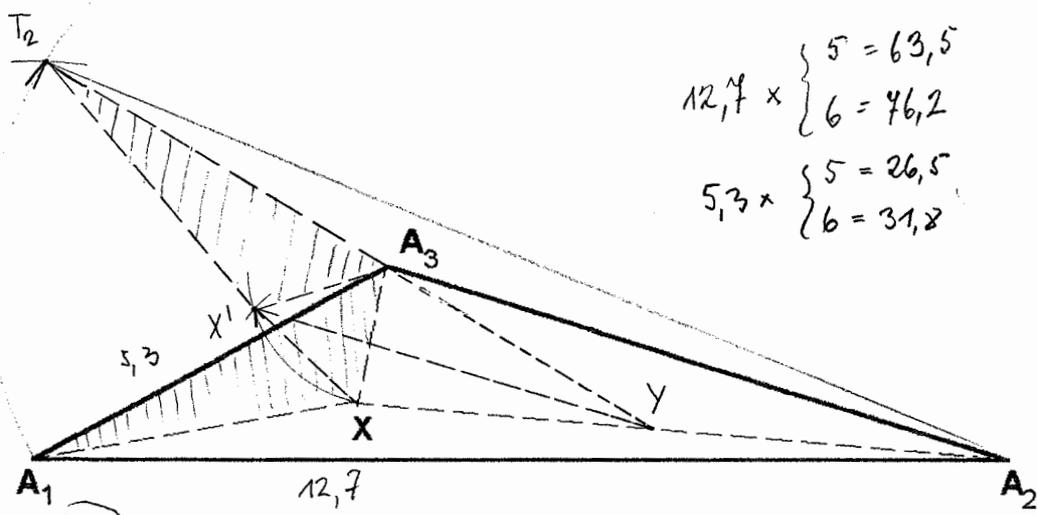
Der Punkt von TORRICELLI





$$7,4 \times \begin{cases} 5 = 37 \\ 6 = 44,4 \end{cases}$$

$$X(2,15 | 0,68) \times \begin{cases} 5 = (10,75 | 3,4) \\ 6 = (12,9 | 4,08) \end{cases}$$

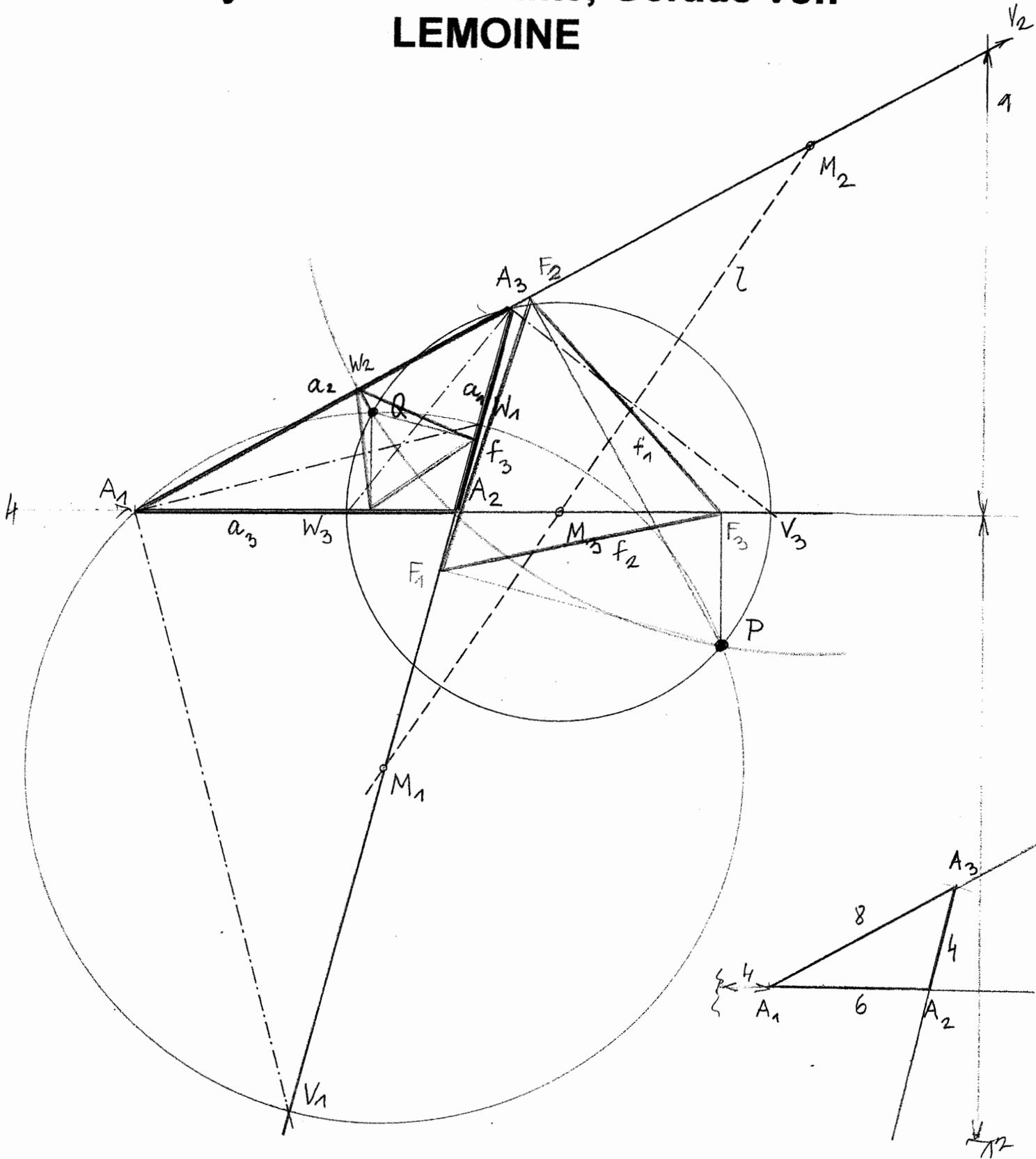


$$12,7 \times \begin{cases} 5 = 63,5 \\ 6 = 46,2 \end{cases}$$

$$5,3 \times \begin{cases} 5 = 26,5 \\ 6 = 31,8 \end{cases}$$

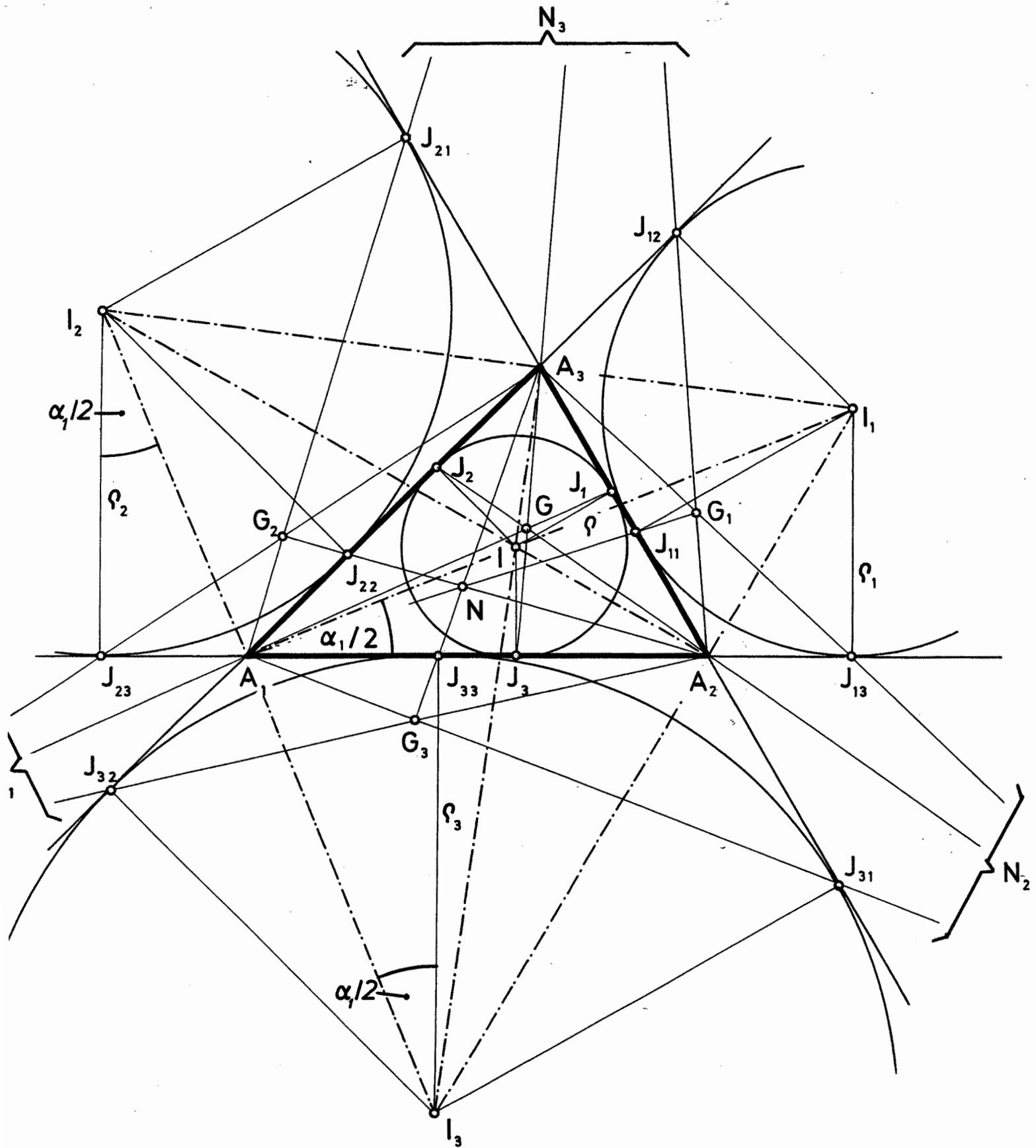
$$X(4,3 | 0,8) \times \begin{cases} 5 = (21,5 | 4) \\ 6 = (25,8 | 4,8) \end{cases}$$

Tafel 4 Isodynamische Punkte, Gerade von LEMOINE



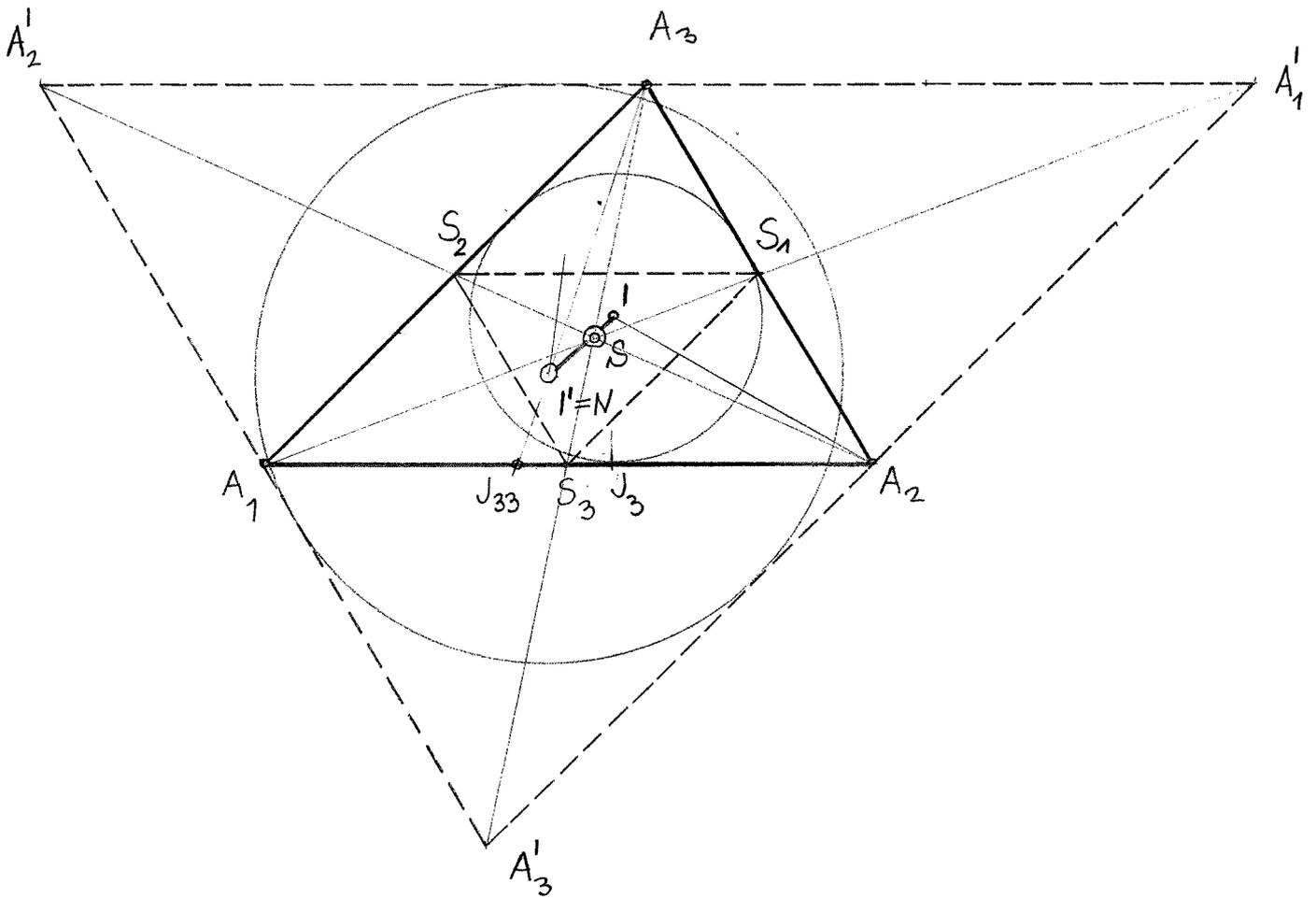
Isodynamische Punkte, Gerade von
LEMOINE

Tafel 5 In und Ankreise



TAFEL 5

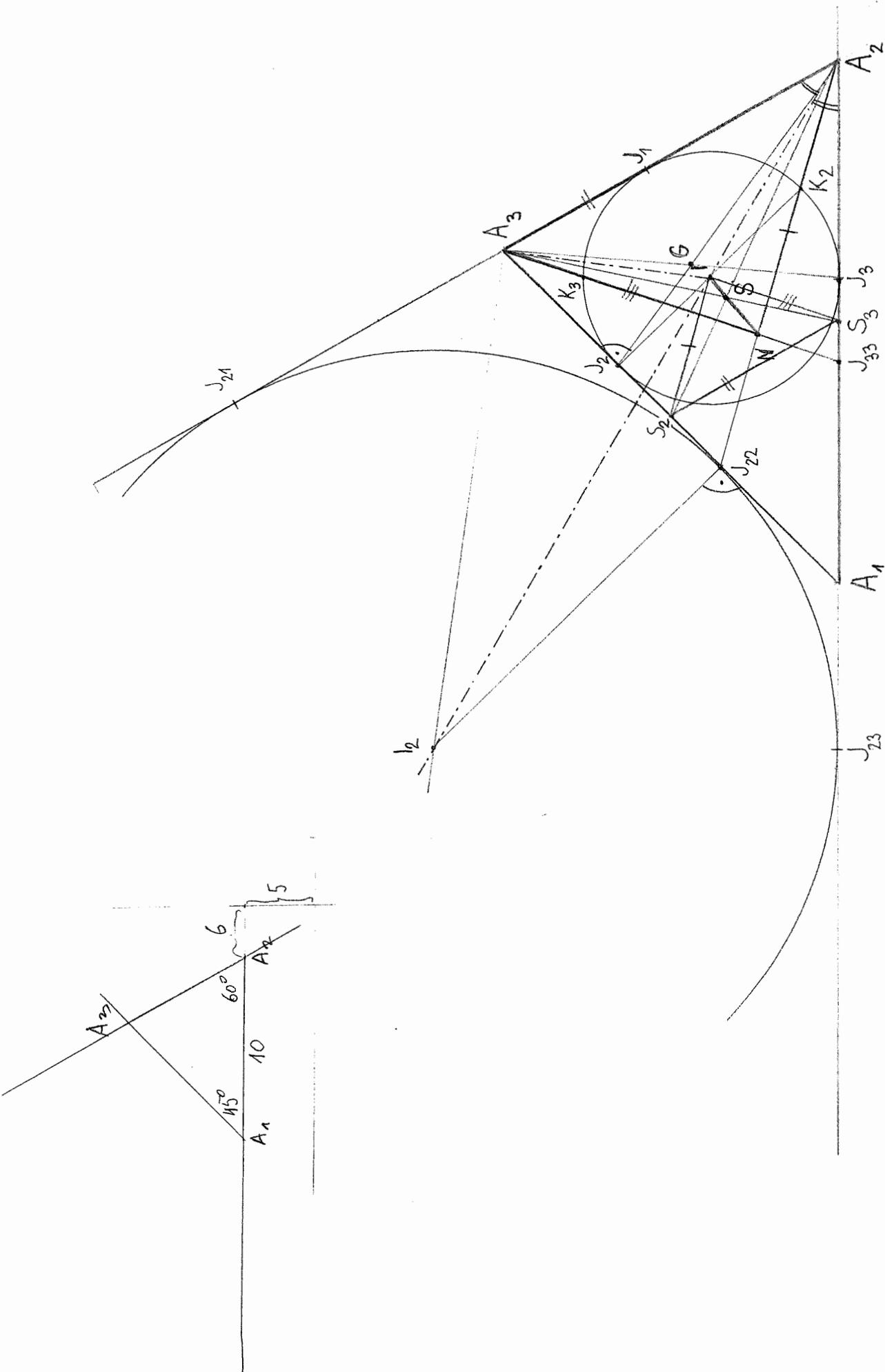
$$A_1' A_2' = 17$$



Inkreismittelpunkt und Punkt von NAGEL

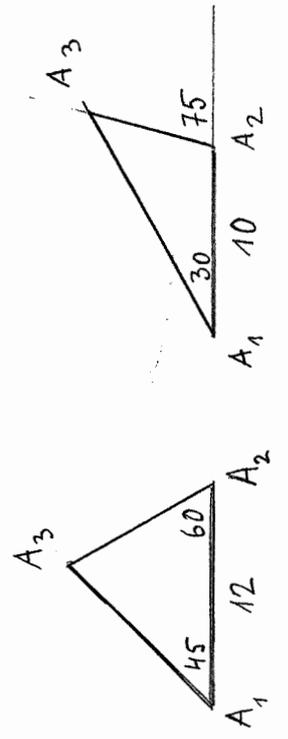
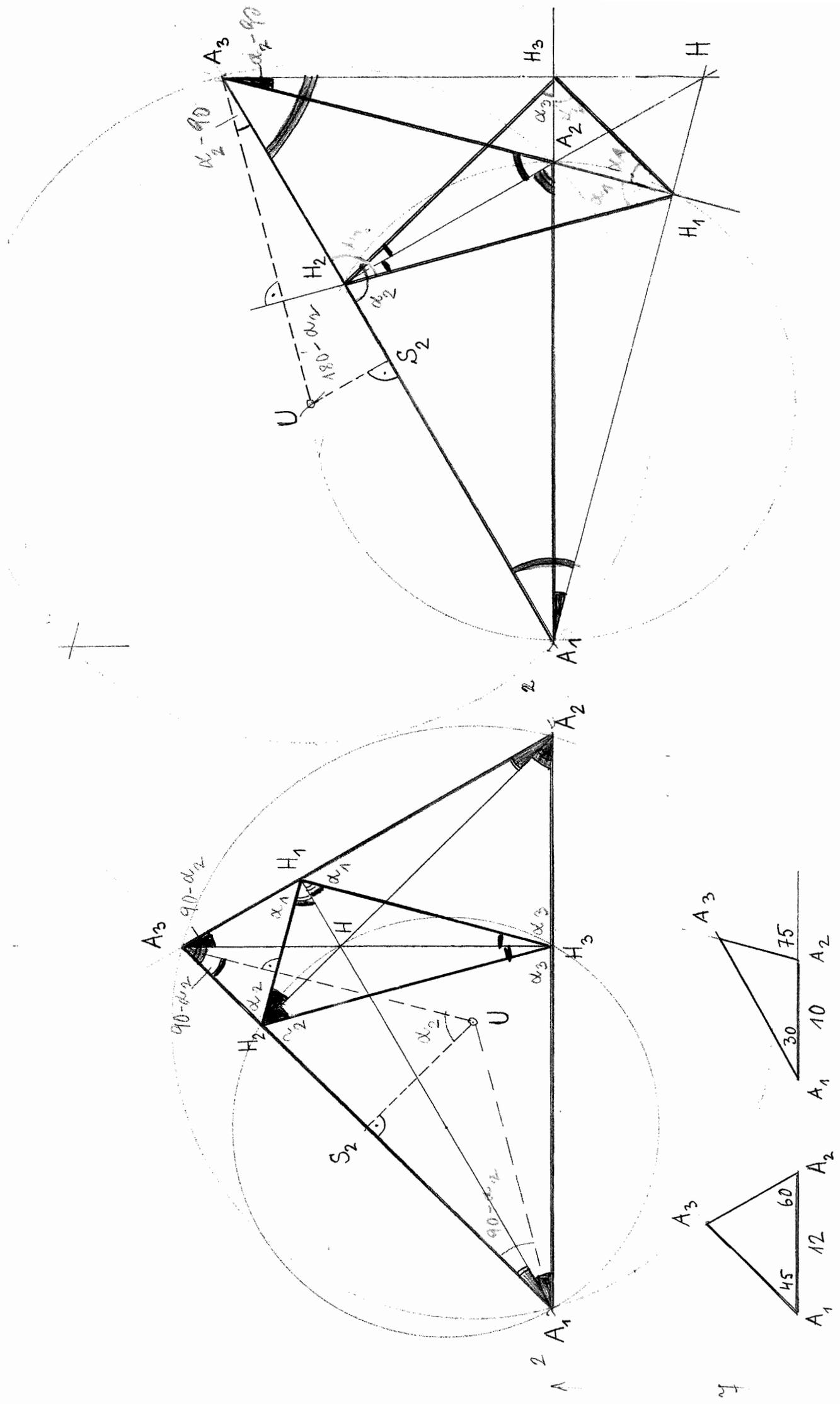
Tafel 6

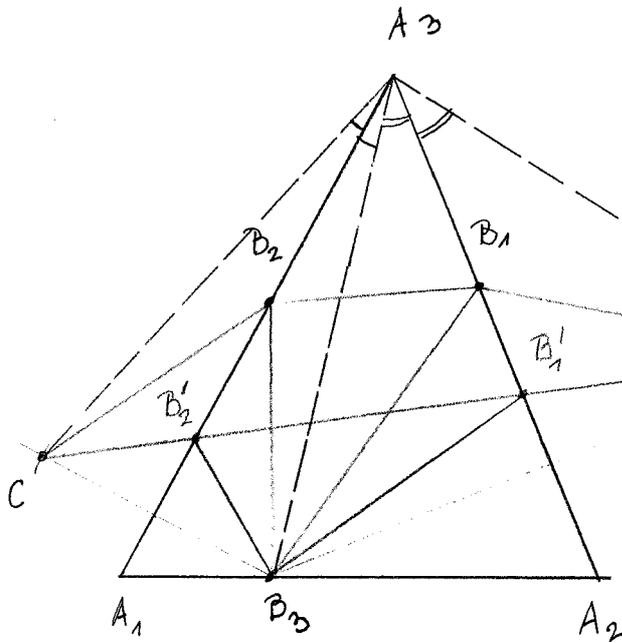
Zusammenhang von I und N



Tafel 7

Das orthozentrische Dreieck





$$A_1A_2 = 6,2 \cdot 5 = 31$$

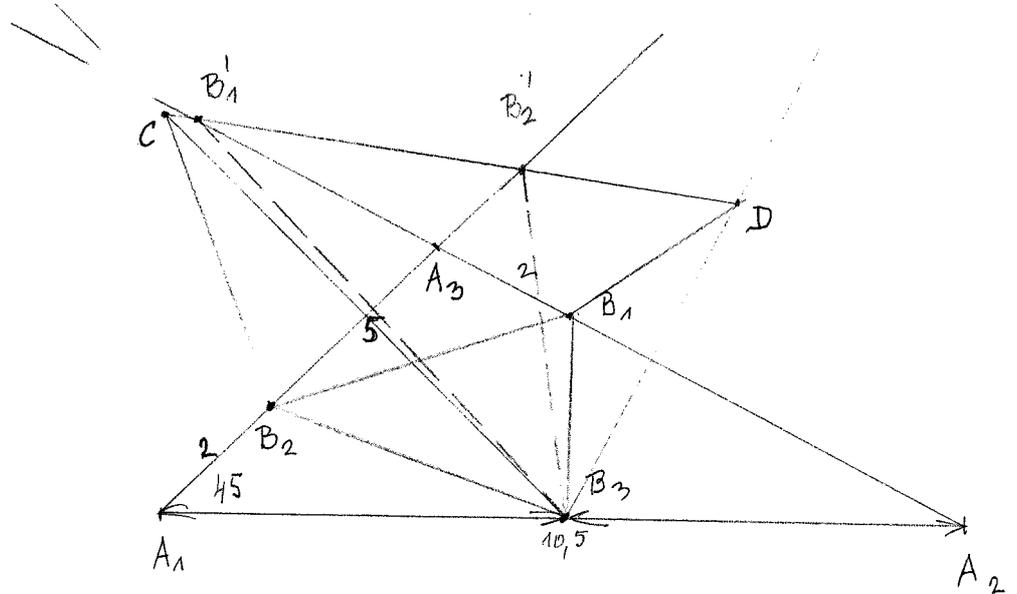
$$A_2A_3 = 7,1 \cdot 5 = 35,5$$

$$A_3A_1 = 7,5 \cdot 5 = 37,5$$

$$A_1B_3 = 1,9 \cdot 5 = 9,5$$

$$A_1B_2 = 4,1 \cdot 5 = 20,5$$

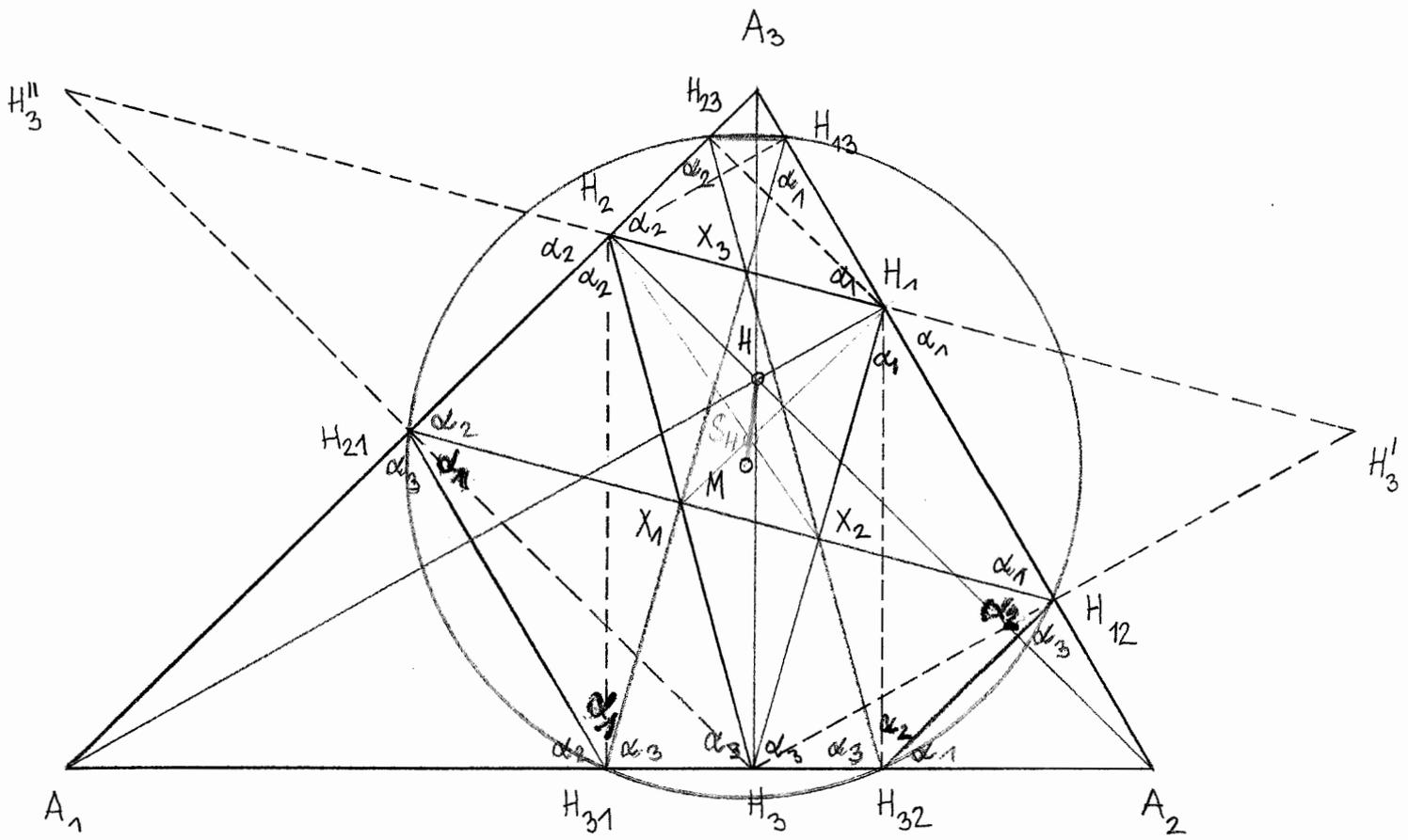
$$A_2B_1 = 4,2 \cdot 5 = 21$$



$$A_1A_2 = 10,5 \times 5 = 52,5$$

Tafel 8

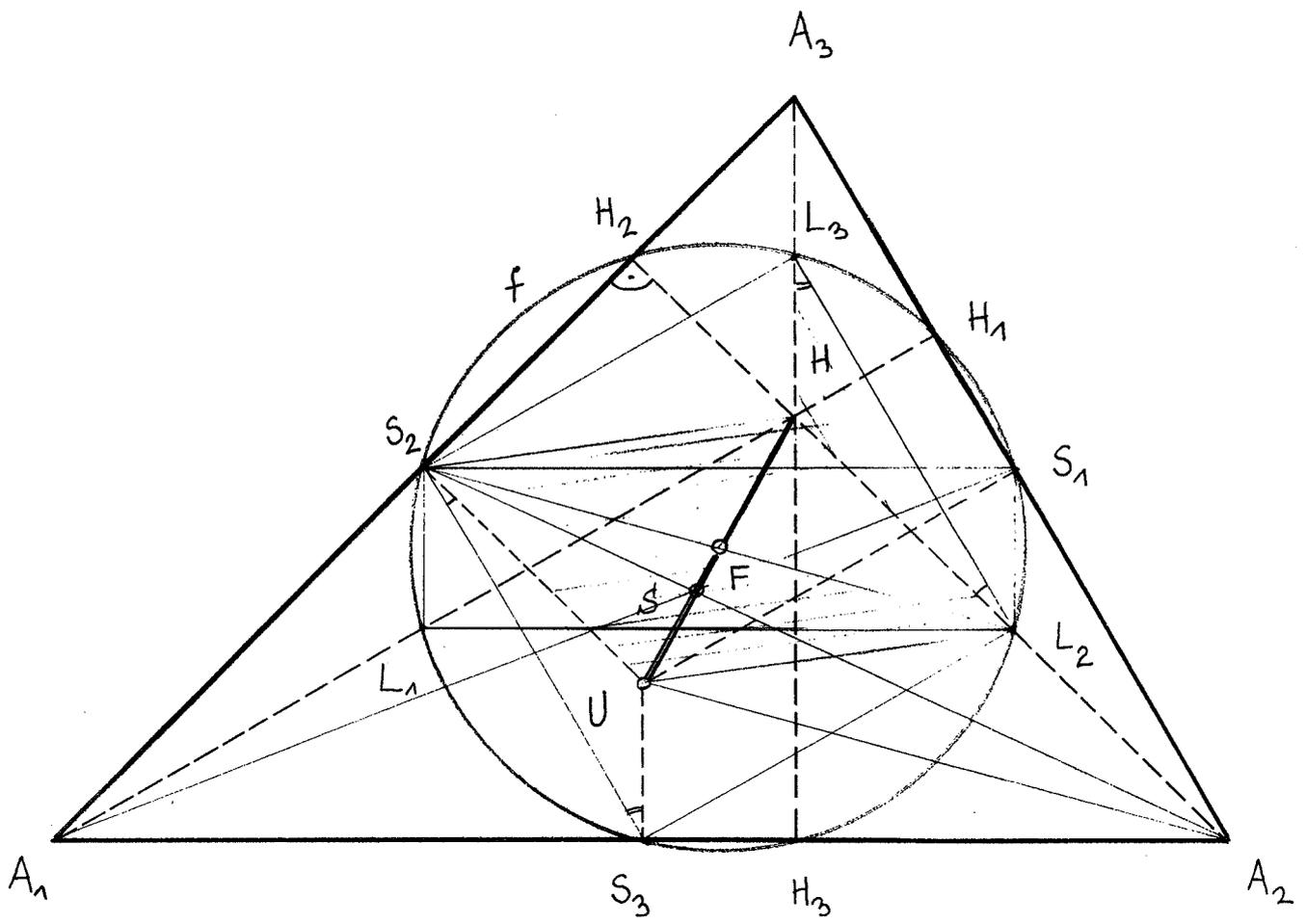
Der Sechspunktekreis von TAYLOR



$$A_1A_2 = 15$$

Tafel 9

Der Neunpunktekreis von FEUERBACH



$$A_1 A_2 = 16$$

x 4

Die Familie Feuerbach

Paul Johann Anselm
(seit 1803) Ritter von FEUERBACH
Jurist. Begründer des positiven Rechts u.d.
Vergeltungstheorie im Strafrecht

Josef Anselm
1798-1851
Kunsthistoriker
Archäologe

Eduard August
1803-1843
Jurist

Ludwig Andreas
1804-1877
katholisch
gerauft

Friedrich
1807-??
private Literatur-
und Sprachstudien

Anselm
1829-1880
Maler

Karl Wilhelm
1800-1834
Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks 1822 (Feuerbachkreis)
Grundriß zur analytischen Untersuchung der dreieckigen Pyramide (1827)
Starb an den Folgen von vermutlich unberechtigten Verdächtigunhen und Inhaftierung wegen des Vorwurfs der aktiven Teilnahme an burschenschaftlichen Verschwörungen.

Paul Johann Anselm (1775 - 1833)
(seit 1808) Ritter von FEUERBACH

Friedrich 1807 -
(Literatur und Sprache)
(Müssen, Privat)

(Privat: Begründer des positiven Rechts
in d. Vergebungstheorie im Strafrecht)

Ludwig Andreas (1804 - 1877)
Katholisch geprägt
(Philosoph)

Edward Hügel
(1803 - 43)
(Privat)

Karl Wilhelm (1800 - 1834)
(Mathematiker)
Feuerbachs
eigenen Leisten Linien
merkmalstheoretischer Punkte
des geometrischen Dreiecks 1822

Josef Anselm (1798 - 1851)
(Kunsttheoretiker, Architekt)

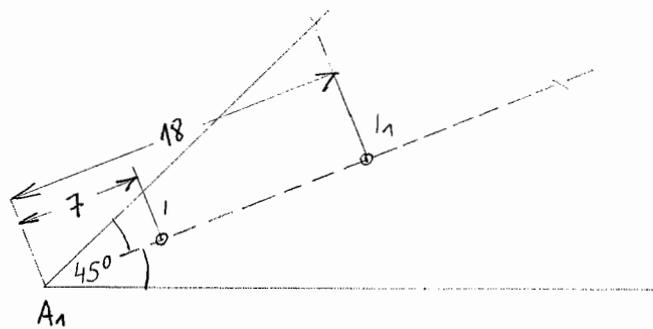
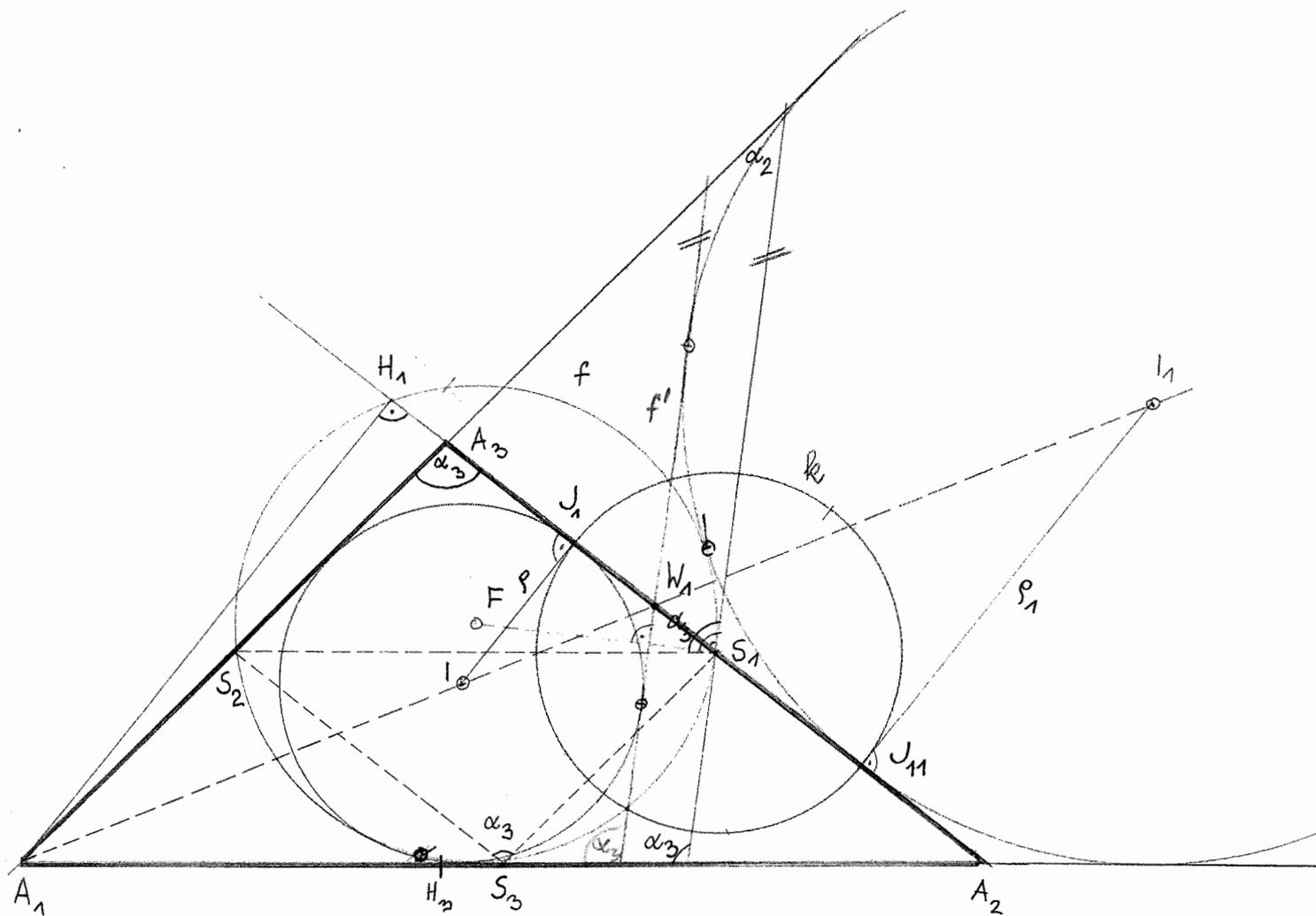
Anselm (1829 - 1880)
(Maler)

Grundriss zur analytischen
Menschenlehre oder drei-
edigen Pyramide (1827)

Stahl an den Folgen von ver-
mischen unbedeutlichen Verdräng-
ungen und Inkohäzenzen wegen
des Vorwurfs der aktiven Teilnahme
an bürgerlichen Verbrechen -
gen

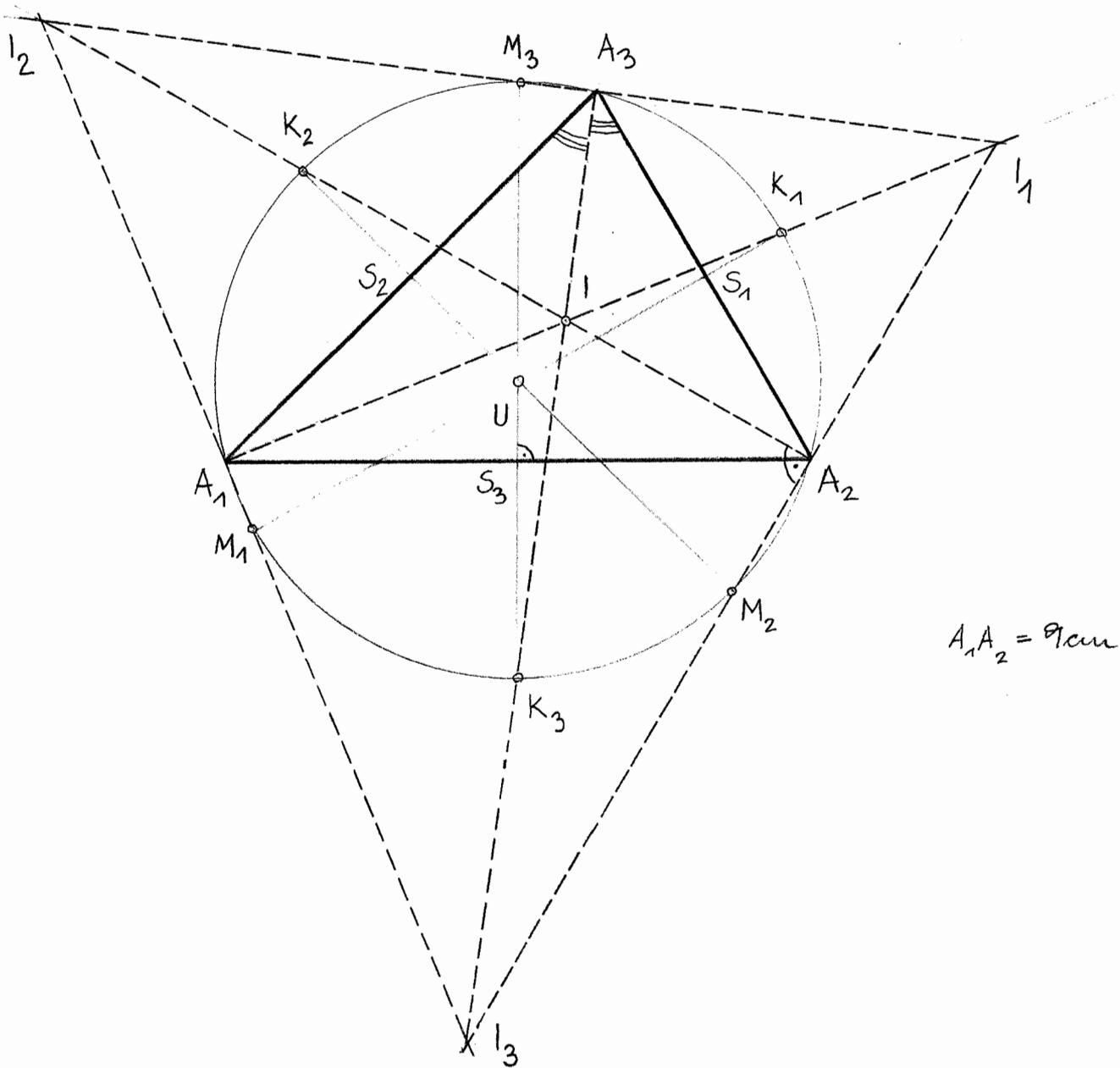
Tafel 10

FEUERBACH-Kreis, In- und Ankreise



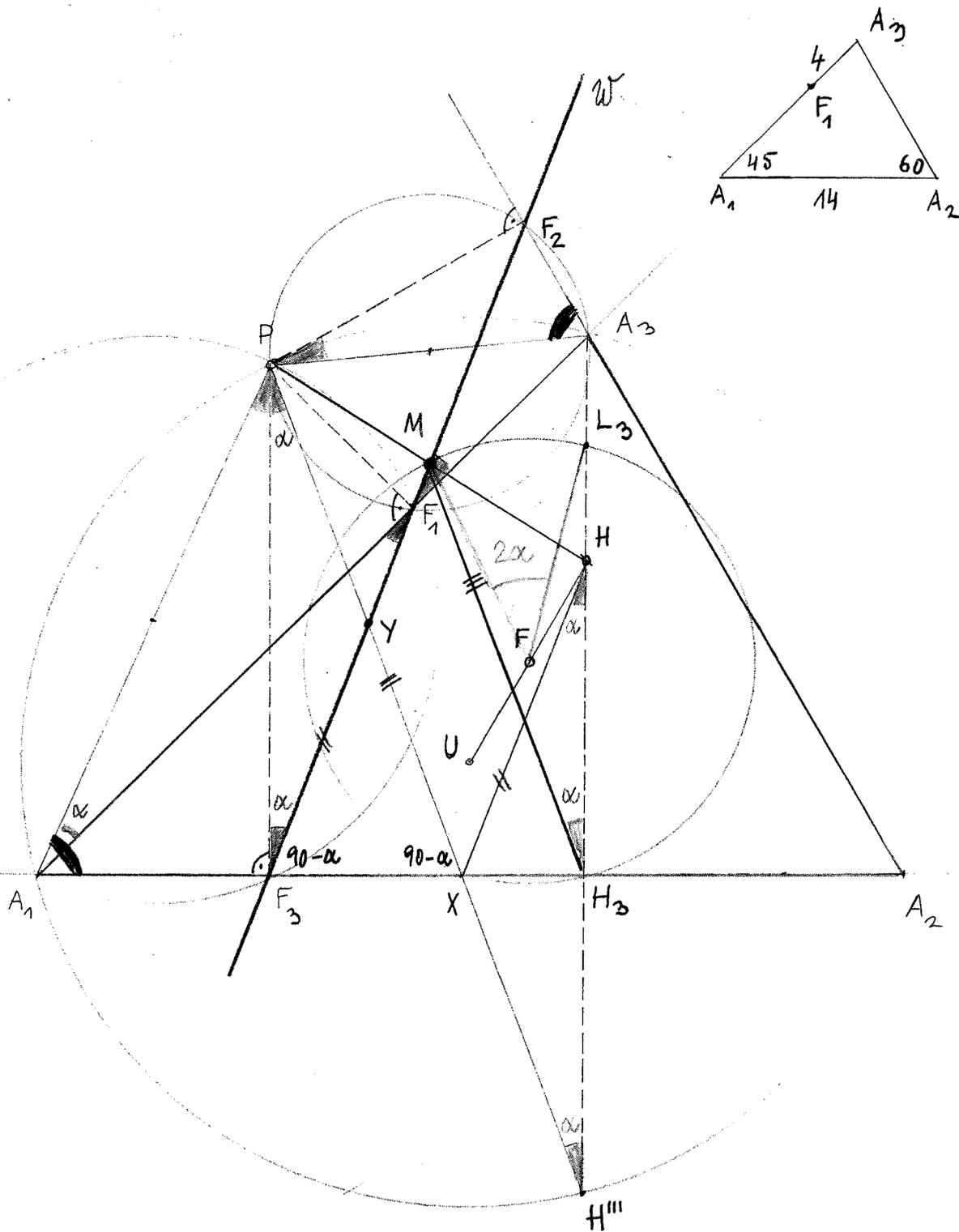
Tafel 11

Zusammenhang zwischen I und U

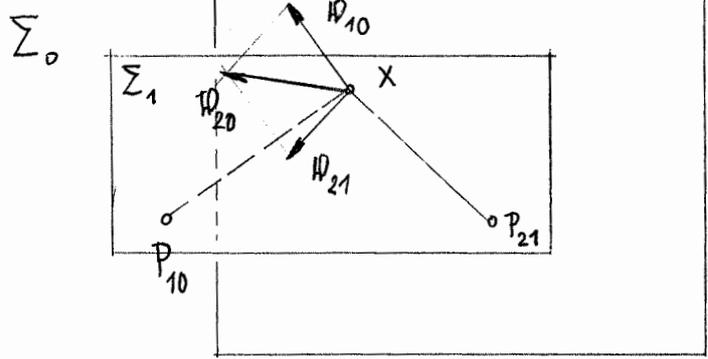
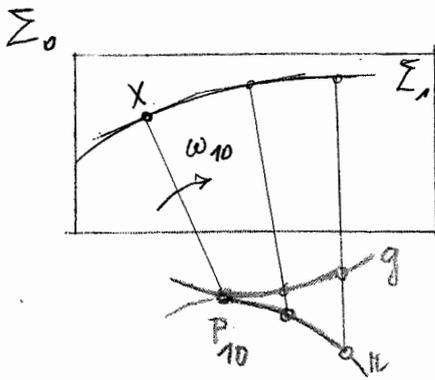


Tafel 12

Die STEINER-Zykloide als Hüllkurve der WALLACE-Geraden



Die STEINER-Zykloide als Hüllkurve
der WALLACE-Geraden



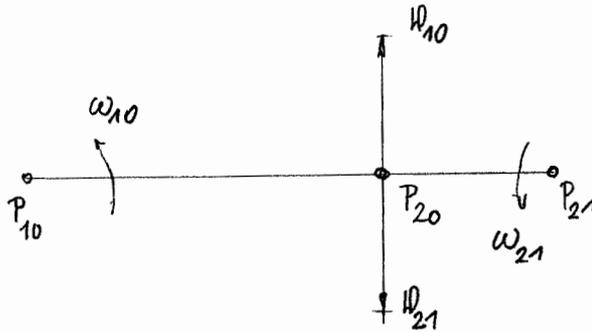
$$P_{10} = P_{01} \quad P_{21} = P_{12}$$

$$\omega_{10} = -\omega_{01} \quad \omega_{21} = -\omega_{12}$$

$$v_{10} = P_{10} X \cdot \omega_{10} \quad v_{20} = P_{21} \cdot \omega_{21}$$

$$\omega_{20} = \omega_{10} + \omega_{21} \quad \omega_{20} = \omega_{21} + \omega_{10}$$

gesucht: Momentenpol P_{20} . Für ihn gilt $\omega_{20} = 0 \Rightarrow \omega_{10} = -\omega_{21}$



$$X = P_{20}$$

$$P_{10} P_{20} \cdot \omega_{10} = P_{21} P_{20} \cdot \omega_{21} \Rightarrow$$

$$\frac{P_{10} P_{20}}{P_{21} P_{20}} = \frac{\omega_{21}}{\omega_{10}} \Rightarrow T(P_{10} P_{21} P_{20}) = -\frac{\omega_{21}}{\omega_{10}}$$

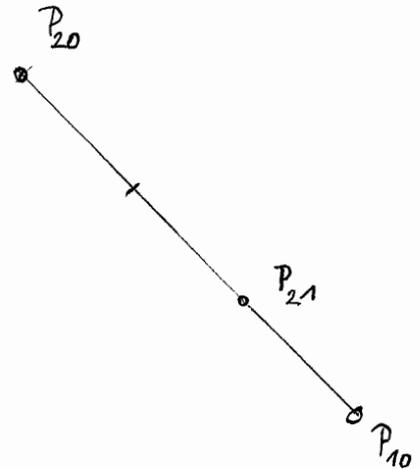
In unserem Beispiel

$$\omega_{10} = 2, \quad \omega_{20} = -1$$

$$\omega_{20} = \omega_{10} + \omega_{21}$$

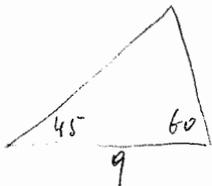
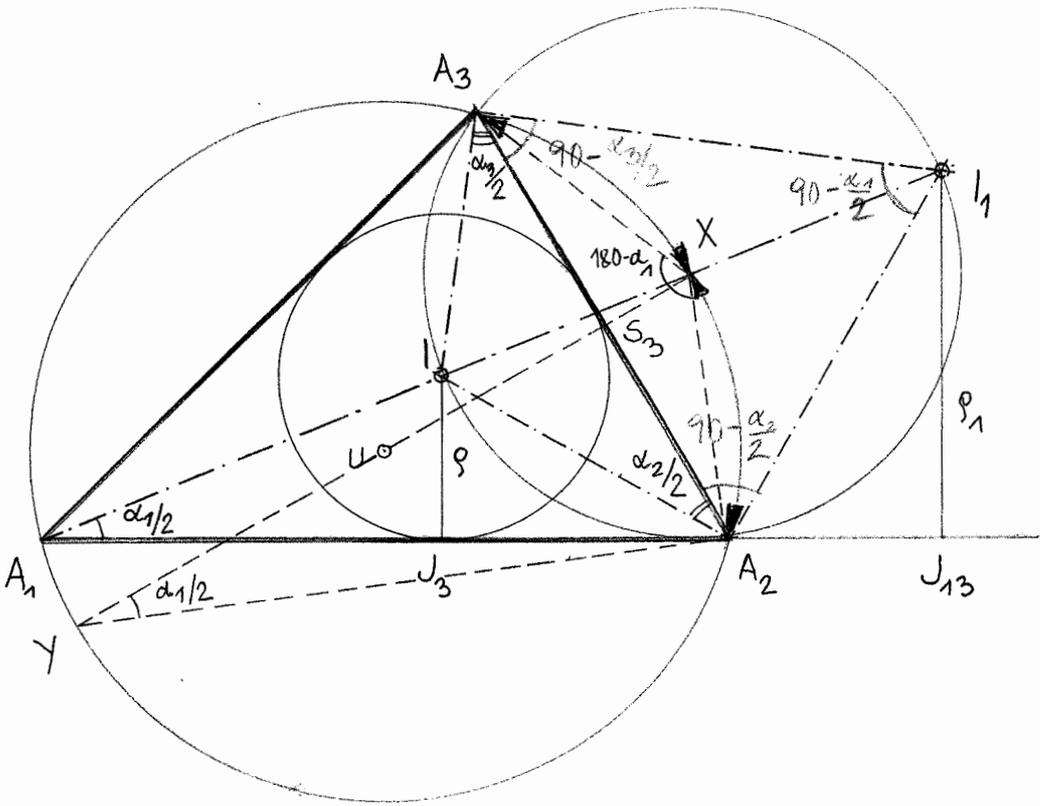
$$-1 = 2 + \omega_{21} \Rightarrow \underline{\underline{\omega_{21} = -3}}$$

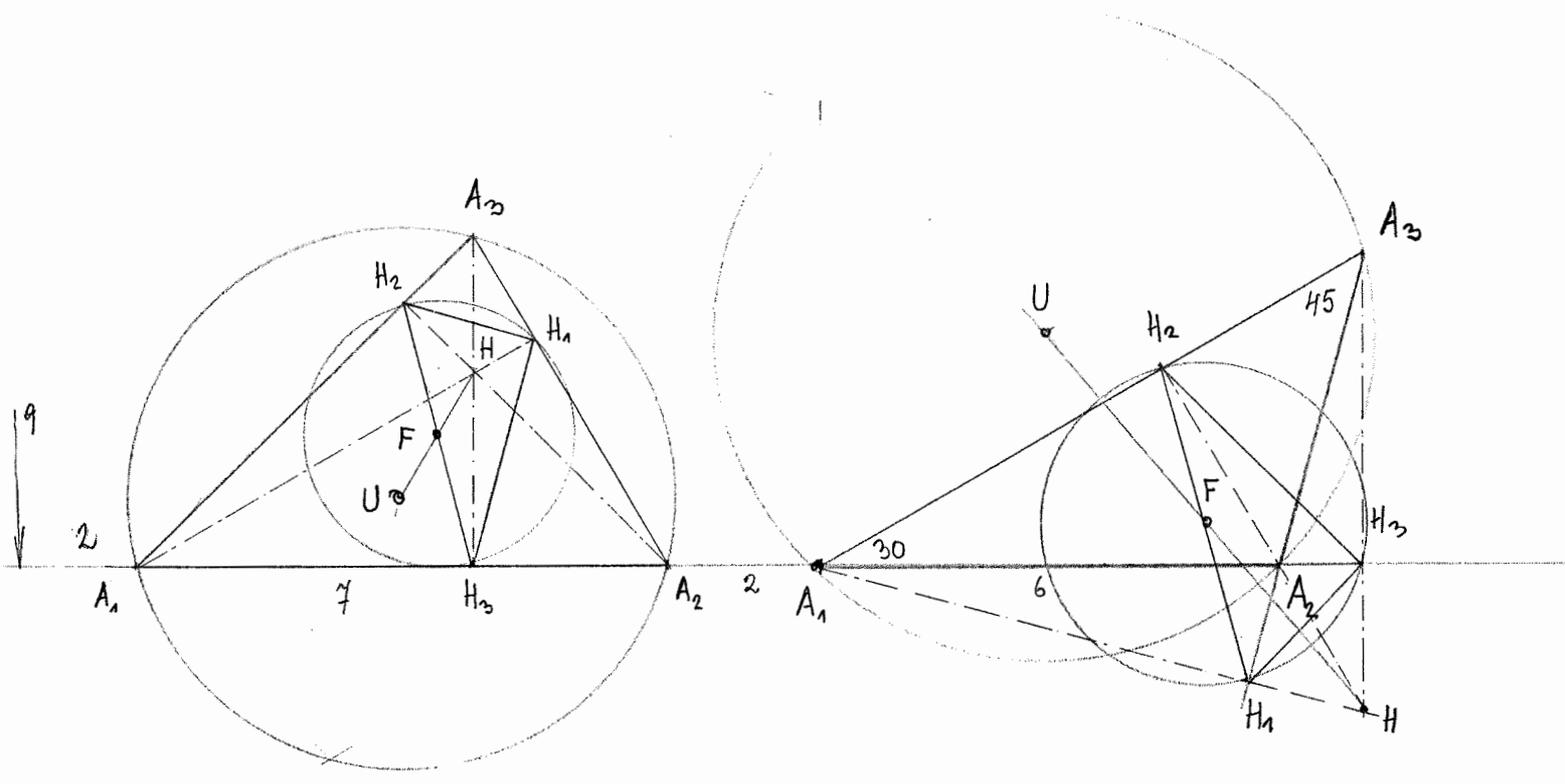
$$T(P_{10} P_{21} P_{20}) = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$



Tafel 13

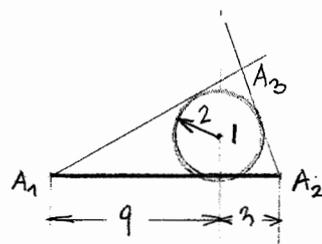
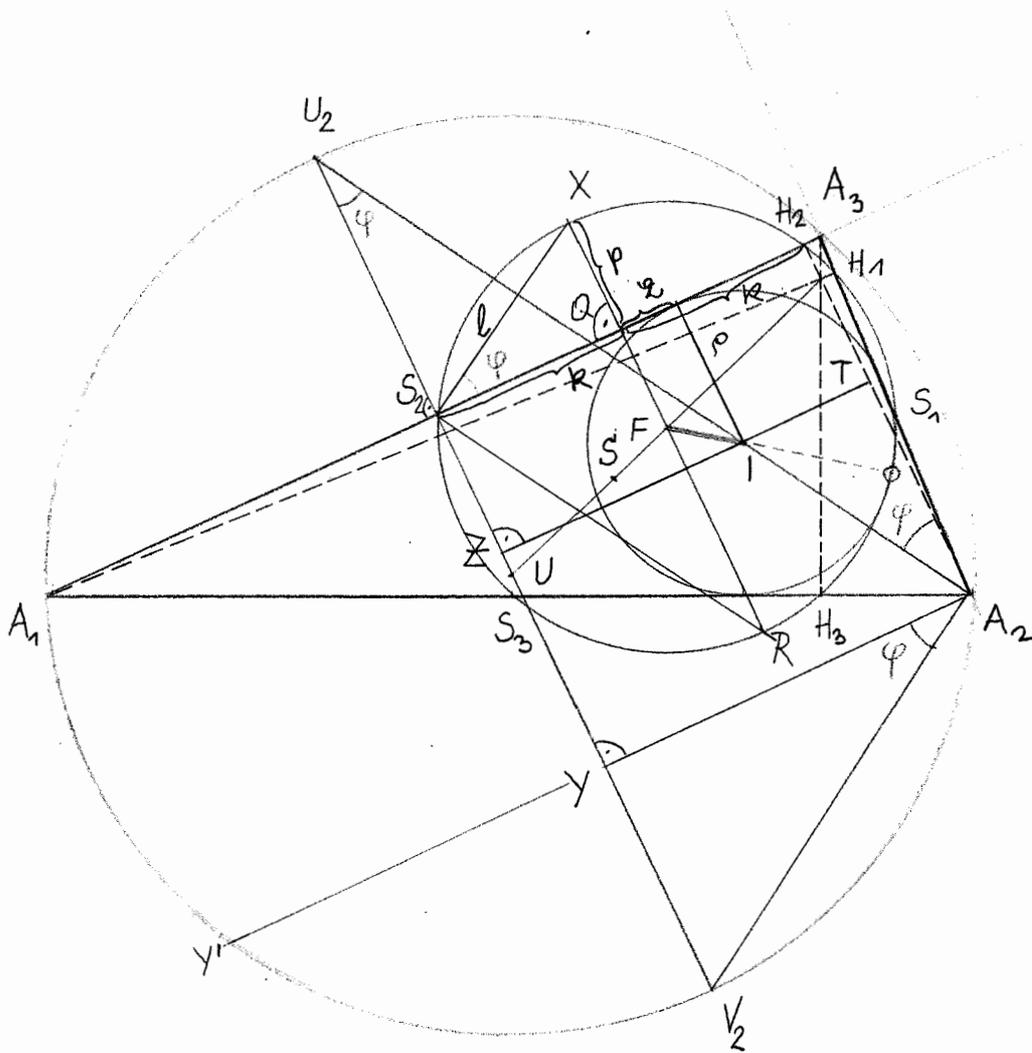
Die Abstände von U von l, l_1, l_2, l_3





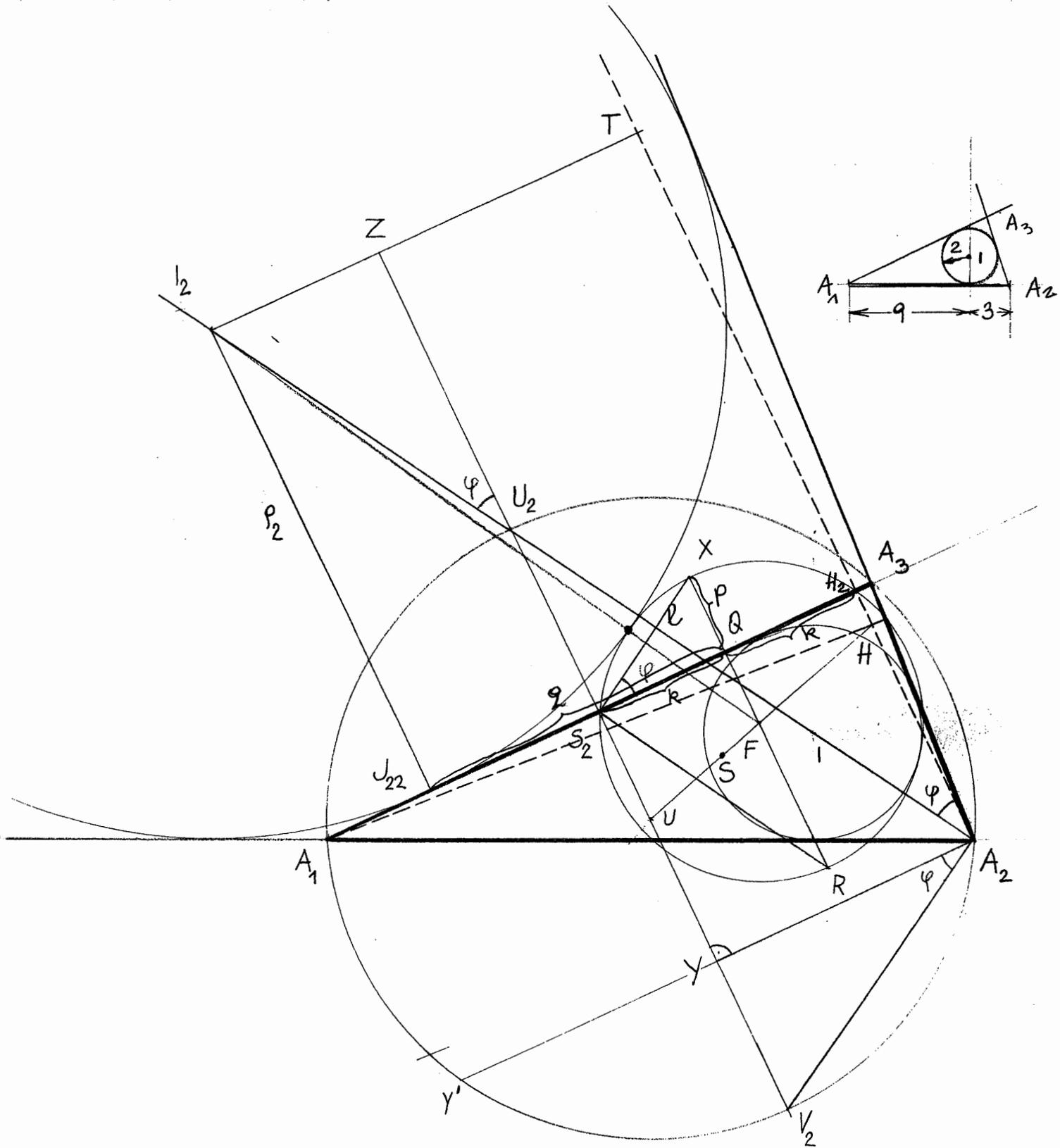
Tafel 14

Der Abstand FI



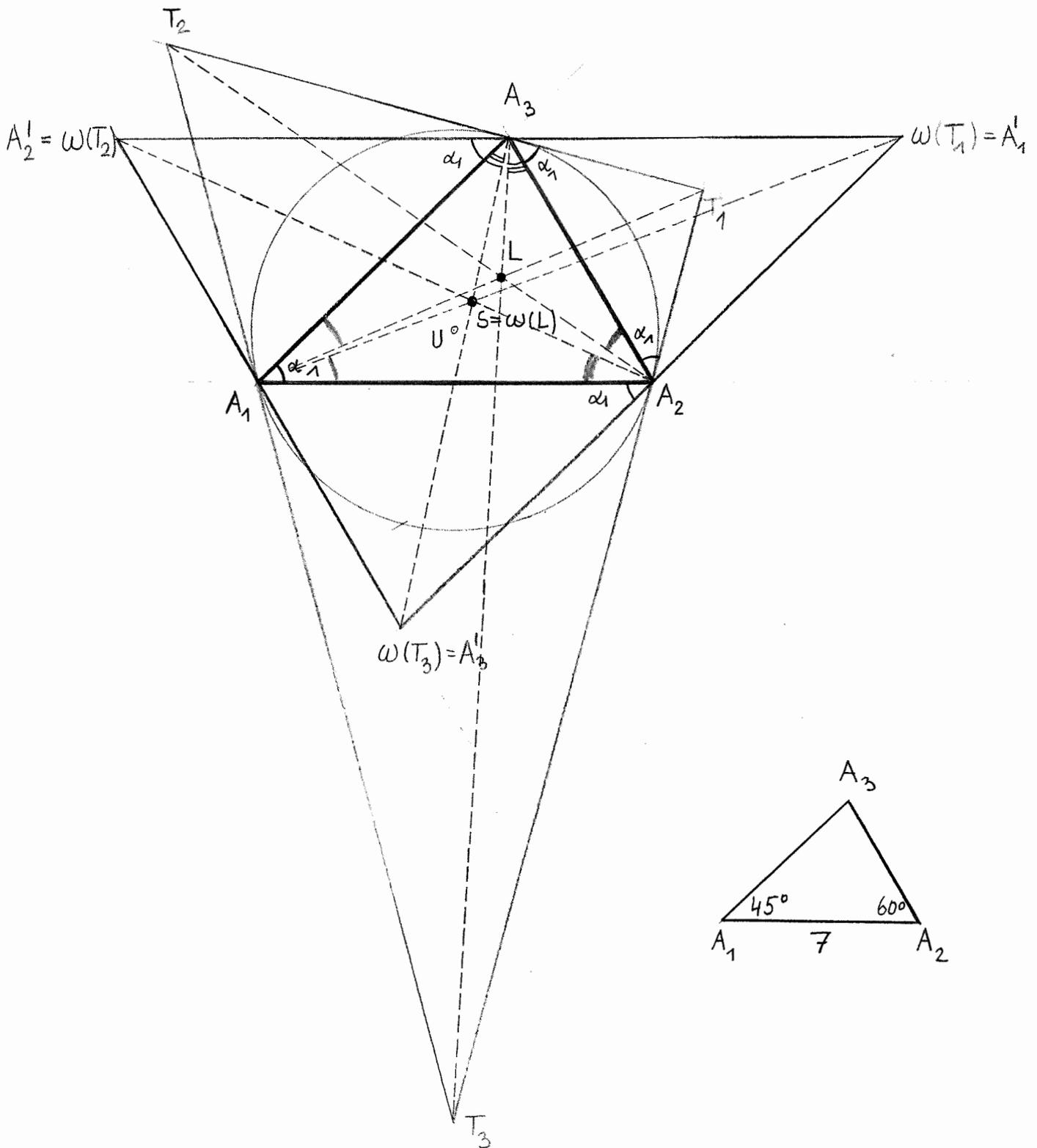
Tafel 15

Der Abstand Fl_2



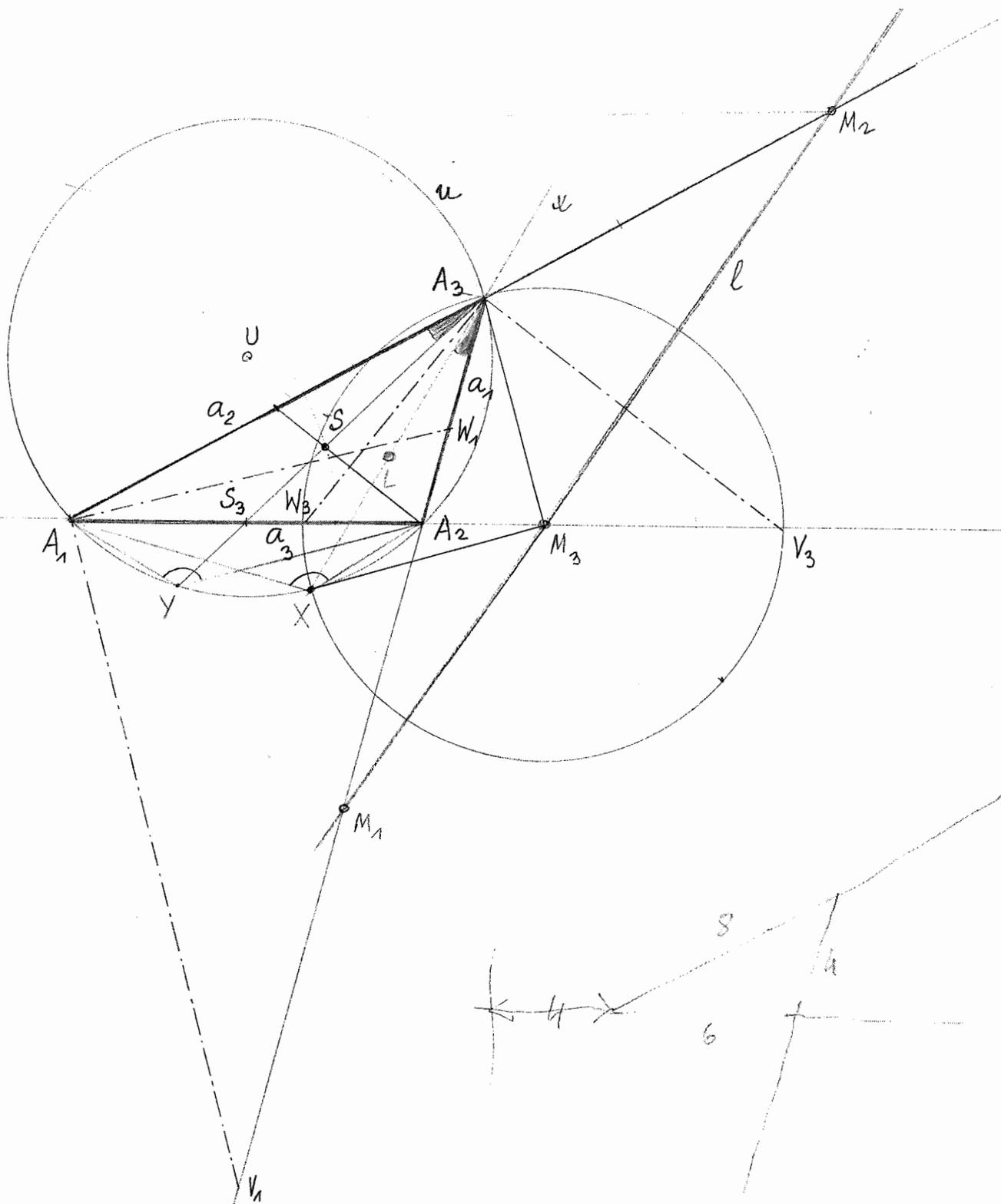
Tafel 16

Punkt von LEMOINE und Tangentendreieck



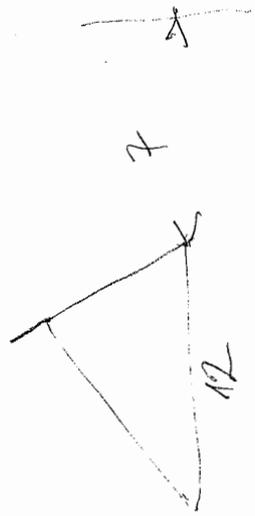
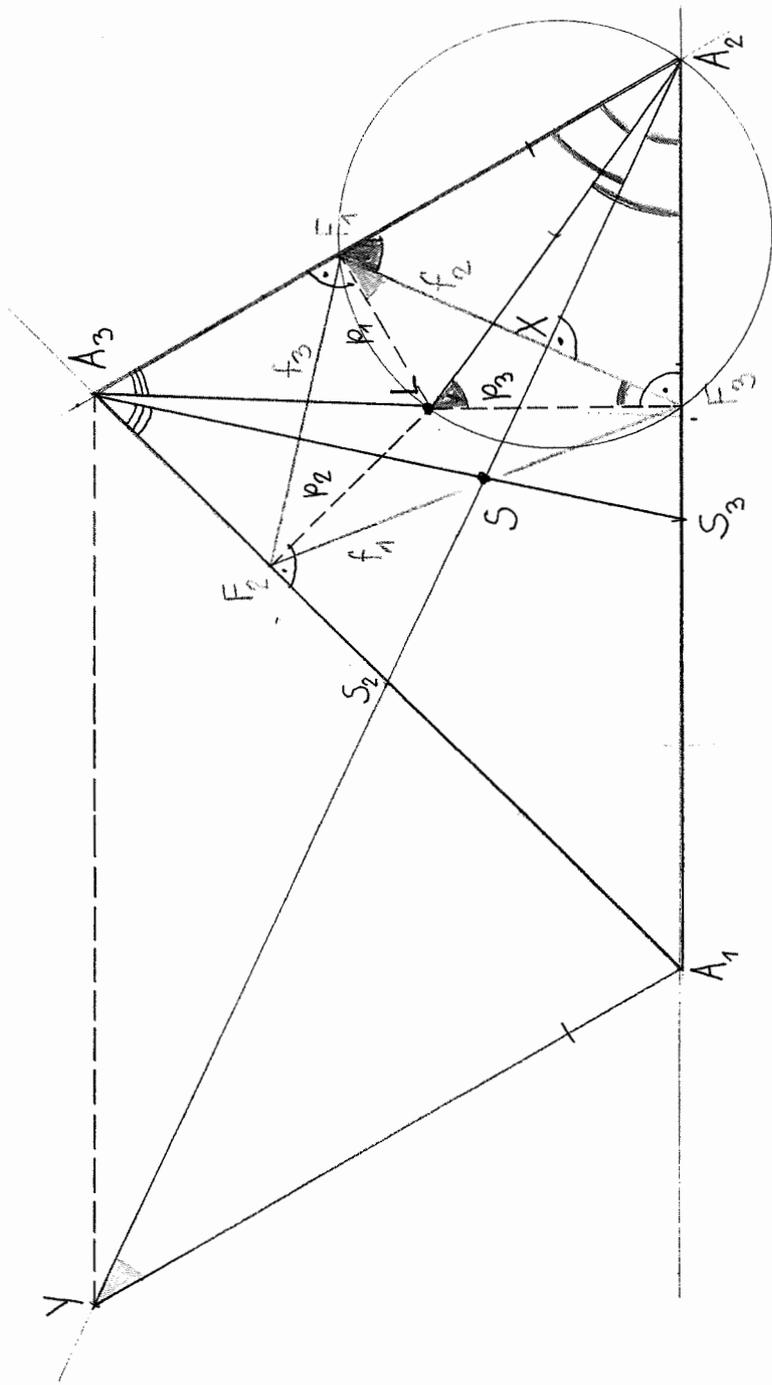
Tafel 17

Gerade von LEMOINE, Punkt von LEMOINE



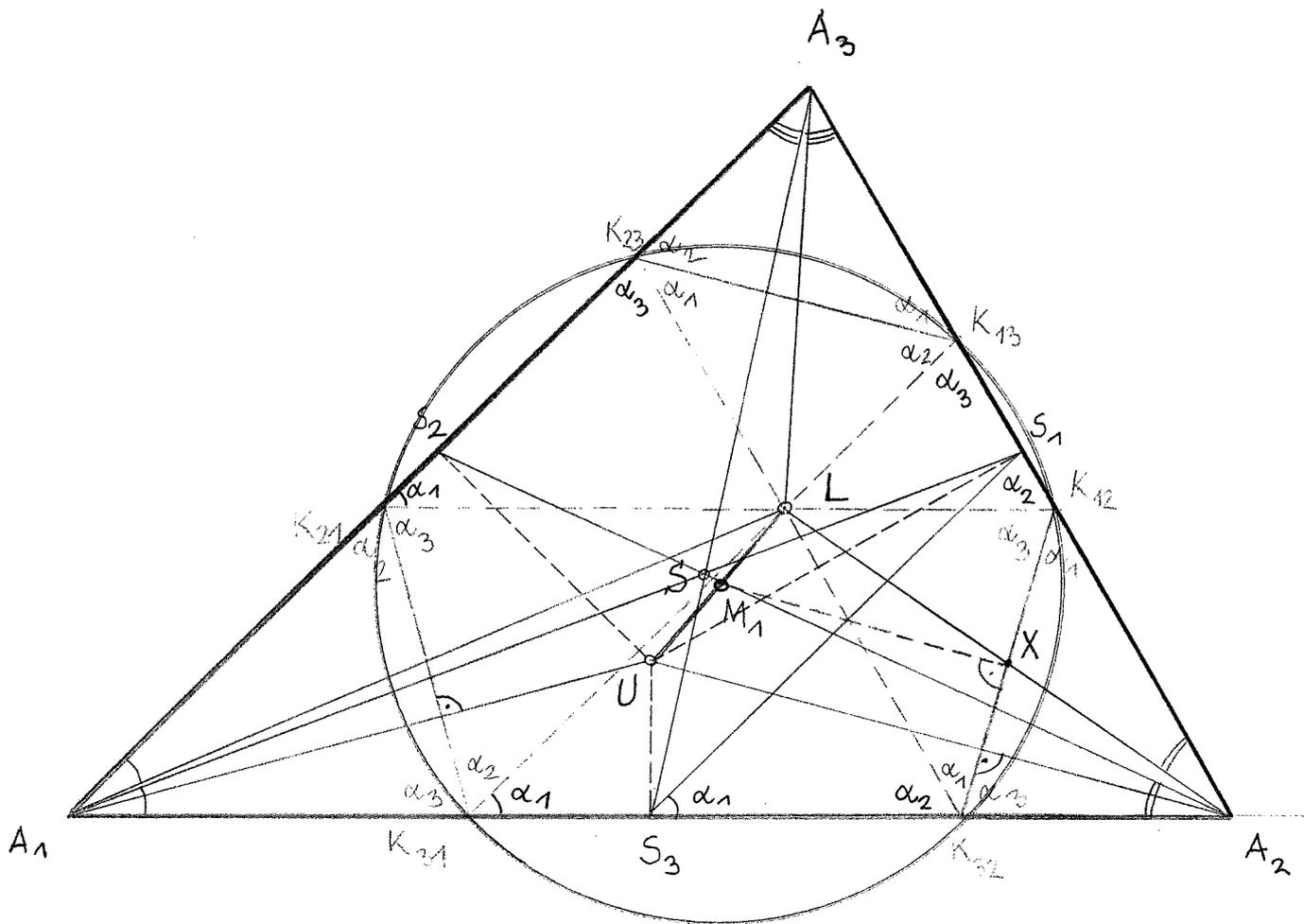
Tafel 18

Das Fußpunktdreieck des Punktes von LEMOINE



Tafel 19

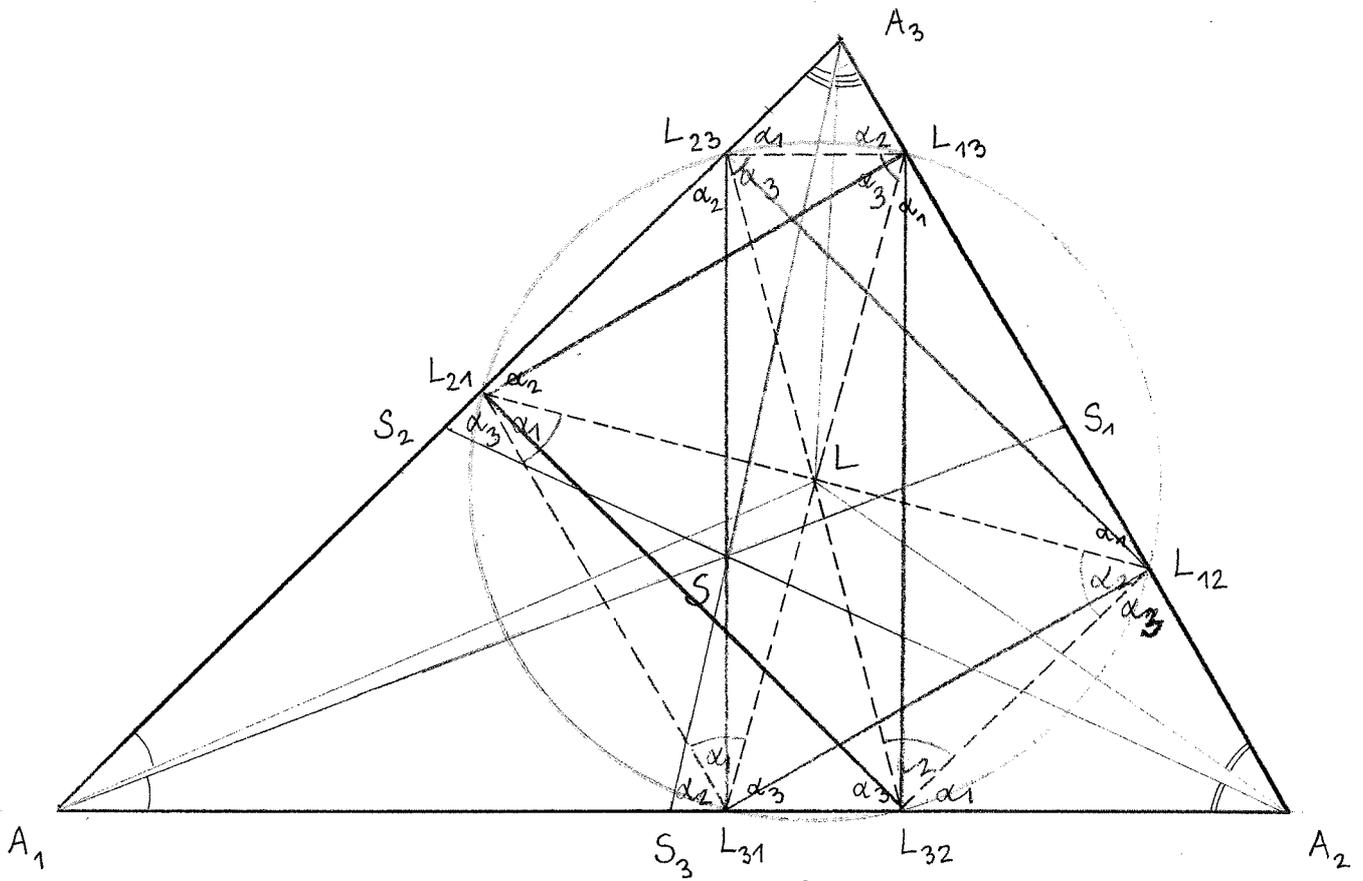
Der 1. Kreis von LEMOINE



$$A_1 A_2 = 16$$

Tafel 20

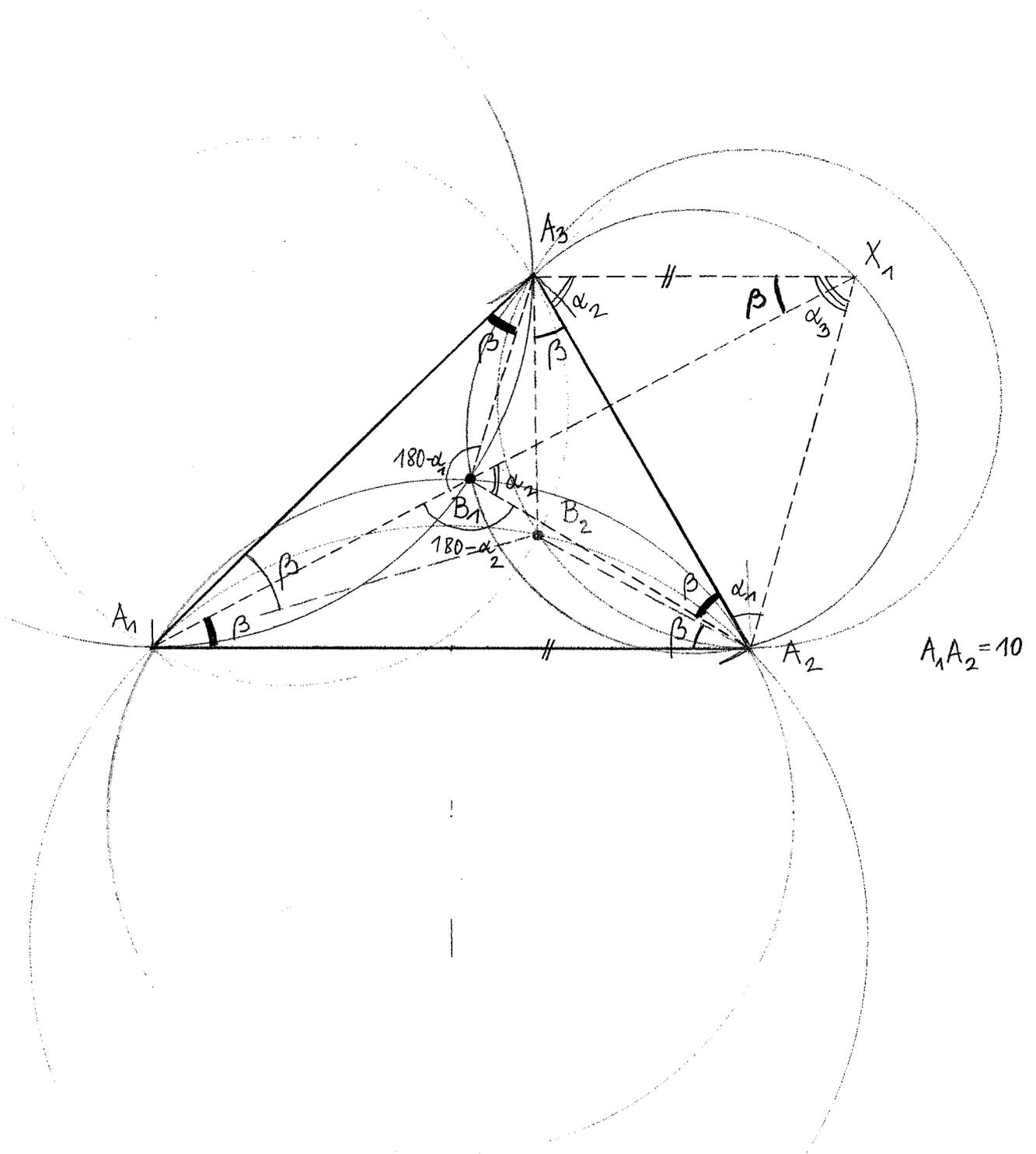
Der 2. Kreis von LEMOINE



$$A_1 A_2 = 16$$

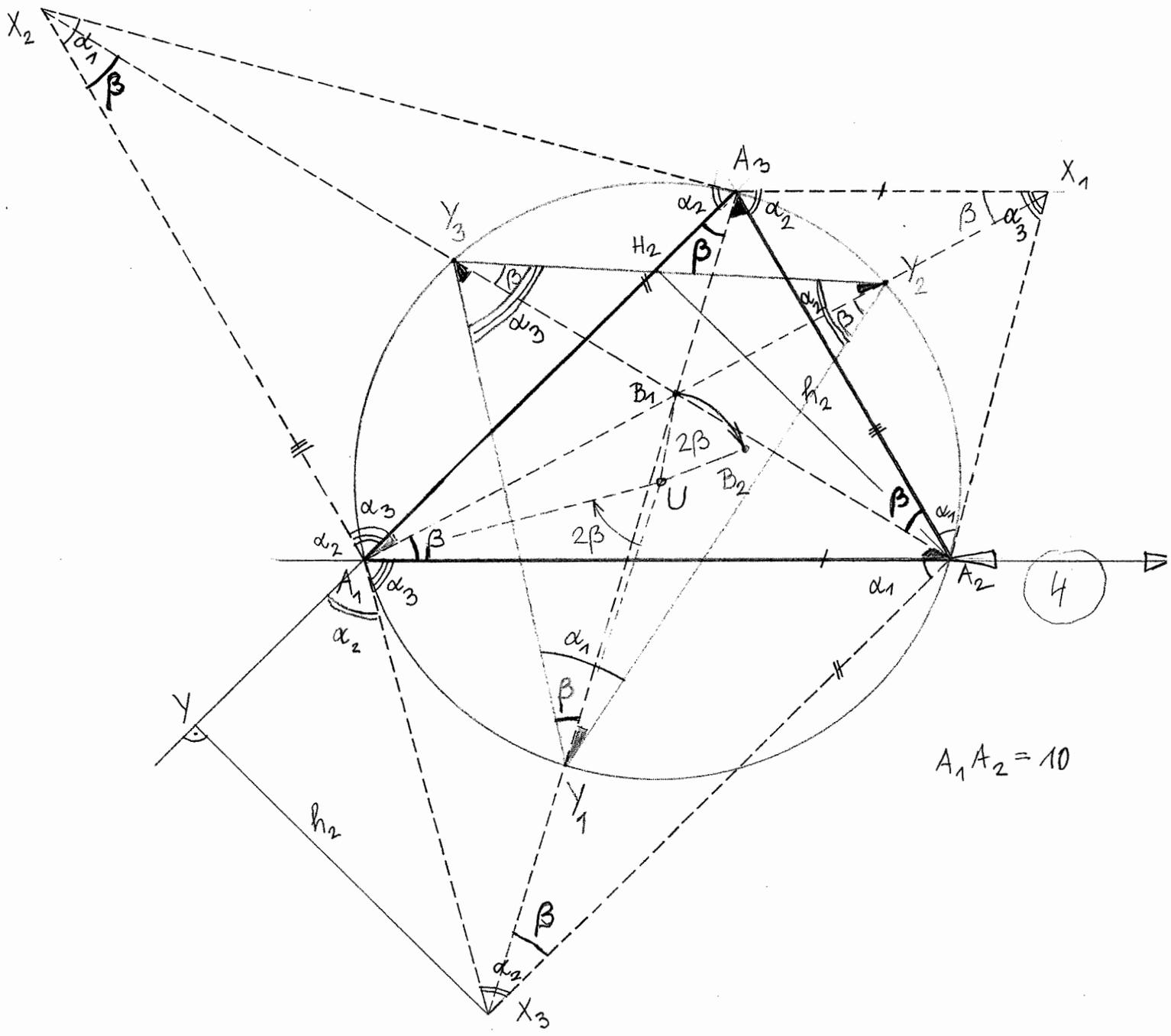
Tafel 21

Die Punkte von BROCARD I



Tafel 22

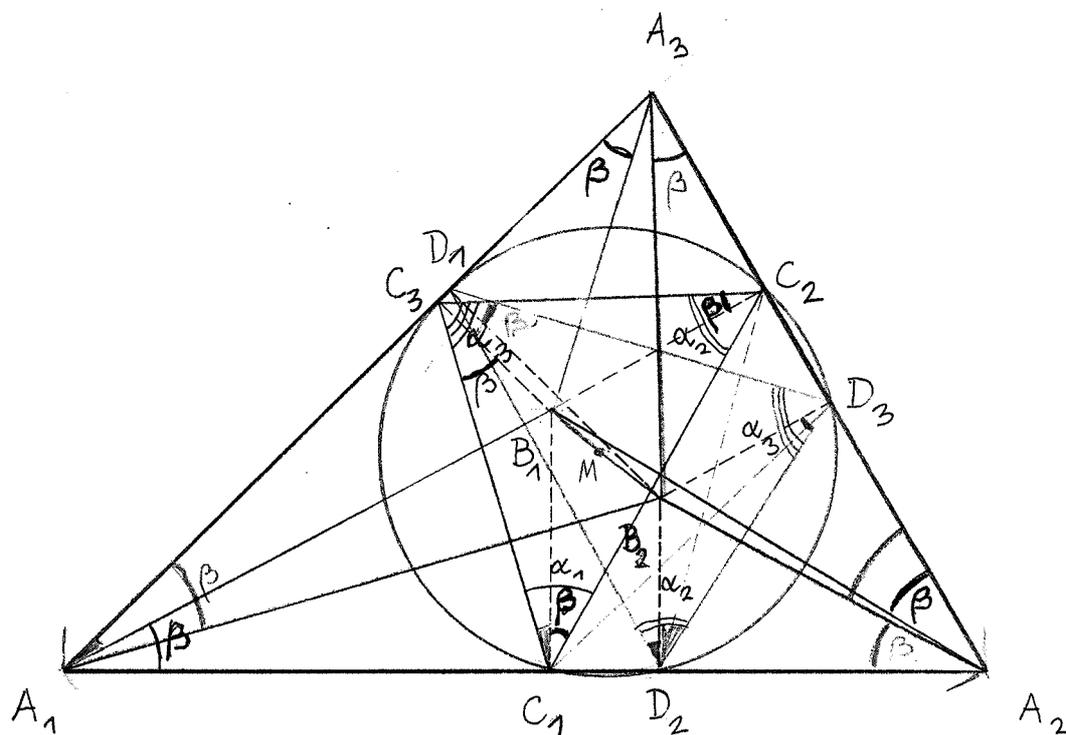
Die Punkte von BROCARD II



$A_1 A_2 = 10$

Tafel 23

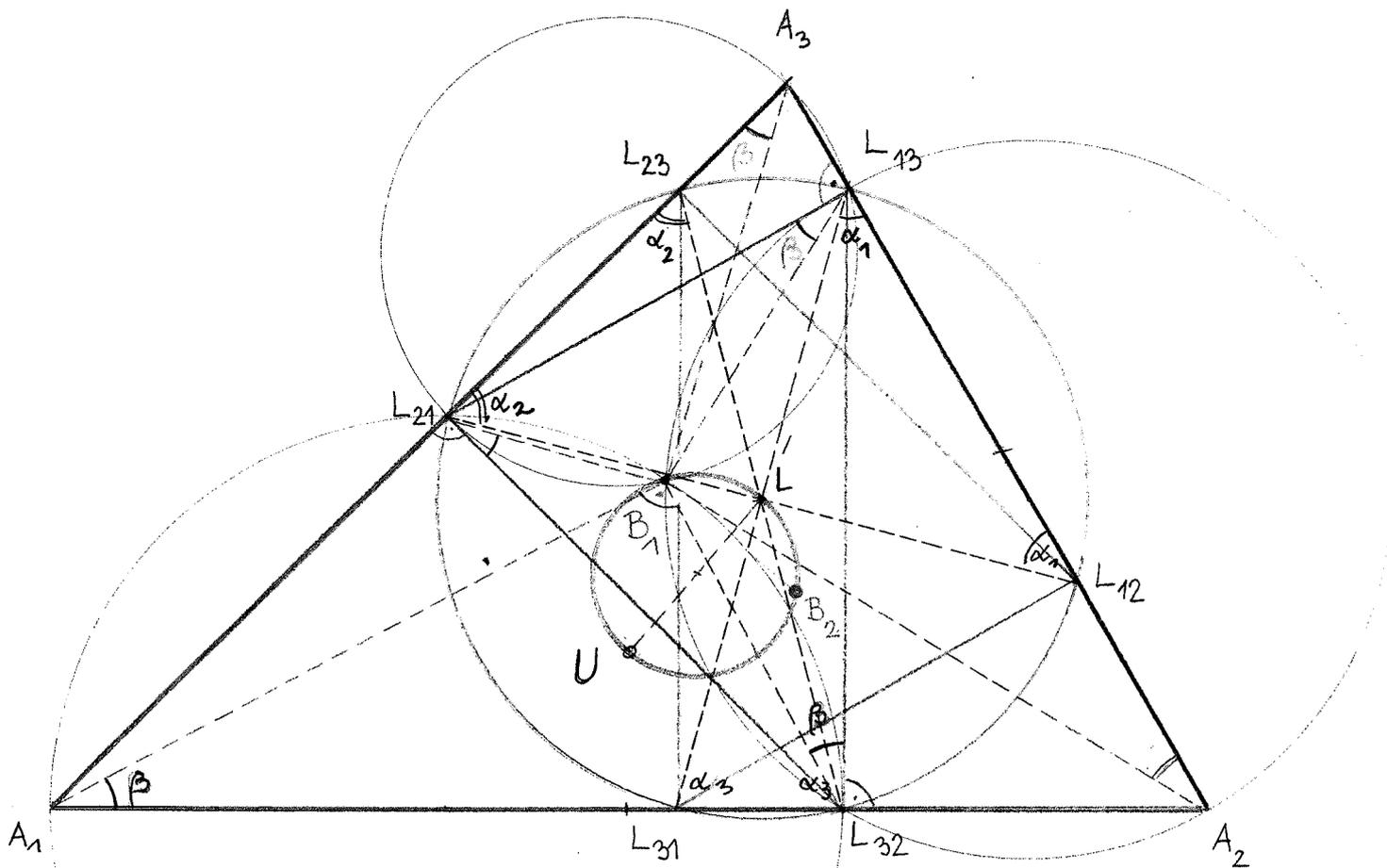
Die Fußpunktdreiecke der BROCARDschen Punkte



$$A_1A_2 = 12 \text{ (Lerner 16)}$$

Tafel 24

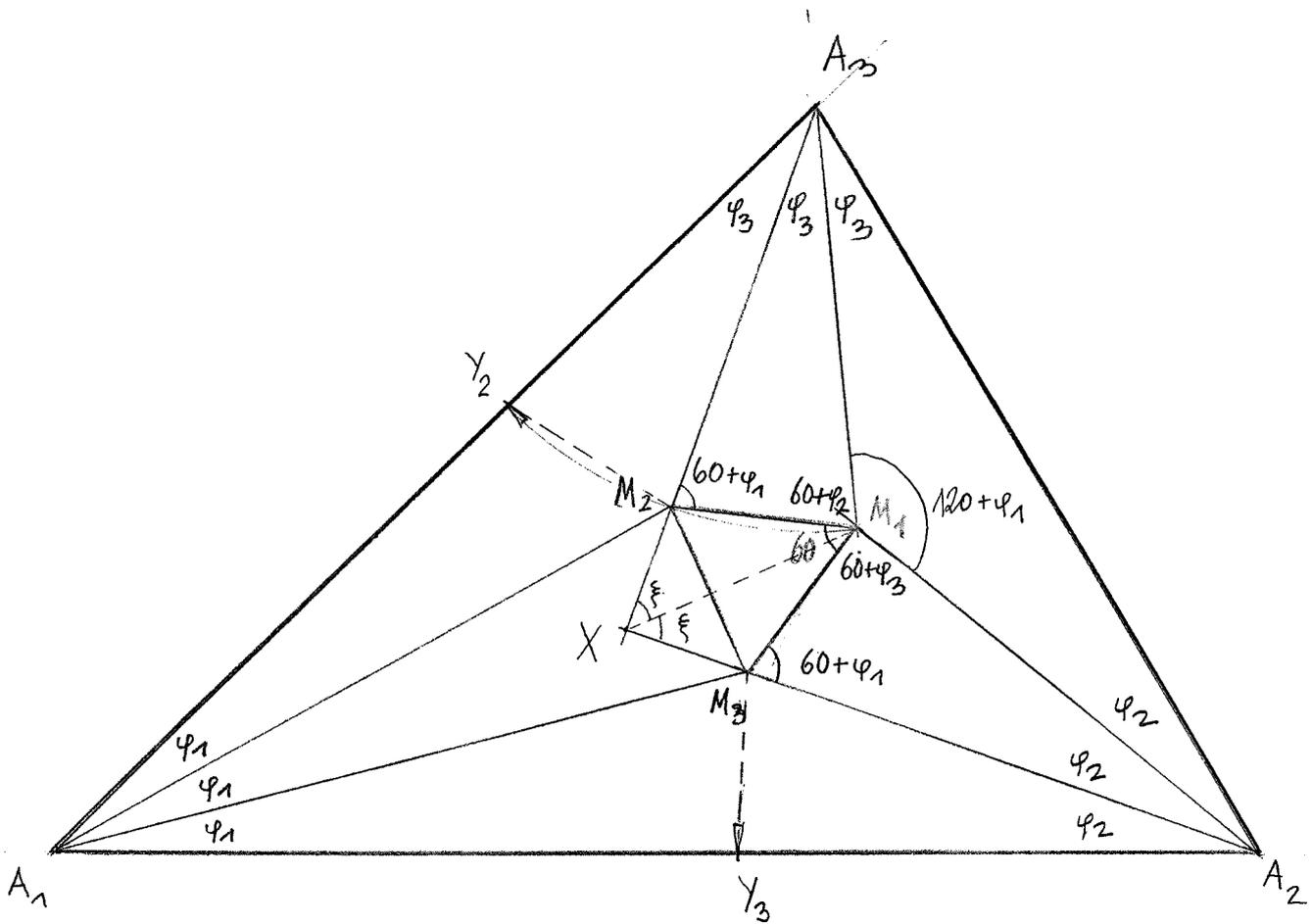
Der Kreis von BROCARD



$$A_1 A_2 = 16$$

Tafel 25

Das Dreieck von MORLEY



$$A_1 A_2 = 16$$