O pewnej klasie przestrzeni typu B. — Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B.

Note

de M. ***W. ORLICZ***,

présentée, dans la séance du 15 Février 1932, par M. St. Banach m. c.

Das Problem der Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen [1]) legt die Frage nahe, inwieweit verschiedene Sätze, die für die Klasse S^α aller mit einer Potenz α ($\alpha \geqslant 1$) integrierbaren Funktionen gelten, sich auch auf andere Funktionenklassen ausdehnen lassen. So spielt z. B. die Entscheidung der Frage, ob gewisse Funktionenklassen als B-Räume [2]) von analogem zu S^α Charakter zu betrachten sind, für die Funktionalanalysis eine wichtige Rolle.

In § 1 dieser Note weise ich hin auf einen gewissen Typus von linearen Vektorbereichen, die sich leicht zu B-Räumen ergänzen lassen und sonst noch gewisse Analogien mit den S^α zeigen. Es stellt sich heraus, daß die nach der Definition der unter [1]) zit. Arbeit gebildeten, zueinander konjugierten Funktionenklassen immer von diesem Typus sind, also B-Räume sein müssen. Das ermöglicht die Anwendung der Funktionalanalysis auf diese Funktionenklassen. In § 2 beweise ich als Beispiel der Anwendung einen Satz über biorthogonale Funktionensysteme.

[1]) Dieses Problem wird in der Arbeit: Z. W. Birnbaum und W. Orlicz. Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, Stud. Math. 3 (1931) p. 1—67, behandelt. Im folgenden werden wir diese Arbeit kurz V. K. P. zitieren.

[2]) Unter einem B-Raum verstehen wir einen linearen, normierten, vollständigen Raum.

§ 1.

Als *monotone* N-*Funktion* bezeichnen wir eine in $(-\infty, +\infty)$ definierte, stetige und monoton für $u \geqslant 0$ wachsende Funktion $M[u]$, die noch weiter den folgenden Bedingungen genügt:

1) $M[0] = 0$,
2) $M[u] > 0$ für $|u| \neq 0$,
3) $M[u] = M[|u|]$.

Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir die Menge aller mit $M[u]$ integrierbaren Funktionen, also diejenigen Funktionen, für welche $\int_0^1 M[f(x)]\,dx$ existiert. Es entsteht die Frage:

Unter welchen Voraussetzungen bildet ein $\mathfrak{M}$ einen linearen Raum, wenn man die Addition von Elementen und die Multiplikation mit reellen Zahlen wie üblich definiert? Für monotone N-Funktionen läßt sich das leicht entscheiden:

Satz 1. *Dann und nur dann läßt sich ein $\mathfrak{M}$ als linearer Raum auffassen, wenn für das entsprechende $M[u]$ die folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$(\Delta_2) \quad M[2u] \leqslant k\,M[u],$$

für $|u| \geqslant a$.

Beweis. Die Bedingung (Δ_2) ist hinreichend. Angenommen, daß $f \in \mathfrak{M}$, $f_1 \in \mathfrak{M}$. Wir setzen

$$A = E[|f(x)| \geqslant a] + E[|f_1(x)| \geqslant a|].$$

Dann haben wir für x, die der Menge A angehören,

$$M[|f(x)| + |f_1(x)|] \leqslant M[2\,\mathrm{Max}(f, f_1)] \leqslant k\,M[\mathrm{Max}(f, f_1)] \leqslant$$
$$\leqslant k[M[f(x)] + M[f_1(x)]].$$

Da außerdem $|f + f_1| \leqslant 2a$ für $x \in CA$ ist, so folgt aus der vorangehenden Ungleichung die Integrierbarkeit von $M[f(x) + f_1(x)]$ in $(0, 1)$.

Die Bedingung ist auch notwendig. Denn bildet $\mathfrak{M}$ einen linearen Raum, so muß mit jeder mit $M[u]$ integrierbaren Funktion $f(x)$ immer auch $2f(x)$ M-integrierbar sein, wofür aber (Δ_2) die notwendige Bedingung ist [3]).

[3]) Siehe V. K. P. p. 36, Satz 1a.

Die weitere Frage ist nun, wann sich für $\mathfrak{M}$ der Begriff der Norm, im Sinne des Herrn S. BANACH, einführen, also $\mathfrak{M}$ sich zu einem B-Raume ergänzen läßt. Nun kommt es uns nicht nur darauf an, auf irgendeine Weise den Normbegriff einzuführen, sondern er muß der vorausgesetzten Integrierbarkeit mit $M[u]$ gewissermaßen äquivalent sein; sonst geht der Charakter von $\mathfrak{M}$ verloren. Bezeichnen wir mit $\|f(x)\|$ den der Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{M}$ zugeordneten Wert der Norm, so erscheint es als naturgemäß, außer den üblichen Bedingungen, noch die folgenden beiden Eigenschaften zu verlangen:

I. Aus

$$\int_0^1 M[f_n(x)]\,dx \leqslant K \tag{1}$$

folgt

$$\|f_n(x)\| \leqslant K^* \tag{1'}$$

und umgekehrt.

II. Aus

$$\lim_{p,q\to\infty} \int_0^1 M[f_p(x) - f_q(x)]\,dx = 0 \tag{2}$$

folgt

$$\lim_{p,q\to\infty} \|f_p(x) - f_q(x)\| = 0 \tag{2'}$$

und umgekehrt.

Im folgenden werden wir eine gewisse Klasse von N-Funktionen betrachten, für welche es möglich ist, einen allen Forderungen genügenden Normbegriff anzugeben.

Satz 2. *Gegeben sei eine konvexe* N-*Funktion* $N[u]$, *die noch den Bedingungen* a) $\lim\limits_{u\to 0} \frac{N[u]}{u} = 0$, b) $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{N[u]}{u} = +\infty$ *und der Bedingung* Δ_2 *für große u genügt.*

Die Menge $\mathfrak{M}$ *der mit diesem* $\mathrm{N}[u]$ *integrierbaren Funktionen bildet einen B-Raum, und zwar läßt sich in* $\mathfrak{M}$ *die Norm so definieren, daß die Bedingungen I, II erfüllt werden.*

Beweis. Da wir nach dem Satz 1 bereits wissen, daß $\mathfrak{M}$ ein linearer Vektorbereich ist, so bleibt nur die Norm entsprechend zu definieren.

Mit $N[v]$ bezeichnen wir die zu $M[u]$ komplementäre Funktion; dann gilt für beliebige u, v die Young'sche [4]) Ungleichung

$$uv \leqslant M[u] + N[v].$$

Wegen dieser Ungleichung haben wir

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \leqslant \int_0^1 M[f(x)]\,dx + \int_0^1 N[g(x)]\,dx. \tag{3}$$

Wir definieren nun die Norm von $f(x)$; wir setzen nämlich

$$\|f(x)\| = \operatorname{Max} \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx, \tag{4}$$

für alle $g(x)$, die der Nebenbedingung

$$\int_0^1 N[g(x)]\,dx \leqslant 1 \tag{5}$$

genügen. Man verifiziert ohne Mühe, daß:

1) $\|f(x) + f_1(x)\| \leqslant \|f(x)\| + \|f_1(x)\|$;
2) $\|af(x)\| = |a| \cdot \|f(x)\|$;
3) $\|f(x)\| = 0$

dann und nur dann gilt, wenn $f(x) = 0$ fast überall ist. Wir zeigen noch, daß die Norm die Eigenschaften I, II besitzt. Aus II folgt dann auch leicht die Vollständigkeit des Raumes [5]).

1⁰. Wenn eine Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$ der Ungleichung (1) genügt, so haben wir nach (3), für jedes (5) genügende $g(x)$

$$\int_0^1 f_n(x)\,g(x)\,dx \leqslant K + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

[4]) W. H. Young, On Classes of Summable Functions and their Fourier Series, Proc. Royal Soc. (A) 87 (1912) p. 225—229. Siehe auch V. K. P. p. 15—17.

[5]) Man muß nur den Satz anwenden: Sind die Funktionen $\{f_\nu(x)\}$ mit $M[u]$ integrierbar, wo $M[u]$ der Bedingung (Δ_2) für große u genügt, so folgt aus $\lim\limits_{n,m\to\infty} \int_0^1 M[f_n(x) - f_m(x)]\,dx = 0$ die Existenz einer mit $M[u]$ integrierbaren Funktion $f(x)$, für welche $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 M[f_n(x) - f(x)]\,dx = 0$ besteht.

Es ist also

$$\|f_n(x)\| \leqslant K^*,$$

wenn wir $K^* = K + 1$ setzen.

Nun setzen wir voraus, die Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$ genüge der Bedingung (1′). Wir setzen $\int_0^1 N[g(x)]\,dx = \varrho(g(x))$. Ist $\varrho(g(x)) \leqslant 1$, so besteht die Ungleichung $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leqslant \|f(x)\|$; ist aber $\varrho(g(x)) > 1$, so folgt leicht wegen der Konvexität von $N(v)$, daß die Ungleichung $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \leqslant \|f(x)\|\,\varrho(g(x))$ besteht. Mit $f_n^N(x)$ bezeichnen wir eine Funktion, die gleich $|f_n(x)|$ für diejenigen x, für welche $|f(x)| \leqslant N$, und gleich N für die übrigen x ist.

Wie leicht einzusehen ist, haben wir wegen (1′), bei jedem N

$$\|f_n^N(x)\| \leqslant K^*.$$

Setzen wir, bei vorgegebenen $f_u^N(x)$, $g_n^N(x) = \operatorname{sign} f_n^N(x)\, p\left(\left|\frac{f_n^N(x)}{K^*}\right|\right)$ [6]), so geht die Ungleichung (3) (wo wir für $f(x)$, $g(x)$ $\frac{f_n^N(x)}{K^*}$, $g_n^N(x)$ gesetzt haben) in die Gleichung

$$\int_0^1 \frac{f_n^N(x)}{K^*} g_n^N(x)\,dx = \int_0^1 M\left[\frac{f_n^N(x)}{K^*}\right] dx + \int_0^1 N[g_n^N(x)]\,dx \tag{6}$$

über. Da $g_n^N(x)$ beschränkt ist, so existieren die Integrale auf beiden Seiten dieser Gleichung. Wäre nun $\varrho[g_n^N(x)] > 1$, so folgt aus dem eben Gesagten:

$$\left\|\frac{f_n^N(x)}{K^*}\right\| \varrho[g_n^N(x)] \geqslant \int_0^1 \frac{f_n^N(x)}{K^*} g_n^N(x)\,dx = \int_0^1 M\left[\frac{f_n^N(x)}{K^*}\right] dx + \varrho[g_n^N(x)].$$

Es wäre also

$$\left\|\frac{f_n^N(x)}{K^*}\right\| > 1.$$

Da aber andererseits $\left\|\frac{f_n^N(x)}{K^*}\right\| \leqslant 1$ ist, so sind wir zu einem Wider-

[6]) Was die Definition von $p(u)$ betrifft siehe: V. K. P. p. 14—15.

spruch gelangt. Es ist also $\varrho[g_n^N(x)] \leqslant 1$, also nach (4) und (6)

$$\int^1 M\left[\frac{f_n^N(x)}{K^*}\right] dx \leqslant \left\|\frac{f_n^N(x)}{K^*}\right\|. \tag{7}$$

Wir dürfen $K^* = 2^c$ setzen, wo c eine natürliche Zahl bedeutet. Dann gilt wegen $(\varDelta_2)$ in der Punktmenge $E = E\left[\frac{|f_n^N(x)|}{2^c} \geqslant a\right]$

$$M[f_n^N(x)] \leqslant M\left[2^c \frac{f_n^N(x)}{2^c}\right] \leqslant k^c\, M\left[\frac{f_n^N(x)}{2^c}\right],$$

und endlich, nach (7) und der letzten Ungleichung,

$$\int_0^1 M[f_n^N(x)]\, dx \leqslant k^c \left\|\frac{f_n^N(x)}{K^*}\right\| + M[a\, 2^c] \leqslant k^c + M[a\, 2^c] = K.$$

Da wir N beliebig groß wählen können, so besteht auch die Ungleichung

$$\int_0^1 M[f_n(x)]\, dx \leqslant K.$$

Dabei ist die Konstante K nur von K^* abhängig.

2°. Um die Gültigkeit von II zu beweisen, genügt es natürlich zu zeigen, daß die Relation

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 M[f_n(x)]\, dx = 0 \tag{8}$$

die Relation

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| = 0 \tag{8'}$$

zur Folge hat und umgekehrt.

Zuerst bemerken wir, daß aus (8) für eine beliebige Zahl L $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 M[L f_n(x)]\, dx = 0$ folgt. Bezeichnen wir mit $\overline{K}$ die Konstante in (1'), die dem $K = 1$ in (1) entspricht, und setzen wir $L = \frac{\overline{K}}{\varepsilon}$, so besteht für $n > N_0$ die Ungleichung

$$\int_0^1 M[L f_n(x)]\, dx \leqslant 1.$$

Diese hat aber nach 1° die Ungleichungen

$$\|L f_n(x)\| \leqslant \overline{K},$$

$$\|f_n(x)\| \leqslant \varepsilon,$$

zur Folge.

Analog läßt sich auch aus (8') auf (8) schließen.

Betrachten wir nun speziell den Raum S^{α}. In diesem Falle haben wir die Funktion $M[u] = \frac{1}{\alpha} |u|^{\alpha}$ zu nehmen. Die zu ihr komplementäre Funktion ist $N[v] = \frac{1}{\beta} |v|^{\beta}$, und es besteht also für alle u, v die Ungleichung

$$uv \leqslant \frac{1}{\alpha} |u|^{\alpha} + \frac{1}{\beta} |v|^{\beta}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $v = |u|^{\alpha-1} \operatorname{sign} u$ ist. Aus dieser Ungleichung erhalten wir, wie früher, die Integralungleichung

$$\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(x)|^{\alpha}\, dx + \frac{1}{\beta} \int_0^1 |g(x)|^{\beta}\, dx.$$

Dabei geht sie in eine Gleichung dann und nur dann über, wenn für fast alle x

$$g^*(x) = |f(x)|^{\alpha-1} \operatorname{sign} f(x) \tag{9}$$

besteht. Wir berechnen jetzt für eine Funktion $f(x)$ aus S^{α} ihre Norm gemäß der oben angegebenen Definition.

Zuerst setzen wir voraus, daß $\frac{1}{\beta} \int_0^1 |f(x)|^{\alpha}\, dx = 1$ ist. Für die nach (9) bestimmte Funktion $g^*(x)$ gilt

$$\int_0^1 f(x)\, g^*(x)\, dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(x)|^{\alpha}\, dx + \frac{1}{\beta} \int_0^1 |g^*(x)|^{\beta}\, dx,$$

$$\frac{1}{\beta} \int_0^1 |g^*(x)|^{\beta}\, dx = 1.$$

Daraus kann man leicht schließen, daß für diese Funktion das Integral $\int\limits_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ sein Maximum erreicht, wenn wir nur die der Nebenbedingung (5) genügende Funktionen $g(x)$ zur Konkurrenz zulassen. Also es gilt nach (9)

$$\|f(x)\| = \int\limits_0^1 f(x)\, g^*(x)\, dx = \int\limits_0^1 |f(x)|^\alpha\, dx = \beta.$$

Nimmt nun $\int\limits_0^1 |f(x)|^\alpha\, dx$ irgendeinen festen Wert an, so setzen wir $a = \frac{1}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^\alpha\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Dann ist $\frac{1}{\beta} \int\limits_0^1 \left(\frac{|f(x)|}{a}\right)^\alpha dx = 1$, also nach dem Vorangehenden $\left\|\frac{f(x)}{a}\right\| = \beta$,

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\beta^{\frac{1}{\beta}}} \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^\alpha\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Für S^α stimmt die nach unserer Definition berechnete Norm bis auf einen unwesentlichen Faktor mit der gewöhnlichen Norm überein.

Man kann aber leicht die N-Funktionen angeben, für welche der Satz 2 anwendbar ist, welche aber keiner Potenz *äquivalent* [7] sind. Eine solche ist z. B. $N[u] = u^2(|\lg|u|| + 2)$ u. s. w.

Definition. *Eine Folge von mit $M[u]$ integrierbaren Funktionen $\{f_n(x)\}$ heißt gegen eine Funktion $f(x)$ schwach konvergent, wenn*

$$\|f_n(x)\| \leqslant L \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{10}$$

gilt, und für jedes t aus (0, 1)

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_0^t f_n(x)\, dx = \int\limits_0^t f(x)\, dx \tag{11}$$

ist.

Diese Definition entspricht der Riesz'schen Definition der schwachen Konvergenz für die mit der α-ten Potenz integrierbaren

[7]) Vgl. V. K. P. p. 5.

Funktionen [8]). Sie ist im allgemeinen nicht mit der sonst in der Funktionalanalysis eingebürgerten Definition der schwachen Konvergenz äquivalent. Für gewisse Probleme aber, wie z. B. in der Theorie der allgemeinen Orthogonalentwicklungen, erweist sie sich doch von gewissem Nutzen.

Satz 3. *Die gegebene* N-*Funktion* $M[u]$ *genüge denselben Voraussetzungen wie im Satz 2.*

Aus jeder Folge $\{f_n(x)\}$, *welche die Ungleichung* (10) *erfüllt, kann man eine schwachkonvergente Teilfolge* $\{f_{n_i}(x)\}$ *herausgreifen. Die Funktion* $f(x)$, *gegen welche diese Teilfolge schwach konvergiert, ist mit* $M[u]$ *integrierbar und es besteht die Ungleichung*

$$\varliminf_{i\to\infty} \|f_{n_i}(x)\| \geqslant \|f(x)\|. \tag{12}$$

Beweis. Aus (10) folgt nach dem Satz 2

$$\int_0^1 M[f_n(x)]\,dx < \bar{L};$$

man kann also nach einem Satz des Herrn W. H. Young [9]) eine Teilfolge $\{f_{n_i}(x)\}$ aus $\{f_n(x)\}$ herausgreifen, die gegen eine mit $M[u]$ integrierbare Funktion $f(x)$ schwach konvergiert. Dann gilt auch für eine beliebige beschränkte Funktion $h(x)$

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 f_{n_i}(x)\,h(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,h(x)\,dx\ ^{10}). \tag{13}$$

Wegen unserer Definition der Norm gibt es ein beschränktes $h(x)$, so daß $\int_0^1 f(x)\,h(x)\,dx \geqslant \|f(x)\| - \varepsilon$, $\int_0^1 N[h(x)]\,dx \leqslant 1$. Nach (13) folgt also

$$\|f(x)\| - \varepsilon \leqslant \int_0^1 f(x)\,h(x)\,dx = \lim_{i\to\infty} \int_0^1 f_{n_i}(x)\,h(x)\,dx \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \|f_{n_i}(x)\|.$$

[8]) F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69 (1910).

[9]) W. H. Young, On Successions with Subsequences converging to an Integral, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 24 (1925), p. 1—20; siehe auch V. K. P. Satz 7, III, p. 55.

[10]) V. K. P. III, p. 53.

Satz 4. *Die Voraussetzungen über die* N-*Funktion* $M[u]$ *wie im Satz 2.*

Betrachten wir $\mathfrak{M}$ *als den B-Raum mit der früher eingeführten Normierung, so läßt sich jedes in* $\mathfrak{M}$ *definiertes, lineares Funktional in der Form*

$$A(f(x)) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \tag{14}$$

darstellen. Dabei bedeutet $g(x)$ *eine Funktion mit der Eigenschaft: Es gibt eine Zahl* k, $0 < k < 1$, *so daß das Integral*

$$\int_0^1 N[k\, g(x)]\, dx \tag{15}$$

existiert.

Beweis. Mit $\{\varphi_i(x)\}$ bezeichnen wir das wohlbekannte Haar'sche Orthogonalsystem. Bezeichnet $f(x)$ eine mit $M[u]$ integrierbare Funktion, $s_n[f(x)]$ die n-te Partialsumme der Entwicklung von $f(x)$ nach den Haar'schen Funktionen, so gilt nach einem Satz [11]) aus V. K. P. und nach II

$$\lim_{n\to\infty} \| s_n[f(x)] - f(x) \| = 0.$$

Bedeutet $A[f(x)]$ ein in $\mathfrak{M}$ definiertes, lineares Funktional, so folgt aus der letzten Relation für jedes mit $M[u]$ integrierbares $f(x)$

$$A[f(x)] = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 f(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx \cdot c_\nu = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) \left[\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\, \varphi_\nu(x) \right] dx. \tag{16}$$

Hier haben wir $A[\varphi_\nu(x)] = c_\nu$ gesetzt. Nach einem Hilfssatze aus V. K. P. [12]) gibt es Zahlen k, $0 < k < 1$, $L > 0$, für welche die Ungleichung

$$\int_0^1 N\left[k \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\, \varphi_\nu(x) \right] dx < L$$

[11]) V. K. P. III, Satz 2, p. 64.

[12]) V. K. P. II, Hilfssatz 2, p. 44; es ist zu beachten, daß die dort vorkommende Funktion $\overline{M}(u)$ gleich $L\, M\left(\frac{u}{L}\right)$ ist.

bei jedem n gilt. Nach dem schon einmal zitierten Young'schen Satze gibt es eine mit $N[ku]$ integrierbare Funktion $g(x)$, gegen welche die Folge $\{\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\, \varphi_\nu(x)\}$ mit $N[ku]$ schwach konvergiert. Da aber die zu $\frac{1}{k} N[ku]$ komplementäre Funktion mit $\frac{1}{k} M[u]$ identisch ist, so gilt nach einem Satze von Herrn C. Burkill [13])

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\, \varphi_\nu(x)\right) dx = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

bei jedem mit $M[u]$ integrierbaren $f(x)$. Daraus und wegen (16) folgt (14).

Daß umgekehrt jedes Integral von der Gestalt (14), wobei für $g(x)$ das Integral (15) existiert, immer ein lineares Funktional darstellt, ergibt sich leicht mit Hilfe der Young'schen Ungleichung.

Wir wollen jetzt zwei zueinander konjugierte N'-Funktionen $M[u]$, $N[v]$ betrachten [14]). Sie besitzen beide die Eigenschaft (Δ_2) für großes u und sind je einer konvexen Funktion $\overline{M}[u]$, $\overline{N}[v]$ äquivalent; $\overline{M}[u]$, $\overline{N}[v]$ lassen sich dabei als zueinander komplementäre Funktionen wählen.

Deswegen kann man die Normen, welche für mit $\overline{M}[u]$ bezw. $\overline{N}[v]$ integrierbaren Funktionen nach (4) eingeführt wurden, auch als die Normen in den Bereichen $\mathfrak{M}$ bezw. $\mathfrak{N}$ von mit $M[u]$ bezw. $N[v]$ integrierbaren Funktionen auffassen. Wir bezeichnen diese Normen mit $\|\;\|_M$ bezw. $\|\;\|_N$. Es ist wegen der Äquivalenz $\overline{M}[u]$ mit $M[u]$, $N[v]$ mit $\overline{N}[v]$ klar, daß die Eigenschaften I, II auch für $M[u]$, $N[v]$ bestehen bleiben. Da in diesem Falle $N[kv]$, $0 < k < 1$ mit der Funktion $N[v]$ äquivalent ist, so besitzt jedes lineare Funktional in $\mathfrak{M}$ die Integraldarstellung (14), wobei aber $g(x)$ dem zu $\mathfrak{M}$ konjugierten Raume angehört; natürlich ist auch umgekehrt jedes in $\mathfrak{N}$ definierte, lineare Funktional mit Hilfe einer Funktion aus $\mathfrak{M}$ in der Form (14) darstellbar.

In diesem Falle kann man also $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ als im gewöhnlichen funktionaltheoretischen Sinne zueinander konjugiert betrachten.

[13]) J. C. Burkill, Strong and Weak Convergence of Functions of General Type, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 28 (1928) p. 493—500, insbes. p. 499, Theorem 5.

[14]) V. K. P. p. 37 und p. 45, Satz 3.

Weiter folgt aus einem Satze in V. K. P. [15]), daß für eine mit $M[u]$ gegen $f(x)$ schwach konvergente Folge $\{f_n(x)\}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

ist, bei jedem mit $N(v)$ integrierbaren $g(x)$. Wir sehen folglich, daß für die zueinander konjugierten N-Funktionen die schwache Konvergenz nach der früher angegebenen Definition (gegen die schwache Grenze) identisch ist mit der schwachen Konvergenz im Sinne der allgemeinen Funktionalanalysis. Daraus und aus dem Satze 3 folgt endlich, daß jede schwachkonvergente Folge (im funktionaltheoretischen Sinne) gegen eine bestimmte »schwache« Grenze konvergiert. Es gilt also der folgende

Satz 5. *Gegeben seien zwei zueinander konjugierte N'-Funktionen $M[u]$, $N[v]$. Für die ihnen entsprechenden Mengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ aller mit $M[u]$ bezw. $N[v]$ integrierbaren Funktionen kann man die Norm $\|\ \|_M$ bezw. $\|\ \|_N$ so definieren, daß die Eigenschaften I, II erfüllt sind. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ besitzen dann, bei dieser Normierung als B-Räume aufgefaßt, die folgenden Eigenschaften:*

Jedes in $\mathfrak{M}$ [$\mathfrak{N}$] definierte, lineare Funktional ist in der Form eines Integrals (14) *darstellbar, wo $g(x)$ dem Raume $\mathfrak{N}$ [$\mathfrak{M}$] angehört. Die Räume $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sind separabel; die* Riesz'sche *schwache Konvergenz stimmt mit der funktionaltheoretischen überein; eine schwach konvergente Folge konvergiert immer schwach gegen eine bestimmte »schwache« Grenze, die wieder dem Raume $\mathfrak{M}$ [$\mathfrak{N}$] angehört. Es gilt dabei die Ungleichung* (12).

§ 2.

Es ist jetzt klar, daß verschiedene Sätze der Funktionaltheorie und Theorie der allgemeinen Orthogonalentwicklungen auf die Funktionenklassen, von welchen in § 1 die Rede war, sich verallgemeinern lassen.

Als Beispiel von Sätzen, die für solche Funktionenklassen gelten, wählen wir einen Satz über biorthogonale Entwicklungen.

[15]) V. K. P. p. 56, 57, Satz 8.

Satz 6. *Es seien $M[u]$, $N[v]$ zwei zueinander konjugierte N'-Funktionen. Es sei außerdem ein biorthogonales System $\{\varphi_i(x), \psi_i(x)\}$ gegeben, dessen Funktionen beschränkt sind.*

Ist die Entwicklung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 f(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx \cdot \psi_\nu(t) \tag{16}$$

einer jeden mit $M[u]$ integrierbaren Funktion $f(x)$ nach der Norm $\| \|_M$ konvergent, so ist auch die Entwicklung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 g(x)\, \psi_\nu(x)\, dx \cdot \varphi_\nu(t) \tag{17}$$

einer jeden mit $N[v]$ integrierbaren Funktion $g(x)$ nach der Norm $\| \|_N$ konvergent [16]).

Beweis. Wir setzen

$$s_n[f(x)] = \sum_{\nu=1}^{n} \int_0^1 f(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx \cdot \psi_\nu(t),$$

$$s_n^*[g(t)] = \sum_{\nu=1}^{n} \int_0^1 g(x)\, \psi_\nu(x)\, dx \cdot \varphi_\nu(t).$$

Es gilt die Relation

$$\int_0^1 s_n[f(x)]\, g(x)\, dx = \int_0^1 s_n^*[g(x)]\, f(x)\, dx.$$

Da weiter $\int_0^1 s_n[f(x)]\, g(x)\, dx \leqslant \int_0^1 M(s_n[f(x)])\, dx + \int_0^1 N(g(x))\, dx$ ist, so ist, unserer Voraussetzung zufolge, $\int_0^1 s_n^*[g(x)]\, f(x)\, dx$ für jedes mit $M[u]$ integrierbare $f(x)$ beschränkt.

Nach einem Satze [17]) aus V. K. P. und nach I gibt es eine nur von $g(x)$ abhängige Konstante L, so daß

$$\| s_n^*[g(x)] \|_N \leqslant L. \tag{18}$$

[16]) Vgl. das inzwischen erschienene Buch: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, Ch. VII.

[17]) V. K. P. p. 45, Satz 3.

Nun gilt (18) für jedes $g(x)$ aus $\mathfrak{N}$; wir können also einen allgemeinen Satz von Herrn S. Banach [18]) anwenden. Demzufolge gibt es eine universelle Konstante M, so daß für beliebige $g(x)$ aus $\mathfrak{N}$ die Ungleichung

$$\| s_n^* [g(x)] \|_N \leqslant M \| g(x) \|_N \tag{19}$$

gilt.

Es sei jetzt ein $g(x)$ vorgegeben. Wegen (19) kann man nach Satz 3 aus $\{s_n^* [g(x)]\}$ eine schwach konvergente Teilfolge herausgreifen. Mit $\bar{g}(x)$ bezeichnen wir ihre schwache Grenze. Dann gibt es nach einem allgemeinen Satz [19]) lineare Aggregate

$$w_n[g(x)] = \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu^{(n)} s_n^* [g(x)],$$

so daß

$$\lim_{n\to\infty} \| w_n[g(x)] - \bar{g}(x) \|_N = 0$$

ist. Da aber $\int\limits_0^1 g(x)\, \psi_\nu(x)\, dx = \int\limits_0^1 \bar{g}(x)\, \psi_\nu(x)\, dx$ ist, so kann man in w_n $\bar{g}(x)$ substituieren, und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \| w_n[\bar{g}(x)] - \bar{g}(x) \|_N = 0. \tag{20}$$

Nun haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \| s_n^* [g(x)] - s_m^* [g(x)] \|_N &= \| s_n^* [\bar{g}(x)] - s_m^* [\bar{g}(x)] \|_N \leqslant \\ &\leqslant \| s_n^* (\bar{g}(x) - w_p[\bar{g}(x)]) - s_n^* (\bar{g}(x) - w_p[\bar{g}(x)]) \|_N + \\ &+ \| s_n^* (w_p[\bar{g}(x)] - s_n^* (w_p[\bar{g}(x)]) \|_N, \end{aligned}$$

woraus sich wegen (19), (20) unser Satz ergibt.

Corollar. Ein analoger Satz gilt, wenn wir statt der Partialsummen $s_n[f(x)]$, $s_n^* [f(x)]$ ihre irgendeiner zeilenfiniten Toeplitz'schen Limitierungsmethode entsprechenden T-Transformierten $\sigma_n[f(x)]$, $\sigma_n^* [f(x)]$ betrachten.

[18]) S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits... Fund. Math. 3 (1922) p. 133—181, insb. p. 157.

[19]) Siehe dazu S. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires, Studia Math. 1 (1929) p. 211—216, insb. p. 214, Th. 6, aus welchem sich die uns interessierende Tatsache leicht ergibt.