Elemente der Analysis

Christoph Bock

Vorlesungen

an der

Friedrich-Alexander-Universität

Erlangen-Nürnberg

Vorwort

Die Vorlesungen *Elemente der Analysis I - III* habe ich seit Beginn dieser Dekade jeweils zweimal an der Universität Erlangen-Nürnberg gelesen. Der Hörerkreis bestand aus Studenten des nicht-vertieften Lehramtes in Bayern, und die Vorlesungen waren auf die Anforderungen der entsprechenden Staatsexamensprüfungen in Mathematik in Bayern zugeschnitten.

Der wesentliche Unterschied zu einer Vorlesungsreihe, die ich für Studenten mit Studienziel Diplom (bzw. neuerdings Baccalaureus) oder des vertieften Lehramtes gehalten hätte, für welche der Lehrplan im ersten und dritten Semester eine Semesterwochenstunde mehr vorsieht, besteht zum einen darin, daß ich sämtliche Beweise[1] vorgeführt – welches aus Zeitgründen nicht möglich war – und zum anderen im Kapitel über Topologie von allgemeinen topologischen Räumen anstelle von $\mathbb{R}^n$, im Kapitel über mehrdimensionale Differentialrechnung auch über Untermannigfaltigkeiten gesprochen sowie ein Kapitel über mehrdimensionale Integration nach Lebesgue studiert hätte. Dafür wäre die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen knapper behandelt worden.

Ein ursprünglich von mir im dritten Teil der Vorlesung eingeplantes Kapitel über das mehrdimensionale Riemann-Integral[2] habe ich nicht in der Vorlesung besprochen. Das vorliegende Skript schließt diese Lücke. Die Tatsache, daß ich die Integration im $\mathbb{R}^n$ nach Riemann anstatt nach Lebesgue vorführen wollte, ist dem Hörerkreis der Vorlesung geschuldet. Die Vorlesung *Elemente der Analysis III* stellt für Studenten des nicht-vertieften Lehramtes ein sog. *Aufbaumodul* dar, und ich hatte mich entschieden, eine Integrationstheorie zu präsentieren, die tatsächlich auf dem in einer Dimension diskutierten Integralbegriff aufbaut. Die mehrdimensionale Integration ist jedoch mittlerweile für die Staatsexamensprüfung der Studenten des nicht-vertieften Lehramtes in Bayern nicht mehr relevant. Vor die Wahl gestellt, entweder ausführlich über die Topologie des $\mathbb{R}^n$ zu sprechen, oder von letzterer und der mehrdimensionalen Integrationstheorie jeweils nur einen Abriß zu geben, habe ich ersteren Standpunkt eingenommen.

Ebenfalls nicht in der Vorlesung vorgetragen habe ich aus Zeitmangel den Abschnitt über Mächtigkeiten von Mengen im Kapitel über die reellen Zahlen und das Kapitel über komplexe Zahlen, da es in der parallel gelesenen Vorlesung über *Lineare Algebra* zum Standard gehört. Den Anhang habe ich bis auf das Lemma von Zorn in der Vorlesung vollständig ausgespart.

Bei der Ausarbeitung der Vorlesungen habe ich mich eng an [5][3] und den Vorlesungen *Analysis I - III* [10], die ich bei meinem späteren Diplomvater W. Henke vom WS 1997/98 bis zum WS 1998/99 an der Universität zu Köln gehört habe, aber auch den Skripten *Elemente der Analysis I - IV* zu den Vorlesungen

[1] mit Ausnahme des Zusatzes zu Satz 2.55 und Satz 2.63

[2] Als Literatur zur Riemannschen Integration empfehle ich F. Erwes Buch [8].

[3] Dieses Buch gefällt mir besonders gut, und ich empfehle es jedem Hörer einer Vorlesung über Analysis als Lektüre. Die ursprünglich geplanten fortführenden Teile II und III sind leider nie publiziert worden.

Zur Literatur über Analysis ist des weiteren zu sagen, daß es viele gute Bücher zu diesem Thema gibt. Jeder Student sollte selber einmal in der Bibliothek gucken, welches ihm zusagt. Neben [5] und [8] habe ich eine Vorliebe für [11], da dieses Buch neben der Theorie auch eine große Anzahl an Hintergrundinformationen enthält.

Elemente der Analysis I - III von W. Barth [1], die er vom WS 2006/07 bis zum WS 2007/08 an der Universität Erlangen-Nürnberg gelesen hat, sowie [8] orientiert. Anhang A ist im wesentlichen [13] entnommen.

Abschließend möchte ich anmerken, daß sich das vorliegende Skript in der Reihenfolge (und damit in der Numerierung) der einzelnen Definitionen und Resultate an einigen Stellen von meinem Vortrag in den Vorlesungen unterscheidet. Außerdem habe ich einige meinen Vorlesungsvortrag verallgemeinernde Resultate hinzugefügt – zusätzlich zu den oben bereits erwähnten Ergänzungen.

Das hier dargebotene Material ist zum Nachlesen und zur Vertiefung des Stoffes für die Hörer des (nicht notwendigerweise bei mir gehörten) o.g. Vorlesungszyklus gedacht.

Für Hinweise auf Fehler, Kritik oder Lob bin ich dankbar. Kontakten können Sie mich per E-Mail an `bock at mi.uni-erlangen.de`.

Ich sollte an dieser Stelle anmerken, daß das vorliegende Skriptum nicht gegengelesen wurde. Ich kann nicht ausschließen, daß sich beim Übertrag meiner handschriftlichen Notizen auf die folgenden Seiten Fehler eingeschlichen haben. Ich entdecke bei jeder Durchsicht kleinere Ungenauigkeiten – sprich Fehler. Aber auch dies sollte für den Leser lehrend sein: Nicht sämtliche Resultate, die in der Literatur – egal, ob Skriptum oder Buch – angegeben sind, sind wahr. Der Leser sollte sich von jedem Beweis selbst überzeugen.

Erlangen, im Februar 2012

Christoph Bock

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

In der Mathematik beschäftigen wir uns mit *Aussagen* über mathematische Objekte.

Definition 1.1 (Aussagen, Axiome)**.** Eine *Aussage* ist ein sprachlich und grammatisch richtiger Ausdruck, dem eindeutig ein Wahrheitswert – entweder wahr (w) oder falsch (f) – zugeordnet ist.

Ein *Axiom* ist eine Aussage, die wir ohne Begründung als wahr betrachten.

Beispiel.

1.) 13 ist eine Primzahl. Aussage, w

2.) 13 ist eine Glückszahl. keine Aussage

3.) $\sqrt{2}$ ist rational. Aussage, f

4.) In unserem Milchstraßensystem gibt es weiteres Leben. Aussage, w oder f

Definition 1.2 (Logische Verknüpfung von Aussagen zu neuen Aussagen)**.** Es seien A und B Aussagen. Wir definieren dann neue Aussagen *non* A (i.Z. $\boxed{\neg A}$), A *und* B (i.Z. $\boxed{A \wedge B}$), A *oder* B (i.Z. $\boxed{A \vee B}$), *entweder* A *oder* B (i.Z. $\boxed{A \veebar B}$), *aus* A *folgt* B (i.Z. $\boxed{A \Rightarrow B}$) und A *ist äquivalent zu* B (i.Z. $\boxed{A \Leftrightarrow B}$) durch die folgenden *Wahrheitswertetafeln*:

(i)

A	$\neg A$
w	f
f	w

(ii)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	w	f	f
f	w	f	w	w	w	f
f	f	f	f	f	w	w

Bemerkung.

1.) Im Unterschied zur Umgangssprache ist für uns also *aus* A *folgt* B insbesondere immer dann wahr, wenn A falsch ist, (egal ob B wahr oder falsch ist).

Beispiel.

1.) *Wenn morgen die Sonne scheint, gehen wir schwimmen.*
Sollte es morgen regnen, so habe ich mein Versprechen gehalten, gleichgültig, ob wir schwimmen gehen oder nicht.

2.)

$$5 - 2 = 1 \Longrightarrow 4 \text{ ist eine Primzahl}$$

und

$$5 - 2 = 1 \Longrightarrow 5 \text{ ist eine Primzahl}$$

sind gemäß unserer Definition wahre Aussagen, obwohl sie umgangssprachlich wohl eher als unsinnig bezeichnet würden.

2.) Die Schreibweisen

Satz. *Vor.: A* *Beh.: B*	oder	**Satz.** *Gelte A. Dann folgt B.*

sind per definitionem gleichbedeutend mit $A \Rightarrow B$.

Insbesondere ist jeder Satz wahr, dessen Voraussetzung falsch ist.

Als *Beweis* eines solchen Satzes bezeichnen wir den unter Benutzung von wahren Aussagen erfolgenden Wahrheitsnachweis für die Aussage $A \Rightarrow B$, d.h. die Verifizierung einer „wenn, dann"-Aussage und a priori nicht etwa die Verifizierung der in der Behauptung genannten Aussage B.

Da $A \Rightarrow B$ bei falscher Voraussetzung A stets wahr ist, reduziert sich die Verifizierung von $A \Rightarrow B$ auf den Nachweis von: Falls gilt „A ist wahr", so folgt auch „B wahr."

3.) Ein *Lemma* (oder *Hilfssatz*) bzw. *Hauptsatz* (oder *Theorem*) ist per definitionem ebenfalls ein Satz. Diese wertenden Titel von Sätzen zielen nur darauf ab, dem Leser einer längeren deduktiven Darstellung den Überblick zu erleichtern, durch Hinweis auf das geringere bzw. bedeutendere Eigeninteresse oder inhaltliche Gewicht dieses Satzes für die vorliegende Theorie.

Satz 1.3. *Sind A, B, C beliebige Aussagen, so sind die folgenden Aussagen sämtlich wahr:*

$$\neg(\neg A) \iff A, \tag{1}$$
$$\neg(A \wedge B) \iff ((\neg A) \vee (\neg B)), \tag{2}$$
$$\neg(A \vee B) \iff ((\neg A) \wedge (\neg B)), \tag{3}$$
$$(A \wedge (B \vee C)) \iff ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)), \tag{4}$$
$$(A \vee (B \wedge C)) \iff ((A \vee B) \wedge (A \vee C)), \tag{5}$$
$$(A \Rightarrow B) \iff ((\neg B) \Rightarrow (\neg A),) \tag{6}$$
$$(A \Rightarrow B) \iff ((\neg A) \vee B), \tag{7}$$
$$(\neg(A \Rightarrow B)) \iff (A \wedge (\neg B)), \tag{8}$$
$$(A \Rightarrow B) \iff ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)), \tag{9}$$
$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Longrightarrow B. \tag{10}$$

Bemerkung. (6) beinhaltet die *Methode des indirekten Beweises*, nämlich die

Äquivalenz von	**Satz.** *Vor.: A* *Beh.: B*	und	**Satz.** *Vor.:* $\neg B$ *Beh.:* $\neg A$.

Beweis. Exemplarisch führen wir (2) vor, die übrigen Aussagen zeigt man analog.

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	(2)
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

□

Definition 1.4 (Aussageformen).

(i) Sei Ω eine vorgegebene Klasse (Gesamtheit) von Objekten. Unter einer *einstelligen Aussageform mit Einsetzungsklasse* Ω verstehen wir einen sprachlich und grammatisch richtigen Ausdruck $H(\ldots)$ mit einer „Leerstelle" derart, daß gilt:

$$H(\omega) \text{ ist Aussage für jedes Objekt } \omega, \text{ das zu } \Omega \text{ gehört.}$$

(ii) Seien Ω_1, Ω_2 zwei Klassen von Objekten. Eine *zweistellige Aussageform mit Einsetzungsklassen* Ω_1, Ω_2 ist ein sprachlich und grammatisch richtiger Ausdruck $H(\ldots,\ldots)$ mit zwei Leerstellen derart, daß gilt:

$$H(\omega_1, \omega_2) \text{ ist Aussage für jedes Objekt } \omega_1 \text{ aus } \Omega_1 \text{ und } \omega_2 \text{ aus } \Omega_2.$$

Drei- und mehrstellige Aussageformen werden analog definiert.

Definition 1.5 (Quantoren). Sei $H(\ldots)$ eine einstellige Aussageform mit Einsetzungsklasse Ω. Dann definieren wir zwei neue Aussagen

für alle ω gilt $H(\omega)$ (i.Z. $\boxed{\forall_\omega H(\omega)}$ oder $\boxed{\bigwedge_\omega H(\omega)}$) und

es existiert (mind.) ein ω, für das $H(\omega)$ gilt (i.Z. $\boxed{\exists_\omega H(\omega)}$ oder $\boxed{\bigvee_\omega H(\omega)}$)

wie folgt:

$\forall_\omega H(\omega)$ ist per definitionem genau dann wahr, wenn für alle ω aus Ω die Aussage $H(\omega)$ wahr ist.

$\exists_\omega H(\omega)$ ist per definitionem genau dann wahr, wenn (mindestens) ein ω aus Ω existiert, für das $H(\omega)$ wahr ist.

$\forall$ und $\exists$ heißen *Quantoren.*

Es gilt offenbar:

$$\big(\neg(\forall_\omega H(\omega))\big) \iff \big(\exists_\omega (\neg H(\omega))\big)$$
$$\big(\neg(\exists_\omega H(\omega))\big) \iff \big(\forall_\omega (\neg H(\omega))\big)$$

Wir wollen nun Objekte bereitstellen, über die wir etwas aussagen können, sog. *Mengen.* Georg Cantor (1845–1918) formulierte 1877 die in 1.6 (i) genannte Definition. Obwohl dieser „naive" Mengenbegriff nicht ganz unproblematisch ist (vgl. z.B. [4]), wollen wir mit ihm arbeiten.

Definition 1.6 (Mengen à la Cantor)**.**

(i) Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche wir die *Elemente* der Menge nennen) zu einem Ganzen.

Es steht also eindeutig fest, ob ein Objekt Element einer Menge ist oder nicht, und jede Menge kann ein Objekt höchstens einmal enthalten.

Ist a ein Element einer Menge M, so schreiben wir $\boxed{a \in M}$ und andernfalls $\boxed{a \notin M}$.

Bezeichnen $a \in M$ und $b \in M$ dasselbe Element, so schreiben wir $\boxed{a = b}$. Gilt $a = b$ nicht, so schreiben wir $\boxed{a \neq b}$.

(ii) Ist M eine Menge und $H(\dots)$ eine einstellige Aussageform, deren Einsetzungsklasse Ω die Menge M umfaßt, so definieren wir drei neue Aussagen

für alle a aus M gilt $H(a)$ (i.Z. $\boxed{\forall_{a \in M} H(a)}$ oder $\boxed{\bigwedge_{a \in M} H(a)}$),

es existiert (mindestens) ein a aus M, für das $H(a)$ gilt (i.Z. $\boxed{\exists_{a \in M} H(a)}$ oder $\boxed{\bigvee_{a \in M} H(a)}$) und

es existiert genau ein a aus M, für das $H(a)$ gilt (i.Z. $\boxed{\exists!_{a \in M} H(a)}$ oder $\boxed{\dot{\bigvee}_{a \in M} H(a)}$) wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\forall_{a \in M} H(a) &:\Longleftrightarrow \forall_a \, (a \in M \Rightarrow H(a)),\\
\exists_{a \in M} H(a) &:\Longleftrightarrow \exists_a \, (a \in M \wedge H(a)),\\
\exists!_{a \in M} H(a) &:\Longleftrightarrow \exists_{a \in M} \, (H(a) \wedge \forall_{b \in M} (H(b) \Rightarrow a = b)) \, .
\end{aligned}
$$

(iii) Seien M, N Mengen.

a) Wir sagen, daß N *eine Teilmenge von M* ist (i.Z. $\boxed{N \subset M}$) genau dann, wenn gilt: $\forall_{a \in N} \, a \in M$. M heißt dann auch eine *Obermenge von N* (i.Z. $\boxed{M \supset N}$).

Wenn $N \subset M$ nicht gilt, so schreiben wir $\boxed{N \not\subset M}$ oder $\boxed{M \not\supset N}$.

b) Wir sagen, daß M *gleich* N ist (i.Z. $\boxed{M = N}$) genau dann, wenn gilt: $(N \subset M) \wedge (M \subset N)$.

Wenn $M = N$ nicht gilt, so schreiben wir $\boxed{M \neq N}$.

(iv) Die eindeutig bestimmte Menge $\boxed{\varnothing}$, die kein Element enthält, heißt *leere Menge*.

(v) Seien M, N Mengen sowie $(M_i)_{i \in I}$ eine *Mengenfamilie*, d.h. per definitionem I ist eine Menge, und für jedes $i \in I$ ist M_i ebenfalls eine Menge. Dann gibt es folgende Mengen:

a) Der *Durchschnitt von M und N* (i.Z. $\boxed{M \cap N}$) enthält alle Elemente, die sowohl zu M als auch zu N gehören.

Der *Durchschnitt der Mengenfamilie* $(M_i)_{i \in I}$ (i.Z. $\boxed{\bigcap_{i \in I} M_i}$) die Menge aller Elemente, die in allen M_i, $i \in I$, enthalten sind.

b) Die *Vereinigung von M und N* (i.Z. $\boxed{M \cup N}$) enthält alle Elemente, die in M oder in N enthalten sind.

M und N heißen *disjunkt* genau dann, wenn $M \cap N = \varnothing$. In diesem Fall schreibt man auch $\boxed{M \,\dot{\cup}\, N}$ für $M \cup N$.

Die *Vereinigung der Mengenfamilie* $(M_i)_{i \in I}$ (i.Z. $\boxed{\bigcup_{i \in I} M_i}$) die Menge aller Elemente, die in mindestens einem M_i, $i \in I$, enthalten sind.

Die Mengenfamilie $(M_i)_{i \in I}$ heißt *disjunkt* genau dann, wenn gilt

$$\forall_{i,j \in I} (i \neq j \Longrightarrow M_i \cap M_j = \varnothing).$$

In diesem Fall schreibt man auch $\boxed{\dot{\bigcup}_{i \in I} M_i}$ für $\bigcup_{i \in I} M_i$.

c) Die *Potenzmenge von M* (i.Z. $\boxed{\mathfrak{P}(M)}$) besitzt genau die Teilmengen von M als Elemente.

d) Ist $H(\ldots)$ eine einstellige Aussageform, deren Einsetzungsklasse die Menge M umfaßt, so bezeichnen wir mit $\boxed{\{a \in M \mid H(a)\}}$ die Menge derjenigen Elemente a von M, für die $H(a)$ gilt.

e) $\boxed{M \setminus N} := \{a \in M \mid a \notin N\}$ heißt die *Differenzmenge von M und N* oder im Falle $N \subset M$ das *Komplement von N in M*.

Definition 1.7 (Abbildungen, Bild, Urbild)**.** Seien M, N Mengen.

(i) Eine *Abbildung* $\boxed{f \colon M \to N}$ *von M nach N* ist eine Zuordnung, die jedem Element $a \in M$ genau ein Element $\boxed{f(a)} \in N$ zuordnet.

Die *Menge der Abbildungen $M \to N$* bezeichnen wir mit $\boxed{N^M}$.

Ist dann $f \in N^M$, so heißt für jede Teilmenge A von M die Menge

$$\boxed{f(A)} := \{b \in N \mid \exists_{a \in A}\, f(a) = b\}$$

das *Bild von A unter f* und für jede Teilmenge B von N die Menge

$$\boxed{\overset{-1}{f}(B)} := \{a \in M \mid \exists_{b \in B}\, f(a) = b\}$$

das *Urbild von B unter f*.

Ist eine Abbildung $f \in N^M$ konstant vom Wert $c \in N$, so schreiben wir auch $\boxed{f = c}$ und identifizieren hierbei das Element $c \in N$ mit der konstanten Abbildung vom Wert $c \in N$.

(ii) Die Abbildung $\boxed{\mathrm{id}_M\colon M \to M}$, $a \mapsto a$, heißt die *Identität auf* M.[4]

Ist darüber hinaus $A \subset M$, so heißt die Abbildung $\boxed{A \hookrightarrow M}$, $a \mapsto a$, die *Inklusion von* A *in* M. Für eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt des weiteren $\boxed{f|_A\colon A \to N}$, $a \mapsto f(a)$, die *Einschränkung von* f *auf* A.

(iii) Sind $\widetilde{M}, \widetilde{N}$ zwei weitere Mengen, und sind $f\colon M \to N$ und $g\colon \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ Abbildungen, so ist die *Verkettung von* f *und* g definiert als die Abbildung

$$\boxed{f \circ g\colon \overset{-1}{g}(\widetilde{N} \cap M) \longrightarrow N}, \quad a \longmapsto f(g(a)).$$

(iv) Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt

a) *injektiv* (oder *Injektion*) genau dann, wenn gilt

$$\forall_{a,\tilde{a} \in M} \left(f(a) = f(\tilde{a}) \Longrightarrow a = \tilde{a} \right),$$

b) *surjektiv* (oder *Surjektion*) genau dann, wenn gilt $\forall_{b \in N} \exists_{a \in M}\, f(a) = b$,

c) *bijektiv* (oder *Bijektion*) genau dann, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

(v) Eine Abbildung $f\colon M \to N$ ist offenbar genau dann bijektiv, wenn gilt $\forall_{b \in N} \exists!_{a \in M}\, f(a) = b$. In diesem Fall definieren wir die *Umkehrabbildung von* f als die Abbildung $\boxed{f^{-1}\colon N \to M}$ mit

$$\forall_{b \in N}\, f^{-1}(b) = a, \quad \text{wobei } a \in M \text{ eindeutig bestimmt mit } f(a) = b.$$

Definition 1.8 (Kartesisches Produkt einer Mengenfamilie)**.** Seien M eine Menge und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von M. Dann heißt die Menge

$$\boxed{\bigtimes_{i \in I} M_i} := \{ f\colon I \to M \text{ Abbildung} \mid \forall_{i \in I}\, f(i) \in M_i \}$$

das *kartesische*[5] *Produkt der Mengenfamilie* $(M_i)_{i \in I}$.

Ist $I = \{1, \dots, n\}$, so können wir $\boxed{M_1 \times \ldots \times M_n} := \bigtimes_{i \in I} M_i$ kanonisch mit der Menge aller n-*Tupel* $(a_1, \dots, a_n)$ mit $a_1 \in M_1, \dots, a_n \in M_n$ identifizieren. Im Falle $M_1 = \ldots = M_n = M$ schreiben wir auch $\boxed{M^n}$ für $M_1 \times \ldots \times M_n$.

Wir setzen die Gültigkeit des folgenden *Auswahlaxiomes* voraus.

1.9 (Auswahlaxiom)**.** Seien M eine Menge und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von M mit $\forall_{i \in I}\, M_i \neq \varnothing$. Dann gilt $\bigtimes_{i \in I} M_i \neq \varnothing$, d.h. es existiert eine Abbildung $f\colon I \to M$ mit $\forall_{i \in I}\, f(i) \in M_i$.

[4] Die Identität auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\boxed{x}$ bzw. $\boxed{z}$. Hierbei ist $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ die später einzuführende Menge der reellen bzw. komplexen Zahlen.

[5] nach René Descartes (1596–1650)

Bemerkung. In dieser Bemerkung verwenden wir die später einzuführenden reellen Zahlen.

Seien $M = \{1,2,3\}$, $I = \{1,2,3,4\}$ sowie $M_1 = \{1,3\}$, $M_2 = \{1,2\}$, $M_3 = \{2\}$ und $M_4 = \{2,3\}$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} f\colon \{1,2,3,4\} & \longrightarrow & \{1,2,3\} \\ 1 & \longmapsto & 3 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & 2 \\ 4 & \longmapsto & 3 \end{array}$$

offenbar eine Abbildung $f\colon I \to M$ mit $\forall_{i\in I}\, f(i) \in M_i$. Wir können die Existenz eines f wie im Auswahlaxiom also durch explizite Angabe garantieren, und dies ist immer der Fall, wenn I eine *endliche* Menge ist.

Das Auswahlaxiom spielt erst dann eine Rolle, wenn I keine endliche Menge mehr ist.

Seien z.B. $M = \mathbb{R}$, $I = \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\}$ und $\forall_{i\in\mathfrak{P}(\mathbb{R})\setminus\{\varnothing\}}\, M_i = i$. Das Auswahlaxiom besagt, daß es eine Abbildung $f\colon \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\} \to \mathbb{R}$ gibt, die jeder nicht-leeren Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Element aus dieser Menge zuordnet. Eine solche Abbildung könnten wir niemals explizit angeben und ihre Existenz daher auch ohne das Auswahlaxiom nicht beweisen.

2 Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

Axiomatische Einführung der reellen Zahlen

Wir betrachten eine Menge $\boxed{\mathbb{R}}$ als gegeben, welche die Struktur besitzt, die in den nachfolgend genannten Axiomen ($\mathbb{R}1$) bis ($\mathbb{R}13$) beschrieben ist. Man kann zeigen, daß $\mathbb{R}$ dadurch (bis auf sog. *Isomorphie angeordneter Körper*) eindeutig bestimmt ist. Die Elemente von $\mathbb{R}$ heißen *reelle Zahlen*.

Man kann sich nun fragen, ob überhaupt eine Menge mit ($\mathbb{R}1$) bis ($\mathbb{R}13$) existiert. Um einzusehen, daß dies der Fall ist, kann man verschiedene Konstruktionen solch einer Menge studieren. Man konstruiert zunächst die Menge der *natürlichen Zahlen*, dann die Menge der *ganzen Zahlen* und schließlich die Menge der *rationalen Zahlen*. Da die Menge der rationalen Zahlen „lückenhaft" ist, konstruiert man die reellen Zahlen durch einen Prozeß der *Vervollständigung*. Es gibt dafür drei Methoden, nämlich durch *Dedekindsche Schnitte* – nach Richard Dedekind (1831–1916) –, durch *Fundamentalfolgen (Cauchy*[6]*-Folgen)* – nach Georg Cantor – oder durch *Intervallschachtelungen*. Diesen Weg zu gehen, kostet aber mehr Zeit, als wir zur Verfügung haben. Eine sehr gute Quelle dazu ist das Buch [7].

Wir werden die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen umgekehrt als gewisse Teilmengen von $\mathbb{R}$ definieren.

Additionsaxiome

Es ist eine Abbildung $\ldots + \ldots : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$, (eine sog. *Addition*) gegeben mit

($\mathbb{R}1$)	$\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\, a + b = b + a$	(Kommutativität der Addition),
($\mathbb{R}2$)	$\forall_{a,b,c\in\mathbb{R}}\, (a + b) + c = a + (b + c)$	(Assoziativität der Addition),
($\mathbb{R}3$)	$\exists_{n\in\mathbb{R}}\forall_{a\in\mathbb{R}}\, a + n = a$	(Existenz eines neutralen Elementes bzgl. $+$).

Dann gilt statt ($\mathbb{R}3$) sogar

Lemma 2.1. $\exists!_{n\in\mathbb{R}}\forall_{a\in\mathbb{R}}\, a + n = a$.

Beweis. Die Existenz ist klar nach ($\mathbb{R}3$). Zum Nachweis der Einzigkeit sei auch $\tilde{n} \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{a\in\mathbb{R}}\, a + \tilde{n} = a. \tag{11}$$

Dann folgt $\tilde{n} \overset{(\mathbb{R}3)}{=} \tilde{n} + n \overset{(\mathbb{R}1)}{=} n + \tilde{n} \overset{(11)}{=} n$. □

Definition 2.2. Das eindeutig bestimmte Element $n \in \mathbb{R}$ wie in Lemma 2.1 heißt *die Null von* $\mathbb{R}$ und wird mit $\boxed{0}$ bezeichnet.

Nach ($\mathbb{R}1$) gilt also $\forall_{a\in\mathbb{R}}\, a + 0 = 0 + a = a$.

[6]nach Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

$$(\mathbb{R}4) \quad \forall_{a\in\mathbb{R}} \exists_{b\in\mathbb{R}}\, a+b=0 \quad \text{(Existenz eines Inversen bzgl. } + \text{)}.$$

Dann gilt statt $(\mathbb{R}4)$ sogar

Lemma 2.3. $\forall_{a\in\mathbb{R}} \exists!_{b\in\mathbb{R}}\, a+b=0$.

Beweis. Sei $a\in\mathbb{R}$. Die Existenz von $b\in\mathbb{R}$ wie im Lemma ist klar nach $(\mathbb{R}4)$. Zum Nachweis der Einzigkeit sei auch $c\in\mathbb{R}$ mit

$$a+c=0. \tag{12}$$

Dann folgt $c \overset{2.2}{=} c+0 \overset{(\mathbb{R}4)}{=} c+(a+b) \overset{(\mathbb{R}2)}{=} (c+a)+b \overset{(\mathbb{R}1)}{=} (a+c)+b \overset{(12)}{=} 0+b \overset{2.2}{=} b.$ □

Definition 2.4. Ist $a\in\mathbb{R}$, so heißt das nach Lemma 2.3 eindeutig bestimmte Element $b\in\mathbb{R}$ mit $a+b=0$ das *Negative von* a, und man bezeichnet es mit $\boxed{-a}$.

Nach $(\mathbb{R}1)$ gilt also $\forall_{a\in\mathbb{R}}\,(-a)+a=a+(-a)=0$.

Bemerkung. $(\mathbb{R}1)$ bis $(\mathbb{R}4)$ besagen, daß $(\mathbb{R},+)$ eine sog. *abelsche*[7] *Gruppe* ist.

Definition 2.5.

(i) Sind $a,b\in\mathbb{R}$, so schreiben wir für $a+(-b)$ auch kurz $\boxed{a-b}$ und nennen diese reelle Zahl die *Differenz zwischen a und b.*

(ii) Für Teilmengen A,B von $\mathbb{R}$ setzen wir

$$\begin{aligned} A+B &:= \{a+b \mid a\in A \wedge b\in B\},\\ A-B &:= \{a-b \mid a\in A \wedge b\in B\},\\ -A &:= \{-a \mid a\in A\}. \end{aligned}$$

Ferner setzen wir $\boxed{\mathbb{R}^*} := \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Satz 2.6.

$$0=-0, \tag{13}$$

$$\forall_{a\in\mathbb{R}}\ -(-a)=a, \tag{14}$$

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ -(a+b)=(-a)-b \overset{2.5}{=} (-a)+(-b) =: -a-b. \tag{15}$$

Beweis. (13) folgt aus $0+0 \overset{2.2}{=} 0$ und Definition 2.4.
(14) folgt aus $(-a)+a \overset{2.4}{=} 0$ und Definition 2.4.
(13) folgt aus

$$\begin{aligned} &(a+b)+\underbrace{((-a)+(-b))}\\ &\overset{(\mathbb{R}1)}{=} (a+b)+((-b)+(-a)) \overset{(\mathbb{R}2)}{=} ((a+b)+(-b))+(-a)\\ &\overset{(\mathbb{R}2)}{=} \Big(a+\underbrace{(b+(-b))}_{\overset{2.4}{=}0}\Big)+(-a) = \underbrace{(a+0)}_{\overset{2.2}{=}a}+(-a) \overset{2.4}{=} 0 \end{aligned}$$

und Definition 2.4. □

[7] nach Niels Henrik Abel (1802–1829)

Multiplikationsaxiome

Es ist eine Abbildung $\ldots\cdot\ldots : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(a,b)\mapsto a\cdot b =: ab$, (eine sog. *Multiplikation*) gegeben mit

$(\mathbb{R}5)$	$\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ ab = ba$		(Kommutativität der Multiplikation),
$(\mathbb{R}6)$	$\forall_{a,b,c\in\mathbb{R}}\ (ab)c = a(bc)$		(Assoziativität der Multiplikation),
$(\mathbb{R}7)$	$\exists_{e\in\mathbb{R}^*}\forall_{a\in\mathbb{R}^*}\ \overbrace{ae}^{\overset{(\mathbb{R}5)}{=}ea} = a$		(Existenz eines neutralen Elementes bzgl. $\cdot$).

Analog zu Lemma 2.1 gilt dann statt $(\mathbb{R}7)$ sogar

Lemma 2.7. $\exists!_{e\in\mathbb{R}^*}\forall_{a\in\mathbb{R}^*}\ ae = a$. □

Definition 2.8. Das eindeutig bestimmte Element $e\in\mathbb{R}^*$ wie in Lemma 2.7 heißt *die Eins von* $\mathbb{R}$ und wird mit $\boxed{1}$ bezeichnet.

Nach $(\mathbb{R}5)$ gilt also $\forall_{a\in\mathbb{R}^*}\ 1a = a1 = a$ und (wegen $1\in\mathbb{R}^*$) außerdem $\boxed{1\neq 0}$.

$(\mathbb{R}8)$ $\quad\forall_{a\in\mathbb{R}^*}\exists_{b\in\mathbb{R}^*}\ ab = 1$ (Existenz eines Inversen bzgl. $\cdot$).

Analog zu Lemma 2.3 gilt dann statt $(\mathbb{R}8)$ sogar

Lemma 2.9. $\forall_{a\in\mathbb{R}^*}\exists!_{b\in\mathbb{R}^*}\ ab = 1$. □

Definition 2.10. Ist $a\in\mathbb{R}^*$, so heißt das nach Lemma 2.9 eindeutig bestimmte Element $b\in\mathbb{R}^*$ mit $ab = 1$ das *Reziproke von* a und wird mit $\boxed{a^{-1}}$ oder $\boxed{\frac{1}{a}}$ bezeichnet.

Nach $(\mathbb{R}7)$ gilt also $\forall_{a\in\mathbb{R}^*}\ \frac{1}{a}a = a\frac{1}{a} = 1$.

Bemerkung. $(\mathbb{R}5)$ bis $(\mathbb{R}8)$ besagen u.a., daß $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ eine *abelsche Gruppe* ist.

Definition 2.11.

(i) Sind $a\in\mathbb{R}$ und $b\in\mathbb{R}^*$, so schreiben wir für $a\frac{1}{b}$ auch $\boxed{\frac{a}{b}}$ und nennen diese reelle Zahl den *Quotienten von* a *und* b.

(ii) Für Teilmengen A, B von $\mathbb{R}$ setzen wir

$$A\cdot B := \{ab \mid a\in A\wedge b\in B\}$$

und im Falle $A\subset\mathbb{R}^*$

$$A^{-1} := \{a^{-1} \mid a\in A\}.$$

Analog zu Satz 2.6 folgt

Satz 2.12.

$$1^{-1} = 1, \tag{16}$$

$$\forall_{a\in\mathbb{R}^*}\ (a^{-1})^{-1} = a, \tag{17}$$

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}. \tag{18}$$

□

Distributivitätsaxiom

$$(\mathbb{R}9) \quad \forall_{a,b,c\in\mathbb{R}^*}\ a(b+c) = \underbrace{ab+ac}_{:=(ab)+(ac)} \quad \text{(Distributivität).}$$

Bemerkung. $(\mathbb{R}1)$ bis $(\mathbb{R}9)$ besagen, daß $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ein sog. *Körper* ist.

Beispiel. Die Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0_2, 1_2\}$, wobei 0_2 und 1_2 zwei voneinander verschiedene Objekte sind, bildet zusammen mit $\oplus, \odot$, gegeben durch

$\oplus$	0_2	1_2
0_2	0_2	1_2
1_2	1_2	0_2

und

$\odot$	0_2	1_2
0_2	0_2	0_2
1_2	0_2	1_2

, einen Körper $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$[8]. Aus $(\mathbb{R}1)$ bis $(\mathbb{R}9)$ folgt daher nicht, daß $\mathbb{R}$ mehr als 2 Elemente besitzt[9].

[8] Der hier angeführte Körper, in dem $1 \oplus 1 = 0, 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$ usw. gilt, findet – bis auf die Unstimmigkeit im zweiten Vers – auch in Goethes *Faust* Erwähnung. Die Hexe liest aus ihrem Rechenbuch vor:

> Du mußt verstehn!
> Aus Eins mach Zehn,
> Und Zwei laß gehn,
> Und Drei mach gleich,
> So bist du reich.
> Verlier die Vier!
> Aus Fünf und Sechs,
> So sagt die Hex',
> Mach Sieben und Acht,
> So ist's vollbracht:
> Und Neun ist Eins,
> Und Zehn ist keins.
> Das ist das Hexen-Einmaleins.

Faust, der „Philosophie, Juristerei und Medizin, und leider auch Theologie" studiert hat, offenbar aber nicht Mathematik, antwortet: „Mich dünkt, die Alte spricht im Fieber."

Diese Interpretation ist [9, S. 52] entnommen. Eine andere besteht darin, die Zeilen als Beschreibung eines magischen Quadrates mit Zeilen- und Spaltensumme 15 zu verstehen.

[9] Man kann übrigens zeigen, daß genau dann ein Körper mit p Elementen ($p \in \mathbb{N}, p \geq 2$) existiert, wenn p eine Primzahl ist.

Satz 2.13. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(a+b)c = ac + bc, \tag{19}$$

$$0 = 0a = a0, \tag{20}$$

$$1a = a1 = a, \tag{21}$$

$$(-1)a = -a, \tag{22}$$

$$a(-b) = (-a)b = \underbrace{-ab}_{:=-(ab)}, \tag{23}$$

$$(-a)(-b) = ab. \tag{24}$$

Beweis. Zu (19): $(a+b)c \overset{(\mathbb{R}5)}{=} c(a+b) \overset{(\mathbb{R}9)}{=} ca + cb \overset{(\mathbb{R}5)}{=} ac + bc$.

Zu (20):

$$\begin{aligned} 0 &\overset{2.4}{=} a \underbrace{0}_{\overset{2.2}{=}0+0} + \underbrace{(-a0)}_{=-(a0)} = \underbrace{a(0+0)} + (-a0) \overset{(\mathbb{R}9)}{=} (a0 + a0) + (-a0) \\ &\overset{(\mathbb{R}2)}{=} a0 + \underbrace{(a0 + (-a0))}_{\overset{2.4}{=}0} = a0 + 0 \overset{2.2}{=} a0 \overset{(\mathbb{R}5)}{=} 0a. \end{aligned}$$

(21) ist für $a \in \mathbb{R}^*$ nach Definition 2.8 und für $a = 0$ nach (20) klar.

Zu (22): $a + (-1a) \overset{(21)}{=} 1a + (-1a) \overset{(19)}{=} \underbrace{(1 + (-1))}_{\overset{2.4}{=}0} a \overset{(20)}{=} 0$. Daher gilt nach Definition 2.4: $-1a = -a$.

Zu (23): Aus

$$ab + a(-b) \overset{(\mathbb{R}9)}{=} a \underbrace{(b + (-b))}_{\overset{2.4}{=}0} = a0 \overset{(20)}{=} 0$$

bzw.

$$ab + (-ab) \overset{(19)}{=} \underbrace{(a + (-a))}_{\overset{2.4}{=}0} b = 0b \overset{(20)}{=} 0$$

folgt wiederum nach Definition 2.4: $a(-b) = -ab$ bzw. $(-a)b = -ab$.

Zu (24): $(-a)(-b) \overset{(23)}{=} (-(-a))b \overset{(14)}{=} ab$. □

Bemerkung. 0 besitzt kein inverses Element bzgl. $\cdot$, d.h. es existiert kein Element $0^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $00^{-1} = 1$. Denn andernfalls folgte $0 \overset{(20)}{=} 00^{-1} = 1$, im Widerspruch zu Definition 2.8.

Anordnungsaxiome

Es ist eine Teilmenge $\boxed{\mathbb{R}_+}$ von $\mathbb{R}$ (ein sog. *Positivbereich*) gegeben derart, daß gilt

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\mathbb{R}10) & \mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+ \cup (-\mathbb{R}_+), \\ (\mathbb{R}11) & \mathbb{R}_+ + \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+, \\ (\mathbb{R}12) & \mathbb{R}_+ \cdot \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+. \end{array}}$$

Die Elemente von $\mathbb{R}_+$ bzw. $\mathbb{R}_- := -(\mathbb{R}_+)$ heißen *positive* bzw. *negative reelle Zahlen*.

Bemerkung. ($\mathbb{R}1$) bis ($\mathbb{R}12$) besagen, daß $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}_+)$ ein sog. *angeordneter Körper* ist.

Definition 2.14. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \underbrace{a < b}_{\Leftrightarrow: b > a} \quad &:\Longleftrightarrow \quad b - a \in \mathbb{R}_+, \\ \underbrace{a \leq b}_{\Leftrightarrow: b \geq a} \quad &:\Longleftrightarrow \quad (a < b) \vee (a = b). \end{aligned}$$

Dann gilt insbesondere für alle $a \in \mathbb{R}$

$$a > 0 \iff a \in \mathbb{R}_+ \tag{25}$$

$$a < 0 \iff -a \in \mathbb{R}_+ \iff a \in \mathbb{R}_- \tag{26}$$

Bemerkung. Die o.g. Axiome besagen gerade:

($\widetilde{\mathbb{R}10}$) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt entweder $a > 0$ oder $a < 0$ oder $a = 0$ (Trichotomie).

($\widetilde{\mathbb{R}11}$) $\forall_{a,b \in \mathbb{R}}\, a > 0 \wedge b > 0 \Longrightarrow a + b > 0$ (Monotonie v.+).

($\widetilde{\mathbb{R}12}$) $\forall_{a,b \in \mathbb{R}}\, a > 0 \wedge b > 0 \Longrightarrow ab > 0$ (Monotonie v. $\cdot$).

Satz 2.15. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{gathered} a < b \iff -a > -b, \\ \textit{insbesondere } (b > 0 \iff -b < 0) \textit{ bzw. } (a < 0 \iff -a > 0), \end{gathered} \tag{27}$$

$$\textit{entweder gilt } a > b \textit{ oder } a = b \textit{ oder } a < b, \tag{28}$$

$$\begin{gathered} \big((a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)\big) \iff ab > 0, \\ \big((a > 0 \wedge b < 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)\big) \iff ab < 0, \end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{gathered} \boxed{a \neq 0 \iff a^2 := aa > 0}, \\ \textit{insbesondere } \boxed{1 > 0}, \end{gathered} \tag{30}$$

$$\underbrace{(a < b \wedge b < c)}_{\Leftrightarrow: a < b < c} \Longrightarrow a < c, \tag{31}$$

$$a < b \Longrightarrow a + c < b + c, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} (a < b \wedge c > 0) &\Longleftrightarrow ac < bc, \\ (a < b \wedge c < 0) &\Longleftrightarrow ac > bc, \end{aligned} \tag{33}$$

$$0 < a < b \Longrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}. \tag{34}$$

Beweis als Übung. □

Bemerkung. Aus (30) und (32) folgt, daß es außer 0 und 1 noch weitere paarweise verschiedene Elemente von $\mathbb{R}$ gibt, nämlich z.B.

$$2 := 1 + 1, 3 := 2 + 1, 4 := 3 + 1, 5 := 4 + 1, 6 := 5 + 1, 7 := 6 + 1, 8 := 7 + 1, 9 := 8 + 1.$$

Tatsächlich werden wir unten die Existenz der *natürlichen Zahlen* – und sogar die der *rationalen Zahlen* – als Teilmenge von $\mathbb{R}$ aus ($\mathbb{R}$1) bis ($\mathbb{R}$12) herleiten. M.a.W. „enthält" jeder angeordnete Körper die rationalen Zahlen.

Definition 2.16 (Betrag)**.** Für alle $a \in \mathbb{R}$ definieren wir den *Betrag von a* als $|a| := \left\{ \begin{array}{rl} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$.

Satz 2.17. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|a| = |-a| \geq 0; \tag{35}$$

$$a \leq |a| \wedge -a \leq |a|; \tag{36}$$

$$|a| < b \Longleftrightarrow -b < a < b; \tag{37}$$

$$|a| \leq b \Longleftrightarrow -b \leq a \leq b; \tag{38}$$

$$\begin{gathered} |a + b| \leq |a| + |b| \; (\textit{Dreiecksungleichung}), \\ \textit{mit Gleichheit genau dann, wenn } ab \geq 0; \end{gathered} \tag{39}$$

$$|a| - |b| \leq \big||a| - |b|\big| \leq |a - b|; \tag{40}$$

$$|ab| = |a|\,|b|. \tag{41}$$

Beweis als Übung. □

Vollständigkeitsaxiom

Definition 2.18 (obere und untere Schranke)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}$.

(i) Ist $c \in \mathbb{R}$, so definieren wir

$$\begin{aligned} &c \textit{ obere Schranke von } M :\Longleftrightarrow \forall_{a \in M}\, a \leq c, \\ &c \textit{ untere Schranke von } M :\Longleftrightarrow \forall_{a \in M}\, a \geq c. \end{aligned}$$

(ii) Wir setzen weiter

$$\begin{aligned} &M \textit{ nach oben beschränkt} :\Longleftrightarrow \exists_{c \in M}\, c \text{ obere Schranke von } M, \\ &M \textit{ nach unten beschränkt} :\Longleftrightarrow \exists_{c \in M}\, c \text{ untere Schranke von } M, \\ &M \textit{ beschränkt} :\Longleftrightarrow M \text{ nach oben und unten beschränkt.} \end{aligned}$$

Definition 2.19 (obere und untere Grenze, Infimum, Supremum)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}$. Ist $c \in \mathbb{R}$, so definieren wir

$$
\begin{aligned}
& c \left\{ \begin{array}{c} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\} \text{Grenze von } M \\
:\Longleftrightarrow \quad & c \left\{ \begin{array}{c} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\} \text{Schranke von } M \text{ und} \\
& \underbrace{\forall_{\tilde{c}\in\mathbb{R}} \left(\tilde{c} \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\} c \Rightarrow \tilde{c} \text{ nicht } \left\{ \begin{array}{c} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\} \text{Schranke von } M \right).}_{\text{d.h. es existiert keine } \left\{ \begin{array}{c} \text{kleinere obere} \\ \text{größere untere} \end{array} \right\} \text{Schranke als } c}
\end{aligned}
$$

Dann gilt:

$$\text{Es existiert höchstens eine } \left\{ \begin{array}{c} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\} \text{Grenze von } M. \tag{42}$$

[Beweis von (42): Angenommen es gibt zwei $\left\{ \begin{array}{c} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\}$ Grenzen $c, \tilde{c} \in M$ mit $c \neq \tilde{c}$. Dann gilt nach (28) $\tilde{c} < c$ oder $c < \tilde{c}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\tilde{c} < c$, ansonsten vertusche c und $\tilde{c}$. Da $\left\{ \begin{array}{c} c \text{ obere} \\ \tilde{c} \text{ untere} \end{array} \right\}$ Grenze und $\tilde{c} < c$, so ist $\left\{ \begin{array}{c} \tilde{c} \\ c \end{array} \right\}$ nicht $\left\{ \begin{array}{c} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\}$ Schranke von M, insbesondere ist $\left\{ \begin{array}{c} \tilde{c} \\ c \end{array} \right\}$ nicht $\left\{ \begin{array}{c} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\}$ Grenze von M, Widerspruch!]

Falls M eine $\left\{ \begin{array}{c} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\}$ Grenze besitzt, so ist diese nach (42) eindeutig bestimmt, und wir bezeichnen sie mit $\left\{ \begin{array}{c} \boxed{\sup M} \\ \boxed{\inf M} \end{array} \right\}$.

Ist M nicht nach $\left\{ \begin{array}{c} \text{oben} \\ \text{unten} \end{array} \right\}$ beschränkt, so setzen wir $\left\{ \begin{array}{c} \boxed{\sup M := +\infty} \\ \boxed{\inf M := -\infty} \end{array} \right\}$[10].
$\inf M$ und $\sup M$ heißen *Infimum* und *Supremum* von M.

($\mathbb{R}$13)	Für jede Teilmenge $M \neq \varnothing$ von $\mathbb{R}$ gilt: M nach oben beschränkt $\Longrightarrow$ M besitzt obere Grenze (Vollständigkeit).

[10] Hierbei bezeichnen $\boxed{+\infty}$ (lies „plus unendlich") und $\boxed{-\infty}$ (lies „minus unendlich") zwei voneinander verschiedene Objekte, die keine reellen Zahlen sind.

Bemerkung. ($\mathbb{R}1$) bis ($\mathbb{R}13$) besagen, daß $\mathbb{R}$ – genauer $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}_+)$ – ein sog. *vollständig angeordneter Körper* ist.

Satz 2.20. ($\mathbb{R}13$) *ist äquivalent dazu, daß jede nicht-leere nach unten beschränkte Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *eine untere Grenze besitzt.*

Beweisskizze: Sei $M \subset \mathbb{R}$ durch c nach unten beschränkt. Dann ist $-M$ offenbar durch $-c$ nach oben beschränkt, besitzt also eine obere Grenze s. $-s$ ist dann[11] untere Grenze von M. □

Satz 2.21. *Bis auf sog.* Isomorphie angeordneter Körper *existiert genau ein vollständig angeordneter Körper* $\mathbb{R}$.

Beweis vgl. [7, S. 42f]. □

2.22 (Intervalle)**.**

(i) **Definition.** Sei $J \subset \mathbb{R}$.

J heißt *Intervall von* $\mathbb{R} :\Longleftrightarrow \forall_{a_1, a_2 \in J} \forall_{c \in \mathbb{R}} (a_1 < c < a_2 \Rightarrow c \in J)$.

(ii) Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ offenbar Intervalle von $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \{c \in \mathbb{R} \mid a \leq c \leq b\} && (\textit{beschränktes abgeschlossenes } \text{oder auch } \textit{kompaktes Intervall}),\\
[a,b[&:= \{c \in \mathbb{R} \mid a \leq c < b\} && (\textit{beschränktes halboffenes Intervall}),\\
]a,b] &:= \{c \in \mathbb{R} \mid a < c \leq b\} && (\textit{beschränktes halboffenes Intervall}),\\
]a,b[&:= \{c \in \mathbb{R} \mid a < c < b\} && (\textit{beschränktes offenes Intervall}),\\
[a,+\infty[&:= \{c \in \mathbb{R} \mid a \leq c\} && (\textit{unbeschränktes abgeschlossenes Intervall}),\\
]-\infty,b] &:= \{c \in \mathbb{R} \mid c \leq b\} && (\textit{unbeschränktes abgeschlossenes Intervall}),\\
]a,+\infty[&:= \{c \in \mathbb{R} \mid a < c\} && (\textit{unbeschränktes offenes Intervall}),\\
]-\infty,b[&:= \{c \in \mathbb{R} \mid c < b\} && (\textit{unbeschränktes offenes Intervall}),\\
]-\infty,+\infty[&:= \mathbb{R} && (\textit{unbeschränktes offenes und abgeschlossenes Intervall}).
\end{aligned}
$$

Beispiel. $]0,+\infty[= \mathbb{R}_+$, $]1,1[= \varnothing$, $]1,1] = \varnothing$, $[1,1] = \{1\}$.

Satz 2.23. *Außer den in 2.22 (ii) beschriebenen gibt es keine weiteren Intervalle von* $\mathbb{R}$.

Beweisskizze. Sei J ein nicht-leeres Intervall von $\mathbb{R}$.

Setze $\alpha := \inf J \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ sowie $\beta := \sup J \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, und zeige der Reihe nach – (44) mittels (43) –

$$\forall_{t \in]\alpha,\beta[}\ t \text{ weder obere noch untere Schranke von } J, \tag{43}$$

[11] Aus $\forall_{a,b \in \mathbb{R}} (a < b \Leftrightarrow -a > -b)$ folgt, daß für jede nicht-leere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ gilt: $\sup(-M) = -\inf M$.

$$]\alpha,\beta[\;\subset J. \tag{44}$$

Wegen (44) gilt entweder $]\alpha,\beta[\;= J$ oder $\exists_{t\in J}\, t \notin\;]\alpha,\beta[$. Letzteres impliziert $\alpha \neq -\infty \vee \beta \neq +\infty$, und hieraus folgt durch Fallunterscheidung $J = [\alpha,\beta[$ oder $J =]\alpha,\beta]$ oder $J = [\alpha,\beta]$. □

Definition 2.24 (offene, abgeschlossene und kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$)**.** Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(i) M heißt *offen* $:\Longleftrightarrow \forall_{a\in M}\exists_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}\;]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\;\subset M$,

(ii) M heißt *abgeschlossen* $:\Longleftrightarrow \mathbb{R}\setminus M$ ist offen,

(iii) M heißt *kompakt* $:\Longleftrightarrow M$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Beispiel. Offene Intervalle von $\mathbb{R}$ sind offen, abgeschlossene Intervalle von $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen, und kompakte Intervalle von $\mathbb{R}$ sind kompakt.

Satz 2.25 ($\mathbb{R}$ als topologischer Raum)**.**

(i) $\varnothing$ und $\mathbb{R}$ sind offen.

(ii) Sind I eine beliebeige Menge und M_i für jedes $i \in I$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, so ist $\bigcup_{i\in I} M_i$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(iii) Sind M_1, M_2 offene Teilmengen von $\mathbb{R}$, so ist $M_1 \cap M_2$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Beweis als Übung. □

Definition 2.26 (innerer Punkt, offener Kern)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}$.
$a \in M$ heißt *innerer Punkt von M* $:\Longleftrightarrow \exists_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}\;]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\;\subset M$.

Die Menge aller inneren Punkte von M bezeichnen wir mit $\boxed{\mathring{M}}$ und nennen sie den *offenen Kern von M*.

Beispiel. $\overset{\circ}{\widehat{[0,+\infty[}} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbb{R}_+}} = \mathbb{R}_+$, $\overset{\circ}{\widehat{\{0,1\}}} = \varnothing$.

Definition 2.27 (Maximum, Minimum)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}$.

(i) Sei $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} c \text{ heißt } \textit{Maximum von } M \quad &:\Longleftrightarrow \quad c \in M \wedge \forall_{a\in M}\, a \le c,\\ c \text{ heißt } \textit{Minimum von } M \quad &:\Longleftrightarrow \quad c \in M \wedge \forall_{a\in M}\, a \ge c. \end{aligned}$$

(ii) Aus (i) folgt:

Falls M ein Maximum bzw. Minimum besitzt, so ist dieses eindeutig bestimmt, und wir bezeichnen es mit $\boxed{\max M}$ bzw. $\boxed{\min M}$.

In diesem Fall gilt $\max M = \sup M$ bzw. $\min M = \inf M$.

(iii) Ist umgekehrt M nach oben bzw. unten beschränkt und gilt $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$, so besitzt M ein Maximum bzw. Minimum, nämlich $\sup M$ bzw. $\inf M$. (Klar nach (i).)

Beispiel. $\max\,]0,1] = 1$, $]0,1[$ besitzt kein Maximum.

Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Definition 2.28 (Induktive Mengen, die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen).

(i) Sei $M \subset \mathbb{R}$.

$$M \text{ heißt } \textit{induktiv} \quad :\Longleftrightarrow \quad 0 \in M \wedge \forall_{a \in M}\, a+1 \in M.$$

Es gilt also:

$$M \text{ induktiv} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} M \text{ enthält u.a. die reellen Zahlen} \\ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \text{ als Elemente.} \end{array}$$

Bemerkung. Daß die Elemente $0, 1, 2, \dots, 9$ u.s.w. paarweise verschieden sind, folgt daraus, daß $\mathbb{R}$ – bzw. genauer $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}_+)$ – ein angeordneter Körper ist, vgl. die Bemerkung im Anschluß an Satz 2.15.

Beispiel. $\mathbb{R}$ und $[0, +\infty[$ sind induktive Mengen.

(ii) Sei $\mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ die Menge aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir setzen den Durchschnitt aller induktiven Mengen als

$$\boxed{\mathbb{N}} := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = \{a \in \mathbb{R} \,|\, \forall_{M \in \mathcal{M}}\, a \in M\}$$

und nennen $\mathbb{N}$ die *Menge der natürlichen Zahlen.*

Offenbar ist $\mathbb{N}$ eine induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$, folglich ist $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Aus der letzten Definition folgt trivialerweise

Satz 2.29.

$$0 \in \mathbb{N} \textit{ und } \forall_{n \in \mathbb{N}}\, n+1 \in \mathbb{N}. \tag{45}$$

$$\textit{Für jede Menge } M \subset \mathbb{R} \textit{ mit } 0 \in M \textit{ und } \forall_{a \in M}\, a+1 \in M \textit{ gilt } \mathbb{N} \subset M. \tag{46}$$

□

Satz 2.30 (Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion).
Vor.: *Es sei $H(\dots)$ eine einstellige Aussageform, deren Einsetzungsklasse die Menge $\mathbb{N}$ umfaßt mit folgenden Eigenschaften:*

$$\textit{(IA)} \qquad H(0) \textit{ ist wahr} \qquad \text{(Induktionsanfang).}$$

$$\textit{(IS)} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \big(\underbrace{H(n) \textit{ ist wahr}}_{\text{Induktionsvor. } \textit{(IV)}} \Longrightarrow H(n+1) \textit{ ist wahr} \big) \quad \text{(Induktionsschritt).}$$

Beh.: $\forall_{n \in \mathbb{N}}\, H(n)$ *ist wahr.*

Zusatz. *Die Behauptung gilt auch, wenn man (IV) durch „$H(0), \dots, H(n)$ sind wahr“ ersetzt.*

Beweis. Wir setzen $M := \{n \in \mathbb{N} | H(n) \text{ ist wahr}\} (\subset \mathbb{N} \subset \mathbb{R})$. Dann ist M eine induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$, und aus (46) folgt somit $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, also folgt $\forall_{n\in\mathbb{N}} H(n)$ ist wahr.

Der Zusatz folgt sofort dem Satz, indem man den Satz auf die einstellige Aussageform $\widetilde{H}(\ldots)$, die durch

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{H}(n) :\Longleftrightarrow H(0) \wedge \ldots \wedge H(n)$$

gegeben ist, anwendet. □

Satz 2.31 (Eigenschaften der natürlichen Zahlen)**.** *Es gilt*

(i) $\forall_{n\in\mathbb{N}} n \geq 0$,

(ii) $\mathbb{N} + \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, *d.h.* $\forall_{k,n\in\mathbb{N}} k + n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\mathbb{N} \cdot \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, *d.h.* $\forall_{k,n\in\mathbb{N}} kn \in \mathbb{N}$,

(iv) $\forall_{n\in\mathbb{N}} \left((n = 0) \vee (n - 1 \in \mathbb{N})\right)$,

(v) $\forall_{n\in\mathbb{N}} \left(]n, n+1[\cap \mathbb{N} = \varnothing,\right.$ *d.h.* $\left.\forall_{a\in\mathbb{R}} (n < a < n + 1 \Longrightarrow a \notin \mathbb{N})\right)$,

(vi) $\forall_{k,n\in\mathbb{N}} (n \leq k \Longrightarrow k - n \in \mathbb{N})$.

Beweis. Zu (i): Wir setzen $\forall_{n\in\mathbb{N}} H(n) :\Longleftrightarrow n \geq 0$.

Dann ist $H(0)$ wahr, denn $0 \geq 0$.

Angenommen $n \in \mathbb{N}$ und $H(n)$ ist wahr, d.h. $n \geq 0$. Dann folgt

$$n + 1 \overset{(32)}{\geq} 0 + 1 = \overset{(30)}{\geq} 0,$$

also $n + 1 \overset{(31)}{\geq} 0$, d.h. es gilt $H(n + 1)$.

Daher folgt aus Satz 2.30: $\forall_{n\in N} H(n)$ ist wahr.

Zu (ii): Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt. Wir zeigen durch vollständige Induktion

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} k + n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsanfang für $n = 0$: $k + 0 = k \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Gelte die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$, d.h. $k + n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$k + (n + 1) \overset{(\mathbb{R}2)}{=} \underbrace{(k + n)}_{\in\mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}, \text{ da } \mathbb{N} \text{ induktiv},$$

also gilt die Behauptung auch für $n + 1$.

Zu (iii): Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Zu zeigen ist $\forall_{n\in\mathbb{N}} kn \in \mathbb{N}$.

Beweis hiervon durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$n = 0 :$ $k0 = 0 \in \mathbb{N}$.

$n \mapsto n + 1 :$ Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $kn \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$k(n + 1) = \underbrace{kn}_{\overset{\text{IV}}{\in} \mathbb{N}} + \underbrace{k}_{\in\mathbb{N}} \overset{(ii)}{\in} \mathbb{N}.$$

Zu (iv): Beweis durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$n = 0$ ist trivial.

$n \mapsto n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $n = 0$ oder $n - 1 \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(n+1) - 1 = n + (1-1) = n + 0 = n \in \mathbb{N}.$$

Zu (v): Beweis durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

$n = 0$: Wegen (i) genügt es offenbar zu zeigen $\forall_{k \in \mathbb{N}} (k > 0 \Rightarrow k > 1)$. Hierzu sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$. Dann gilt nach (iv) $k - 1 \in \mathbb{N}$, also nach (i) $k - 1 \geq 0$ und folglich $k = k + (-1+1) = (k-1) + 1 \geq 0 + 1 = 1$.

$n \mapsto n+1$: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $n+1 < a < n+2$. Dann folgt $n < a-1 < n+1$, also nach Induktionsvoraussetzung $a - 1 \notin \mathbb{N}$. Wegen $a > 0$ folgt hieraus und aus (iv), daß gilt: $a \notin \mathbb{N}$.

Zu (vi): Sei $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Zu zeigen ist $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \leq k \Rightarrow k - n \in \mathbb{N})$.

$n = 0$: Es gelten $0 \leq k$ (nach (i)) und $k - n = k \in \mathbb{N}$.

$n \mapsto n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Induktionsvor. $(n \leq k \Rightarrow k - n \in \mathbb{N})$. Zu zeigen ist

$$n + 1 \leq k \Longrightarrow k - (n+1) \in \mathbb{N}.$$

Zum Beweis hiervon sei $n + 1 \leq k$. Dann folgt $n < n + 1 \leq k$, also nach Induktionsvor. $k - 1 \in \mathbb{N}$ sowie $k - n > 0$, (denn aus (i) folgt $k - n \geq 0$, und im Falle $k - n = 0$ wäre $k = n$ im Widerspruch zu $n < k$.) Zusammen mit (iv) ergibt dies $(k - n) - 1 \in \mathbb{N}$, d.h. $k - (n+1) \in \mathbb{N}$.

Damit ist auch (vi) gezeigt. □

Definition 2.32 (Die Menge $\mathbb{N}_+$ der positiven natürlichen Zahlen)**.** Wir setzen $\boxed{\mathbb{N}_+} := \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{N} \overset{2.31(v)}{=} \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die Elemente von $\mathbb{N}_+$ heißen *positive natürliche Zahlen*.

Satz 2.33 (Wohlordnung der natürlichen Zahlen)**.** *Jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.*

Beweis. Seien $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$ und $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall_{a \in A}\, n \leq a\}$.

Dann existiert $n_0 \in M$ derart, daß $n_0 + 1 \notin M$.

(Andernfalls wäre nämlich M induktiv, d.h. $\mathbb{N} = M$. Nach Voraussetzung existiert $a_0 \in A \subset \mathbb{N}$, also $a_0 + 1 \in \mathbb{N} = M$ und somit $a_0 + 1 \leq a_0$, Widerspruch.)

Wegen $n_0 \in M$ gilt $\forall_{a \in A}\, n_0 \leq a$, und wegen $n_0 + 1 \notin M$ existiert $a_1 \in A$ mit $n_0 + 1 > a_1$. Aus $k \leq a_1 < n_0 + 1$ folgt nach Satz 2.31 (v): $n_0 = a_1$. Daher ist n_0 kleinstes Element von A. □

Satz 2.34 (Bernoullische[12] Ungleichung)**.** *Seien $a \in \mathbb{R}$ mit $a > -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(1+a)^n \geq 1 + na,$$

wobei wir hier bereits die Definition der n-ten Potenz verwenden, siehe 2.46 (i).

Beweis durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$: Der Fall $n = 0$ ist trivial.

$n \mapsto n+1$: Da $1 + a$ nach Voraussetzung positiv ist, gilt

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \overset{\text{IV}}{\geq} (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a.$$

□

[12] nach Jacob Bernoulli (1654–1707)

Zur Definition der natürlichen Zahlen und zur Herleitung der letzten vier Sätze haben wir das Vollständigkeitsaxiom ($\mathbb{R}13$) nicht benötigt. In den Beweis des nächsten Resultates geht es aber ein.

Satz 2.35 ($\mathbb{R}$ als archimedisch angeordneter Körper)**.** *Die Teilmenge $\mathbb{N}$ von $\mathbb{R}$ ist nach oben unbeschränkt, d.h.*

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} \qquad \underbrace{\exists_{n\in\mathbb{N}}\, n > a.}_{\textit{also } a \textit{ nicht obere Schranke von } \mathbb{N}}$$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben.

Angenommen a ist obere Schranke von $\mathbb{N}$. Nach dem Vollständigkeitsaxion ($\mathbb{R}13$) existiert dann $c := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$, und $\underbrace{c-1}_{<c} \in \mathbb{R}$ ist keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ (da c kleinste solche), also existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $m > c-1$. Hieraus folgt $m+1 \in \mathbb{N}$ und $m+1 > c$, im Widerspruch dazu, daß c obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. □

Bemerkung. Ein angeordneter Körper, in dem $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist, heißt *archimedisch angeordnet.* Es gibt angeordnete Körper, die nicht archimedisch sind, vgl. Anhang A.

Ganze Zahlen und vollständige sowie endliche Induktion mit beliebigem ganzzahligen Induktionsanfang

Definition 2.36. Wir definieren

$$\boxed{\mathbb{Z}} := \mathbb{N} - \mathbb{N} = \{k - n \,|\, k, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}.$$

Die Elemente von $\mathbb{Z}$ heißen *ganze Zahlen.*

Satz 2.37 (Eigenschaften der ganzen Zahlen)**.** *Es gilt*

(i) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \,\dot\cup\, (-\mathbb{N}_+)$,

(ii) $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ *und* $\mathbb{Z} - \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$,

(iii) $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

(iv) $\mathbb{Z}$ *anstelle von* $\mathbb{R}$ *– bzw. genauer* $(\mathbb{Z}, +)$ *anstelle von* $(\mathbb{R}, +)$ *– erfüllt die Axiome* ($\mathbb{R}1$) *bis* ($\mathbb{R}4$)*, d.h. daß* $(\mathbb{Z}, +)$ *eine abelsche Gruppe ist.*

Beweis. (i) folgt aus

$$\mathbb{N} \cap (-\mathbb{N}_+) = \varnothing, \tag{47}$$
$$\mathbb{N} - \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}_+). \tag{48}$$

[(47) folgt aus ($\mathbb{R}10$).

Zu (48): „$\supset$“ ist klar wegen $\forall_{n\in\mathbb{N}} (n = n - 0 \wedge -n = 0 - n)$.

„$\subset$“: Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen induktiv $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, k - n \in \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}_+)$.

$n = 0$: $k - 0 = k \in \mathbb{N} \subset \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}_+)$.

$n \mapsto n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $k - n \in \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}_+)$. Wir haben zu zeigen, daß dann auch $k - (n+1) \in \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}_+)$.

1. Fall: $k-n\in\mathbb{N}$. Dann gilt nach Satz 2.31 (iv) $k-n=0 \vee \underbrace{(k-n)-1}_{=k-(n+1)}\in\mathbb{N}$.

Im Falle $k-n=0$ gilt darüber hinaus $k-(n+1)=k-n-1=-1\in-\mathbb{N}_+$.

2. Fall: $k-n\in-\mathbb{N}$. Dann gilt $-(-k+n)\in-\mathbb{N}_+$, also $-k+n\in\mathbb{N}_+$ und somit $-(k-(n+1))=(-k+n)+1\in\mathbb{N}_+$, d.h. $k-(n+1)\in-\mathbb{N}_+$.]

(ii) und (iii) ergeben sich daraus, daß für alle $k,l,m,n\in\mathbb{N}$ gilt

$$(k-l)+(m-n)=(k+m)-(l+n)\in\mathbb{N}-\mathbb{N}=\mathbb{Z},$$
$$(k-l)-(m-n)=(k+n)-(l+m)\in\mathbb{N}-\mathbb{N}=\mathbb{Z},$$
$$(k-l)(m-n)=(km+ln)-(kn+lm)\in\mathbb{N}-\mathbb{N}=\mathbb{Z}.$$

(iv) ist klar nach (i) und (ii). □

Bemerkung. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist kein Körper. Denn aus $0<1<2$ folgt mit (34), daß gilt $0<\frac{1}{2}<\frac{1}{1}=1$, und aus Satz 2.31 (v) folgt dann nach Teil (i) des letzten Satzes: $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

Satz 2.38.

(i) Jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ besitzt ein größtes Element.

(ii) Jede nicht-leere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ besitzt ein kleinstes Element.

Beweis. Sei M eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{Z}$.

Zu (i): Existiere also eine obere Schranke c von M. Da $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist, vgl. Satz 2.35, existiert $n\in\mathbb{N}$ mit $c<n$, also gilt $\forall_{a\in M}\, a<n$. Daher ist

$$\widetilde{M}:=\{n-a\,|\,a\in M\}$$

eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$, die nach Satz 2.33 ein kleinstes Element n_0 besitzt. Dann ist $n-n_0$ größtes Element von M.

Zu (ii): Existiere nun eine untere Schranke von M. Dann ist $-M$ nach oben beschränkt, besitzt also nach (i) ein größtes Element $a_0\in-M$. $-a_0$ ist dann kleinstes Element von M. □

Definition 2.39 (Gauß-Klammer)**.** Für $a\in\mathbb{R}$ setzen wir die *untere Gauß-Klammer von a* als

$$\lfloor a\rfloor:=\max\{k\in\mathbb{Z}\,|\,k\le a\}$$

und die *obere Gauß-Klammer von a* als

$$\lceil a\rceil:=\min\{k\in\mathbb{Z}\,|\,k\ge a\}.$$

Aufgrund des letzten Satzes ist dies wohldefiniert.

Beispiel. $\lfloor\frac{1}{2}\rfloor=0,\ \lceil\frac{1}{2}\rceil=1.$

Satz 2.40 (Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion mit beliebigem ganzzahligem Induktionsanfang).
Vor.: *Seien $k \in \mathbb{Z}$ beliebig und $H(\ldots)$ eine einstellige Aussageform, deren Einsetzungsklasse die Menge $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\}$ umfaßt mit folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{array}{lll} \textit{(IA)} & H(k) \ \textit{ist wahr} & \text{(Ind.-anfang).} \\ \textit{(IS)} & \forall_{n \in \mathbb{Z}, n \geq k} \, (\underbrace{H(n) \ \textit{ist wahr}}_{\text{Induktionsvor. } \textit{(IV)}} \Longrightarrow H(n+1) \ \textit{ist wahr}) & \text{(Ind.-schritt).} \end{array}$$

Beh.: $\forall_{n \in \mathbb{Z}, n \geq k} \, H(n)$ *ist wahr.*

Zusatz. *Die Behauptung gilt auch, wenn man (IV) durch „$H(k), \ldots, H(n)$ sind wahr" ersetzt.*

Beweis. Wir wenden Satz 2.30 inkl. Zusatz auf die einstellige Aussageform $\widetilde{H}(\ldots)$, die durch

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \, \widetilde{H}(n) :\Longleftrightarrow H(k+n)$$

gegeben ist, an; d.h. wir zeigen induktiv $\forall_{n \in \mathbb{N}} \, \widetilde{H}(n)$ wahr. Dies liefert die Behauptung. □

Satz 2.41 (Das Beweisprinzip der endlichen Induktion mit beliebigem ganzzahligem Induktionsanfang).
Vor.: *Seien $k, l \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $k \leq l$ und $H(\ldots)$ eine einstellige Aussageform, deren Einsetzungsklasse die Menge $\{k, \ldots, l\}$*[13] *umfaßt mit folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{array}{lll} \textit{(IA)} & H(k) \ \textit{ist wahr} & \text{(Ind.-anfang).} \\ \textit{(IS)} & \forall_{n \in \{k, \ldots, l-1\}} \, (\underbrace{H(n) \ \textit{ist wahr}}_{\text{Ind.-vor. } \textit{(IV)}} \Longrightarrow H(n+1) \ \textit{ist wahr}) & \text{(Ind.-schritt).} \end{array}$$

Beh.: $\forall_{n \in \{k, \ldots, l\}} \, H(n)$ *ist wahr.*

Zusatz. *Die Behauptung gilt auch, wenn man (IV) durch „$H(k), \ldots, H(n)$ sind wahr" ersetzt.*

Beweis. Wir wenden Satz 2.40 inkl. Zusatz auf die einstellige Aussageform $\widetilde{H}(\ldots)$, die durch

$$\forall_{n \in \{k, \ldots, l\}} \, \widetilde{H}(n) :\Longleftrightarrow H(n),$$
$$\forall_{n \in \mathbb{Z}, n > l} \, \widetilde{H}(n) :\Longleftrightarrow n \in \mathbb{Z}.$$

gegeben ist, an; d.h. wir zeigen induktiv $\forall_{n \in \mathbb{N}} \, \widetilde{H}(n)$ wahr. Dies liefert die Behauptung. □

[13] $\{k, \ldots, l\} := \{n \in \mathbb{Z} \mid k \leq n \leq l\}$

Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen

Definition 2.42 (Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen)**.** Wir definieren

$$\boxed{\mathbb{Q}} := \left\{ \frac{r}{s} \,|\, r \in \mathbb{Z} \wedge s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Die Elemente von $\mathbb{Q}$ heißen *rationale Zahlen.*

Ferner setzen wir $\boxed{\mathbb{Q}^*} := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $\boxed{\mathbb{Q}_+} := \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$.

Satz 2.43 (Eigenschaften der rationalen Zahlen)**.** *Es gilt*

(i) $\mathbb{Q} + \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{Q} - \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$,

(ii) $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$;

(iii) $\mathbb{Q}$ *anstelle von* $\mathbb{R}$ – *bzw. genauer* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{Q}_+)$ *anstelle von* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}_+)$ – *erfüllt alle Axiome* $(\mathbb{R}1)$ *bis* $(\mathbb{R}12)$*, d.h.* $\mathbb{Q}$ – *bzw. genauer* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{Q}_+)$ – *ist ein angeordneter Körper.*

Beweis. Trivial. □

Folgen

Definition 2.44 (Folgen)**.** Sei M eine Menge.

Eine *Folge in M* ist per definitionem ein Element von $M^{\mathbb{N}}$, d.h. eine Abbildung $\mathbb{N} \to M$. Für eine Folge $\mathbb{N} \to M$, $n \mapsto a_n$, schreibt man auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Entsprechend definiert man zu $r \in \mathbb{Z}$ auch Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}, n \geq r} =: (a_n)_{n \geq r}$.

Satz 2.45 (Rekursive Definition von Folgen)**.**
Vor.: *Sei M eine Menge und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ f_n: $M^{n+1} \to M$ eine Abbildung. Ferner sei $a \in M$.*
Beh.: *Es existiert genau eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit*

$$a_0 = a \text{ und } \forall_{n \in \mathbb{N}}\, a_{n+1} = f_n\big((a_0, \ldots, a_n)\big).$$

Beweisskizze. Zeige durch vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}$, daß zu jedem $k \in \mathbb{N}$ genau ein $(a_0, \ldots, a_k) \in M^{k+1}$ mit

$$a_0 = a \text{ und } \forall_{n \in \{0, \ldots, k-1\}}\, a_{n+1} = f_n\big((a_0, \ldots, a_n)\big)$$

existiert. □

Definition 2.46.

(i) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Folge $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ rekursiv durch

$$a^0 := 1 \quad \text{und} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}}\, a^{n+1} := a^n \cdot a.$$

[$f_n\big((p_0, \ldots, p_n)\big) := p_n \cdot a.$]

Insbesondere gilt also $0^0 = 1$.

Ist $a \neq 0$, so setzen wir ferner $\forall_{n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}}\, a^n := \left(a^{-1}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$.

a^n heißt *n-te Potenz von a.*

(ii) Die Folge $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist rekursiv definiert durch

$$0! := 1 \quad \text{und} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}\,(n+1)! := n!(n+1).$$

[$f_n\big((p_0,\dots,p_n)\big) := p_n(n+1)$]

Induktiv sieht man: $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, n! \in \mathbb{N}$.

$n!$ heißt *n-te Fakultät von n.*

(iii) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine vorgegebene Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, vgl. Kapitel 3).

Wir definieren dann die Folge $(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) rekursiv durch

$$\sum_{k=0}^{0} a_k := a_0 \quad \text{und} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n+1} a_k := (\sum_{k=0}^{n} a_k) + a_{n+1}.$$

[$f_n\big((p_0,\dots,p_n)\big) = p_n + a_{n+1}$]

$\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ heißt *n-te Partialsumme von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Analog definieren wir die Folge $(\prod\limits_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) rekursiv durch

$$\prod_{k=0}^{0} a_k := a_0 \quad \text{und} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k=0}^{n+1} a_k := (\prod_{k=0}^{n} a_k)\cdot a_{n+1}.$$

[$f_n\big((p_0,\dots,p_n)\big) = p_n \cdot a_{n+1}$]

$\prod\limits_{k=0}^{n} a_k$ heißt *n-tes Partialprodukt von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

(iv) Sei $a \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, vgl. Kapitel 3). Wir definieren die Folge $\left(\binom{a}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) rekursiv durch

$$\binom{a}{0} := 1 \quad \text{und}\ \forall_{n\in\mathbb{N}} \binom{a}{n+1} := \binom{a}{n}\cdot\frac{a-n}{n+1}.$$

[$f_n\big((p_0,\dots,p_n)\big) = p_n \cdot \frac{a-n}{n+1}$]

$\binom{a}{n}$ heißt *Binominalkoeffizient a über n.*

Beispiel.

$$\binom{\frac{3}{2}}{0} = 1,\ \binom{\frac{3}{2}}{1} = 1\cdot\frac{\frac{3}{2}-0}{1} = \frac{3}{2},\ \binom{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}-1}{2} = \frac{3}{8},\ \binom{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{8}\cdot\frac{\frac{3}{2}-2}{3} = -\frac{1}{16}.$$

2.47 (Das Rechnen mit endlichen Summen und Produkten).

(i) **Definition.** Für alle $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $r \leq s$ und alle $a_r, \ldots a_s \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, vgl. Kapitel 3) setzen wir

$$\sum_{i=r}^{s} a_i := \sum_{i=0}^{s-r} a_{i+r} \overset{2.46(iii)}{=} \Big(\big((a_r + a_{r+1}) + a_{r+2}\big) + \ldots\Big) + a_s, \tag{49}$$

$$\prod_{i=r}^{s} a_i := \prod_{i=0}^{s-r} a_{i+r} \overset{2.46(iii)}{=} \Big(\big((a_r \cdot a_{r+1}) \cdot a_{r+2}\big) \cdot \ldots\Big) \cdot a_s. \tag{50}$$

Zusätzlich setzen wir für $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $r > s$

$$\sum_{i=r}^{s} a_i := 0 \quad \text{und} \quad \prod_{i=r}^{s} a_i := 1.$$

Offenbar gilt stets für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{i=r}^{s} a_i = \sum_{i=r-n}^{s-n} a_{i+n} \quad \text{und} \quad \prod_{i=r}^{s} a_i = \prod_{i=r-n}^{s-n} a_{i+n}.$$

(ii) **Satz 1** (Allgemeines Assoziativgesetz). *Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, vgl. Kapitel 3). Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_+$ und alle $r_0, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$ mit $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_k = n$*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} a_i \quad \textit{und} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} a_i.$$

Beispiel. Im Spezialfall $n = 3$, $k = 2$ erhält man (für $\mathbb{C}$ anstelle von $\mathbb{R}$) die (speziellen) Assoziativgesetze ($\mathbb{R}$2) und ($\mathbb{R}$6).

Satz 2 (Allgemeines Kommutativgesetz). *Seien $n \in \mathbb{N}_+$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, vgl. Kapitel 3) und $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine bijektive Abbildung. Dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} \quad \textit{und} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}.$$

Beispiel. Im Spezialfall $n = 3$, $k = 2$ erhält man (für $\mathbb{C}$ anstelle von $\mathbb{R}$) die (speziellen) Kommutativgesetze ($\mathbb{R}$1) und ($\mathbb{R}$5).

Beweise der beiden Sätze durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_+$. □

(iii) **Satz.** *Seien $a_0, \ldots, a_n, a_{00}, \ldots, a_{0k}, \ldots, a_{n0}, \ldots, a_{nk}, b_1, \ldots, b_n, c \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, vgl. Kapitel 3), wobei $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i,$$

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=0}^{n}(a_i\, b_i) = \prod_{i=0}^{n} a_i \cdot \prod_{i=0}^{n} b_i,\\
&c\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} c\, a_i,\\
&c\prod_{i=0}^{n} a_i = \prod_{i=0}^{n} c\, a_i,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} a_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{ij}\right),\\
&\prod_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{k} a_{ij}\right) = \prod_{j=0}^{k}\left(\prod_{i=0}^{n} a_{ij}\right).
\end{aligned}
$$

Beweis als Übung mittels (ii). □

Satz 2.48. *Für alle $a \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, vgl. Kapitel 3) und alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt*

(i) $\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1}$,

(ii) $\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{n-k}, & \textit{falls } k \le n,\\ 0, & \textit{falls } k > n,\end{cases}$

(iii) $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Beweis als Übung.

Bemerkung. Aus (i) und (ii) erhält man das folgende einfache Berechnungsverfahren der Binominalkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$: Im *Pascalschen*[14] *Dreieck* erhält man den Wert von $\binom{n}{k}$ für $k \in \{0, \dots, n\}$ als Summe der beiden Einträge, die diagonal über dem gesuchten Wert stehen.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n = 0: & & & & & 1 & & & & \\
n = 1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n = 2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n = 3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n = 4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Satz 2.49 (Binomischer Satz)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, vgl. Kapitel 3) und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

[14] nach Blaise Pascal (1623–1662)

Beweis als Übung. □

Bemerkung.

(i) Für $n = 2$ erhalten wir die wohlbekannte Gleichung

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

(ii) Man rechnet sofort nach, daß für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$a^n - b^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right) (a - b).$$

Hieraus erhalten wir für $n = 2$ die ebenfalls wohlbekannte Gleichung

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Kardinalzahlen

Der folgende Satz wurde 1883 von Georg Cantor formuliert. Ein Beweis wurde jedoch erst 1897 von Felix Bernstein (1878–1956) in einem von Cantor geleiteten Seminar gegeben.

Satz 2.50 (Äquivalenzsatz von Bernstein).
Vor.: *Seien M, N Mengen derart, daß sowohl eine injektive Abbildung $M \to N$ als auch eine injektive Abbildung $N \to M$ existiert.*
Beh.: *Es existiert eine bijektive Abbildung $M \to N$.*

Wir bereiten den Beweis von Satz 2.50 durch das folgende Lemma vor.

Lemma 2.51. *Seien M, N, M_1 Mengen mit $M_1 \subset N \subset M$ und existiere eine bijektive Abbildung $M \to M_1$.*

Dann existiert auch eine bijektive Abbildung $M \to N$.

Beweis des Lemmas: Nach Voraussetzung existiert eine bijektive Abbildung $f\colon M \to M_1$. Wir definieren

$$M_0 := M,\ \forall_{n \in \mathbb{N}}\, M_{n+1} := f(M_n),\ N_0 := N \text{ und } \forall_{n \in \mathbb{N}}\, N_{n+1} := f(N_n). \tag{51}$$

Dann gilt

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}\, M_{n+1} \subset N_n \subset M_n. \tag{52}$$

[Beweis von (52) durch vollständige Induktion:
$n = 0$ gilt nach Voraussetzung.
$n \mapsto n + 1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte (52) für n, d.h. $M_{n+1} \subset N_n \subset M_n$. Dann folgt

$$\underbrace{f(M_{n+1})}_{=M_{n+2}} \subset \underbrace{f(N_n)}_{=N_{n+1}} \subset \underbrace{f(M_n)}_{=M_{n+1}},$$

also gilt (52) für $n + 1$.]

Wir setzen

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, L_n := M_n \setminus N_n, \tag{53}$$

$$L := \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} L_n \tag{54}$$

[Beachte, daß die Vereinigung in (54) disjunkt ist, da für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n < k$ gilt $L_k \overset{(53)}{\subset} M_k$ und $L_n \overset{(53)}{\subset} M \setminus \underbrace{N_n}_{\overset{(52)}{\supset} M_{n+1} \overset{(52)}{\supset} M_k} \subset M \setminus M_k$.]

Da f injektiv ist, folgt aus (53)

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, f(L_n) \overset{(53)}{=} f(M_n \setminus N_n) = f(M_n) \setminus f(N_n) = M_{n+1} \setminus N_{n+1} \overset{(53)}{=} L_{n+1} \tag{55}$$

und aus (54) somit

$$f(L) = f(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} L_n) = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} \underbrace{f(L_n)}_{=L_{n+1}} = L \setminus L_0. \tag{56}$$

Wegen (55) und (56) wird durch

$$\forall_{a\in M}\, g(a) := \begin{cases} f(a) \in L \setminus L_0, & \text{falls } a \in L, \\ a \in M \setminus L, & \text{falls } a \in M \setminus L, \end{cases}$$

offenbar eine injektive Abbildung $g\colon M \to M$ mit

$$g(M) = (L \setminus L_0) \cup (M \setminus L) = M \setminus \underbrace{L_0}_{\overset{(53),(51)}{=} M \setminus N} = N$$

definiert. Daher existiert eine bijektive Abbildung $M \to N$. □

Beweis von Satz 2.50: Seien also M, N Mengen und existierten injektive Abbildungen $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to M$.

Dann ist offenbar auch $g \circ f\colon M \to M$ eine injektive Abbildung, und es gilt

$$(g \circ f)(M) = g(\underbrace{f(M)}_{\subset N}) \subset g(N) \subset M.$$

Da $g \circ f$ M bijektiv auf $(g \circ f)(M)$ abbildet, also auch eine bijektive Abbildung $(g \circ f)(M) \to M$ existiert, folgt aus Lemma 2.51, daß eine bijektive Abbildung $M \to g(N)$ existiert. Nun bildet g aber N bijektiv auf $g(N)$ ab, also folgt die Existenz einer bijektiven Abbildung $M \to N$. □

Satz 2.52. *Für beliebige Mengen M, N mit $M \neq \varnothing$ gilt:*

Es existiert genau dann eine injektive Abbildung $M \to N$, wenn eine surjektive Abbildung $N \to M$ existiert.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei $f\colon M \to N$ eine injektive Abbildung. Wir wollen eine surjektive Abbildung $g\colon N \to M$ konstruieren.

Definiere $\tilde{f}\colon M \to f(M)$ durch $\forall_{a\in M}\, \tilde{f}(a) = f(a)$. $\tilde{f}$ ist offenbar bijektiv und besitzt daher eine ebenfalls bijektive Umkehrabbildung $\tilde{g}\colon f(M) \to M$. Wähle nun $a_0 \in M$ beliebig (beachte $M \neq \emptyset$) und definiere $g\colon N \to M$ durch

$$\forall_{b\in N}\, g(b) := \begin{cases} \tilde{g}(b), & \text{falls } b \in f(M), \\ a_0, & \text{falls } b \in N \setminus f(M). \end{cases}$$

Da bereits $\tilde{g}\colon f(M) \to M$ surjektiv ist, ist auch g surjektiv.

„$\Leftarrow$" Gegeben sei nun eine surjektive Abbildung $g\colon N \to M$. Wir müssen eine injektive Abbildung $f\colon M \to N$ finden. Die Idee ist, daß f ein Element $a \in M$ auf ein Element des Urbildes $\overline{g}^1(\{a\})$ abbilden soll.

Seien $I := M$ und $\forall_{a\in I}\, N_a := \overline{g}^1(\{a\})$. Da $g\colon N \to M$ surjektiv ist und $M \neq \emptyset$, gilt für alle $a \in I = M$: $N_a \neq \emptyset$.

Nach dem Auswahlaxiom 1.9 gibt es daher eine Abbildung $f\colon I = M \to N$ mit $\forall_{a\in M}\, f(a) \in N_a = \overline{g}^1(\{a\})$, d.h.

$$\forall_{a\in M}\, g(f(a)) = a.$$

Man überlege sich als Übung, daß hieraus die Injektivität von f folgt. □

Definition 2.53 (Kardinalzahlen, endliche und abzählbare Mengen)**.**

(i) Seien M, N Mengen.

Wir sagen M *ist gleichmächtig zu* N (i.Z. $M \sim N$) genau dann, wenn eine bijektive Abbildung $M \to N$ existiert.

$\sim$ hat offenbar alle Eigenschaften einer Äquivalenzrelation, d.h. falls L eine weitere Menge ist,

$$\begin{aligned} M &\sim M && \text{(Reflexivität)}, \\ M \sim N &\Longrightarrow N \sim M && \text{(Symmetrie)}, \\ (M \sim N) \wedge (N \sim L) &\Longrightarrow M \sim L && \text{(Transitivität)}. \end{aligned}$$

Wir definieren die *Kardinalzahl von* M (i.Z. $\boxed{\#M}$) als die Klasse (Gesamtheit) alle Mengen $\widetilde{M}$ mit $M \sim \widetilde{M}$. Dann gilt also

$$\#M = \#N \Longleftrightarrow M \sim N.$$

Hieraus und der linearen Algebra folgt, daß die Klasse aller Mengen bzgl. $\sim$ in disjunkte „Äquivalenzklassen" zerfällt, d.h. jede Menge gehört zu genau einer dieser „Äquivalenzklassen" bzgl. $\sim$.

Dies und die Definition von $\sim$ impliziert, daß $\#M = \#N$ genau dann gilt, wenn eine bijektive Abbildung $M \to N$ existiert.

(ii) Sei M eine Menge. Wir definieren dann

$$M \text{ endlich } :\Longleftrightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}}\, \#M = \#\{1, \dots, n\},$$

$$
\begin{aligned}
M \text{ unendlich } &:\Longleftrightarrow \neg(M \text{ endlich}),\\
M \text{ abzählbar } &:\Longleftrightarrow \#M = \#\mathbb{N},\\
M \text{ höchstens abzählbar } &:\Longleftrightarrow M \text{ endlich oder } M \text{ abzählbar},\\
M \text{ überabzählbar } &:\Longleftrightarrow \neg(M \text{ höchstens abzählbar}).
\end{aligned}
$$

Definition 2.54 (Größenvergleich von Kardinalzahlen)**.** Seien M, N Mengen.

(i) Wir sagen, *die Kardinalzahl von M ist kleiner oder gleich der Kardinalzahl von N* (i.Z. $\boxed{\#M \leq \#N}$) genau dann, wenn es eine injektive Abbildung $M \to N$ gibt.

Diese Bedingung hängt offenbar nur von $\#M$ und $\#N$ ab, denn für alle Mengen $\widetilde{M}$ bzw. $\widetilde{N}$, die zu $\#M$ bzw. $\#N$ gehören, (d.h. es existien bijektive Abbildungen $M \to \widetilde{M}$ bzw. $N \to \widetilde{N}$) gilt: Es existiert genau dann eine injektive Abbildung $M \to N$, wenn eine injektive Abbildung $\widetilde{M} \to \widetilde{N}$ existiert.

(ii) Wir sagen, *die Kardinalzahl von M ist kleiner der Kardinalzahl von N* (i.Z. $\boxed{\#M < \#N}$) genau dann, wenn gilt $\#M \leq \#N$ und $\neg(\#M = \#N)$.

Satz 2.55. *„$\leq$“ ist eine* Teilordnungsrelation *für die Klasse aller Kardinalzahlen, d.h. per definitionem genau, daß für beliebige Mengen M, N, L gilt*

$$\#M \leq \#M, \tag{57}$$

$$(\#L \leq \#M) \wedge (\#M \leq \#N) \Longrightarrow \#M \leq \#N, \tag{58}$$

$$(\#M \leq \#N) \wedge (\#N \leq \#M) \Longrightarrow \#M = \#N. \tag{59}$$

Zusatz. *Für beliebige Mengen M, N gilt auch*

$$\#M \leq \#N \ \textit{oder} \ \#N \leq \#M,$$

d.h. per definitionem, daß „$\leq$“ sogar eine Ordnungsrelation *für der Klasse aller Kardinalzahlen ist.*

Beweis. (57) sowie (58) sind trivial nach der letzten Definition, und (59) ist eine Umformulierung des Äquivalenzsatzes von Bernstein 2.50.

Den Zusatz beweisen wir hier nicht. Ein Beweis findet sich in [4, S. 81ff]. □

Satz 2.56. *Für jede Menge M gilt $\#M < \#\mathfrak{P}(M)$.*

Beweis. $M \to \mathfrak{P}(M)$, $a \mapsto \{a\}$, ist offenbar eine injektive Abbildung. Wir haben zu zeigen, daß es keine bijektive Abbildung $M \to \mathfrak{P}(M)$ gibt, und wir zeigen sogar, daß es keine surjektive Abbildung $M \to \mathfrak{P}(M)$ gibt:

Sei $f\colon M \to \mathfrak{P}(M)$ eine beliebige Abbildung. Dann ist $N := \{a \in M \,|\, x \notin f(a)\}$ eine Teilmenge von M, d.h. $N \in \mathfrak{P}(M)$.

Angenommen[15] es existiert $a_0 \in M$ mit $f(a_0) = N$.

[15] Diesen Beweis durch Widerspruch vergegenwärtige man sich, indem man sich ein Dorf vorstelle, in dem es einen Barbier gibt, der alle Männer rasiert, die sich nicht selber rasieren. Wer rasiert den Barbier?

1. Fall: $a_0 \in N$. Dann folgt nach Definition von N: $a_0 \notin f(a_0) = N$, Widerspruch!

2. Fall: $a_0 \notin N$. Dann folgt nach Definition von N: $a_0 \in f(a_0) = N$, Widerspruch!

Daher kann kein $a_0 \in M$ mit $f(a_0) = N$ existieren, insbesondere ist f nicht surjektiv. □

Der folgende Satz wurde wahrscheinlich erstmals von Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) angewandt.

Satz 2.57 (Dirichletscher Schubfächersatz)**.** *Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\#\{1,\dots,n\} \leq \#\{1,\dots,k\} \iff n \leq k.$$

Der Satz besagt im wesentlichen: „Verteilt man n Perlen auf k Schubfächer derart, daß verschiedene Perlen in verschiedenen Schübfächern liegen, so muß $n \leq k$ sein.

Korollar 1. *Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\#\{1,\dots,n\} = \#\{1,\dots,k\} \iff n = k.$$

□

Korollar 2. *Sei M eine endlichen Menge.*

Dann existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\#M = \#\{1,\dots,n\}$. □

Beweis des Satzes: „$\Leftarrow$“ Ist $n \leq k$, so ist die Inklusion $\{1,\dots,n\} \hookrightarrow \{1,\dots,k\}$ eine injektive Abbildung.

„$\Rightarrow$“ Wir zeigen durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \left(\#\{1,\dots,n\} \leq \#\{1,\dots,k\} \Longrightarrow n \leq k\right).$$

$n = 0$ ist klar, da für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq k$.

$n \mapsto n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für n. Wir wollen zeigen, daß dann auch gilt

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \left(\#\{1,\dots,n+1\} \leq \#\{1,\dots,k\} \Longrightarrow n+1 \leq k\right).$$

Seien daher $k \in \mathbb{N}$ und eine injektive Abbildung $f\colon \{1,\dots,n+1\} \to \{1,\dots,k\}$ gegeben. Wegen $1 \in \{1,\dots,n+1\}$ gilt

$$\varnothing \neq f(\{1,\dots,n+1\}) \subset \{1,\dots,k\},$$

also $\{1,\dots,k\} \neq \varnothing$, bzw. $k \in \mathbb{N}_+$.

Wir definieren eine Abbildung $\sigma\colon \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$ durch

$$\forall_{i \in \{1,\dots,k\}}\, \sigma(i) = \begin{cases} i, & \text{für } i \notin \{k, f(n+1)\}, \\ k, & \text{für } i = f(n+1), \\ f(n+1), & \text{für } i = k. \end{cases}$$

Dann gilt $\sigma \circ \sigma = id_{\{1,\ldots,k\}}$, und man überlege sich als Übung, daß hieraus folgt, daß σ eine bijektive Abbildung ist. Aus der Injektivität von f folgt dann die Injektivität von $\tilde{f} := \sigma \circ f\colon \{1,\ldots,n+1\} \to \{1,\ldots,k\}$.

Es gilt $\tilde{f}(n+1) = \sigma(f(n+1)) = k$. Somit wird durch

$$\forall_{i \in \{1,\ldots,n\}}\, g(i) := \tilde{f}(i)$$

offenbar eine injektive Abbildung $g\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,k-1\}$ definiert, d.h. $\#\{1,\ldots,n\} \leq \#\{1,\ldots,k-1\}$. Aus $k-1 \in \mathbb{N}$ (da $k \in \mathbb{N}_+$, s.o.) und der Induktionsvoraussetzung folgt $n \leq k-1$, also auch $n+1 \leq k$. $\square$

Bemerkung. Nach Korollar 1 liefert die Zuordnung

$$\#\{1,\ldots,n\} \longleftrightarrow n$$

eine umkehrbar eindeutige Korrespondenz zwischen den Kardinalzahlen endlicher Mengen und den natürlichen Zahlen.

Ferner entspricht nach dem Schubfächersatz die $\leq$-Beziehung zwischen diesen Kardinalzahlen der $\leq$-Beziehung zwischen den natürlichen Zahlen.

Wir werden deshalb im folgenden die Kardinalzahl $\#\{1,\ldots,n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit der natürlichen Zahl n identifizieren, d.h. wir setzen

$$\#\{1,\ldots,n\} = n.$$

Dann gilt also: Zu jeder endlichen Menge M existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\#M = n$. Dieses n heißt *die Anzahl der Elemente von M* und M heißt *n-elementig*.

Lemma 2.58. *Sei $M \neq \varnothing$ eine endliche Menge.*

Dann gilt: $\forall_{a \in M}\, M \smallsetminus \{a\}$ endliche Menge und $\#(M \smallsetminus \{a\}) = \#M - 1$.

Beweisskizze. Sei also M eine endliche Menge mit $\#M = n \in \mathbb{N}_+$. Dann existiert eine bijektive Abbildung $f\colon M \to \{1,\ldots,n\}$.

Sei $a \in M$ beliebig. Ähnlich wie im Beweis des Dirichletschen Schubfächersatzes konstruiert man eine bijektive Abbildung $\sigma\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$, die $f(a)$ und n vertauscht und alle übrigen Elemente von $\{1,\ldots,n\}$ festläßt. (Im Falle $f(a) = n$ gilt $\sigma = \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}$.)

Dann ist $\sigma \circ f\colon M \to \{1,\ldots,n\}$ bijektiv mit $\sigma(f(a)) = n$, also ist auch

$$\sigma \circ f|_{M \smallsetminus \{a\}}\colon M \smallsetminus \{a\} \longrightarrow \{1,\ldots,n-1\}$$

bijektiv. Dies liefert die Behauptung. $\square$

Satz 2.59. *Seien $M \neq \varnothing$ eine endliche Menge und N eine Teilmenge von M.*

Dann sind N und $M \smallsetminus N$ endliche Mengen und $\#(M \smallsetminus N) = \#M - \#N$.

Beweisskizze. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $N \neq \varnothing$.

Zeige die Behauptung nun durch endliche Induktion nach $\#M \in \mathbb{N}_+$.

Der Induktionsanfang ist klar nach Lemma 2.58. Im Induktionsschritt wähle man $a \in N$ und wende die Induktionsvoraussetzung auf $M \smallsetminus \{a\}$ und $N \smallsetminus \{a\}$ an. Hieraus folgere man die Behauptung. $\square$

Satz 2.60. *Jede nicht-leere endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum.*

Beweis durch vollständige Induktion nach $n := \#M \in \mathbb{N}_+$: Der Fall $n = 1$ ist trivial.

$n \mapsto n+1$: Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und M eine $(n+1)$-elementige Teilmenge von $\mathbb{R}$, also $M \neq \varnothing$.

Wir wähle nun ein beliebiges $a \in M$. Nach Lemma 2.58 ist $M \setminus \{a\}$ dann eine n-elementige Menge, also existieren nach Induktionsvoraussetzung $b, c \in M \setminus \{a\}$ mit $b \leq c$, $b = \min M \setminus \{a\}$ und $c = \max M \setminus \{a\}$. Dann gilt offenbar

$a = \min M$ sowie $c = \max M$ im Falle $a < b$,

$b = \min M$ sowie $c = \max M$ im Falle $b < a < c$ und

$b = \min M$ sowie $a = \max M$ im Falle $c < a$,

In jedem möglichen Fall besitzt M sowohl ein Maximum als auch ein Minimum. □

Wir diskutieren nun eine Anwendung des Vollständigkeitsaxiomes, nämlich die Existenz der Wurzel einer rellen Zahl größer oder gleich null.

Satz 2.61 (Existenz der n-ten Wurzel)**.** *Zu $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq 2$ und $a \in [0, +\infty[$ existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit*

$$x^n = a \quad \textit{und} \quad x \geq 0. \tag{60}$$

Wir bezeichnen sie mit $\boxed{\sqrt[n]{a}}$ *bzw.* $\boxed{\sqrt{a}}$*, falls $n = 2$.*

Beweis. Der Fall $a = 0$ ist trivial. Sei also $a > 0$. Ist dann $x \in [0, +\infty[$ eine Lösung von (60), so muß offenbar auch $x > 0$ gelten.

Zum Beweis der Einzigkeit seien $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = \tilde{x}^n$. Wegen

$$x^n - \tilde{x}^n = (x - \tilde{x})(x^{n-1} + x^{n-2}\tilde{x} + \ldots + x\tilde{x}^{n-2} + \tilde{x}^{n-1})$$

muß dann auch $x = \tilde{x}$ gelten.

Zum Existenznachweis sei $M := \{x \in [0, +\infty[\, | x^n \leq a\}$. Wegen $0 \in M$ gilt $M \neq \varnothing$, und M ist nach oben beschränkt, da für jedes $x \in M$ gilt $x < (a+1)$. (Denn aus $x \in M$ folgt $x^n \leq a < a + 1 \leq (a+1)^n$, und aus $x \geq (a+1)$ folgte $x^n \geq (a+1)^n$.)

Aus dem Vollständigkeitsaxiom ($\mathbb{R}$13) folgt die Existenz von $c := \sup M \in \mathbb{R}$. Es genügt nun zu zeigen, daß gilt

$$c > 0, \tag{61}$$

$$c^n \geq a, \tag{62}$$

$$c^n \leq a. \tag{63}$$

[Zu (61): Im Falle $1 \leq a$ gilt $1^n \leq a$, also $0 < 1 \in M$. Im Falle $a \leq 1$ folgt wegen $a > 0$ durch wiederholte Anwendung von (33), daß gilt $0 < a^n \leq a$, also $a^n \in M$. Insbesondere gilt $c \geq \min\{1, a^n\} > 0$.

Zu (62): Angenommen es gilt $c^n < a$. Setze dann

$$\varepsilon := \min\left\{1, \frac{a - c^n}{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} c^k}\right\} \in \mathbb{R}_+. \tag{64}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(c+\varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} c^k \varepsilon^{n-k} \overset{\varepsilon\le 1}{\le} \Big(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} c^k \varepsilon\Big) + c^n = \Big(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} c^k\Big)\varepsilon + c^n \\ &\overset{(64)}{\le} a - c^n + c^n = a,\end{aligned}$$

im Widerspruch dazu, daß c obere Schranke von M ist.

Zu (63): Angenommen es gilt $c^n > a$. Sei dann zunächst

$$m := \#\{k \in \mathbb{N} \,|\, 1 \le k \le n-1 \wedge k \text{ ungerade}\} \tag{65}$$

und sodann

$$\varepsilon := \min\left\{1, \frac{c^n - a}{m\binom{n}{k} c^k} \,\Big|\, 1 \le k \le n-1 \wedge k \text{ ungerade}\right\}. \tag{66}$$

Es folgt[16]

$$\begin{aligned}(c-\varepsilon)^n &= \Big(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} c^k (-\varepsilon)^{n-k}\Big) + c^n > -\Big(\sum_{2\nmid k=1}^{n-1}\binom{n}{k} c^k \varepsilon^{n-k}\Big) + c^n \\ &\overset{\varepsilon\le 1}{\ge} -\Big(\sum_{2\nmid k=1}^{n-1}\binom{n}{k} c^k \varepsilon\Big) + c^n \overset{(66)}{\ge} -\Big(\sum_{2\nmid k=1}^{n-1}\binom{n}{k} c^k \frac{c^n - a}{m\binom{n}{k} c^k}\Big) + c^n \\ &\overset{(65)}{=} a - c^n + c^n = a,\end{aligned}$$

im Widerspruch dazu, daß c die kleinste obere Schranke von M ist.] □

Satz 2.62 (über endliche Mengen)**.** *Für alle endlichen Mengen M, N gilt:*

(i) Ist L eine Teilmenge von M, so ist auch L endlich, und es gilt $\#L \le \#M$.

(ii) $M \cup N$ und $M \cap N$ sind endlich und

$$\#(M \cup N) = (\#M) + (\#N) - \#(M \cap N).$$

(iii) $M \times N$ ist endlich und $\#(M \times N) = (\#M)\cdot(\#N)$.

(iv) N^M ist endlich und $\#(N^M) = (\#N)^{(\#M)}$.

(v) $\mathfrak{P}(M)$ ist endlich und $\#\mathfrak{P}(M) = 2^{(\#M)}$.

(vi) Ist $k \in M$ und bezeichnet $\mathfrak{P}_k(M) \subset \mathfrak{P}(M)$ die Menge der k-elementigen Teilmengen von M, so ist $\mathfrak{P}_k(M)$ endlich und $\#\mathfrak{P}_k(M) = \binom{\#M}{k}$.

[16] Das Symbol $\nmid$ steht für „teilt nicht“. $\sum_{2\nmid k=1}^{n-1}$ bedeutet, daß über alle ungeraden Zahlen $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k \le n-1$ summiert wird.

Beweisskizze. Zum Nachweis von (i) betrachte man die Inklusion.

Beim Beweis von (ii) zeige die Behauptung zunächst für den Fall $M \cap N = \varnothing$, indem man eine bijektive Abbildung $M \cup N \to \{1, \dots, \#M + \#N\}$ explizit angibt. Hierauf läßt sich der Fall $M \cap N \neq \varnothing$ mittels Satz 2.59 zurückführen.

(iii)und (iv) zeige man durch vollständige Induktion nach $\#N \in \mathbb{N}$. Im Induktionsschritt verwende man Lemma 2.58.

Zu (v): Die Abbildung $\mathfrak{P}(M) \to \{0,1\}^M$, $L \mapsto f_L$, wobei

$$f_L\colon M \longrightarrow \{0,1\},\ a \longmapsto \begin{cases} 1, & a \in L, \\ 0, & a \notin L, \end{cases}$$

ist offenbar bijektiv.

[$\{0,1\}^M \to \mathfrak{P}(M)$, $f \mapsto \overset{-1}{f}(\{1\})$, ist nämlich die Umkehrabbildung.]

Die Behauptung folgt nun aus (iv).

(vi) zeige man durch vollständige Induktion nach $\#M \in \mathbb{N}$. Im Induktionsschritt kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $k > 0$. Wähle $a \in M$ und nutze

$$\mathfrak{P}_k(M) = \{L \in \mathfrak{P}_k(M) \mid a \in L\} \cup \{L \in \mathfrak{P}_k(M) \mid a \notin L\}$$

sowie $\mathfrak{P}_k(M \setminus \{a\}) = \{L \in \mathfrak{P}_k(M) \mid a \notin L\}$ aus. □

Vor dem Hintergrund von Satz 2.62 (iii) verblüfft das folgende Resultat, welches erstmals 1906 von Gerhard Hessenberg (1874–1925) bewiesen wurde.

Satz 2.63 (von Hessenberg)**.** *Sei M eine unendliche Menge.*
Dann gilt $\#M = \#(M \times M)$.

Beweis vgl. [4, S. 175]. □

Satz 2.64.

(i) Für jede Menge M gilt

$$\#\mathbb{N} \le \#M \iff M \textit{ ist unendlich} \tag{67}$$

und

$$\#M \le \#\mathbb{N} \iff M \textit{ ist höchstens abzählbar.} \tag{68}$$

(ii) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

(iii) $\#\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = \#\mathbb{R}$.

(iv) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis. Zu (67): „$\Rightarrow$“ Angenommen es existieren $n \in \mathbb{N}_+$ und eine bijektive Abbildung $f\colon M \to \{1, \dots, n\}$. Nach Voraussetzung existiert eine injektive Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to M$, also ist auch $f \circ g\colon \mathbb{N} \to \{1, \dots, n\}$ injektiv, d.h. $\#\mathbb{N} \le n$, Widerspruch!

„$\Leftarrow$“ Sei M eine unendliche Menge. Nach dem Auswahlaxiom 1.9 existiert eine Abbildung

$$f\colon \mathfrak{P}(M) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow M \text{ mit } \forall_{N \in \mathfrak{P}(M) \setminus \{\varnothing\}}\, f(N) \in N. \tag{69}$$

Da M unendlich, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $(p_0, \dots, p_n) \in M^{n+1}$ dann

$$M \setminus \{p_0, \dots, p_n\} \in \mathfrak{P}(M) \setminus \{\varnothing\}.$$

Wir definieren nun

$$f_n \colon M^{n+1} \longrightarrow M,\ (p_0, \dots, p_n) \longmapsto f(M \setminus \{p_0, \dots, p_n\}). \tag{70}$$

Sei $a \in M$ beliebig gewählt. Nach Satz 2.45 existiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit

$$a_0 = a,\ \forall_{n \in \mathbb{N}}\, a_n = f_n\big((a_0, \dots, a_n)\big) \overset{(70)}{=} f(M \setminus \{a_0, \dots, a_n\}) \overset{(69)}{\in} M \setminus \{a_0, \dots, a_n\}. \tag{71}$$

Wegen (71) ist die Abbildung $\mathbb{N} \to M$, $n \mapsto a_n$, injektiv, also gilt $\mathbb{N} \le \#M$.

Zu (68): „$\Rightarrow$" Es gelte $\#M \le \#\mathbb{N}$.

Wäre M nicht höchstens abzählbar, so gälte M unendlich und M nicht abzählbar, d.h. nach (67) $\#\mathbb{N} \le \#M$ und $\neg(\#M = \#\mathbb{N})$, also folgt aus (59) sowie $\#M \le \#\mathbb{N}$: $\#\mathbb{N} = \#M$ und $\neg(\#M = \#\mathbb{N})$, Widerspruch!

„$\Leftarrow$" Sei M höchstens abzählbar.

Ist M abzählbar, so existiert eine bijektive Abbildung $M \to \mathbb{N}$, also insbesondere eine injektive, d.h. $\#M \le \#\mathbb{N}$.

Zu (ii): Der Beweis stammt von Cantor und wird *Cantors erstes Diagonalargument* genannt.

Wegen Lemma 2.51 genügt es zu zeigen, daß $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. $N \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ist offenbar injektiv, also müssen wir nach dem Äquivalenzsatz von Bernstein zeigen, daß eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ existiert. Wir ordnen die positiven rationalen Zahlen folgendermaßen an.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Überlege, wie man die gesuchte Abbildung findet.

Der Beweis von (iii) und (iv) erfolgt später mittels der g-adischen Entwicklung der reellen Zahlen. $\square$

Bemerkung. Wir haben gezeigt $\#\mathbb{N} < \#\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = \#\mathbb{R}$. Es ist nun interessant, zu fragen, ob es eine Menge M gibt, deren Mächtigkeit größer ist als die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und zugleich kleiner ist als die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen (des sog. *Kontinuums*).

Die 1878 von Georg Cantor aufgestellte sog. *(spezielle) Kontinuumshypothese* behauptet, daß es keine solche Menge gibt, d.h. daß gilt:

(SKH) Es existiert keine Menge M mit $\#\mathbb{N} < \#M < \#\mathbb{R}$.

Im Rahmen der *axiomatischen Mengenlehre nach Ernst Zermelo (1871–1953) und Abraham Fraenkel (1891–1965) mit Auswahlaxiom (ZFC)* wurde 1939 von Kurt Gödel (1906–1978) bewiesen, daß aus den Axiomen von (ZFC) kein Widerspruch zu (SKH) folgt.

Paul Cohen (1934–2007) bewies 1963, daß sich (SKH) auch nicht aus (ZFC) ableiten läßt.

Also läßt sich weder die Gültigkeit noch die Ungültigkeit von (SKH) beweisen.

3 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

In der (historisch bis ins erste Drittel des 19. Jahrhundertes anzusiedelnden) *klassischen Algebra* beschäftigte man sich mit der Lösung sog. *algebraischer Gleichungen* auf $\mathbb{R}$, das sind Gleichungen der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \neq a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_+. \tag{72}$$

In diesem Zusammenhang kann man die im letzten Kapitel definierten Mengen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ aus folgendem Blickwinkel betrachten:

„Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." So wird Leopold Kronecker (1823–1891) aus einem 1886 gehaltenen Vortrag zitiert. In manchen Quellen ist fälschlicherweise die Rede von den *natürlichen Zahlen* anstelle der *ganzen Zahlen*. Wir betrachten für einen Moment auch die ganzen Zahlen als Menschenwerk und nur die natürlichen als gottgegeben. Mit Ausnahme von Null ist das zu einer natürlichen Zahl bzgl. + inverse Element nicht Element von $\mathbb{N}$, d.h. daß die Gleichung

$$x + a_0 = 0, \quad \text{wobei } 0 \neq a_0 \in \mathbb{N},$$

in den natürlichen Zahlen nicht lösbar ist, also keine Lösung $x \in \mathbb{N}$ besitzt.

Dies führt zwangsläufig zur Erweiterung der Menge $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \overset{2.37(i)}{=} \mathbb{Z}$. Hier ist nicht nur die letzte Gleichung lösbar, sondern auch

$$x + a_0 = 0, \quad \text{wobei } a_0 \in \mathbb{Z}.$$

In $\mathbb{Z}$ wiederum ist die Gleichung

$$a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{mit } 0 \neq a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$$

nur lösbar, wenn a_0 ein ganzzahliges Vielfaches von a_1 ist.

Durch Erweiterung von $\mathbb{Z}$ zur Menge $\mathbb{Q}$, deren Elemente bei uns per definitionem aus dem Quotienten ganzer Zahlen und ganzer Zahlen ungleich null bestehen, erhält man eine Menge, in der sogar die Gleichung

$$a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{mit } 0 \neq a_1, a_0 \in \mathbb{Q}$$

gelöst werden kann.

Im Körper $\mathbb{Q}$ läßt sich also jede *lineare Gleichung* – das ist der Fall $n = 1$ in (72) – lösen. Auf *quadratische Geichungen* – das ist der Fall $n = 2$ in (72) – trifft das i.a. nicht zu: Wir wissen nach Satz 2.61 insbesondere, daß

$$x^2 - a_0 = 0 \tag{73}$$

für $a_0 \in \mathbb{Q} \cap [0, +\infty[$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\sqrt{a_0} \in [0, +\infty[$ besitzt. Der nächste Satz, bei dessen Beweis wir einige (aus der Schule bekannten) Grundkenntnise der *elementaren Zahlentheorie* benötigen, zeigt, daß diese nicht rational sein muß.

Satz 3.1. *$\sqrt{2}$ ist nicht rational.*

Beweis. Angenommen $\sqrt{2}$ ist rational. Da sich jede rationale Zahl vollständig kürzen läßt, existieren $r, s \in \mathbb{N}_+$ mit $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ und $\frac{r}{s}$ vollständig gekürzt. Es folgt $2 = \frac{r^2}{s^2}$, also

$$r^2 = 2s^2, \tag{74}$$

und somit ist r^2 gerade. Da das Quadrat einer ungeraden Zahl ungerade ist[17], muß nun gelten

$$r \text{ ist gerade.} \tag{75}$$

Daher existiert eine Zahl $\tilde{r} \in \mathbb{N}_+$ mit $r = 2\tilde{r}$ und (74) impliziert $4\tilde{r}^2 = 2s^2$. Division durch 2 ergibt $2\tilde{r}^2 = s^2$, d.h., daß s^2 gerade ist. Analog zu oben muß nun auch s gerade sein, also sind nach (75) sowohl r als auch s gerade und besitzen daher beide 2 als Teiler, im Widerspruch dazu, daß $\frac{r}{s}$ vollständig gekürzt ist. □

Für $a_0 \in [0, +\infty[$ besitzt (73) nach Satz 2.61 stets eine Lösung in $[0, +\infty[$. Für $a_0 \in]-\infty, 0[$ kann jedoch gemäß (30) keine reelle Lösung existieren.

Um Lösungen zu erhalten bedient man sich der *komplexen Zahlen*, über die Harro Heuser (1927–2011) in [11, S. 41] schreibt:

„Sie verdanken ihr Leben einem Manne, den seine Mutter (wie er selbst berichtet) abtreiben wollte; der sich dann zu einem Wüstling, Streithansl, magisch-mystischen Mathematiker und europaweit gefeierten Arzt entwickelte; ein Mann, der als Student Rektor der Universität Padua und als Greis Insasse des Gefängnisses von Bologna war; der sich erdreistete, das Horoskop Jesu zu stellen und in seinem Buch *Über das Würfelspiel* Betrugsanleitungen zu geben, und der nebenbei auch noch die ‚Cardanische Aufhängung' erfand: Geronimo Cardano (1501–1576), ein vollblütiger Sohn der italienischen Renaissance. In seiner *Ars magna sive de regulis algebraicis* (Nürnberg, 1545) führt ihn die unverfängliche Aufgabe, eine Strecke der Länge 10 so in zwei Stücke zu zerlegen, daß das aus ihnen gebildete Rechteck die Fläche 40 hat, zu der quadratischen Gleichung $x(10-x) = 40$ und zu ihren absurden Lösungen $x_1 = 5 + \sqrt{-15}, x_2 = 5 - \sqrt{-15}$, absurd, weil man aus negativen Zahlen keine (reellen) Quadratwurzeln ziehen kann. Aber nun geschieht Entscheidendes: Cardano setzt die ‚geistigen Qualen', die ihm diese Gebilde bereiten, beiseite und findet durch keck-formales Rechnen, daß tatsächlich $x_1 + x_2 = 10$ und $x_1 x_2 = 40$ ist. Sein ironischer Kommentar: ‚So schreitet der arithmetische Fortschritt voran, dessen Ergebnis ebenso subtil wie nutzlos ist.' Die ‚komplexen' (zusammengesetzten) Ausdrücke [...] mit der *imaginären Einheit* $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$ sind dann nicht mehr aus der Mathematik verschwunden, so sehr sie auch als schein- und gespensterhaft empfunden wurden. [Dieser Ausdruck ist nicht wohldefiniert, denn es gilt auch $(-\mathrm{i})^2 = -1$.] Denn sie lieferten nicht nur ‚Lösungen' aller quadratischen und kubischen Gleichungen – und zwar solche, die erbaulicherweise den vertrauten Wurzelsätzen des François Vieta (1540–1603) genügten –, vielmehr ergab unverdrossenes (und unverstandenes) Rechnen mit diesen windigen ‚Zahlen' sogar Sätze ‚im Reellen', die sich in jedem Falle nachträglich durch ‚rein reelle' Beweise bestätigen ließen. Das Mirakulöseste aber war, daß mittels dieser wesenlosen Gebilde Beziehungen zwischen beherrschenden Größen der Analysis hergestellt werden konnten, die

[17] $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ und $4n^2 + 4n$ ist gerade.

bisher fremd nebeneinander gestanden hatten – wodurch denn dieser Analysis ganz neue Lichter aufgesteckt wurden. [...] All diese Umstände drängten immer energischer zu einer begrifflichen Klärung der ebenso mächtigen wie mysteriösen ‚komplexen Zahlen', eine Klärung, die schließlich 1831 von Carl-Friedrich Gauß (1777–1855) in *geometrischer* und 1837 von William R. Hamilton (1805–1865) in *arithmetischer* Einkleidung gegeben wurde."

Definition 3.2 (Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen)**.**

(i) $\mathbb{R}^2$ ist mit der üblichen Addition

$$\forall_{(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2}\,(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$$

eine abelsche Gruppe mit $0=(0,0)$ als neutralem Element.

Zu $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ist $(-a,-b)$ das inverse Element.

(ii) Wir definieren auf $\mathbb{R}^2$ eine *Multiplikation* durch

$$\forall_{(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2}\,(a_1,a_2)(b_1,b_2)=(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1). \tag{76}$$

Zwei kurze Rechnungen zeigen, daß diese Multiplikation kommutativ und assoziativ ist.

Außerdem gilt $\forall_{a,b\in\mathbb{R}^2}\,ab=0\Leftrightarrow\big((a=0)\vee(b=0)\big)$, also definiert (76) auch eine Multiplikation auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ und zwei weitere Rechnungen bestätigen, daß $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ bzgl. dieser Multiplikation eine abelsche Gruppe mit $(1,0)$ als neutralem Element ist, und zu $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ist $\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ das inverse Element.

(iii) Es läßt sich leicht überprüfen, daß für die in (i) bzw. (ii) erklärten Operationen das Distributivgesetz

$$\forall_{a,b,c\in\mathbb{R}^2}\,a(b+c)=ab+ac$$

gilt.

Wegen (i), (ii) und (iii) ist $\mathbb{R}^2$ mit den oben erklärten Operationen Addition und Multiplikation ein Körper, der sog. *Körper der komplexen Zahlen*, den wir mit $\boxed{\mathbb{C}}$ bezeichnen. Außerdem setzen wir noch $\boxed{\mathbb{C}^*}:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Bemerkung (Geometrische Veranschaulichung der Multiplikation (76))**.** Obwohl wir die Funktionen sin, cos erst später einführen werden, verwenden wir, daß sich jeder Vektor auf dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ als $(\cos(\alpha),\sin(\alpha))$ schreiben läßt, wobei $\alpha\in[0,2\pi[$ den im Bogenmaß gemessenen Winkel zur Abszisse bezeichne.

Es seien $a=r(\cos(\varphi),\sin(\varphi)),b=s(\cos(\psi),\sin(\psi))$ mit $r,s\in[0,+\infty[$ und $\varphi,\psi\in[0,2\pi[$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ab &\overset{(76)}{=} rs(\cos(\varphi)\cos(\psi)-\sin(\varphi)\sin(\psi),\cos(\varphi)\sin(\psi)+\sin(\varphi)\cos(\psi))\\ &\overset{(158)}{=} rs(\cos(\varphi+\psi),\sin(\varphi+\psi)), \end{aligned}$$

d.h. die Längen der Vektoren multiplizieren sich, und die Winkel mit der Abszisse addieren sich.

3.3 ($\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$)**.** Die Abbildung $I\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (t,0)$, ist ein injektiver *Körperhomomorphismus*, (d.h. daß für $t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ gilt: $I(t+\tilde{t}) = I(t) + I(\tilde{t})$ und $I(t\tilde{t}) = I(t)I(\tilde{t})$.)

I induziert einen Isomorphismus des Körpers $\mathbb{R}$ auf den Teilkörper $\mathbb{R} \times \{0\}$ von $\mathbb{C}$.

Wir identifizieren im folgenden die reelle Zahl t mit der komplexen Zahl $I(t) = (t,0)$. Damit wird $\mathbb{R}$ zu einem Teilkörper von $\mathbb{C}$ und $1 = (1,0)$ ist das Einselement von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Ferner ist die Beschränkung der Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ gleich der skalaren Multiplikation des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. (Klar nach (76).)

Definition 3.4 (Die Zahl i)**.** $\boxed{\mathrm{i}} := (0,1) \in \mathbb{C}$ heißt *imaginäre Einheit*[18]. Es gilt offenbar $\mathrm{i}^2 = -1$.

$a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}$ heißt *rein imaginär* genau dann, wenn $a \in \mathbb{R}\mathrm{i}$, d.h. wenn $a_1 = 0$, also $a = (0, a_2) = a_2\mathrm{i}$.

Bemerkung. Wir haben in (30) gesehen, daß aus der Existenz einer Anordnung für einen Körper folgt, daß das Quadrat einer jeden Zahl ungleich null in der Anordnung liegen muß. Wegen $\mathrm{i}^2 = -1$ kann $\mathbb{C}$ somit keine (mit Addition und Multiplikation verträgliche) Anordnung besitzen.

Definition 3.5 (Real- und Imaginärteil, komplex konjugierte Zahl)**.** Für jedes $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}$ gilt

$$a = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = a_1 + \mathrm{i}a_2.$$

a_1 bzw. a_2 heißt der *Real-* bzw. der *Imaginärteil* von a und wird mit $\operatorname{Re} a$ bzw. $\operatorname{Im} a$ bezeichnet.

Obige Definition der Multiplikation in (76) besagt nun gerade, daß man das Produkt $(a_1 + \mathrm{i}a_2)(b_1 + \mathrm{i}b_2)$, wobei $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, durch „übliches" Ausmultiplizieren bei Verwendung von $\mathrm{i}^2 = -1$ als $(a_1b_1 - a_2b_2) + \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1)$ erhält.

Die Zahl $\overline{a} := a_1 - \mathrm{i}a_2 \in \mathbb{C}$ heißt die *zu a komplex konjugierte Zahl.*

Es gilt: $a\overline{a} = (a_1 + \mathrm{i}a_2)(a_1 - \mathrm{i}a_2) = (a_1)^2 + (a_2)^2 \in [0, +\infty[$.

Definition 3.6 (Betrag)**.** Für alle $a = a_1 + \mathrm{i}a_2 \in \mathbb{C}$ definieren wir den *Betrag von a* als

$$|a| := \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2} = \sqrt{a\overline{a}}.$$

Die Beschränkung von $|\dots|$ auf $\mathbb{R}$ ergibt die übliche Betragsfunktion auf $\mathbb{R}$.

Satz 3.7. *Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ gilt*

$$|a| \geq 0 \quad \textit{und} \quad (|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0);$$
$$|a + b| \leq |a| + |b| \; (\textit{Dreiecksungleichung}),$$
$$\textit{mit Gleichheit genau dann, wenn } a = \lambda b \vee b = \lambda a \textit{ mit } \lambda \in [0, +\infty[;$$
$$|a| - |b| \leq \big||a| - |b|\big| \leq |a - b|;$$
$$|ab| = |a|\,|b|.$$

[18] Der Name und das Symbol i wurden 1777 von Leonhard Euler (1707–1783) eingeführt.

Beweis als Übung. □

Satz 3.8. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}, \tag{77}$$

$$\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}, \tag{78}$$

$$\overline{(\overline{a})} = a, \tag{79}$$

$$|\overline{a}| = |a|, \tag{80}$$

$$|a| = 1 \Longrightarrow \frac{1}{a} = \overline{a}, \tag{81}$$

$$a \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} = \frac{\overline{a}}{|a|^2}, \tag{82}$$

$$a = \overline{a} \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R}, \tag{83}$$

$$a = -\overline{a} \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R}\,\mathrm{i}, \tag{84}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}. \tag{85}$$

Beweis als Übung. □

Bemerkung. In 2.46 (iii) und (iv), 2.47, 2.48 sowie 2.49 kann jeweils $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt werden. Wir haben das an den entsprechenden Stellen in Kapitel 2 auch vermerkt.

Wegen $\mathrm{i}^2 = -1$ haben wir jetzt auch für $a_0 \in \,]-\infty, 0[$ eine Lösung von (73) gefunden – nämlich $\sqrt{a_0}\,\mathrm{i}$. Es gilt sogar der folgende Satz, der die eingangs dieses Kapitels angestellten Überlegungen abschließt.

Satz 3.9 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Seien $0 \neq a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_+$. Dann besitzt $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ eine komplexe Nullstelle.*

Beweis vgl. [7, S. 90ff] oder [11, Satz 69.1]. □

Definition 3.10 (ε-Umgebung)**.** Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $a_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt die Menge

$$\boxed{U_\varepsilon(a_0)} := \{a \in \mathbb{C} \mid |a - a_0| < \varepsilon\}$$

(offene) ε-Umgebung von a_0 in $\mathbb{C}$.

Definition 3.11 (offene, abgeschlossene, beschränkte und kompakte Teilmengen von $\mathbb{C}$)**.** Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(i) M heißt *offen* $:\Longleftrightarrow \forall_{a \in M} \exists_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} U_\varepsilon(a) \subset M$,

(ii) M heißt *abgeschlossen* $:\Longleftrightarrow \mathbb{C} \setminus M$ ist offen,

(iii) M heißt *beschränkt* $:\Longleftrightarrow \exists_{C \in \mathbb{R}_+} \forall_{a \in M} |a| \leq C$,

(iv) M heißt *kompakt* $:\Longleftrightarrow M$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Beispiel. Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $a_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist $U_\varepsilon(a_0)$ offen und

$$\overline{U_\varepsilon(a_0)} := \{a \in \mathbb{C} \,|\, |a - a_0| \le \varepsilon\}$$

ist kompakt.

[Beweisskizze: Ist $a \in U_\varepsilon(a_0)$, so gilt $\underline{U_{\tilde\varepsilon}(a)} \subset U_\varepsilon(a_0)$ mit $\tilde\varepsilon := \varepsilon - |a - a_0| \in \mathbb{R}_+$.

Ist $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_\varepsilon(a_0)}$, so gilt $U_{\tilde\varepsilon}(a) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{U_\varepsilon(a_0)}$, wobei $\tilde\varepsilon := |a - a_0| - \varepsilon \in \mathbb{R}_+$: Für $b \in U_{\tilde\varepsilon}(a)$ gilt $|b - a_0| = |a - a_0 - (a - b)| \ge |a - a_0| - |a - b| > |a - a_0| - \tilde\varepsilon = \varepsilon$.]

Satz 3.12 ($\mathbb{C}$ als topologischer Raum)**.**

(i) *$\varnothing$ und $\mathbb{C}$ sind offen.*

(ii) *Sind I eine beliebeige Menge und M_i für jedes $i \in I$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, so ist $\bigcup_{i \in I} M_i$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

(iii) *Sind M_1, M_2 offene Teilmengen von $\mathbb{C}$, so ist $M_1 \cap M_2$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

Beweis als Übung. □

Definition 3.13 (innerer Punkt, offener Kern)**.** Sei $M \subset \mathbb{C}$.

$a \in M$ heißt *innerer Punkt von M* $:\Longleftrightarrow \exists_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} U_\varepsilon(a) \subset M$.

Die Menge aller inneren Punkte von M bezeichnen wir mit $\boxed{\mathring{M}}$ und nennen sie den *offenen Kern von M*.

Wir vereinbaren noch eine Schreibweise: Im folgenden sei $\boxed{\mathbb{K}} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Ist dann M eine beliebige Menge, so nennen wir eine Abbildung $M \to \mathbb{K}$ eine *Funktion*.

4 Konvergenz von Folgen und Reihen

Der Begriff der *Konvergenz* stellt die eigentliche Grundlage der Analysis dar. Auf ihm fußen Begriffe wie *Stetigkeit* oder *Differenzierbarkeit*, die für die Naturwissenschaften dermaßen entscheidend ist, daß Heuser sie in [11, S. 144] „einen der großen Begriffe der menschlichen Zivilisation“ nennt.

Obwohl die Differentialrechnung bereits von Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) entwickelt wurde, ist erst seit der Einführung des *Limes* durch Augustin Louis Cauchy ein Gerüst vorhanden, das für die Analysis hinreichend präzise ist. Die Überlegungen Cauchys wurden durch die Einführung der *Epsilontik* durch Bernard Bolzano (1781–1848) und Karl Weierstraß (1815–1897) weiter präzisiert, und ihre Definition liegt der Analysis heute zugrunde.

Konvergenz von Folgen

Definition 4.1 (Konvergenz von Folgen in $\mathbb{K}$)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.

(i) Ist $c \in \mathbb{K}$, so definieren wir:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $c :\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}} (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon)$.

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{K} :\Longleftrightarrow \exists_{c\in\mathbb{K}}\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen c.

Wir behaupten:

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in $\mathbb{K}$, so existiert genau ein $c \in \mathbb{K}$ derart, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert. Dieses eindeutig bestimmte $c \in \mathbb{K}$ bezeichnet man dann als *Grenzwert* oder *Limes a_n für n gegen unendlich* (i.Z. $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = c$ oder $\boxed{a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} c}$[19]).

Beweis hiervon: Konvergiere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl gegen $c \in \mathbb{K}$ als auch gegen $\tilde{c} \in \mathbb{K}$ und angenommen $c \neq \tilde{c}$.

Dann existieren zu $\varepsilon := \frac{|c-\tilde{c}|}{2} \in \mathbb{R}_+$ nach Voraussetzung $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} |a_n - c| < \varepsilon \ \wedge \ \forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_1} |a_n - \tilde{c}| < \varepsilon,$$

also folgt für alle $n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$2\varepsilon = |c - \tilde{c}| \leq |c - a_n| + |a_n - \tilde{c}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

Widerspruch!

(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Nullfolge $:\Longleftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

Dann gilt offenbar für $c \in \mathbb{K}$:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $c \Longleftrightarrow (a_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

[19] Wir haben an dieser Stelle nicht etwa das Symbol ∞ eingeführt, sondern nur die Schreibweisen $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ – streng genommen müßten wir hier auch $+\infty$ anstelle von ∞ schreiben.

Beispiel.

1.) $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine (reelle) Nullfolge:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vorgegeben. Zu zeigen ist: $\exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} \underbrace{\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon}_{\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}-1}$.

Hierzu: Da $\mathbb{R}$ ein archimedisch angeordner Körper ist (vgl. Satz 2.35), existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$: $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, d.h. $\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$.

2.) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ sowie $c \in \mathbb{K}$ und gilt $\exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0}\, a_n = c$, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Definition 4.2. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$. Wir definieren dann:

(i) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine *Teilfolge von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn eine streng monoton wachsende[20] Abbildung $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto i(n) =: i_n$ existiert, derart, daß gilt $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, b_n = a_{i_n}$.

(ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt genau dann *beschränkt*, wenn $\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Satz 4.3.
Vor.: *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $\mathbb{K}$ *sowie* $c \in \mathbb{K}$.
Beh.:

(i) Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *folgt* $\lim_{n\to\infty} b_n = c$.

(ii) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent in* $\mathbb{K}$*, so ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt.*

(iii) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Nullfolgen, so ist auch* $(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

(iv) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt, so ist auch* $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

Beweis. Zu (i): Seien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie in Definition 4.2 (i) und gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} |a_n - c| < \varepsilon,$$

also folgt aus $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, i_n \geq n$, daß gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} |b_n - c| < \varepsilon.$$

Zu (ii): Gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Dann existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} \underbrace{|a_n - c| < 1.}_{\Rightarrow |a_n| \leq |a_n - c| + |c| < 1 + |c|}$ Setzt man $S := \max\{|a_0|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |c|\}$, so folgt $\forall_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leq S$.

[20] Die strenge Monotonie der obigen Abbildung i bedeutet, daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt: $i_n > i_m$. Für die Abbildung i folgt leicht durch vollständige Induktion $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, i_n \geq n$.

Zu (iii): Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen.
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann existieren $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \ \wedge \ \forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_1} |b_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

also folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$|a_n \pm b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zu (iv): Existiere also $S \in \mathbb{R}_+$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}} |b_n| \leq S$.
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.
Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge und $\frac{\varepsilon}{S} \in \mathbb{R}_+$, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} |a_n| < \frac{\varepsilon}{S}$. Daher folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{S} S = \varepsilon,$$

also ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. □

Satz 4.4.
Vor.: *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$ sowie $c, d \in \mathbb{K}$ und gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, $\lim_{n\to\infty} b_n = d$.*
Beh.:

(i) $(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und* $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = c \pm d$.

(ii) $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = c \cdot d$.

(iii) $(\forall_{n\in\mathbb{N}} b_n \neq 0 \wedge d \neq 0) \Longrightarrow \left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{d}$.

(iv) $(\forall_{n\in\mathbb{N}} b_n \neq 0 \wedge d \neq 0) \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{c}{d}$.

Beweis. (i) folgt aus $(a_n \pm b_n) - (c \pm d) = \underbrace{\underbrace{(an - c)}_{\text{Nullfolge}} \pm \underbrace{(b_n - d)}_{\text{Nullfolge}}}_{\text{Nullfolge nach 4.3 (iii)}}.$

(ii) folgt aus

$$a_n b_n - cd = \underbrace{\underbrace{(a_n - c)}_{\text{Nullfolge}} \underbrace{(b_n - d)}_{\text{Nullfolge}} + \underbrace{(a_n - c)}_{\text{Nullfolge}} \underbrace{d}_{\text{beschränkt}} + \underbrace{(b_n - d)}_{\text{Nullfolge}}. \underbrace{c}_{\text{beschränkt}}}_{\text{Nullfolge nach 4.3 (iv), (iii)}}$$

Zu (iii): Wir zeigen zunächst:

$$\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt.}$$

[Zu $\varepsilon := \frac{|c|}{2} \in \mathbb{R}_+$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} \qquad \underbrace{|a_n - c| < \frac{|c|}{2}}_{\Rightarrow |a_n| \geq |c| - |c - a_n| > \frac{|c|}{2} \Rightarrow |\frac{1}{a_n}| < \frac{2}{|c|}}. \qquad]$$

Setze $S := \max\left\{\frac{1}{|a_0|}, \ldots, \frac{1}{|a_{n_0-1}|}, \frac{2}{|c|}\right\}$. Dann gilt $\forall_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{a_n}\right| \leq S$. Nunmehr folgt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\underbrace{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{c} = \underbrace{(c - a_n)\frac{1}{c}}_{\text{Nullfolge}} \cdot \underbrace{\frac{1}{a_n}}_{\text{beschränkt}}}_{\text{Nullfolge}}$.

(iv) folgt trivial aus (ii) und (iii). □

Definition 4.5 ($\widehat{\mathbb{R}}$, Konvergenz von Folgen in $\widehat{\mathbb{R}}$)**.**

(i) Wir setzen $\boxed{\widehat{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Wie oben bezeichnen dabei $-\infty, +\infty$ zwei voneinander verschiedene Objekte, die nicht reelle Zahlen sind.

Wir erweitern die Ordnungsrelation „<" in $\mathbb{R}$ zu einer Ordnungsrelation „<" in $\widehat{\mathbb{R}}$, indem wir setzen:

$$-\infty < +\infty \quad \text{und } \forall_{a\in\mathbb{R}} - \infty < a \wedge a < +\infty.$$

Wir erinnern an Definition 2.19, wo wir für eine nicht-leere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ gesetzt hatten

$$\begin{aligned} \sup M &:= +\infty, \text{ falls } M \text{ nicht nach oben beschränkt,} \\ \inf M &:= -\infty, \text{ falls } M \text{ nicht nach unten beschränkt,} \end{aligned}$$

und die Definition der unbeschränkten Intervalle in 2.22.

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren dann

$$\begin{aligned} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert gegen } +\infty &:\Longleftrightarrow \forall_{C\in\mathbb{R}} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0}\, a_n > C, \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert gegen } -\infty &:\Longleftrightarrow \forall_{C\in\mathbb{R}} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0}\, a_n < C, \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert in } \widehat{\mathbb{R}} &:\Longleftrightarrow \exists_{c\in\widehat{\mathbb{R}}}\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } c. \end{aligned}$$

Offenbar gilt:

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in $\widehat{\mathbb{R}}$, so existiert genau ein $c \in \widehat{\mathbb{R}}$ derart, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert. Dieses $c \in \widehat{\mathbb{R}}$ bezeichnet man (in Verallgemeinerung von Definition 4.1 (ii)) als *Grenzwert* oder *Limes a_n für n gegen unendlich* (i.Z. $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$[21]).

Satz 4.6.
Vor.: *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $\mathbb{R}$ *sowie* $c, d \in \widehat{\mathbb{R}}$ *und gelte* $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, $\lim_{n\to\infty} b_n = d$.
Beh.: $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, a_n \leq b_n \Longrightarrow c \leq d$.

Beweis. Angenommen $c > d$.

[21] In diesem Symbol ist ∞ kein eigenständiges Objekt!

1. Fall: $c, d \in \mathbb{R}$. Dann existieren zu $\varepsilon := \frac{c-d}{2} \in \mathbb{R}_+$ natürliche Zahlen $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} |a_n - c| < \frac{c-d}{2} \;\wedge\; \forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_1} |b_n - d| < \frac{c-d}{2},$$

also folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \max\{n_0, n_1\}$: $b_n < d + \frac{c-d}{2} = \frac{c+d}{2} = c - \frac{c-d}{2} < a_n$, Widerspruch!

2. Fall: $c \in \mathbb{R}, d = -\infty$. Dann existiert zu jedem $S \in \mathbb{R}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, n \geq n_0 \Rightarrow \left(a_n > c - \frac{1}{S} \wedge b_n < -S\right)$, Widerspruch!

3. Fall: $c = +\infty, d \in \mathbb{R}$. Dann existiert zu jedem $S \in \mathbb{R}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, n \geq n_0 \Rightarrow \left(a_n > S \wedge b_n < d + \frac{1}{S}\right)$, Widerspruch!

4. Fall: $c = +\infty, d = -\infty$. Dann existiert zu jedem $S \in \mathbb{R}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, n \geq n_0 \Rightarrow (a_n > S \wedge b_n < -S)$, Widerspruch! □

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen des Satzes folgt aus $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, a_n < b_n$ nicht $c < d$, wie das Beispiel der Folge $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ zeigt: Es gilt $\frac{1}{n+1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

Hauptsatz 4.7 (über monotone Folgen)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

(i) *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend (d.h. per definitionem $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, a_{n+1} \leq a_n$)*
$\Longrightarrow$ *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen* $\inf\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

(ii) *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend (d.h. per definitionem $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, a_{n+1} \geq a_n$)*
$\Longrightarrow$ *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen* $\sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Beweis. Wir führen nur den Beweis von (i). (ii) zeigt man analog.

Seien daher $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und $M := \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Fall: M nicht nach unten beschränkt. Dann gilt $\inf M = -\infty$, und wir müssen $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ zeigen.

Sei $C \in \mathbb{R}$ vorgegeben. C ist keine untere Schranke von M, also existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} < C$ und aus der Voraussetzung (in (i)) folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$: $a_n \leq a_{n_0} < C$.

2. Fall: M nach unten beschränkt. Dann gilt $c := \inf M \in \mathbb{R}$, und wir müssen $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ zeigen.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann ist $c + \varepsilon$ nicht untere Schranke von M, da c größte solche. Also existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c + \varepsilon > a_{n_0}$ und es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$: $c + \varepsilon > a_{n_0} \overset{\text{Vor. (i)}}{\geq} a_n \geq c \geq c - \varepsilon$, also $|a_n - c| < \varepsilon$. □

Bemerkung. Bei komplexen Folgen von Monotonie zu sprechen, macht keinen Sinn!

Beispiel 4.8 (Die geometrische Folge)**.** Sei $q \in \mathbb{R}$.

Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *geometrische Folge*, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } q \in\,]1, +\infty[, \\ 1, & \text{falls } q = 1, \\ 0, & \text{falls } q \in\,]-1, 1[. \end{cases}$$

Für $q \in\,]-\infty, -1]$ konvergiert $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in $\widehat{\mathbb{R}}$.

Beweis. 1. Fall: $q \in]1, +\infty[$. Dann ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, also gilt nach Teil (ii) des letzten Hauptsatzes

$$\lim_{n\to\infty} q^n = c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

wobei $c := \sup\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\} \geq q^0 = 1 > 0$.

Zu zeigen ist: $c = +\infty$. Angenommen $c \neq +\infty$, also $c \in \mathbb{R}_+$.

$(q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, also gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} q^n = c.$$

Es gilt aber auch

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = q \lim_{n\to\infty} q^n = qc,$$

und somit folgt $c = qc$. Wegen $c > 0$ bedeutet dies $q = 1$ im Widerspruch zu $q \in]1, +\infty[$.

2. Fall: $q = 1$. Trivial.

3.1. Fall: $q \in]0, 1[$. Dann ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt, also gilt nach Teil (i) des letzten Hauptsatzes

$$\lim_{n\to\infty} q^n = c \in \mathbb{R},$$

wobei $c := \inf\{q^n \mid n \in \mathbb{N}\} \geq 0$.

Wie im 1. Fall gilt $c = qc$, also wegen $q \neq 1 : c = 0$.

3.2. Fall: $q = 0$. Trivial.

3.3. Fall: $q \in]-1, 0[$. Nach 3.1. Fall ist $(|q^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Aus der Definition der Konvergenz gegen null folgt dann sofort, daß auch $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

4. Fall: $q = -1$. Wegen $\lim_{n\to\infty} |(-1)^n| = 1$ (nach 2. Fall) kann $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ höchstens in $\mathbb{R}$ konvergieren. Angenommen $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $c \in \mathbb{R}$. Dann existiert zu $\varepsilon := 1 \in \mathbb{R}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt $|(-1)^{2n} - c| < 1$ und $|(-1)^{2n+1} - c| < 1$, d.h. $|1 - c| < 1$ und $|1 + c| = |-1 - c| < 1$. Nun folgt

$$2 = |1 + 1| \leq |1 - c| + |1 + c| < 1 + 1 = 2,$$

Widerspruch!

5. Fall: $q \in]-\infty, -1[$. Wegen des 1. Falles kann $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ höchsten gegen $\pm\infty$ konvergieren. Wegen $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, q^{2n} > 0 \wedge q^{2n+1} < 0$ kann dies aber nach Definition der Konvergenz gegen $\pm\infty$ nicht sein. □

Satz 4.9. *Jede Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine monotone (d.h. monoton fallende oder wachsende) Teilfolge.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir betrachten die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall_{k\in\mathbb{N}_+}\, a_{n+k} \geq a_n\}.$$

1. Fall: M ist abzählber. Definiere dann

$$i_0 := \min M \quad \text{und} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}\, i_{n+1} := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > i_n \wedge \forall_{k\in\mathbb{N}_+}\, a_{n+k} \geq a_n\}.$$

Beachte, daß $\{n \in \mathbb{N} \mid n > i_n \wedge \forall_{k \in \mathbb{N}_+} a_{n+k} \geq a_n\}$ wegen der Voraussetzung des 1. Falles nicht leer ist und nach Satz 2.33 ein Minimum besitzt. Dann ist $(a_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Fall: M ist endlich. Nach Satz 2.60 existiert dann $n_0 := \max M + 1 \in \mathbb{N}$, und es gilt $\forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} \exists_{k \in \mathbb{N}_+} a_{n+k} < a_n$. Setze

$$i_0 := n_0 \quad \text{und} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \, i_{n+1} := i_n + \underbrace{\min \underbrace{\{k \in \mathbb{N}_+ \mid a_{i_n+k} < a_{i_n}\}}_{\neq \emptyset}}_{\text{existiert nach 2.33}}.$$

Dann ist $(a_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende (d.h. genau $\forall_{n \in \mathbb{N}} \, a_{i_{n+1}} < a_{i_n}$) Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Definition 4.10 ($\widehat{\mathbb{C}}$, Konvergenz von Folgen in $\widehat{\mathbb{C}}$)**.**

(i) Wir setzen $\boxed{\widehat{\mathbb{C}}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Hierbei bezeichnet ∞ ein von $\pm\infty$ verschiedenes Objekt, das keine komplexe Zahl ist.

(ii) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir definieren dann

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ konvergiert gegen } \infty :\Longleftrightarrow \forall_{C \in \mathbb{R}} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} |a_n| > C,$$
$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \textit{ konvergiert in } \widehat{\mathbb{C}} :\Longleftrightarrow \exists_{c \in \widehat{\mathbb{C}}} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } c.$$

Offenbar gilt:

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent in $\widehat{\mathbb{C}}$, so existiert genau ein $c \in \widehat{\mathbb{C}}$ derart, daß $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen c konvergiert. Dieses $c \in \widehat{\mathbb{C}}$ bezeichnet man (in Verallgemeinerung von Definition 4.1 (ii)) als *Grenzwert* oder *Limes a_n für n gegen unendlich* (i.Z. $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n}$[22]).

Hauptsatz 4.11 (von Bolzano-Weierstraß)**.**

(i) Jede Folge in $\mathbb{K}$ besitzt eine in $\widehat{\mathbb{K}}$ konvergente Teilfolge.

(ii) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ besitzt eine in $\mathbb{K}$ konvergente Teilfolge.

Beweis. Wir beweisen den Satz zunächst nur für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zum Beweis im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vgl. 4.13.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Nach Satz 4.9 besitzt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge $(a_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$, welche nach Hauptsatz 4.7 gegen

$$c \in \{\inf\{a_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \sup\{a_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}\}\}$$

konvergiert. Damit ist (i) klar.

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so auch $(a_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$, und aus Hauptsatz 4.7 folgt $c \in \mathbb{R}$, also ist auch (ii) gezeigt. □

[22] In diesem Symbol ist ∞ kein eigenständiges Objekt!

Satz 4.12 (Cauchysches Konvergenzkriterium für Folgen). *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert in } \mathbb{K} \\ \Longleftrightarrow\ &\underbrace{\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{m,n\in\mathbb{N}}\left(m \geq n_0 \wedge n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon\right)}_{\textit{d.h. per definitionem } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ ist } \text{Cauchy-Folge}}. \end{aligned}$$

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach Voraussetzung gilt $c := \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{K}$, also existiert zu $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} |a_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n_0$ und $n \geq n_0$ folgt

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - c| + |c - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$" zeigen wir zunächst nur im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Wir zeigen zunächst

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt.} \tag{86}$$

[Zu $1 \in \mathbb{R}_+$ existiert nach Voraussetzung ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{m,n\in\mathbb{N}}\left(m \geq 0 \wedge n \geq 0 \Longrightarrow |a_m - a_n| < 1.\right)$$

Insbesondere gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n_0$

$$|a_m| \leq |a_m - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| \in \mathbb{R}_+,$$

und hieraus folgt offenbar (86).]

Aus (86) und dem Hauptsatz 4.11 (ii) ergibt sich die Existenz von $c \in \mathbb{R}$ und einer Teilfolge $(a_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_{i_n} = c$.

Wir haben nun zu zeigen, daß auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert.

Hierzu sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach Voraussetzung existiert zu $\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{R}_+$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{m,n\in\mathbb{N}}\left(m \geq n_1 \wedge n \geq n_1 \Longrightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{87}$$

Ferner existiert wegen $\lim_{n\to\infty} a_{i_n} = c$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\left(n \geq n_2 \Longrightarrow |a_{i_n} - c| < \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{88}$$

Setzt man nun $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ nach (87) und (88)

$$|a_n - c| \leq |a_n - a_{i_n}| + |a_{i_n} - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zum Beweis im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, vgl. 4.13. □

4.13. Wir geben an dieser Stelle die Beweisideen für Hauptsatz 4.11 (ii) und Satz 4.12 „$\Leftarrow$" im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Lemma. *Seien $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen und $t \in [0, +\infty[$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{t_n} = \sqrt{t}.$$

Beweis. 1. Fall: $t = 0$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach Voraussetzung existiert zu $\varepsilon^2 \in \mathbb{R}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n \geq n_0} \, 0 \leq t_n < \varepsilon^2$, also auch $|\sqrt{t_n} - \sqrt{0}| = \sqrt{t_n} < \varepsilon$, denn andernfalls gälte $t_n \geq \varepsilon^2$.

2. Fall: $t > 0$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach Voraussetzung existiert zu $\sqrt{t}\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n \geq n_0} |t_n - t| < \sqrt{t}\varepsilon$, also auch

$$|\sqrt{t_n} - \sqrt{t}| = \frac{|t_n - t|}{\sqrt{t_n} + \sqrt{t}} \leq \frac{|t_n - t|}{\sqrt{t}} < \frac{\sqrt{t}\varepsilon}{\sqrt{t}} = \varepsilon.$$

□

Satz 1. *Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{C}$, wenn die reellen Folgen $(\operatorname{Re} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\operatorname{Im} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\operatorname{Re} a$ bzw. $\operatorname{Im} a$ konvergieren.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a| \leq |a_n - a| = \sqrt{(\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a)^2}, \\ |\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a| \leq |a_n - a| = \sqrt{(\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a)^2}. \end{aligned} \tag{89}$$

Daher folgt aus $\lim_{n \to \infty} |a_n - a| = 0$ sofort, daß gilt

$$\lim_{n \to \infty} |\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} |\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a| = 0. \tag{90}$$

Umgekehrt folgt aus (90), daß $\lim_{n \to \infty} (\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a)^2 = 0$, also wegen des Lemmas und (89) $\lim_{n \to \infty} |a_n - a| = 0$. □

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt Hauptsatz 4.11 nun aus Satz 1 und der reellen Version von Hauptsatz 4.11. □

Satz 2. *Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn die reellen Folgen $(\operatorname{Re} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\operatorname{Im} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind.*

Beweisskizze. Schreibe in (89) „a_m" anstelle von „a" und argumentiere ähnlich wie im letzten Beweis. □

Die komplexe Version von Satz 4.12 folgt jetzt aus den Sätzen 1 und 2 sowie Satz 4.12 für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. □

Definition 4.14 (Adhärenzwert)**.** Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.

Dann heißt $c \in \widehat{\mathbb{K}}$ *Adhärenzwert von* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (oder *Häufungswert*) genau dann, wenn eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, die gegen c konvergiert.

Bemerkung. Nach Satz von Bolanzo-Weierstraß besitzt jede Folge in $\mathbb{K}$ mindestens einen Adhärenzwert.

Definition 4.15 (Limes superior und Limes inferior)**.** Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir definieren den *Limes superior von* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als

$$\boxed{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n}^{23} := \boxed{\limsup_{n\to\infty} a_n}^{23} := \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \,|\, k \in \mathbb{N} \wedge k \geq n\}}_{\text{hierbei } \lim_{n\to\infty} +\infty := +\infty} \in \widehat{\mathbb{R}}$$

und den *Limes inferior von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$\boxed{\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n}^{23} := \boxed{\liminf_{n\to\infty} a_n}^{23} := \underbrace{\lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \,|\, k \in \mathbb{N} \wedge k \geq n\}}_{\text{hierbei } \lim_{n\to\infty} -\infty := -\infty} \in \widehat{\mathbb{R}}.$$

[Der Limes superior von von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wohldefiniert, da entweder gilt $\forall_{n\in\mathbb{N}} \sup\{a_k \,|\, k \in \mathbb{N} \wedge k \geq n\} = +\infty$ oder die Folge $(\sup\{a_k \,|\, k \in \mathbb{N} \wedge k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, und $\lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \,|\, k \in \mathbb{N} \wedge k \geq n\}$ existiert nach Hauptsatz über monotone Folgen 4.7.

Die Existenz des Limes inferior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begründet man analog.]

Hauptsatz 4.16. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $c, d \in \widehat{\mathbb{R}}$. Dann gilt:*

(i) $\limsup_{n\to\infty} a_n = c \iff c$ *ist größter Adhärenzwert von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $\liminf_{n\to\infty} a_n = d \iff d$ *ist kleinster Adhärenzwert von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Wir führen nur den Beweis von (i), der von (ii) verläuft analog.

„$\Rightarrow$" 1. Fall: $c \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \sup\{a_k \,|\, k \in \mathbb{N} \wedge k \geq n\}$, also gilt $\lim_{n\to\infty} s_n = c$.

Wir definieren nun rekursiv eine Teilfolge $(a_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setze $i_0 := 0$.

Seien $i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ mit $i_0 < \ldots < i_n$ bereits konstruiert. Wegen $\lim_{k\to\infty} s_k = c$ existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} (k \geq k_0 \Longrightarrow c - \frac{1}{k+1} < s_k < c + \frac{1}{k+1}.) \tag{91}$$

Sei dann $k_1 := \max\{k_0, i_n + 1\}$. Aus $s_n := \sup\{a_k \,|\, k \in \mathbb{N} \wedge k \geq n\}$ und (91) folgt die Existenz von $i_{n+1} \in \mathbb{N}$ mit $i_{n+1} \geq k_1$ und

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} (k \geq k_1 \Longrightarrow c - \frac{1}{k+1} < a_{i_{n+1}} < c + \frac{1}{k+1}.)$$

Per constructionen gilt $\lim_{n\to\infty} a_{i_n} = c$, d.h. c ist ein Adhärenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zu zeigen bleibt, daß c der größte Adhärenzwert ist.

Angenommen es existieren $\tilde{c} \in \widehat{\mathbb{R}}$ mit $\tilde{c} > c$ und eine Teilfolge $(a_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_{j_n} = \tilde{c}$.

Der Fall $\tilde{c} = +\infty$ kann nicht auftreten, da sonst $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ gelten müßte, im Widerspruch zur Voraussetzung des ersten Falles. Somit gilt $\tilde{c} \in \mathbb{R}$.

Wegen $\lim_{n\to\infty} a_{j_n} = \tilde{c} > \frac{c+\tilde{c}}{2}$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} (n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{c+\tilde{c}}{2} < a_{j_n}).$$

[23] In diesem Symbol ist ∞ kein eigenständiges Objekt!

Hieraus folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\} \geq \frac{c + \tilde{c}}{2} > c,$$

im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} s_n = c$.

2. Fall: $c = +\infty$. Dann gilt $s_n = +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert offenbar selbst gegen $+\infty$ und somit ist $+\infty$ der einzige Adhärenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Fall: $c = -\infty$. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $i_n \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq i_n$ gilt $s_n \leq -n$. Dann ist $(a_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_{i_n} = -\infty$.

„$\Leftarrow$" Sei also $c \in \widehat{\mathbb{R}}$ der größte Adhärenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und angenommen $\limsup_{n\to\infty} a_n \neq c$. Dann folgt aus der bereits bewiesenen Richtung „$\Rightarrow$", daß gilt $c \neq c$, Widerspruch! □

Hauptsatz 4.17. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert in } \widehat{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n,$$

und im Falle der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\widehat{\mathbb{R}}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $c \in \widehat{\mathbb{R}}$, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen c, und es gibt nur diesen einen Adhärenzwert. Der letzte Hauptsatz 4.16 ergibt dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$, so folgt aus

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \inf\{a_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \geq n\} \leq a_n \leq \sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge k \geq n\},$$

daß gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$. □

Konvergenz von Reihen

4.18 (Unendliche Reihen)**.** Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.

(i) **Definition.** Die *unendliche Reihe* $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}$[24] ist per definitionem gleich der Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$ der *Partialsummen* $\sum_{k=0}^{n} a_k$. Die $a_k, k \in \mathbb{N}$, heißen *Glieder* und die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Gliederfolge der Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

[24]Streng genommen müßten wir eigentlich $+\infty$ anstelle von ∞ schreiben. Wir definieren aber nur das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und berufen uns hierbei nicht etwa auf das bereits eingeführte ∞. Insofern können keine Verwechslungen auftreten.

(ii) Im Falle der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\widehat{\mathbb{K}}$ bezeichnet man den *Grenzwert* oder *Limes der Reihe*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \in \widehat{\mathbb{K}}$$

ebenfalls mit $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}$, (also mit demselben Symbol wie die Reihe.)

Man muß daher jeweils aus dem Kontext ersehen, ob das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe (d.i. eine Partialsummenfolge) oder den Grenzwert in $\widehat{\mathbb{K}}$ einer konvergenten Reihe bezeichnet.

In der folgenden Aussage tritt das Symbol z.B. in beiden Bedeutungen auf: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert gegen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beispiel 4.19 (Die geometrische Reihe)**.** Sei $q \in\,]-1, +\infty[$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ heißt *geometrische Reihe*, und es gilt

(i) $\forall_{q\in]-1,1[} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$,

(ii) $\forall_{q\in[1,+\infty[} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = +\infty$.

Beweis. Man zeigt durch vollständige Induktion, daß für jedes $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{92}$$

Ist $|q| < 1$, so ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge (siehe Beispiel 4.8), also gilt auch $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$. Hieraus und aus (92) folgt (i).

Ist $q \in [1, +\infty[$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} q^k \geq n+1$, und somit folgt (ii) wegen $\lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty$. □

Bemerkung (Achilles und die Schildkröte)**.** Die Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für $|q| < 1$ beinhaltet die Lösung eines der Paradoxa des Zenon von Elea (um 490 v. Chr. – 430 v. Chr.), der nach Aristoteles' (384 v. Chr. – 322 v. Chr.) *Physik* – hier zitiert nach [3, S. 178] – überlegt hat, „daß das langsamste Wesen in seinem Lauf niemals von dem schnellsten <Achilles> eingeholt wird. Denn der Verfolger muß immer erst zu dem Punkt gelangen, von dem das fliehende Wesen <die Schildkröte> schon aufgebrochen ist, so daß das langsamere immer einen gewissen Vorsprung haben muß.“

Nehmen wir zur Veranschauung an, daß die Schildkröte 100 Fuß Vorsprung auf Achilles hat, und daß Achilles 10-mal so schnell läuft wie die Schildkröte. Hat Achilles den 100 Fuß-Vorsprung durchlaufen, so hat die Schildkröte ihrerseits 10

Fuß zurückgelegt; hat er auch diese Strecke durchlaufen, so ist die Schildkröte bereits einen Fuß weiter; hat Achilles auch diesen Weg durchlaufen, so ist die Schildkröte bereits $\frac{1}{10}$ Fuß vorangekommen usw.

Kurzum: Achilles kann die Schildkröte nicht einholen!?

Zenon hat recht: An keiner der angesprochenen, unendlich vielen Stellen hat Achilles die Schildkröte erreicht. Aber er setzt voraus, daß die Summe der unendlich vielen Stellenabschnitte auch eine unendliche Strecke ergibt, für deren Zurücklegung Achilles dann auch eine unendliche Zeitspanne benötigt, und dies ist eben nicht der Fall.

Die von Achilles zurückzulegende Strecke, um die Schildkröte einzuholen, beträgt $100 + 10 + \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{10})^k$ Fuß $= 110 + \frac{1}{1-\frac{1}{10}}$ Fuß $= 111 + \frac{1}{9}$ Fuß.

Die von Zenon angesprochenen unendlich vielen Zeitpunkte, zu denen Achilles (noch) hinter der Schildkröte zurückliegt, liegen alle vor dem *endlichen* Zeitpunkt, an dem Achilles und die Schildkröte sich treffen.[25]

Satz 4.20. *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert in } \mathbb{K} \Longrightarrow (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

Die Rückrichtung ist i.a. falsch, wie das Beispiel der harmonischen Reihe (s.u.) zeigt.

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $b_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Nach Voraussetzung existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = c$, also auch (da $(b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$) $\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = c$ und folglich $\lim_{n\to\infty} \underbrace{(b_{n+1} - b_n)}_{=a_{n+1}} = 0$. Mit $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. ☐

Satz 4.21. *Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$, $c, d \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = c$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = d$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt*

[25] Der Autor möchte an der Stelle auf zwei Stellen aus U. Eckhardts Vortrag [6] hinweisen, in dem er neben der mathematischen Diskussion des o.g. Paradoxons u.a folgende beiden Aspekte erwähnt:

„Meiner [also Eckhardts] Tochter verdanke ich eine hübsche ‚biologische' Widerlegung des Achilles-Paradoxons. Sie besitzt eine Schildkröte und ist daher mit der Materie aus eigener Anschauung vertraut. Natürlich wird die Schildkröte Achilles überholen. Bekanntlich erreichen nämlich Schildkröten ein sehr hohes Alter, das heißt Achilles würde irgendwann an Entkräftung oder Altersschwäche sterben, während sich die Schildkröte dann noch in der Blüte ihrer Jugend befindet und erst richtig losläuft."

„Ein Physiker könnte etwa sagen, daß Achilles sich der Schildkröte nach Durchmessung hinreichend vieler Teilstrecken bis auf Bruchteile von Bruchteilen eines Atomdurchmessers genähert habe, und spätestens dann sei nach der Heisenbergschen Unschärferelation die Frage, ob er sie eingeholt habe, ohnehin keine korrekt gestellte physikalische Frage mehr.

Eine physikalische Widerlegung, die bis in die Antike zurückreicht, und die letztlich auch von Aristoteles angewandt wurde, ist die Leugnung der unbegrenzten Teilbarkeit von Raum und Zeit. Nach neueren Erkenntnissen der Physik, der Stringtheorie, hat es keinen Sinn, über Zeitintervalle zu sprechen, die kleiner sind als die kleinstmögliche Zeiteinheit, die *Planck-Zeit* von 10^{-43}s und ebenso gibt es eine kleinste physikalisch sinnvolle Länge, die *Planck-Länge* von 10^{-33}cm. Man bezeichnet diese Ansicht als die *finite-nature-theory*. Sie besagt, daß unsere Welt im Kleinen endlich ist."

(i) $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k) = c \pm d$,

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \lambda c$.

Beweis. Aus $\forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \pm \sum_{k=0}^{n} b_k$ und $\sum_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k$ folgt der Satz direkt aus dem entsprechenden Resultat für Folgen (siehe Satz 4.4 (i), (ii).) $\square$

Satz 4.22. *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\forall_{k\in\mathbb{N}} a_k \geq 0$ bzw. $\forall_{k\in\mathbb{N}} a_k \leq 0$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in $\widehat{\mathbb{R}}$ konvergent mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sup\{\sum_{k=0}^{n} a_k \,|\, n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{bzw.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \inf\{\sum_{k=0}^{n} a_k \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis. Da $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst bzw. fällt, folgt der Satz aus Hauptsatz 4.7 über monotone Folgen. $\square$

Satz 4.23 (Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen)**.** *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ konvergiert in } \mathbb{K} \iff \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n,m\in\mathbb{N}} \left(m > n \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon.\right)$$

Beweis. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt $\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$. Daher ergibt sich die Behauptung aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Folgen 4.12. $\square$

Definition 4.24. Sind $r \in \mathbb{Z}$ und $(a_k)_{k\geq r} = (a_{k+r})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, so bezeichnen wir $\sum_{k=0}^{\infty} a_{r+k}$ auch mit $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$.

Wenn diese Reihe in $\widehat{\mathbb{K}}$ konvergiert, dann bezeichnen wir ihren Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{r+k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=r}^{n+r} a_k$ ebenfalls mit $\sum_{k=r}^{\infty} a_k$.

Beispiel 4.25 (Die harmonische Reihe)**.** Die *harmonische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ konvergiert gegen $+\infty$.

Beweis. Nach Satz 4.22 ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ konvergent in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zu zeigen ist, daß die Reihe nicht in $\mathbb{R}$ konvergiert, und d.h. nach Satz 4.23 genau

$$\exists_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \forall_{n_0\in\mathbb{N}} \exists_{m,n\in\mathbb{N}} \left(m > n \geq n_0 \wedge \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} > \varepsilon\right).$$

Beweis hiervon: Seien $\varepsilon := \frac{1}{2}$ und $n_0 \in \mathbb{N}_+$ beliebig, $m := 2n_0, n := n_0$. Dann gilt $m > n \geq n_0$ und

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} = \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{2n_0} \geq n_0 \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Satz 4.26 (Vergleichskriterium).
Vor.: *Seien* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *zwei Folgen reeller Zahlen* $\forall_{k\in\mathbb{N}}\, b_k \le a_k$. *Dann heißt die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine* Majorante *von* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *und zugleich* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *eine* Minorante *von* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.
Beh.:

(i) (Majorantenkriterium)

$$(\forall_{k\in\mathbb{N}}\, b_k \ge 0) \wedge \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent in } \mathbb{R}\right)$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent in } \mathbb{R} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k \le \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

(ii) (Minorantenkriterium)

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergiert gegen } \infty \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergiert gegen } \infty.$$

Beweis. (i) folgt aus Hauptsatz 4.7 über monotone Folgen, da $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$ beschränkte monoton wachsende Folge ist.
(ii) folgt aus Satz 4.6. □

Beispiel 4.27. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ ist konvergent in $\mathbb{R}$.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge 2$ gilt $0 \le \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, also auch für $n \ge 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\underset{n\to+\infty}{\to}} 1,$$

und aus Satz 4.26 (i) folgt, daß $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ gegen eine reelle Zahl ≤ 1 konvergiert. Daher ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent gegen eine reelle Zahl ≤ 2. □

Bemerkung. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, wobei $\pi = 3,141592\ldots$ die *Kreiszahl* sei.

Definition 4.28. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent* in $\mathbb{K}$ genau dann, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ in $\mathbb{K}$ konvergiert.

Satz 4.29. *Seien* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $\mathbb{K}$ *derart, daß* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut konvergieren. Ferner sei* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Dann gilt*

(i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ *ist absolut konvergent,*

(ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda a_k$ *ist absolut konvergent,*

(iii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist konvergent.*

Beweis. Zu (i): Aus der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ ergibt sich nach Satz 4.21 (i) die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + |b_k|$. Hieraus folgt mit dem Vergleichskriterium 4.26 (i) wegen $\forall_{k\in\mathbb{N}}\, 0 \le |a_k \pm b_k| \le |a_k| + |b_k|$ die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k \pm b_k|$.

(ii) ist klar, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

Zu (iii): Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium 4.23 ist zu zeigen:

$$\Big(\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n,m\in\mathbb{N}} \left(m > n \ge n_0 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon \right)\Big)$$
$$\Longrightarrow \quad \Big(\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n,m\in\mathbb{N}} \left(m > n \ge n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon \right)\Big).$$

Dies ist aber klar, da stets $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \le \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$ gilt. □

Bemerkung. Aus der Konvergenz einer Reihe folgt i.a. nicht die absolute Konvergenz, vgl. z.B. unten die alternierende harmonische Reihe.

Satz 4.30 (Vergleichs- oder Majorantenkriterium für absolute Konvergenz)**.**
Vor.: *Seien* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}$ *und* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$*. Es gelte ferner* $\forall_{k\in\mathbb{N}} |b_k| \le a_k$*, also insbesondere* $a_k \ge 0$*.*
Beh.: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent in* $\mathbb{R} \Longrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut konvergent in* $\mathbb{R}$*.*

Beweis. Wir wenden das Cauchysche Konvergenzkriterium 4.23 auf die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ an.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, existiert nach 4.23 (angewandt auf $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$) eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n \ge n_0$ gilt:

$$\sum_{k=n+1}^{m} \underbrace{a_k}_{\ge 0} = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Wegen

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} b_k \right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |b_k| \le \sum_{k=n+1}^{m} a_k$$

folgt hieraus der Satz. □

Satz 4.31 (Quotientenkriterium)**.** *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$ *mit*

$$\exists_{C\in]0,1[} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}} \Big(k \ge k_0 \Longrightarrow \left(a_k \ne 0 \wedge \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \le C \right)\Big). \tag{93}$$

Dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

Warnung. Der Satz gilt nicht, wenn (93) durch

$$\exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}} \Big(k \ge k_0 \Longrightarrow \left(a_k \ne 0 \wedge \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \right)\Big)$$

ersetzt wird, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ gilt $|a_{k+1}| \leq C|a_k|$. Hieraus folgt induktiv

$$\forall_{k \in \mathbb{N}}\, 0 \leq |a_{k_0+k}| \leq |a_{k_0}| C^k. \tag{94}$$

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} C^k$ ist nach Beispiel 4.19 (wegen $|C| < 1$) konvergent in $\mathbb{R}$, also ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k_0}| C^k$ konvergent in $\mathbb{R}$. Nach dem Vergleichskriterium 4.30 ist wegen (94) auch $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k_0+k}|$ konvergent in $\mathbb{R}$ und somit offenbar auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$. □

Zusatz. *Gilt* $\exists_{k_0 \in \mathbb{N}} \forall_{k \in \mathbb{N}} \left(k \geq k_0 \Rightarrow \left(a_k \neq 0 \wedge \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1\right)\right)$ *anstelle von (93), so ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *nicht in* $\mathbb{K}$ *konvergent, da die Gliederfolge dann keine Nullfolge sein kann.*

Bemerkung. Gilt $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele, so ist (93) äquivalent zu $\limsup_{k \to \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, und des weiteren ist $\liminf_{k \to \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ äquivalent zu $\exists_{C \in]1,+\infty[} \exists_{k_0 \in \mathbb{N}} \forall_{k \in \mathbb{N}} \left(k \geq k_0 \Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > C\right)$.

Beispiel 4.32 (Die Funktionen exp, sin und cos)**.** Für jedes $a \in \mathbb{C}$ sind die folgenden Reihen absolut konvergent:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{2k}}{(2k)!}.$$

[Für $a = 0$ ist dies trivial, sei also $a \neq 0$. Nun wenden wir das Quotientenkriterium an:

$$\left|\frac{\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{a^k}{k!}}\right| = \frac{|a|}{k+1} \xrightarrow{k \to +\infty} 0, \text{ also } \leq \frac{1}{2} \text{ für } k \geq k_0,\ k_0 \text{ groß},$$

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1} a^{2k+3}}{(2k+3)!}}{\frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)!}}\right| = \frac{|a|^2}{(2k+2)(2k+3)} \xrightarrow{k \to +\infty} 0, \text{ also } \leq \frac{1}{2} \text{ für } k \geq k_0,\ k_0 \text{ groß},$$

$$\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1} a^{2k+2}}{(2k+2)!}}{\frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}}\right| = \frac{|a|^2}{(2k+1)(2k+2)} \xrightarrow{k \to +\infty} 0, \text{ also } \leq \frac{1}{2} \text{ für } k \geq k_0,\ k_0 \text{ groß.]}$$

Daher existieren eindeutig bestimmte Funktionen $\exp, \sin, \cos \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\forall_{a \in \mathbb{C}}\ \exp(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!},\ \sin(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \cos(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{2k}}{(2k)!}.$$

exp heißt *Exponentialfunktion*, sin heißt *Sinus* und cos heißt *Cosinus*.

Satz 4.33 (Wurzelkriterium)**.** *Sei* $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$ *mit*

$$\exists_{C \in]0,1[} \exists_{k_0 \in \mathbb{N}} \forall_{k \in \mathbb{N}} \left(k \geq k_0 \Longrightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \leq C\right). \tag{95}$$

Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

Warnung. Der Satz gilt nicht, wenn (95) durch

$$\exists_{k_0 \in \mathbb{N}} \forall_{k \in \mathbb{N}} \left(k \geq k_0 \Longrightarrow \sqrt[k]{|a_k|} < 1\right)$$

ersetzt wird.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $\forall_{k \in \mathbb{N}, k \geq k_0} |a_k| \leq C^k \in]0,1[$, also folgt aus der Konvergenz der geometrischen Reihe und dem Vergleichskrierium 4.30 die Konvergenz von $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$ und damit auch die Behauptung. □

Zusatz. *Gilt* $\forall_{k_0 \in \mathbb{N}} \exists_{k \in \mathbb{N}} \left(k \geq k_0 \wedge \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1\right)$ *anstelle von (95), so ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *nicht in* $\mathbb{K}$ *konvergent, da die Gliederfolge dann keine Nullfolge sein kann. Beachte, daß* $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \Leftrightarrow |a_k| \geq 1$ *gilt.*

Bemerkung. (95) ist äquivalent zu $\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, und entsprechend ist $\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ äquivalent zu $\exists_{C \in]1, +\infty[} \forall_{k_0 \in \mathbb{N}} \exists_{k \in \mathbb{N}} \left(k \geq k_0 \wedge \sqrt[k]{|a_k|} > C\right)$.

Definition 4.34 (Teilreihe, alternierende Reihe)**.** Seien $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt *Teilreihe von* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist.

(ii) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Dann heißt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *alternierend* genau dann, wenn gilt $\forall_{k \in \mathbb{N}} a_k a_{k+1} < 0$.

Beispiel. Die *alternierende harmonische Reihe* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$ ist alternierend.

Satz 4.35 (Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen)**.** *Sei* $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen mit folgenden Eigenschaften*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist alternierend,} \tag{96}$$

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} |a_{k+1}| \leq |a_k|, \tag{97}$$

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0. \tag{98}$$

Dann ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent (i.a. nicht absolut).*

Beweis. Wegen (96) dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} a_{2k} > 0 \wedge a_{2k+1} < 0, \tag{99}$$

(ansonsten gehe man von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zu $(-a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ über.)

Sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Partialsummenfolge der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, d.h. $\forall_{n \in \mathbb{N}} s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Wir behaupten:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} s_1 \leq \ldots \leq s_{2n+1} \leq s_{2n+3} < s_{2n+2} \leq s_{2n} \leq \ldots \leq s_0. \tag{100}$$

[Zu (100):

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = a_{2n+2} + a_{2n+3} \overset{(99)}{=} |a_{2n+2}| - |a_{2n+3}| \overset{(97)}{\geq} 0,$$
$$s_{2n+2} - s_{2n+3} = a_{2n+3} \overset{(99)}{<} 0,$$
$$s_{2n} - s_{2n+2} = -a_{2n+1} - a_{2n+2} \overset{(99)}{=} |a_{2n+1}| - |a_{2n+2}| \overset{(97)}{\geq} 0. \;]$$

Wegen (100) und dem Hauptsatz über monotone Folgen 4.7 existieren $c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = c \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n} = d. \tag{101}$$

Nun folgt

$$c - d = \lim_{n\to\infty} \underbrace{s_{2n+1} - s_{2n}}_{=a_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \overset{(98)}{=} 0, \tag{102}$$

also gilt $c = d$.

Aus (101) und (102) folgt offenbar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = c$. □

Beispiel 4.36 (Die alternierende harmonische Reihe)**.** Die alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$ erfüllt die Voraussetzungen von 4.35, ist also konvergent in $\mathbb{R}$.

Wir werden in 7.3 (ii) sehen, daß $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln(2)$ gilt.

Diese Reihe ist aber nicht absolut konvergent, vgl. 4.25.

Wir haben in den Kapiteln 2 und 3 gesehen, daß für endliche Summen – sprich Reihen – das allgemeine Kommutativgesetz gilt, vgl. 2.47 (ii) Satz 2. Es ist nun natürlich, zu fragen, inwiefern unendliche Reihen kommutativ sind. Der nächste Satz zeigt, daß sich absolut konvergente Reihen beliebig umordnen lassen, ohne daß sich das Ergebnis verändert. Für nicht absolut konvergente Reihen hingegen ist dies nicht der Fall. Der *Riemannsche*[26] *Umordnungssatz* besagt sogar, daß im Reellen das stärkste nur denkbare Gegenteil der Fall ist.

Hauptsatz 4.37. *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ derart, daß $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{K}$ konvergiert. Dann gilt:*

(i) Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, so ist für alle bijektiven Abbildungen $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i(k)}$ absolut konvergent, und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

(ii) (Riemannscher Umordnungssatz)

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergiert, so existiert im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu allen Elementen $c, d \in \widehat{\mathbb{R}}$ mit $c \leq d$ eine bijektive Abbildung $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{i(k)} = c$ und $\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{i(k)} = d$.

[26]nach Bernhard Riemann (1826–1866)

Beweis. Zu (i): Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und bezeichne $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige bijektive Abbildung. Wir zeigen zunächst, daß gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_{i(k)}\right) = 0. \tag{103}$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, existiert nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium 4.23 eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt

$$\forall_{m\in\mathbb{N}, m>n_0} \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \varepsilon. \tag{104}$$

Wähle nun $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 > n_0$ mit

$$\{0,\dots,n_0\} \subset \{i(0),\dots i(n_1)\}. \tag{105}$$

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq n_1 > n_0$. Wegen (105) sind dann $a_0,\dots,a_{n_0}$ unter den Gliedern sowohl von $\sum_{k=0}^{n} a_k$ als auch von $\sum_{k=0}^{n} a_{i(k)}$, also enthält $\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_{i(k)}$ diese Glieder nicht, und aus (104) folgt für geeignetes $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n_0$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_{i(k)}\right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \varepsilon. \tag{106}$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ in (106) folgt (103).

(103) zeigt, daß $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i(k)}$ gegen denselben Grenzwert wie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Nun ersetzen wir in (103) und dem Beweis von (103) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ durch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i(k)}$ durch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{i(k)}|$. Dies zeigt dann, daß $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i(k)}$ absolut konvergiert, und (i) ist bewiesen.

Zu (ii): Wir setzen für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$a_k^+ := \max\{a_k, 0\} \geq 0 \quad \text{und} \quad a_k^- := \max\{-a_k, 0\} \geq 0,$$

also (da $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ also Gliederfolge einer konvergenten Reihe eine Nullfolge ist)

$$\lim_{k\to\infty} a_k^+ = \lim_{k\to\infty} a_k^- = 0 \tag{107}$$

sowie

$$a_k = a_k^+ - a_k^- \quad \text{und} \quad |a_k| = a_k^+ + a_k^-. \tag{108}$$

Es folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ = +\infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- = +\infty. \tag{109}$$

[Denn wäre eine der Reihen in (109) in $\mathbb{R}$ konvergent, so folgte aus der Konvergenz der ursprünglichen Reihe und (108), daß auch die andere in $\mathbb{R}$ konvergierte, also auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß die ursprüngliche Reihe nicht absolut konvergiert.]

Seien nun $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Teilfolgen von $(a_k^+)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(a_k^-)_{k\in\mathbb{N}}$, die man erhält, indem man Folgenglieder, die gleich null sind, ausläßt. $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(-q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist also genau die Teilfolge aller positiven bzw. negativen Folgenglieder von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dann gilt nach (107)

$$\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty} q_k = 0 \tag{110}$$

und nach (109)

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = +\infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k = +\infty. \tag{111}$$

Seien nun $c, d \in \widehat{\mathbb{R}}$ mit $c \le d$ beliebig.

1. Fall: $c, d \in \mathbb{R}$. Setze $n_0 := m_0 = 0$. Nach (111) gibt es ein kleinstes $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 > n_0$,

$$s_0 := \sum_{k=n_0}^{n_1-1} p_k > c. \tag{112}$$

Sodann gibt es erneut nach (111) ein kleinstes $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 > m_0$,

$$t_0 := \sum_{k=n_0}^{n_1-1} p_k - \sum_{k=m_0}^{m_1-1} q_k < d \tag{113}$$

und nun wieder einen kleinsten Index $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$,

$$s_1 := \sum_{k=n_0}^{n_1-1} p_k - \sum_{k=m_0}^{m_1-1} q_k + \sum_{k=n_1}^{n_2-1} p_k > c. \tag{114}$$

Rekusiv erhält man eine Umordnung der Ausgangsreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} p_k - \sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1} q_k \right) \tag{115}$$

mit $\forall_{i\in\mathbb{N}}\, n_i < n_{i+1} \in \mathbb{N}$, $m_i < m_{i+1} \in \mathbb{N}$,

$$\forall_{j\in\mathbb{N}}\, s_j := \sum_{i=0}^{j-1} \left(\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} p_k - \sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1} q_k \right) + \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} p_k > c, \tag{116}$$

$$\forall_{j\in\mathbb{N}}\, t_j := \sum_{i=0}^{j} \left(\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} p_k - \sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1} q_k \right) < d \tag{117}$$

und

$$\forall_{j\in\mathbb{N}}\, 0 < s_j - c \le p_{n_{j+1}-1}, \tag{118}$$

$$\forall_{j\in\mathbb{N}}\, 0 < d - t_j \le q_{m_{j+1}-1}. \tag{119}$$

(118) bzw. (119) kann dadurch gewährleistet werden, daß n_{j+1} bzw. m_{j+1} minimal mit (116) bzw. (117) gewählt werden.

Wegen (110), (118) und (119) folgt, daß (115) c als Limes superior und d als Limes inferior besitzt.

2. Fall: $c = d = +\infty$. Wähle rekursiv eine Folge $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $n_0 := 0$ sowie $\forall_{i\in\mathbb{N}}\, n_i < n_{i+1}$ und

$$\forall_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} p_k > i + \sum_{k=0}^{i} q_k. \tag{120}$$

Dies ist wegen (111) möglich. Dann konvergiert

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\Big(\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} p_k \Big) - q_i \right)$$

gegen $+\infty$, denn für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt nach (120)

$$\sum_{i=0}^{j} \left(\Big(\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} p_k \Big) - q_i \right) = \sum_{k=0}^{n_{j+1}-1} p_k - \sum_{k=0}^{j} q_k > j.$$

3. Fall: $c = +\infty, d \in \mathbb{R}$. Verfolge den Beweis des 1. Falles wörtlich. Ersetze jedoch „c" in (112) durch „1", in (114) durch „2" und in (116) sowie (118) durch „$j+1$".

4. Fall: $c = +\infty, d = -\infty$. Analog zu den Modifikationen beim Übergang vom 1. Fall zum 3. Fall verändert man den 3. Fall.

5. Fall: $c \in \mathbb{R}, d = -\infty$. Analog zum 3. Fall.

6. Fall: $c = d = -\infty$. Analog zum 2. Fall. □

Bemerkung. Ernst Steinitz (1871–1928) hat gezeigt, daß ein komplexes Analogon zum Riemannschen Umordnungssatz gilt:

Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und bezeichnet

$$L := \{a \in \mathbb{C} \mid \exists i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijektiv} : a = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i(k)}\}$$

den sog. *Limesvorrat* von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so tritt stets genau einer der folgenden vier Fälle ein:

$L = \varnothing$.

L ist ein Punkt.

L ist eine Gerade in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C} \overset{\text{als Menge}}{=} \mathbb{R}^2$.

$L = \mathbb{C}$.

Satz 4.38. *Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$ derart, daß $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergieren.*

Dann ist auch ihr Cauchy-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$ *absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right). \tag{121}$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ folgt dann aus dem Majorantenkriterium 4.30, da für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{m} |c_n| \le \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}| \le \left(\sum_{k=0}^{m} |a_k| \right) \left(\sum_{j=0}^{n} |b_j| \right).$$

Zu (121): Nach Satz 4.4 (ii) gilt

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right),$$

also ist zu zeigen

$$\lim_{m\to\infty}\left(\left(\sum_{i=0}^{m} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right) - \sum_{n=0}^{m} c_n\right) = 0.$$

Zum Nachweis hiervon sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Als Produkt zweier konvergenter Reihen ist die Reihe $\sum_{i,j=0}^{\infty} |a_i b_j|$ ebenfalls konvergent – beachte, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i,j=0}^{m} |a_i b_j| = \left(\sum_{i=0}^{m} |a_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{m} |a_i|\right)$ gilt. Daher folgt aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium 4.23 die Existenz einer Zahl $m_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt

$$\forall_{m\in\mathbb{N}}\,(m > m_0 \Longrightarrow \sum_{i,j=m_0+1}^{m} |a_i b_j| < \varepsilon),$$

und somit gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 2m_0$

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\sum_{i=0}^{m} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right) - \sum_{n=0}^{m} c_n\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j - \sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \le \sum_{\substack{i,j=0\\ i+j>m}}^{m} |a_i b_i| \le \sum_{\substack{i,j=0\\ i>m_0 \vee j>m_0}}^{m} |a_i b_j| \\
&\le \sum_{i,j=m_0+1}^{m} |a_i b_j| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

g-adische Entwicklung der reellen Zahlen

Definition 4.39 (g-adische Darstellung)**.** Sei $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$.

Eine *g-adische Darstellung einer reellen Zahl a* ist gegeben durch eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{Z},k\geq -r}$, wobei $r \in \mathbb{N}$ ist, mit $\forall_{k\in\mathbb{Z},k\geq -r}\, a_k \in \{0,\dots,g-1\}$ und

$$a = \pm \sum_{k=-r}^{\infty} a_k g^{-k}. \tag{122}$$

Wir schreiben dann $a = \pm\left(a_{-r}a_{-r+1}\dots a_1 a_0, a_{-1}a_{-2}\dots\right)_g$ und nennen g die *Basiszahl* sowie $0,\dots,g-1$ die *g-adische Ziffern* der Darstellung von a.

Im Falle $g = 10$ schreiben wir den Index g i.a. nicht.

Bemerkung. Die Reihe in (122) konvergiert wegen

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k}\right| \leq (g-1)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{g}} - 1\right) = 1.$$

$\sum_{k=1}^{\infty}(g-1)g^{-k} = (g-1)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{g}} - 1\right) = 1$ zeigt, daß die Darstellung in (122) nicht eindeutig ist.

Beispiel. Wir rechnen in der heutigen Zivilisation üblicherweise dekadisch, d.h. zur Basis zehn, weil wir zehn Finger haben. Mit 8306 bezeichnen wir die reelle Zahl $8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^0$.

Für technische Anwendungen hingegen hat sich das Dualsystem – d.h. dyadisch oder zur Basis zwei – als praktisch erwiesen, da man hier Zahlen mit den zwei Zuständen eines elektrischen Stromkreises darstellen kann. Es ist z.B. $(1000)_2 = 1 \cdot 2^3 = (8)_{10}$.

Das Duodezimalsystem hat zwölf als Basis. Wir finden es in der Rechnung mit Dutzend und Gros und im angelsächsischen Maßsystem – z.B. sind zwölf Pence gleich einem Shilling.

Die Maya rechneten vigesimal, d.h. zur Basis 20, weil wir zehn Finger und zehn Zehen haben.

Beim Kompaß wird der Kreis in 360 Grad eingeteilt, ein Grad in 60 Winkelminuten, diese weiter in 60 Winkelsekunden, welches ein Relikt des schon von den Babyloniern verwendeten Systems zur Basis 60 ist.

Hauptsatz 4.40. *Sei $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$. Dann besitzt jedes $a \in \mathbb{R}$ eine g-adische Darstellung (122), und diese ist eindeutig, wenn man $\forall_{k_0 \in \mathbb{N}} \exists_{k \in \mathbb{N}, k \geq k_0}\, a_k \neq g-1$ fordert.*

Zusatz. *Sind $\sum_{k=-r}^{\infty} a_k g^{-k} = \sum_{k=-\tilde{r}}^{\infty} \tilde{a}_k g^{-k}$ zwei g-adische Darstellungen derselben reellen Zahl, so können wir $r = \tilde{r}$ annehmen (setze die fehlenden Koeffizienten null), und es folgt die Existenz von $k_0 \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\forall_{k \in \mathbb{Z}, -r \leq k \leq k_0}\, a_k = \tilde{a}_k,\ \ a_{k_0} = \tilde{a}_{k_0} + 1,\ \ \forall_{k \in \mathbb{Z}, k > k_0} \left(a_k = 0 \wedge \tilde{a}_k = g-1\right)$$

oder dieselbe Aussage mit a_k, $\tilde{a}_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}, k \geq -r$, vertauscht.

Beweis: Zur Existenz: Es genügt offenbar zu zeigen, daß jedes $a \in \mathbb{R}_+$ eine Darstellung (122) besitzt.

Ferner können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $a \in [0,1[$ gilt. (Denn wegen $\lim_{n\to\infty} g^n = +\infty$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a < g^{n_0}$, und es ist $g^{-n_0}a \in [0,1[$. Multiplikation der erhaltenen Darstellung für $g^{-n_0}a$ mit g^{n_0} liefert dann eine solche für a.)

Wir setzen $a_1 := \lfloor ga \rfloor, R_1 := a - \frac{a_1}{g}$ und definieren rekursiv für jedes $n \in \mathbb{N}_+$

$$a_{n+1} := \lfloor g^{n+1} a_n \rfloor \ \text{ sowie } \ R_{n+1} = a - \sum_{k=1}^{n+1} a_k g^{-k} = R_n - \frac{a_{n+1}}{g^{n+1}}.$$

Induktiv folgt

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_+}\, 0 \leq R_n < g^{-n} \ \wedge\ a_n \in \{0, \ldots, g-1\}. \tag{123}$$

[$n = 1$: Es gilt $a \in [0,1[$ und somit $0 \leq ga < g$, also $a_1 = \lfloor ga \rfloor \in \{0,\ldots,g-1\}$. Außerdem haben wir nach Definition der Gauß-Klammer und $0 \leq ga - \lfloor ga \rfloor < 1$, also $0 \leq \underbrace{a - \frac{a_1}{g}}_{=R_1} < \frac{1}{g}$.

$n \mapsto n+1$: Aus $0 \leq R_n < g^{-n}$ folgt $0 \leq g^{n+1} R_n < g$ und somit $0 \leq \underbrace{\lfloor g^{n+1} R_n \rfloor}_{=a_{n+1}} < g$.

Daher gilt $a_{n+1} \in \{0,\ldots,g-1\}$. Wie oben haben wir nach Definition der Gauß-Klammer $0 \leq g^{n+1} R_n - \underbrace{\lfloor g^{n+1} R_n \rfloor}_{=a_{n+1}} < 1$ und folglich $0 \leq \underbrace{R_n - \frac{a_{n+1}}{g^{n+1}}}_{=R_{n+1}} < g^{-(n+1)}$.]

Aus (123) ergibt sich $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ und somit nach Definition von R_{n+1}

$$a = \lim_{n\to\infty}(a - R_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k g^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k}.$$

Es ist noch zu zeigen, daß wir $a_k \neq g-1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}_+$ annehmen können. Falls $k_0 \in \mathbb{N}_+$ mit $\forall_{k\in\mathbb{N},k\geq k_0}\, a_k = g-1$ existiert, so sei k_0 minimal mit dieser Eigenschaft. Dann gilt $k_0 \geq 2$ (sonst wäre $a = 1$) und $a_{k_0-1} < g-1$. Wir setzen dann $\tilde{a}_k = a_k$ für $k \in \{1,\ldots,k_0-2\}$, $\tilde{a}_{k_0-1} = a_{k_0-1}+1$ und $\tilde{a}_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$. Dann gilt $a = \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_k g^{-k}$.

Zur Eindeutigkeit: Wir können wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt $a \in [0,1[$.

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_+}, (\tilde{a}_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ zwei Folgen in $\{0,\ldots,g-1\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k} = a = \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_k g^{-k}$$

und existiere $k_0 \in \mathbb{N}_+$ mit

$$a_1 = \tilde{a}_1, \ldots, a_{k_0-1} = \tilde{a}_{k_0-1}, a_{k_0} \neq \tilde{a}_{k_0}.$$

Ohne Einschränkung sei $a_{k_0} > \tilde{a}_{k_0}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_k g^{-k} \\
&= \underbrace{\left(a_{k_0} - \tilde{a}_{k_0}\right) g^{-k_0}}_{\geq g^{-k_0}} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(a_k - \tilde{a}_k\right) g^{-k} \\
&\geq g^{-k_0} + (-(g-1)) \underbrace{\sum_{k=k_0+1}^{\infty} g^{-k}}_{= g^{-(k_0+1)}\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k}} \\
&= g^{-k_0} + (-(g-1))\frac{g^{-k_0}}{1-g^{-1}} = g^{-k_0} - g^{-k_0} = 0,
\end{aligned}$$

also gilt stets Gleichheit, und dies ist genau dann der Fall, wenn

$$a_{k_0} = \tilde{a}_{k_0} + 1 \wedge \forall_{k\in\mathbb{N},k>k_0} \underbrace{a_k - \tilde{a}_k = -(g-1.)}_{\text{d.h. genau } a_k = 0 \,\wedge\, \tilde{a}_k = g-1}$$

Damit haben wir den Hauptsatz inkl. Zusatz vollständig bewiesen. □

Bemerkung. Der Beweis gibt uns ein Verfahren an die Hand, welches wir zur g-adischen Entwicklung, $g \in \mathbb{N}, g \geq 2$, von Brüchen der Form $\frac{p}{q}$ mit $p,q \in \mathbb{N}_+$ und $p < q$ nutzen können:

Es gilt $\frac{p}{q} = (0, a_1 a_2 \ldots)_g$, wobei sich die $a_k, k \in \mathbb{N}_+$, wie folgt rekursiv bestimmen lassen:

$R_1 := p \in \{0,\ldots q-1\}$.

$\forall_{k\in\mathbb{N}_+}\; gR_k = a_k q + R_{k+1}$ mit $a_k \in \{0,\ldots g-1\}$ und $R_{k+1} \in \{0,\ldots q-1\}$.

Definition 4.41. Seien $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$ und $\pm \sum_{k=-r}^{\infty} a_k g^{-k}$ die gemäß Hauptsatz 4.40 eindeutige g-adische Darstellung einer reellen Zahl. Diese nennen wir im folgenden *die g-adische Darstellung der reellen Zahl.*

(i) Die Darstellung heißt *endlich* genau dann, wenn $k_0 \in \mathbb{N}_+$ existiert derart, daß $\forall_{k \in \mathbb{N}, k \geq k_0}\ a_k = 0$ gilt.

(ii) Die Darstellung heißt *periodisch* genau dann, wenn $k_0, l \in \mathbb{N}_+$ existieren derart, daß $\forall_{k \in \mathbb{N}, k \geq k_0}\ a_{k+l} = a_k$ gilt.

In diesem Fall schreiben wir auch $\left(\pm a_{-r} \ldots a_0, a_1 \ldots a_{k_0-1}\overline{a_{k_0} \ldots a_{k_0+l}}\right)_g$ für $\left(\pm a_{-r} \ldots a_0, a_1 \ldots a_{k_0-1} a_{k_0} \ldots a_{k_0+l} \ldots\right)_g$.

Beispiel. $\dfrac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ und $\dfrac{1}{29} = 0,\overline{0344827586206896551724137931}$.

Satz 4.42. *Sei $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$. Dann gilt: Endliche und periodische g-adische Darstellungen stellen rationale Zahlen dar.*

Beweis. Für endliche Darstellungen ist die Behauptung trivial. Daher untersuchen wir periodische Darstellungen, und hier genügt es solche der Form $(0,\overline{a_1 \ldots a_{k_0}})_g$ zu betrachten.

Es gilt $\tilde{a} := (0, a_1 \ldots a_{k_0})_g = \sum_{k=1}^{k_0} \dfrac{a_k}{g^k} \in \mathbb{Q}$ und

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{a} & = & (0, a_1 \ldots a_{k_0})_g \\
\dfrac{1}{g^{k_0}}\tilde{a} & = & \left(0, \underbrace{0 \ldots 0}_{k_0 \text{ Stück}}\ a_1 \ldots a_{k_0}\right)_g \\
\dfrac{1}{g^{2k_0}}\tilde{a} & = & \left(0, \underbrace{0 \ldots 0}_{k_0 \text{ Stück}}\ \underbrace{0 \ldots 0}_{k_0 \text{ Stück}}\ a_1 \ldots a_{k_0}\right)_g \\
\vdots & = & \vdots
\end{array}$$

Somit folgt $\sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{1}{g^{ik_0}}\tilde{a} = (0,\overline{a_1 \ldots a_{k_0}})_g$, und wegen $\sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{1}{g^{ik_0}}\tilde{a} = \tilde{a}\dfrac{1}{1-\frac{1}{g^{k_0}}} \in \mathbb{Q}$ haben wir den Satz bewiesen. □

Beispiel. $0,\overline{72} = 0,72\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{100}\right)^i\right) = \dfrac{72}{100}\dfrac{1}{1-\frac{1}{100}} = \dfrac{8}{11}.$

Satz 4.43. *Sei $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$. Dann gilt: Die g-adische Darstellung einer rationalen Zahl ist entweder endlich oder periodisch.*

Beweis. Seien $p, q \in \mathbb{N}_+$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $p < q$ gilt. Betrachte nun die Rekursion zur Bestimmung der g-adischen Darstellung $(0, a_1 \ldots a_k)_g$ von $\dfrac{p}{q}$ in der Bemerkung im Anschluß an den Beweis von Hauptsatz 4.40.

Wegen $\forall_{k \in \mathbb{N}_+} R_k \in 0, \ldots q-1$ können zwei Fälle auftreten:

Entweder existiert $k_0 \in \mathbb{N}_+$ mit $R_{k_0} = 0$. Dann folgt $\forall_{k \in \mathbb{N}, k > k_0}\, a_k = 0$.

Oder es existieren $k_0, l \in \mathbb{N}_+$ mit $R_{k_0} = R_{k_0+l} \in \{1, \dots, q-1\}$. Von der Stelle $k_0 + l$ an läuft die Konstruktion der Ziffern a_k dann genauso weiter, wie sie nach der Stelle k_0 gelaufen ist, m.a.W. ist die g-adische Darstellung periodisch. □

Wie in Kapitel 2 angekündigt, können wir nun beweisen, daß $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Satz 4.44.

(i) $]0,1[$ *ist überabzählbar.*

(ii) $\#]0,1[= \#\mathbb{R}$.

(iii) $\#\mathbb{R} = \#\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \#\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

Beweis. Zu (i): Der Beweis stammt von Cantor und wird *Cantors zweites Diagonalargument* genannt.

Wir nehmen an, wir hätten eine Bijektion

$$a\colon \mathbb{N}_+ \longrightarrow\,]0,1[,\ n \longmapsto a_n = 0, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \dots$$

von $]0,1[$, wobei wir die Elemente von $]0,1[$ dekadisch darstellen:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \dots \\ a_2 & = & 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \dots \\ a_3 & = & 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \dots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Dann liegt $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ mit

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_+}\, b_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } a_{nn} \neq 0 \\ 1, & \text{falls } a_{nn} = 0 \end{cases}$$

in $]0,1[$. b kann aber in obigem Schema nicht vorkommen.

Zu (ii): $]0,1[\, \to\,]-1,1[$, $t \mapsto 2t-1$, ist bijektiv (und besitzt die Umkehrbbildung $]-1,1[\, \to\,]0,1[$, $t \mapsto \frac{t+1}{2}$.)

$]-1,1[\, \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t}{1-|t|}$, ist ebenfalls bijektiv (und besitzt die Umkehrabbildung $\mathbb{R} \to\,]-1,1[$, $t \mapsto \frac{t}{1+|t|}$.)

Zu (iii): Die Abbildung

$$\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}},\ A \longmapsto (A_k)_{k \in \mathbb{N}},$$

mit

$$\forall_{k \in \mathbb{N}}\, A_k = \begin{cases} 1, & \text{falls } k \in A, \\ 0, & \text{falls } k \notin A, \end{cases}$$

ist offenbar bijektiv.

$M := \{(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \exists_{k_0 \in \mathbb{N}} \forall_{k \in \mathbb{N}, k \geq k_0}\, a_k = 1\}$ ist offenbar nicht endlich und kann vermöge Satz 4.42 als Teilmenge der rationalen Zahlen (nämlich der dyadisch dargestellten rationalen Elemente von $[0,1]$) aufgefaßt werden. Daher ist M abzählbar, und

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus M \longrightarrow [0,1[,\ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \longmapsto (0,a_0a_1a_2\ldots)_2$$

ist bijektiv.

Wegen (ii) genügt es nun zum Nachweis von (iii) zu zeigen, daß die disjunkte Vereinigung von $[0,1[$ mit einer abzählbaren Menge dieselbe Mächtigkeit wie $[0,1[$ hat:

Sei P die Menge aller Primzahlen[27]. Dann ist P abzählbar[28].

Die Abbildung

$$\begin{aligned} [0,1[\,\dot\cup\, P &\longrightarrow [0,1[\\ t &\longmapsto \begin{cases} \frac{1}{p}, & \text{falls } t = p \text{ Primzahl}, \\ \frac{1}{p^{n+1}}, & \text{falls } t = \frac{1}{p^n}, \text{ mit } p \text{ Primzahl und } n \in \mathbb{N}_+, \\ t, & \text{sonst}, \end{cases} \end{aligned}$$

ist bijektiv. □

Konvergenz von Folgen und Reihen von Funktionen

Definition 4.45 (Funktionenfolgen und -reihen, Potenzreihen)**.**

(i) Seien M eine beliebige Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^M$, (d.h. eine Folge von Funktionen $f_n\colon M \to \mathbb{K}$.)

a) Wir definieren $N := \{a \in M \mid (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent in } \mathbb{K}\}$ und den *Grenzwert* oder *Limes der Funktionenfolge*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n\colon N \longrightarrow \mathbb{K},}\,{}^{29}\ a \longmapsto \lim_{n\to\infty} f_n(a).$$

Beispiel.

1.) Nach Beispiel 4.8 konvergiert $\left(x^n|_{]-1,1]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f\colon]-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f|_{]-1,1[} = 0$ und $f(1) = 1$.

2.) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben sei durch

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ nt, & 0 < t < \frac{1}{n}, \\ 2 - nt, & \frac{1}{n} < t \le \frac{2}{n}, \\ 0, & t > \frac{2}{n}, \end{cases}$$

konvergiert für n gegen ∞ gegen die konstante Funktion vom Wert 0 auf $\mathbb{R}$.

---

[27] $p \in \mathbb{N}_+$ heißt Primzahl genau dann, wenn p außer 1 und p keine Teiler besitzt. $k \in \mathbb{N}_+$ heißt *Teiler* von p genau dann, wenn $l \in \mathbb{N}_+$ mit $p = k \cdot l$ existiert.

[28] Als Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist P höchstens abzählbar. Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1 < \ldots < p_n$, so wäre $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ eine Primzahl größer p_n. Widerspruch!

[29] In diesem Symbol ist ∞ kein eigenständiges Objekt!

[Für $t \le 0$ ist die Sache klar. Zu $t > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{2}{t}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$, also gilt $\forall_{n\in\mathbb{N}, n\ge n_0} f_n(t) = 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$.]

b) Die unendliche Reihe $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} f_k}$[29] (mit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ als Gliederfolge) ist per definitionem die Funktionenfolge $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$.

Die Funktion $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ (vgl. a)) heißt *die durch die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ *definierte Funktion* und wird ebenfalls mit dem Symbol $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} f_k}$ bezeichnet.

(ii) Sei in (i) b) speziell $M = \mathbb{K}$ und sei $a_0 \in \mathbb{K}$ sowie für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f_n = c_n(z - a_0)^n \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad \text{wobei } c_n \in \mathbb{K}.^{30}$$

Dann heißt die unendliche Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a_0)^n$ auch eine *Potenzreihe (mit Koeffizienten c_n und Entwicklungspunkt a_0).*

Hauptsatz 4.46.

Vor.: *Seien $a_n \in \mathbb{K}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, $z_0 \in \mathbb{K}$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_n(z - a_0)^n$ die zugehörige Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a_0.*[30]

Beh.:

(i) Es existiert genau ein $R \in [0, +\infty]$[31] derart, daß $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_n(a - a_0)^n$ für alle $a \in \mathbb{K}$ mit $|a - a_0| < R$ absolut in $\mathbb{K}$ konvergiert und für alle $a \in \mathbb{K}$ mit $|a - a_0| > R$ nicht in $\mathbb{K}$ konvergiert.

R ergibt sich aus der Cauchy-Hadamardschen[32] Formel

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{124}$$

wobei wir hier $\frac{1}{0} = +\infty$ und $\frac{1}{+\infty} = 0$ setzen.

(ii) Die durch die obige Potenzreihe dargestellte Funktion besitzt im reellen Falle als Definitionsbereich ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ - das sog. Konvergenzintervall der Potenzreihe – *mit*

$$]-R + a_0, a_0 + R[\;\subset J \subset [-R + a_0, a_0 + R]$$

und im komplexen Falle eine „Kreisscheibe“ M mit

$$U_R(z_0) \subset M \subset \overline{U_R(a_0)}.$$

---

[30] Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ schreibe man hier x anstelle von z.

[31] $[0, +\infty] := [0, \infty[\cup \{+\infty\}$

[32] nach Jacques Hadamard (1865–1963)

R heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe.

In Punkten $a \in \mathbb{K}$ mit $|a - a_0| = R$ kann sowohl absolute Konvergenz in $\mathbb{K}$, als auch nicht-absolute Konvergenz in $\mathbb{K}$, als auch Divergenz (d.h. per definitionem Nicht-Konvergenz) in $\mathbb{K}$ vorliegen, s.u. 4.47.

Beweisskizze. Das Wurzelkriteriums 4.33 inkl. Zusatz und anschließender Bemerkung zeigt, daß $\sum_{k=0}^{\infty} c_n (a - a_0)^n$ in $\mathbb{K}$ konvergiert, falls

$$|a - a_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|\,|a - a_0|^n} < 1$$

gilt, und divergiert, falls für $a \in \mathbb{K}$ gilt

$$|a - a_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|\,|a - a_0|^n} > 1.$$

Hieraus folgt der Hauptsatz. □

Bemerkung. Mit den Bezeichnungen des Hauptsatzes gilt[33] (nur)

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \le R \le \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Beispiel 4.47.

1.) Die Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ haben sämtlich den Konvergenzradius $+\infty$ und definieren die Funktionen $\exp, \sin$ und $\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

   [Klar nach 4.32 und 4.46.]

2.) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

   [Aus 1.) und 4.46 folgt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$. Da andererseits

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \ge \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}}_{\ge 0} \ge 0,$$

   folgt aus 4.17 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$, also wegen $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \ge 0$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.]

3.) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den Konvergenzradius 1 und im Reellen das Konvergenzintervall $]-1, 1[$. Sie definiert im Komplexen die Funktion $\frac{1}{1-z}|_{U_1(0)}$.

   [Klar nach 4.19 und 4.46.]

[33] Argumentiere ähnlich wie im letzten Beweis und nutze aus $\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}}$ bzw. $\frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}}$.

4.) Auch die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^n$ hat den Konvergenzradius 1 und im Reellen das Konvergenzintervall $]-1,1[$.

[Für jedes $a \in \mathbb{C}$ mit $0 < |a| < 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} n\,a^n$ absolut konvergent in $\mathbb{C}$ nach Quotientenkriterium wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\,a^{n+1}}{n\,a^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) |a| = |a| < 1.$$

Für $a = \pm 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} n\,a^n$ trivialerweise nicht konvergent in $\mathbb{C}$.

Damit ist 4.) klar nach 4.46.

5.) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

[Aus 4.) und 4.46 folgt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, und trivialerweise gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \geq \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\geq 1} \geq 1,$$

also gilt 5.) nach 4.17.]

6.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ hat 1 als Konvergenzradius und im Reellen $[-1,1[$ als Konvergenzintervall.

[Denn $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist nach 4.35 konvergent in $\mathbb{R}$, aber nach 4.25 nicht absolut konvergent in $\mathbb{R}$. Damit ist 6.) klar nach 4.46.]

7.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat 1 als Konvergenzradius und im Reellen $[-1,1]$ als Konvergenzintervall.

[Wegen 5.) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2 = 1.$$

Daher folgt die erste Aussage aus 4.46. Daß die Reihe in ± 1 konvergiert, zeigt 4.27 bzw. 4.35.]

8.) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,z^n$ hat 0 als Konvergenzradius und konvergiert in 0.

[Klar nach 2.) und 4.46.]

9.) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,z^n$ hat den Konvergenzradius 1 und im Reellen das Konvergenzintervall $]-1,1[$. Sie definiert im Komplexen die Funktion $\displaystyle\frac{1}{(1-z)^2}\Big|_{U_1(0)}$.

[Da die Reihe offensichtlich in ± 1 nicht in $\mathbb{C}$ konvergiert, folgt 9.) aus 3.) und Satz 4.38.]

5 Stetigkeit

Die Untersuchung des lokalen Verhaltens von Funktionen stellt einen fundamentalen Bestandteil der Analysis dar. Der Terminus *Funktion* (*functio*) wurde erstmals 1673 von Leibniz verwendet. Johann Bernoulli (1667–1748) übernahm die Terminologie, und dessen Schüler Leonhard Euler verfaßte 1788 die erste systematische Abhandlung über Funktionenlehre und gab die folgende Definition, (die im wesentlichen auch schon 1718 bei Johann Bernoulli stand): „Eine Function einer veränderlichen Zahlgröße ist ein analytischer Ausdruck, der auf irgendeine Weise aus der veränderlichen Zahlgröße und aus eigentlichen Zahlen oder aus constanten Zahlgrößen zusammengesetzt ist." An anderer Stelle liest man, daß Euler auch Kurven, die mit freier Hand gezeichnet werden können, als Funktionen betrachtete: „ ... omnes enim lineae curvae per nullam certam aequationem determinatae, cuiusmodi libero manus tractu delineari solent." Euler scheint mit *Funktionen* solche gemeint zu haben, die wir heute *stetig* nennen. Der moderne Funktions- bzw. Abbildungsbegriff stammt übrigens von Dirichlet.

Definition 5.1 (Stetigkeit)**.** Seien $M \subset \mathbb{K}$ eine Menge und $f\colon M \to \mathbb{K}$ eine Funktion sowie $a_0 \in M$.

(i) f heißt *stetig in* a_0 $:\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}\exists_{\delta\in\mathbb{R}_+}\forall_{a\in M}\ |a-a_0|<\delta \Rightarrow |f(a)-f(a_0)|<\varepsilon$.

(ii) f heißt *stetig* $:\Longleftrightarrow \forall_{a\in M}\ f$ stetig in a.

Die ersten beiden Punkte im folgenden Beispiel zeigen, daß die Grundbausteine aus Eulers Definition der *Funktion* stetig sind. Das dritte Beispiel belegt, daß der Begriff der Stetigkeit erheblich komplexer ist als Eulers Forderung des Zeichnens von freier Hand.

Beispiel 5.2.

(i) Sei $c \in \mathbb{K}$. Dann ist die Funktion $f\colon \mathbb{K}\to\mathbb{K}$, $a \mapsto c$ stetig. (Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ erfüllt jedes $\delta \in \mathbb{R}_+$ die Bedingung in der Definition.)

(ii) Die Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\colon \mathbb{K}\to\mathbb{K}$, $a\mapsto a$ ist stetig. (Zu $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ wähle man $\delta=\varepsilon$.)

(iii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, welche durch

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ \text{ mit } p,q\in\mathbb{N}_+ \text{ vollständig gekürzt,} \\ 0, & \text{falls } t \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}_+, \end{cases}$$

gegeben sei, ist in jedem rationalen Punkt unstetig und in jedem irrationalen (d.h. per definitionem nicht-rationalen) Punkt stetig.

[Beweisskizze: Sei zunächst $t_0 = \frac{p_0}{q_0}$ rational mit p_0, q_0 vollständig gekürzt, also $f(t_0) = \frac{1}{q_0}$. Es existiert $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ mit $0<\varepsilon<\frac{1}{q_0}$. Da in jeder Umgebung von t_0 unendlich viele irrationale Punkte t liegen[34], ist auf keiner noch so kleinen δ-Umgebung von t_0 die Abschätzung $|f(t_0)| = |f(t)-f(t_0)| < \varepsilon$ erfüllbar, d.h. f ist in t_0 unstetig.

[34] z.B. $t = t_0 \pm \frac{\sqrt{2}}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}_+$ hinreichend groß

Seien nun t_0 irrational, also $f(t_0) = 0$, und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Zu zeigen ist die Existenz von $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \left(|t - t_0| < \delta \Longrightarrow |f(t)| = |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon\right).$$

Dies ist für irrationales t klar, denn dann gilt $f(t) = 0$.

Ferner existiert $q_* \in \mathbb{N}_+$ mit

$$\forall_{q\in\mathbb{N}_+} \left(q \geq q_* \Longrightarrow \frac{1}{q} < \varepsilon\right),$$

und folglich existieren auch nur endlich viele $q \in \mathbb{N}_+$ mit $\frac{1}{q} \geq \varepsilon$ (nämlich höchstens $(q_* - 1)$-viele). Somit existieren zu $\delta \in \mathbb{R}_+$ auch nur endlich viele teilerfremde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}_+$ mit $\left(\left|\frac{p}{q} - t_0\right| < \delta \wedge \left|\frac{1}{q}\right| \geq \varepsilon\right)$, also gilt für hinreichend kleines $\delta \in \mathbb{R}_+$

$$\left(\left|\frac{p}{q} - t_0\right| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{1}{q}\right| < \varepsilon\right),$$

und wegen $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ ist die Behauptung gezeigt.]

Definition 5.3 (Grenzwert einer Funktion in einem Punkt)**.** Seien $M \subset \mathbb{K}$ und $f\colon M \to \mathbb{K}$ eine Funktion sowie $a_0, c \in \widehat{\mathbb{K}}$.

Es existiere (mindestens) eine Folge in $M \setminus \{a_0\}$, die gegen a_0 konvergiert[35].

Wir definieren:

f konvergiert für z gegen a_0 gegen c genau dann, wenn für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ in M, die gegen a_0 konvergiert, die Folge $\left(f(a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$ gegen c konvergiert.

In diesem Fall bezeichnet man c als *Grenzwert* oder *Limes von f für z gegen a_0* und schreibt $\boxed{\lim_{z\to a_0} f(z)} = c$.

Beispiel. Der Grenzwert der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{für } t < 0, \\ 1 & \text{für } t \geq 0, \end{array}\right\}$ für t gegen 0 existiert nicht.

Satz 5.4. *Seien $M \subset \mathbb{K}$ eine Menge und $f\colon M \to \mathbb{K}$ eine Funktion sowie $a_0 \in M$. Dann gilt:*

f ist genau dann stetig in a_0, wenn gilt $\lim_{z\to a_0} f(z) = f(a_0)$.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei f stetig in a_0, d.h.

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{\delta\in\mathbb{R}_+} \forall_{a\in M} \left(|a - a_0| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(a_0)| < \varepsilon\right). \tag{125}$$

Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ eine Folge in M mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$.

Zu zeigen ist $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a_0)$.

Hierzu sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann existiert $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit (125), und wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0} |a_n - a_0| < \delta$, also nach (125) $|f(a_n) - f(a_0)| < \varepsilon$.

„$\Leftarrow$“ Angenommen (125) ist falsch, d.h.

$$\exists_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \forall_{\delta\in\mathbb{R}_+} \exists_{a\in M} \left(|a - a_0| < \delta \wedge |f(a) - f(a_0)| \geq \varepsilon\right).$$

Insbesondere existiert zu $\delta_n := \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+$, eine Zahl $a_n \in M$ mit

[35] d.h. per definitionem, daß a_0 *ein Häufungspunkt von M* ist.

$$\underbrace{|a_n - a_0| < \delta_n}_{\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a_0} \quad \wedge \quad \underbrace{|f(a_n) - f(a_0)| \geq \varepsilon,}_{\substack{\Rightarrow f(a_n) \text{ konvergiert} \\ \text{nicht gegen } f(a_0)}}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung auf der rechten Seite. □

Im folgenden Beispiel, das wohl auf Dirichlet zurückgeht, lernen wir eine Funktion kennen, die so weit wie nur irgend möglich von Stetigkeit entfernt ist: Sie ist in keinem Punkt stetig.

Beispiel. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } t \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } t \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}, \end{array} \right\}$ ist in allen $t_0 \in \mathbb{R}$ unstetig.

[Beweis: 1. Fall: $t_0 \notin \mathbb{Q}$. Die dekadische Entwicklung von t_0 liefert uns dann gemäß Kapitel 4 eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = t_0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{=1} = 1 \neq 0 = f(t_0),$$

d.h. f ist nicht stetig in t_0.

2. Fall: $t_0 \in \mathbb{Q}$. Dann definieren wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ in $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ durch $\forall_{n\in\mathbb{N}_+}\, a_n := t_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = t_0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{=0} = 0 \neq 1 = f(t_0),$$

also ist f nicht stetig in t_0.]

Definition 5.5 (Summe, Differenz, Produkt und Quotient von Funktionen, Polynome, ganz-rationale und rationale Funktionen)**.**

(i) Seien M, N Mengen und $f\colon M \to \mathbb{K}$, $g\colon N \to \mathbb{K}$ zwei Funktionen.

Wir definieren dann neue Funktionen $f + g, f - g, f \cdot g\colon M \cap N \to \mathbb{K}$ durch

$$\forall_{a\in M\cap N}\, (f \pm g)(a) := f(a) \pm g(a) \text{ und } (f \cdot g)(a) := f(a) \cdot g(a).$$

Ferner definieren wir $\dfrac{f}{g}\colon (M \cap N) \smallsetminus \overline{g}^1(\{0\}) \to \mathbb{K}$ durch

$$\forall_{t\in(M\cap N)\smallsetminus\overline{g}^1(\{0\})} \left(\frac{f}{g}\right)(a) := \frac{f(a)}{g(a)}.$$

(ii) Sind $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, so heißt $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ *Polynom* mit *Koeffizienten* $a_0, \dots a_n$.

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad des Polynomes* $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. a_n nennen wir dann den *Leitkoeffizienten des Polynomes*.

Im Falle $n = 0$ und $a_n = 0$ definieren wir den Grad des Polynomes als $-\infty$ und den Leitkoeffizienten als null.

Die Funktion $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, heißt eine *ganz-rationale Funktion*. Der *Grad*, die *Koeffizienten* und der *Leitkoeffizient der ganz-rationalen Funktion* sind per definitionem diejenigen des zugehörigen Polynomes.

(iii) Sind $f, g \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ zwei ganz-rationale Funktionen, so heißt die Funktion $\frac{f}{g} \colon \mathbb{K} \smallsetminus \overset{-1}{g}(\{0\}) \to \mathbb{K}$ eine *rationale Funktion*.

Satz 5.6. *Seien M, N Teilmengen von $\mathbb{K}$, $f \colon M \to \mathbb{K}$, $g \colon N \to \mathbb{K}$ Funktionen und $a_0 \in M \cap N$. Dann gilt:*

(i) f, g *stetig in* $a_0 \Longrightarrow f \pm g, f \cdot g$ *stetig in* a_0.

(ii) f, g *stetig in* a_0 *und* $g(a_0) \neq 0 \Longrightarrow \frac{f}{g}$ *stetig in* a_0.

Beweis. Der Satz folgt sofort aus Satz 5.4 und Satz 4.4. □

Das folgende Korollar zeigt, daß die „zusammengesetzten“ Funktionen aus Eulers o.g. Definition stetig sind.

Korollar 5.7. *Jede (ganz-)rationale Funktion ist stetig.*

Beweis. Nach Beispiel 5.2 (i) und (ii) sind konstante Funktionen und x stetig. Aus jenen lassen sich alle ganz-rationalen Funktionen durch endlich viele Additionen und Multiplikationen von Funktionen bilden. Rationale Funktionen erhält man, indem man zusätzlich den Quotienten zweier ganz-rationaler Funktionen bildet. Satz 5.6 liefert die Stetigkeit. □

Satz 5.8. *Seien M, N Teilmengen von $\mathbb{K}$, $f \colon M \to \mathbb{K}, g \colon N \to \mathbb{K}$ Funktionen und $a_0 \in N$ derart, daß $g(a_0) \in M$. Dann gilt:*
g *stetig in* a_0 *und* f *stetig in* $g(a_0) \Longrightarrow f \circ g$ *stetig in* a_0.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ eine Folge in $\overset{-1}{g}(M)$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$. Da g stetig in a_0, gilt zunächst nach Satz 5.4 $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a_0)$, und da f stetig in $g(a_0)$, folgt sodann erneut aus Satz 5.4 $\lim_{n\to\infty} f(g(a_n)) = f(g(a_0)) = (f \circ g)(a_0)$. Damit ist die Stetigkeit von $f \circ g$ in a_0 gezeigt. □

Satz 5.9. *Seien M eine Teilmenge von $\mathbb{K}$, $f \colon M \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a_0 \in M$ derart, daß f in a_0 stetig ist. Dann gilt:*

$$f(a_0) \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} 0 \Longrightarrow \exists_{\delta \in \mathbb{R}_+} \forall_{a \in M} \left(|a - a_0| < \delta \Rightarrow f(a) \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} 0 \right).$$

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $0 < \varepsilon < |f(a_0)|$. Da f stetig in a_0, existiert $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{a \in M} \left(|a - a_0| < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(a) - f(a_0)| < \varepsilon}_{\Rightarrow -\varepsilon < f(a) - f(a_0) < \varepsilon} \right).$$

Hieraus folgt für $a \in M$ mit $|a - a_0| < \delta$

$0 \overset{\text{s.o.}}{<} f(a_0) - \varepsilon < f(a)$, falls $f(a_0) > 0$ und

$0 \overset{s.o.}{>} f(a_0) + \varepsilon > f(a)$, falls $f(a_0) < 0$. □

Bemerkung. Für eine komplex-wertige Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$, die in $a_0 \in M$ stetig ist und dort nicht null ist, folgt (z.B. durch Anwendung des Satzes auf $|f|$) die Existenz einer δ-Umgebung auf der f nicht verschwindet.

Satz 5.10 (von Bolzano)**.** *Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a)\cdot f(b) < 0$. (D.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben unterschiedliche Vorzeichen.) Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = 0$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ ist. (Sonst gehen wir von f zu $-f$ über.) Die Menge $M := \{t \in [a,b] \,|\, f(t) < 0\}$ ist nicht leer und durch b nach oben beschränkt. Daher existiert $\xi := \sup M \in \mathbb{R}$, und es gilt $a \le \xi \le b$.

Wir zeigen, daß $f(\xi) = 0$.

$f(\xi) < 0$ kann nach Satz von Bolzano nicht gelten, da dann $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $f(\xi+\delta) < 0$ existiert, im Widerspruch dazu, daß ξ obere Schranke von M ist.

Angenommen $f(\xi) > 0$. Dann existiert erneut wegen des letzen Satzes $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $f(\xi-\delta) > 0$, im Widerspruch dazu, daß ξ die *kleinste* obere Schranke von M ist. □

Korollar 5.11. *Jede reelle ganz-rationale Funktion von ungeradem Grad besitzt (mindestens) eine reelle Nullstelle.*

Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0,\dots,a_{2n+1} \in \mathbb{R}$ mit $a_{2n+1} \neq 0$. Zu zeigen ist, daß $f(x) := \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$ eine reelle Nullstelle besitzt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $a_{2n+1} > 0$. (Sonst gehen wir von f zu $-f$ über.) Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{f(t)}{t^{2n+1}} = a_{2n+1} + \frac{a_{2n}}{t} + \ldots + \frac{a_0}{t^{2n+1}} \xrightarrow{t\to\pm\infty} a_{2n+1} > 0,$$

also existieren $C, D \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \left(|t| \ge C \Longrightarrow \frac{f(t)}{t^{2n+1}} \ge D \right).$$

Inbesondere gilt $f(C) \ge D\,C^{2n+1} > 0$ und $f(-C) \le D\,(-C)^{2n+1} < 0$, also folgt die Behauptung aus Satz 5.10. □

Satz 5.12 (Zwischenwertsatz)**.** *Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ferner sei $\eta \in \mathbb{R}$ eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \eta$.*

Beweis. Im Falle $f(a) = \eta$ oder $f(b) = \eta$ ist nichts zu zeigen.

Betrachte daher den Fall, daß η echt zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt. Die Behauptung folgt dann durch Anwendung des Satzes von Bolzano 5.10 auf die Funktion $g := f - \eta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$: Es gilt $g(a)\cdot g(b) < 0$, also existiert $\xi \in [a,b]$ mit $g(\xi) = 0$, d.h. genau $f(\xi) = \eta$. □

Satz 5.13 (vom Maximum bzw. Minimum[36])**.** *Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f auf $[a,b]$ ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es existieren $t_*, t^* \in [a,b]$ mit*

$$f(t^*) = \sup\{f(t) \,|\, t \in [a,b]\} \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad f(t_*) = \inf\{f(t) \,|\, t \in [a,b]\} \in \mathbb{R}.$$

[36] von Karl Weierstraß (1815–1897)

Beweis. Wir zeigen nur, daß f auf $[a, b]$ ein Maximum annimmt. Die Argumentation für ein Minimum verläuft analog.

Zunächst gilt:

$$f([a, b]) \text{ ist nach oben beschränkt.} \tag{126}$$

[Angenommen (126) ist falsch. Dann existiert eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, f(s_n) > n$. Weil $[a, b]$ beschränkt ist, ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt somit nach Satz von Bolzano-Weierstraß 4.11 eine konvergente Teilfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit konvergiere $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $s^* \overset{4.6}{\in} [a, b]$. Da f stetig ist, gilt

$$f(s^*) = f(\lim_{n\to\infty} s_n) = \lim_{n\to\infty} f(s_n) = +\infty,$$

Widerspruch! Also ist die Annahme falsch und (126) ist gezeigt.]

Wegen (126) existiert $m^* := \sup f([a, b]) \in \mathbb{R}$. Nach Definition des Supremums existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = m^*$. Weil $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Folge in $[a, b]$ beschränkt ist, können wir wieder ohne Einschränkung annehmen, daß $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist gegen eine Zahl $t^* \in [a, b]$. Sie Stetigkeit von f liefert dann wie oben

$$f(t^*) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = m^* = \sup f([a, b]),$$

und der Satz ist bewiesen. □

Korollar 5.14. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f([a, b])$ ein kompaktes Intervall von $\mathbb{R}$.*

Beweis. Nach dem letzten Satz 5.13 existieren $t_*, t^* \in [a, b]$ mit

$$f([a, b]) \subset [f(t_*), f(t^*)],$$

wobei $f(t_*) = \min f([a, b])$ und $f(t^*) = \max f([a, b])$. Aus dem Zwischenwertsatz 5.12 folgt weiter

$$[f(t_*), f(t^*)] \subset f([a, b]),$$

also gilt Gleichheit. □

Definition 5.15 ((Strenge) Monotonie von Funktionen)**.** Seien $M \subset \mathbb{R}$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$$f \text{ heißt } \left\{\begin{array}{c} \textit{streng monoton wachsend} \\ \textit{monoton wachsend} \\ \textit{monoton fallend} \\ \textit{streng monoton fallend} \end{array}\right\} \text{ genau dann, wenn gilt}$$

$$\forall_{t_1, t_2 \in M} \left(t_1 < t_2 \Rightarrow f(t_1) \left\{\begin{array}{c} < \\ \leq \\ \geq \\ > \end{array}\right\} f(t_2) \right).$$

Beispiel.

(i) Für $n \in \mathbb{N}_+$ ist $x^n|_{[0,+\infty[}$ streng monoton wachsend.

[Für $n = 1$ ist das klar.

Gelte die Behauptung für $n \in \mathbb{N}_+$, d.h. für $t_1, t_2 \in [0, +\infty[$ mit $t_1 < t_2$ gilt $(t_1)^n < (t_2)^n$. Hieraus und aus $0 \le t_1 < t_2$ folgt dann wegen Satz 2.15 (34), daß gilt $(t_1)^{n+1} < (t_2)^{n+1}$.]

(ii) Für $n \in \mathbb{N}_+$ ist $\frac{1}{x^n}|_{]0,+\infty[}$ streng monoton fallend.

[Für $t_1, t_2 \in]0, +\infty[$ mit $t_1 < t_2$ gilt nach (i) $0 < (t_1)^n < (t_2)^n$, also $\frac{1}{(t_1)^n} > \frac{1}{(t_2)^n}$.]

Satz 5.16. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ f ist streng monoton.

Beweis. „$\Rightarrow$" Aus der Injektivität von f folgt insbesondere $f(a) \neq f(b)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $f(a) < f(b)$[37].

Seien nun $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $a \le t_1 < t_2 \le b$. Definiere dann $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(t) := f(a + t(t_1 - a)) - f(b - t(b - t_2)).$$

Als Summe bzw. Komposition solcher ist g eine stetige Abbildung, und es gilt $g(0) = f(a) - f(b) < 0$. Wir folgern hieraus $g(1) < 0$, d.h. $f(t_1) < f(t_2)$.

Angenommen $g(1) \ge 0$. Dann existiert nach dem Zwischenwertsatz 5.12 eine Zahl $\xi \in [0,1]$ mit $g(\xi) = 0$, also $f(a + \xi(t_1 - a)) = f(b - \xi(b - t_2))$. Wegen $a \le a + \xi(t_1 - a) \le t_1 < t_2 \le b - \xi(b - t_2) \le b$ widerspricht das aber der Injektivität von f.

„$\Leftarrow$" ist trivial. □

Satz 5.17 (Stetigkeit der Umkehrfunktion). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to [f(a), f(b)] (\subset \mathbb{R})$ eine streng monotone stetige Abbildung. Dann ist $f\colon [a,b] \to [f(a), f(b)]$ bijektiv und $f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a,b] (\subset \mathbb{R})$ ist stetig.*

Beweis. Die Bijektivität von $f\colon [a,b] \to [f(a), f(b)]$ ist klar nach dem letzten Satz 5.16.

Sei $\eta_* \in [f(a), f(b)]$. Wir zeigen, daß f^{-1} in η_* stetig ist.

Sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[f(a), f(b)]$ mit $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \eta_*$. Nach Satz 5.4 haben wir zu zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(\eta_n) = f^{-1}(\eta_*)$ gilt.

Angenommen das ist falsch, d.h. es existiert eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ derart, daß gilt

$$\forall_{n_0 \in \mathbb{N}} \exists_{n \in \mathbb{N}} \left(n \ge n_0 \wedge \left|f^{-1}(\eta_n) - f^{-1}(\eta_*)\right| \ge \varepsilon\right).$$

Folglich gibt es eine Teilfolge $(\eta_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \left|f^{-1}(\eta_{i_n}) - f^{-1}(\eta_*)\right| \ge \varepsilon. \tag{127}$$

[37]Wir zeigen, daß f streng monoton wachsend ist. Im Falle $f(a) > f(b)$ erhält man, daß f streng monoton fällt.

Nun ist $\left(f^{-1}(\eta_{i_n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der beschränkten Menge $[a,b]$, besitzt also eine konvergente Teilfolge $\left(f^{-1}(\eta_{j_{i_n}})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ – nach Satz von Bolzano-Weierstraß 4.11 –, für deren Grenzwert t_* wegen Satz 4.6 gilt: $t_* \in [a,b]$. Aus (127) folgt

$$|t_* - f^{-1}(\eta_*)| \geq \varepsilon. \tag{128}$$

Nun ist f aber nach Voraussetzung stetig in t_*, d.h. es gilt

$$f(t_*) = f\left(\left(\lim_{n\to\infty} f^{-1}(\eta_{j_{i_n}})\right)\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(f^{-1}(\eta_{j_{i_n}})\right) = \lim_{n\to\infty} \eta_{j_{i_n}} = \eta_*,$$

also $t_* = f^{-1}(\eta_*)$, im Widerspruch zu (128). □

Beispiel 5.18. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist $\sqrt[n]{x}\colon [0,+\infty[\, \to [0,+\infty[$ stetig.

Beweis. Es genügt offenbar zu zeigen, daß $\sqrt[n]{x}|_{[0,k^n]} : [0,k^n] \to [0,k]$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ stetig ist, und dies ist aber nach dem letzten Satz 5.17 klar, da $x^n|_{[0,k]}\colon [0,k] \to [0,k^n]$ bijektiv und stetig ist. □

Zum Abschluß dieses Kapitels beschäftigen wir uns kurz mit *gleichmäßiger Stetigkeit*, die in der Funktionalanalysis und der Theorie der Differentialgleichungen eine wichtige Rolle spielt. Der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit ist stärker als der der Stetigkeit: Ist eine Funktion auf ihrem Definitionsbereich gleichmäßig stetig – es macht keinen Sinn von gleichmäßiger Stetigkeit in einem Punkt zu reden –, so ist sie in jedem Punkt des Definitionsbereiches stetig. Wir zeigen, daß eine auf einem kompakten Intervall definierte stetige Funktion bereits gleichmäßig stetig ist. Dies werden wir später z.B. ausnutzen, wenn wir zeigen, daß sie dann auch Riemann-integrierbar ist.

Definition 5.19 (gleichmäßige Stetigkeit)**.** Seien M eine Teilmenge von $\mathbb{K}$ und $f\colon M \to \mathbb{K}$ eine Funktion.

f heißt *gleichmäßig stetig* genau dann, wenn gilt

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{\delta\in\mathbb{R}_+} \forall_{a,\tilde{a}\in M} \left(|a-\tilde{a}| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(\tilde{a})| < \varepsilon\right).$$

Beispiel.

(i) Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist $x^2|_{[a,b]}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

[Zum Beweis s.u. Satz 5.20.]

(ii) $x^2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig.

[Zu $\varepsilon := 1 \in \mathbb{R}_+$ existiert kein „hinreichend kleines" $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{t,s\in\mathbb{R}} \left(|t-s| < \delta \Rightarrow |t^2 - s^2| < 1\right).$$

Angenommen doch. Dann können wir ohne Einschränkung voraussetzen, daß gilt $\delta \leq 2$. Mit $t := \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{4}, s := \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{4}$ gilt dann $|t-s| = \frac{\delta}{2} < \delta$ und $|t^2 - s^2| = |t-s||t+s| = \frac{\delta}{2}\frac{2}{\delta} = 1$, Widerspruch!]

(iii) $\frac{1}{x}|_{]0,1]}\colon\,]0,1] \to \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig.

[Zu $\varepsilon := 1$ existiert kein „hinreichend kleines" $\delta \in \mathbb{R}_+$. Nimm andernfalls $\delta \leq 1$ an und setze $t := \frac{\delta}{2}, s := \delta$. Es gilt $|t-s| = \frac{\delta}{2} < \delta$ und $|\frac{1}{t} - \frac{1}{s}| = \frac{1}{\delta} \geq 1$.]

Satz 5.20. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ derart, daß gilt

$$\forall_{\delta \in \mathbb{R}_+} \exists_{t, \tilde{t} \in [a,b]} \left(|t - \tilde{t}| < \delta \wedge |f(t) - f(\tilde{t})| \geq \varepsilon \right).$$

Hieraus folgt die Existenz von Folgen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}_+}, (\tilde{t}_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ in $[a,b]$ mit

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_+} |t_n - \tilde{t}_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(t_n) - f(\tilde{t}_n)| \geq \varepsilon.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 4.11 besitzt $(t_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ eine konvergente Teilfolge $(t_{i_n})_{n \in \mathbb{N}_+}$, für deren Grenzwert t_* wegen Satz 4.6 gilt: $t_* \in [a,b]$. Aus $\forall_{n \in \mathbb{N}_+} |t_{i_n} - \tilde{t}_{i_n}| < \frac{1}{i_n}$ folgt dann, daß auch $(\tilde{t}_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen t_* konvergiert, also gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(t_{i_n}) = f(t_*) = \lim_{n \to \infty} f(\tilde{t}_{i_n}),$$

im Widerspruch zu $\forall_{n \in \mathbb{N}_+} |f(t_{i_n}) - f(\tilde{t}_{i_n})| \geq \varepsilon$. □

6 Differentialrechnung

Wie schon zu Beginn von Kapitel 4 erwähnt, wurde die Differentialrechnung von Isaac Newton (1643–1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) entwickelt. Anstelle der heute in der Analysis üblichen Verwendung der Epsilontik zur Definition der Differenzierbarkeit, die wir in diesem Kapitel behandeln, haben sie *infinitesimale Größen* verwendet, wie es in moderner Formulierung im Anhang A beschrieben ist. (Die Epsilontik fließt in der folgenden Definition 6.1 (i) bei der Grenzwertbildung ein.)

In den beiden vorangegangenen Kapiteln haben wir sowohl reelle als auch komplexe Analysis betrieben, weil sie sich in den Themenbereichen Konvergenz und Stetigkeit nicht wesentlich unterscheiden. Von nun an studieren wir nur noch die reelle Theorie. Man kann zwar die Definition der Differenzierbarkeit (s.u. 6.1) völlig analog für Funktionen $G \to \mathbb{C}$ auf offenen Teilmengen G von $\mathbb{C}$ geben – diese nennt man dann in einem Punkt von G *komplex differenzierbar* oder auf G *holomorph*, falls sie in jedem Punkt komplex differenzierbar sind –, erhält aber teilweise viel stärkere Aussagen über ebensolche als es analog für (reell) differenzierbare reellwerige Funktionen auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ der Fall ist. Des weiteren gibt es Sätze, die keine komplexen Analoga besitzen. Das Studium komplex differenzierbarer Funktionen $G \to \mathbb{C}$ ist Inhalt der mathematischen Disziplin *Funktionentheorie*.

Definition 6.1 (Differenzierbarkeit)**.** Seien $M \subset \mathbb{R}$, $f \colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $t_0 \in \mathring{M}$.

(i) f heißt *differenzierbar in* t_0 $:\Longleftrightarrow \lim_{x\to t_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(t_0)}{x-t_0}}_{M\smallsetminus\{t_0\}\longrightarrow\mathbb{R}}$ existiert in $\mathbb{R}$.

Ist f in t_0 differenzierbar, so heißt die reelle Zahl $\lim\limits_{x\to t_0} \dfrac{f(x)-f(t_0)}{x-t_0}$ der *Wert der (ersten) Ableitung von f in t_0* oder der *Differentialquotient von f in t_0*, und man bezeichnet sie mit $\boxed{f'(t_0)}$ oder $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(t_0).}$[38] Ferner heißt

$$f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0) \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die *lineare Approximation von f an der Stelle t_0*.

(ii) f heißt *differenzierbar* $:\Longleftrightarrow M$ offen und $\forall_{t\in M}\, f$ differenzierbar in t.

(iii) Die Funktion $\boxed{f' \colon \{t \in \mathring{M} \mid f \text{ differenzierbar in } t\} \to \mathbb{R}}$, $t \mapsto f'(t)$, heißt die *(erste) Ableitung von f*. Statt f' schreibt man auch $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.}$

[38] Diese Schreibweise (lies „$\mathrm{d}f$ nach $\mathrm{d}x$ in t_0“) für $f'(t_0)$ wurde von Leibniz eingeführt. Er faßte diese Zahl in sehr vager Weise als den Quotienten *infinitesimaler Größen*, der *Differentiale* $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$, auf.

Bemerkung.

1.) Anstelle des Grenzwertes in (i) kann man auch äquivalent fordern, daß $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ existiert, und in diesem Fall stimmen die beiden Limites überein.

2.) Nach Satz 5.4 und Definition 5.1 existiert der Differentialquotient in t_0 genau dann, wenn

$$\exists_{A\in\mathbb{R}} \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{\delta\in\mathbb{R}_+} \forall_{t\in M} \left(|t-t_0|<\delta \Longrightarrow \left| \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} - A \right| < \varepsilon \right),$$

und in diesem Fall gilt $f'(t_0) = A$.

Beispiel.

(i) Konstante Funktionen sind differenzierbar. Sie besitzen sämtlich die konstante Funktion vom Wert 0 als Ableitung. *(Klar.)*

(ii) $x\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist differenzierbar und besitzt die konstante Funktion vom Wert 1 als Ableitung. *(Klar.)*

(iii) $x^n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist für $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, differenzierbar mit Ableitung $n\,x^{n-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$\left[\ \frac{t^n-(t_0)^n}{t-t_0} = \sum_{k=0}^{n-1} t^{n-1-k}(t_0)^k \xrightarrow{t\to t_0} n(t_0)^{n-1}\ \right]$$

(iv) $|x|\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist in $t_0=0$ nicht differenzierbar.

$$\left[\ \frac{|t|-|t_0|}{t-t_0} = \frac{|t|}{t} = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & t>0 \\ -1, & t<0 \end{array} \right\} \text{ konvergiert nicht für } t\to 0.\ \right]$$

Satz 6.2. *Seien $M\subset\mathbb{R}$, $f\colon M\to\mathbb{R}$ eine Funktion und $t_0\in\mathring{M}$. Dann gilt:*
f differenzierbar in $t_0 \Longrightarrow f$ stetig in t_0.

Beweis. Es genügt offenbar für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M\setminus\{t_0\}$, die gegen t_0 konvergiert, zu zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(t_0)$ gilt. Und dies folgt aus

$$f(a_n)-f(t_0) = \underbrace{\frac{f(a_n)-f(t_0)}{a_n-t_0}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} f'(t_0)} \underbrace{(a_n-t_0)}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0} \xrightarrow{n\to+\infty} 0. \qquad \square$$

Satz 6.3. *Seien $M\subset\mathbb{R}$, $f\colon M\to\mathbb{R}$ eine Funktion und $t_0\in\mathring{M}$. Dann gilt:*

$$f \textit{ differenzierbar in } t_0 \textit{ mit } f'(t_0) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0$$

$$\Longrightarrow\quad \exists_{\delta\in\mathbb{R}_+} \left(\forall_{t\in]-\delta+t_0,t_0[}\, f(t) \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\} f(t_0) \ \wedge\ \forall_{t\in]t_0,t_0+\delta[}\, f(t) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} f(t_0) \right)$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $\lim_{x\to t_0} \frac{f(x)-f(t_0)}{x-t_0} \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0$. Daher existiert eine Zahl $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß gilt $]-\delta+t_0, t_0+\delta[\, \subset M$ (beachte, daß $t_0 \in \overset{\circ}{M}$) und

$$\forall_{t\in]-\delta+t_0,t_0+\delta[}\ \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung, da $t-t_0<0$ für $t<t_0$ und $t-t_0>0$ für $t>t_0$. □

Hauptsatz 6.4.

Vor.: *Seien $M, N \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}, g\colon N \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, $t_0 \in \overset{\circ}{\widehat{M \cap N}}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Ferner seien f und g in t_0 differenzierbar.*
Beh.:

(i) (Summenregel, $\mathbb{R}$-Linearität der Differentiation)
$f \pm g\colon M \cap N \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in t_0 und $(f \pm g)'(t_0) = f'(t_0) \pm g'(t_0)$,
$\lambda f\colon M \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in t_0 und $(\lambda f)'(t_0) = \lambda f'(t_0)$.

(ii) (Leibnizsche Produktregel)
$f \cdot g\colon M \cap N \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in t_0 und

$$(f \cdot g)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0).$$

(iii) $g(t_0) \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{g}\colon N \setminus \overline{g}^1(\{0\}) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in t_0 und

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(t_0) = -\frac{g'(t_0)}{g(t_0)^2}.$$

(iv) (Quotientenregel)
$g(t_0) \neq 0 \Longrightarrow \frac{f}{g}\colon M \cap \left(N \setminus \overline{g}^1(\{0\})\right) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in t_0 und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(t_0) = \frac{f'(t_0)g(t_0) - f(t_0)g'(t_0)}{g(t_0)^2}.$$

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im jeweiligen Definitionsbereich der zu untersuchenden Funktion, die den Wert t_0 nicht annimmt, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = t_0$. Dann gilt:

Zu (i):

$$\begin{aligned} &\frac{(f\pm g)(a_n) - (f\pm g)(t_0)}{a_n - t_0} \\ &= \frac{f(a_n)-f(t_0)}{a_n-t_0} \pm \frac{g(a_n)-g(t_0)}{a_n-t_0} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(t_0) \pm g'(t_0), \end{aligned}$$

$$\frac{(\lambda f)(a_n) - (\lambda f)(t_0)}{a_n - t_0} = \lambda \frac{f(a_n)-f(t_0)}{a_n-t_0} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda f'(t_0).$$

Zu (ii): Wegen

$$\begin{aligned}
& f(a_n)g(a_n) - f(t_0)g(t_0) \\
= & \big(f(a_n) - f(t_0)\big)g(t_0) + f(t_0)\big(g(a_n) - g(t_0)\big) \\
& +\big(f(a_n) - f(t_0)\big)\big(g(a_n) - g(t_0)\big)
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to+\infty} \frac{(f\cdot g)(a_n) - (f\cdot g)(t_0)}{a_n - t_0} \\
= & f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0) + f'(t_0)\cdot 0 = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0).
\end{aligned}$$

Zu (iii): Aus Stetigkeitgründen gilt $t_0 \in N \setminus \overset{\circ}{\overbrace{\overline{g}^1(\{0\})}}$ und weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a_n) - \left(\frac{1}{g}\right)(t_0)}{a_n - t_0} &= \frac{\frac{1}{g(a_n)} - \frac{1}{g(t_0)}}{a_n - t_0} \\
&= -\frac{1}{g(a_n)g(t_0)}\frac{g(a_n) - g(t_0)}{a_n - t_0} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{g(t_0)^2}g'(t_0).
\end{aligned}$$

(iv) folgt aus (ii) und (iii). □

Korollar 6.5.

(i) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann ist die ganz-rationale Funktion

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar mit Ableitung

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(ii) Jede rationale Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit reellen Koeffizienten) ist differenzierbar.

Beweis. Klar nach Beispiel (i) und (ii) zu Definition 6.1 und dem letzten Satz. □

Beispiel.

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)' = \frac{2x(x+3) - x^2}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$$

Hauptsatz 6.6 (Kettenregel)**.** *Seien M, N Teilmengen von $\mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $g\colon N \to \mathbb{R}$ Funktionen und $t_0 \in \overset{\circ}{N}$ derart, daß $g(t_0) \in \overset{\circ}{M}$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
& g \text{ differenzierbar in } t_0 \text{ und } f \text{ differenzierbar in } g(t_0) \\
\Longrightarrow\ & t_0 \in \overset{\circ}{\overbrace{\overline{g}^1(M)}}, f\circ g\colon \overline{g}^1(M) \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar in } t_0 \text{ und} \\
& (f\circ g)'(t_0) = f'(g(t_0))\cdot g'(t_0)
\end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen zunächst $t_0 \in \overbrace{\overline{g}^1(M)}^{\circ}$:

Zu zeigen ist die Existenz einer Zahl $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$]-\delta + t_0, t_0 + \delta[\subset N \quad \text{und} \quad \forall_{t \in]-\delta+t_0, t_0+\delta[}\, g(t) \in M. \tag{129}$$

[Zunächst folgt aus $t_0 \in \overset{\circ}{N}$ und $g(t_0) \in \overset{\circ}{M}$ die Existenz von $\delta_1, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $]-\delta_1 + t_0, t_0 + \delta_1[\subset N$ und $]-\varepsilon + g(t_0), g(t_0) + \varepsilon[\subset M$. Nach Voraussetzung ist g in t_0 differenzierbar, also nach Satz 6.2 insbesondere stetig. Daher existiert eine Zahl $\delta_2 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{t \in M} |t - t_0| < \delta_2 \Longrightarrow |g(t) - g(t_0)| < \varepsilon.$$

Nun hat $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ die in (129) genannten Eigenschaften.]

Wir definieren $\tilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} \frac{f(s) - f(g(t_0))}{s - g(t_0)} & \text{für } s \neq g(t_0), \\ f'(g(t_0)) & \text{für } s = g(t_0). \end{cases}$$

Da f in $g(t_0)$ differenzierbar ist, ergibt sich die Stetigkeit von $\tilde{f}$ in $g(t_0)$. Außerdem gilt

$$\forall_{s \in M}\, f(s) - f(g(t_0)) = \tilde{f}(s)\,(s - g(t_0)); \tag{130}$$

beachte, daß (130) für $s = g(t_0)$ trivial ist.

Nun folgt aus der Stetigkeit von g in t_0 (nach Satz 6.2) und der von $\tilde{f}$ in $g(t_0)$ für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{g}^1(M) \setminus \{t_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = t_0$

$$\begin{aligned} &\frac{f(g(a_n)) - f(g(t_0))}{a_n - t_0} \\ &\overset{(130)}{=} \quad \tilde{f}(g(a_n))\frac{g(a_n) - g(t_0)}{a_n - t_0} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(g(t_0))\, f'(t_0) = f'(g(t_0))\, g'(t_0) \end{aligned}$$

□

Wir betrachten eine bijektive differenzierbare Funktion $f\colon I \to J$ zwischen offenen Intervallen I und J von $\mathbb{R}$. Setzen wir voraus, daß $f^{-1}\colon J \to I$ differenzierbar ist, so folgt aus dem letzten Hauptsatz wegen $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_I$, daß gilt $\forall_{t_0 \in I} \left(f^{-1}\right)'(f(t_0)) \cdot f'(t_0) = 1$.

Also ist $f'(t_0) \neq 0$ notwendig für die Differenzierbarkeit von f^{-1} in $f(t_0)$, und in diesem Falle gilt $\left(f^{-1}\right)'(f(t_0)) = \dfrac{1}{f'(t_0)}$.

Der nächste Satz zeigt, daß diese Bedingung auch hinreichend ist.

Satz 6.7 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion).
Vor.: *Seien I, J offene Intervalle von $\mathbb{R}$ und $f\colon I \to J$ bijektiv und stetig. (Dann ist f nach Satz 5.16 streng monoton wachsend oder fallend, und $f^{-1}\colon J \to I$ ist nach Satz 5.17 stetig.)*

Ferner sei $t_0 \in I$ derart, daß f differenzierbar in t_0 ist.

Beh.: $f'(t_0) \neq 0 \Longrightarrow f^{-1}$ *differenzierbar in* t_0 *und* $\left(f^{-1}\right)'(f(t_0)) = \dfrac{1}{f'(t_0)}$.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $J \setminus \{f(t_0)\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = f(t_0)$. Da f^{-1} stetig in $f(t_0)$ ist, ist dann $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n := f^{-1}(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in $I \setminus \{t_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = t_0$. Weil f in t_0 differenzierbar ist, gilt weiterhin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(t_0)}{b_n - t_0} = f'(t_0) \neq 0.$$

Wir können nun ohne Einschränkung annehmen, daß gilt $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \dfrac{f(b_n) - f(t_0)}{b_n - t_0} \neq 0$, und es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{f^{-1}(a_n) - f^{-1}(f(t_0))}{a_n - f(t_0)} = \frac{b_n - t_0}{f(b_n) - f(t_0)} = \frac{1}{\frac{f(b_n)-f(t_0)}{b_n - t_0}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{f'(t_0)}.$$

□

Beispiel 6.8. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist $\sqrt[n]{x}|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ differenzierbar mit Ableitung $\dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

[$f := x^n|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ist streng monoton wachsend und differenzierbar mit $f' = nx^{n-1}|_{\mathbb{R}_+}$ und $f^{-1} = \sqrt[n]{x}|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Sei nun $s_0 \in \mathbb{R}_+$. Dann existiert $t_0 \in \mathbb{R}_+$ mit $s_0 = (t_0)^n = f(t_0)$, und es gilt $f'(t_0) = n(t_0)^{n-1} \neq 0$. Aus dem letzten Satz folgt daher die Differenzierbarkeit von $f^{-1} = \sqrt[n]{x}|_{\mathbb{R}_+}$ in $f(t_0) = s_0$ und

$$\left(f^{-1}\right)'(s_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{n\,(t_0)^{n-1}} = \frac{1}{n\,(\sqrt[n]{s_0})^{n-1}}.\ ]$$

Satz 6.9 (von Rolle[39]). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$, die auf $]a,b[$ differenzierbar ist.*

Dann existiert $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. 1. Fall: f konstant vom Wert $f(a) = f(b)$. Dann folgt $f' = 0$, und die Behuptung gilt mit $\xi = \frac{a+b}{2}$.

2. Fall: $\exists_{t_0\in]a,b[}\ f(t_0) > f(a) = f(b)$. Nach Satz vom Maximum 5.13 existiert $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \max f([a,b]) \geq f(t_0) > f(a) = f(b)$, also insbesondere $\xi \in]a,b[$ und f differenzierbar in ξ.

Da f in ξ maximal wird, so kann nach Satz 6.3 weder $f'(\xi) > 0$ noch $f'(\xi) < 0$ gelten, d.h. $f'(\xi) = 0$.

3. Fall: $\exists_{t_0\in]a,b[}\ f(t_0) < f(a) = f(b)$. Zeigt man mittels Satz vom Minimum analog zum 2. Fall. □

Hauptsatz 6.10 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung[40]). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $]a,b[$ differenzierbar ist.*

Dann existiert $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

[39] nach Michel Rolle (1652–1719)

[40] Dieser auf Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) zurückgehende Satz ist der wichtigste Satz der Differentialrechnung.

Beweis. Anwendung des Satzes von Rolle auf die Funktion

$$F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) - \lambda t,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ so gewählt sei, daß $F(a) = F(b)$ gilt, d.h. $f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$, bzw. $\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Es gilt also $\forall_{t\in[a,b]}\, F(t) = f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} t$.

Offenbar erfüllt F (anstelle von f) alle Voraussetzungen des Satzes von Rolle 6.9, und somit existiert $\xi \in\,]a,b[$ mit $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, d.h. genau $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Satz 6.11 (Verallgemeinerer Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktion, die auf $]a,b[$ differenzierbar sind. Ferner gelte*

$$\forall_{t\in]a,b[}\, g'(t) \neq 0,$$

(also nach Satz von Rolle $g(a) \neq g(b)$.)

Dann existiert $\xi \in\,]a,b[$ mit $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Beweis. Anwendung des Satzes von Rolle auf die Funktion

$$F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) - \lambda g(t),$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ so gewählt sei, daß $F(a) = F(b)$ gilt, d.h. $\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Es gilt also $\forall_{t\in[a,b]}\, F(t) = f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(t)$.

Offenbar erfüllt F (anstelle von f) alle Voraussetzungen des Satzes von Rolle 6.9, und somit existiert $\xi \in\,]a,b[$ mit $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$, d.h. genau (beachte, daß $g'(\xi) \neq 0$ gilt) $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. □

Bemerkung.

1.) 6.10 ist ein Spezialfall von 6.11. ($g = x|_{[a,b]}$.)

2.) Sind die Voraussetzungen von 6.11 erfüllt, so folgt aus 6.10 nur

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f'(\xi_1)}{f'(\xi_2)},$$

wobei $\xi_1, \xi_2 \in\,]a,b[$ und evtl. $\xi_1 \neq \xi_2$.

Unter Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes 6.10 können wir die folgenden Aussagen über das globale Verhalten differenzierbrer Funktionen beweisen:

Hauptsatz 6.12.
Vor.: *Seien J ein Intervall von $\mathbb{R}$ und $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $\mathring{J}$ differenzierbar ist.*
Beh.:

(i) $\forall_{t\in\mathring{J}}\, f'(t) = 0 \Longrightarrow f$ *konstant,*

(ii) $\forall_{t\in \overset{\circ}{J}} f'(t) \left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \right\} 0 \Longrightarrow f$ *monoton* $\left\{ \begin{matrix} \textit{wachsend} \\ \textit{fallend} \end{matrix} \right\}$,

(iii) $\forall_{t\in \overset{\circ}{J}} f'(t) \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} 0 \Longrightarrow f$ *streng monoton* $\left\{ \begin{matrix} \textit{wachsend} \\ \textit{fallend} \end{matrix} \right\}$.

Beweis. Seien $a, b \in J$ beliebig mit $a < b$.

Zu (i): Aus dem Mittelwertsat 6.10 folgt die Existenz von $\xi \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = (b-a)\underbrace{f'(\xi)}_{=0} = 0,$$

also $f(a) = f(b)$. Aus der Beliebigkeit von a, b ergibt sich (i).

Zu (ii): Aus dem Mittelwertsatz folgt erneut die Existenz von $\xi \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = (\underbrace{(b-a)}_{>0}\underbrace{f'(\xi)} \left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \right\} 0,$$

also $f(a) \left\{ \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \right\} f(b)$. Hieraus folgt (ii).

(iii) beweist man analog zu (ii). □

Bemerkung. In (i) und (ii) gilt sogar „⇔" anstelle von „⇒", denn „⇐" ist trivial nach Definition der Ableitung.

Dagegen gilt in (iii) i.a. nicht „⇐", wie das Beispiel der Funktion $x^3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zeigt.

Satz 6.13 (Darbouxscher[41] Zwischenwertsatz für die Ableitung)**.**
Vor.: *Seien J ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$ und $f \colon J \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.*

Ferner seien $a, b \in J$ mit $a < b$ und $\eta \in \mathbb{R}$ eine Zahl zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$.
Beh.: $\exists_{\xi\in[a,b]} f'(\xi) = \eta$.

Bemerkung. Im Falle, daß f' stetig ist, folgt dieser Satz sofort aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. Aber f' braucht nicht stetig zu sein! [42]

Beweis. Im Falle $f'(a) = \eta$ oder $f'(b) = \eta$ ist nichts zu zeigen.

Liege daher η also echt zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte dann $f'(a) < \eta < f'(b)$. (Ansonsten gehen wir von f zu $-f$ über.)

1. Fall: $\eta = 0$, $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$.

Nach dem Satz vom Minimum 5.13 existiert eine Zahl $\xi \in [a, b]$ derart, daß $f|_{[a,b]}$ in ξ minimal wird. Wegen $f'(a) < 0$ folgt mit Satz 6.3, daß für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ hinreichend klein $f(a+\varepsilon) < f(a)$ gilt, also wird $f|_{[a,b]}$ in a nicht minimal, d.h. $\xi > a$. Aus $f'(b) > 0$ ergibt sich analog $\xi < b$.

[41] nach Jean Gaston Darboux (1842–1917)

[42] Die in 0 durch 0 fortgesetzte Funktion $x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ist differenzierbar aber ihre Ableitung ist in 0 unstetig. Zur Diskussion der Funktion cos siehe 7.2.

Weil $f|_{[a,b]}$ in $\xi \in]a,b[= \mathring{\widehat{[a,b]}}$ minimal wird, zeigt uns eine erneute Anwendung von Satz 6.3: $f'(\xi) = 0$.

2. Fall: $\eta \in \mathbb{R}$ beliebig mit $f'(a) < \eta < f'(b)$. Wir wenden dann den ersten Fall auf die Funktion $g := f - \eta x|_J \colon J \to \mathbb{R}$ an. Dies liefert dann die Existenz von $\xi \in]a,b[$ mit $g'(\xi) = 0$, und d.h. genau $f'(\xi) = \eta$. □

Definition 6.14 (n-malige (stetige) Differenzierbarkeit)**.** Seien $M \subset \mathbb{R}$ und $f \colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) a) Wir definieren rekursiv für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $M_{(n)}$ von M und eine Funktion $\boxed{f^{(n)} := \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} \colon M_{(n)} \to \mathbb{R}}$ – die sog. *n-te Ableitung von f* – wie folgt:

$n = 0$: $M_{(0)} := M$, $f^{(0)} := f \colon M_{(0)} \to R$.

$n = 1$: $M_{(1)} := \{t \in \mathring{M} \mid f \text{ differenzierbar in } t\}$, $f^{(1)} := f' \colon M_{(1)} \to \mathbb{R}$.

$n = 2$: $M_{(2)} := \{t \in \mathring{\widehat{M_{(1)}}} \mid f' \text{ differenzierbar in } t\}$,
$f^{(2)} := f'' := (f')' \colon M_{(2)} \to \mathbb{R}$.

$n \geq 3$: $M_{(n)} := \{t \in \mathring{\widehat{M_{(n-1)}}} \mid f^{(n-1)} \text{ differenzierbar in } t\}$,
$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)' \colon M_{(n)} \to \mathbb{R}$.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $t_0 \in M$.
f heißt *n-mal differenzierbar in t_0* $:\Longleftrightarrow t_0 \in M_{(n)}$.

Ist f in t_0 n-mal differenzierbar, so heißt die reelle Zahl $\boxed{f^{(n)}(t_0)}$ der *Wert der n-ten Ableitung von f in t_0*, und man bezeichnet sie auch mit $\boxed{\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(t_0).}$

f heißt *n-mal stetig differenzierbar in t_0* genau dann, wenn sogar gilt $t_0 \in \mathring{\widehat{M_{(n)}}}$ und zusätzlich $f^{(n)}$ in t_0 stetig ist.

c) Sei $t_0 \in M$.
f heißt *beliebig oft differenzierbar in t_0* genau dann, wenn f n-mal differenzierbar in t_0 ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$.

f heißt n-mal (stetig) differenzierbar genau dann, wenn f in jedem $t \in M$ n-mal (stetig) differenzierbar ist.

(iii) f heißt beliebig oft differenzierbar genau dann, wenn f in jedem $t \in M$ beliebig oft differenzierbar ist.

Beispiel 6.15. Jede (ganz-)rationale Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit reellen Koeffizienten) ist differenzierbar und besitzt als Ableitung wieder eine (ganz-)rationale Funktion; somit ist sie beliebig oft differenzierbar.

Hauptsatz 6.16. *Seien $t_0 \in \mathbb{R}$ sowie $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne R den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - t_0)^n$. Ferner sei f die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion.*

Ist $R > 0$, so ist f auf $]-R+t_0, t_0+R[$ differenzierbar, und es gilt

$$\forall_{t \in]-R+t_0, t_0+R[}\ f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (t - t_0)^{n-1}.$$

Beweisskizze. Zunächst besitzt $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x - t_0)^{n-1}$ denselben Konvergenzradius wie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - t_0)^n$, denn der der ersten Reihe stimmt mit dem von $(x - t_0)\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x - t_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x - t_0)^n$ überein und nach Beispiel 4.47 5.) gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, also

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Sei nun $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - t_0| < R$. Zu zeigen ist, daß zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiert derart, daß für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $|s - t| < \delta$ gilt

$$\left| \frac{f(s) - f(t)}{s - t} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (t - t_0)^{n-1} \right| < \varepsilon. \tag{131}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $|s - t_0| < R$. Dann existiert eine Zahl $r \in \mathbb{R}_+$ mit $|s - t_0| < r < R$, und $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|\, r^{n-1}$ ist konvergent, also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n\,|a_n|\, r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{132}$$

Nach dem Mittelwertsatz 6.10 existieren $\xi_n^s, n \in \mathbb{N}$, zwischen s und t mit

$$\begin{aligned}
&\frac{f(s) - f(t)}{s - t} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (t - t_0)^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{(s - t_0)^n - (t - t_0)^n}{s - t} - n\, a_n (t - t_0)^{n-1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n\, a_n (\xi_n^s - t_0)^{n-1} - n\, a_n (t - t_0)^{n-1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n \left((\xi_n^s - t_0)^{n-1} - (t - t_0)^{n-1} \right),
\end{aligned}$$

also gilt für diese s

$$\begin{aligned}
\text{l.S. von (131)} \quad &\leq \sum_{n=0}^{n_0} n\,|a_n| \left| (\xi_n^s - t_0)^{n-1} - (t - t_0)^{n-1} \right| \\
&\quad + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n\,|a_n|\, \underbrace{|\xi_n^s - t_0|}_{<r}{}^{n-1} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n\,|a_n|\, \underbrace{|t - t_0|}_{<r}{}^{n-1} \\
&\overset{(132)}{<} \sum_{n=0}^{n_0} n\,|a_n| \left| (\xi_n^s - t_0)^{n-1} - (t - t_0)^{n-1} \right| + \frac{2}{3}\varepsilon,
\end{aligned}$$

und die endlich Summe in der letzten Zeile wird für s in einer hinreichend kleinen δ-Umgebung von t kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$. Beachte, daß dann auch die ξ_n^s in dieser δ-Umgebung liegen. □

Korollar 6.17. *Seien $t_0 \in \mathbb{R}$ sowie $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne R den Konvergenzradius der Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-t_0)^n$.*

Ist $R > 0$, so ist f auf $]-R+t_0, t_0+R[$ beliebig oft differenzierbar, und es gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ und jedes $t \in]-R+t_0, t_0+R[$

$$f^{(i)}(t) = \sum_{n=i}^{\infty} \underbrace{n(n+1)\dots(n-i+1)}_{\frac{n!}{(n-i)!}=i!\binom{n}{i}} a_n(t-t_0)^{n-i} = i! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{i+n}{i} a_{i+n}(t-t_0)^n.$$

Insbesondere erhalten wir

$$\forall_{i\in\mathbb{N}}\, a_i = \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!}. \tag{133}$$

Beweis. 6.17 folgt sofort aus 6.16 durch vollständige Induktion nach $i \in \mathbb{N}$. □

Korollar 6.18 (Identitätssatz für Potenzreihen)**.** *Seien $t_0 \in \mathbb{R}$ sowie $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne R_a sowie R_b den Konvergenzradius der Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-t_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-t_0)^n$. Ferner seien f bzw. g die durch die Potenzreihen dargestellten Funktionen.*

Gilt $R_a > 0$ sowie $R_b > 0$ und existiert $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $\delta \leq \min\{R_a, R_b\}$ und

$$\forall_{t\in]-\delta+t_0, t_0+\delta[}\, f(t) = g(t),$$

so folgt $\forall_{i\in\mathbb{N}}\, a_i = b_i$.

Beweis. Klar nach (133). □

Satz 6.19.
Vor.: *Seien $t_0 \in \mathbb{R}$ sowie $a_k \in \mathbb{R}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $f\colon J \to \mathbb{R}$ die durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-t_0)^k$ dargestellte Funktion, d.h.*

$$J = \{t \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-t_0)^n \text{ konvergent in } \mathbb{R}\}$$

und $\forall_{t\in J}\, f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-t_0)^k$.
Beh.: *f ist stetig.*

Bemerkung.

1.) Sei $R \in [0, +\infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-t_0)^n$, also

$$]-R+t_0, t_0+R[\subset J \subset [-R+t_0, t_0+R].$$

In allen Punkten von $]-R+t_0, t_0+R[$ ist f nach 6.16 sogar differenzierbar, also stetig.

Der nicht-triviale Teil der Behauptung

$$R \in J \text{ bzw. } -R \in J \implies f \text{ stetig in } R \text{ bzw. } -R$$

heißt *Abelscher Grenzwertsatz.*

2.) Ist R wie in Bemerkung 1.), so braucht f im Falle $R \in J$ bzw. $-R \in J$ nicht links- bzw. rechtsseitig differenzierbar[43] in R bzw. $-R$ zu sein.

Wir werden in 7.4 sehen, daß $x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)n} x^n$ das Konvergenzintervall $[-1, 1]$ hat und in -1 nicht rechtsseitig differenzierbar ist.

3.) Ein zu 6.19 analoges Resultat für komplexe Potenzreihen, die im inneren ihrer Konvergenzkreise stets *komplex differenzierbar* sind, für die Randpunkte ihrer Konvergenzkreise gilt nicht – auch nicht für evtl. vorhandene reelle Randpunkte, in denen die Potenzreihen konvergieren!

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt $R = 1$ und $t_0 = 0$. (Ansonsten gehen wir von a_k zu $\frac{a_k}{R}$ und von $x \in J$ zu $x \in \{t_0\} + J$ über.) Im übrigen betrachten wir nur den Fall $R = 1 \in J$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ existiert und ist somit gleich $f(1)$. (Der Fall $-R = -1 \in J$ folgt dann durch Übergang von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ zu $\sum_{k=0}^{\infty} -a_k x^k$.)

Für $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ setzen wir $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $s := \lim_{n\to\infty} s_n = f(1)$.

Sei nun $t \in]-1, 1[$.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t^k = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) t^k = (1-t) \left(\sum_{k=0}^{n-1} s_k t^k \right) + s_n t^n.$$

Aus $\lim_{n\to\infty} s_n = f(1)$ und $\lim_{n\to\infty} t^n = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} s_n t^n = 0$, also ergibt sich

$$f(t) = (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} s_k t^k. \tag{134}$$

Außerdem gilt wegen $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$

$$f(1) = s = (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} s\, t^k. \tag{135}$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann existiert zunächst $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \left(k \geq k_0 \Longrightarrow |s_k - s| < \frac{\varepsilon}{2} \right) \tag{136}$$

und sodann $\delta \in]0, 1[$ mit

$$\forall_{t \in]-\delta+1, 1[}\ (1-t) \sum_{k=0}^{k_0} |s_k - s| t^k < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{137}$$

---

[43] Ist $M \subset \mathbb{R}$, $f \colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $t_0 \in \mathbb{R}$ derart, daß $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $I :=]-\delta + t_0, t_0] \subset M$ existiert, so heißt f *in* t_0 *linksseitig differenzierbar* genau dann, wenn $\lim_{0>h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ in $\mathbb{R}$ existiert (d.h. per definitionem wenn $\lim_{h\to 0} \frac{f|_I(t_0+h)-f|_I(t_0)}{h}$ in $\mathbb{R}$ existiert.) Diesen Grenzwert nennt man die *linksseitige Ableitung von* f *in* t_0 und bezeichnet sie mit $\boxed{f'(t_0-)}$.

Analog definiert man im Falle $[t_0, t_0 + \delta[\subset M$ die *rechtsseitige Differenzierbarkeit von* f *in* t_0 und setzt im Falle der Existenz des Limes in $\mathbb{R}$ $\boxed{f'(t_0+)} := \lim_{0<h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ (definiert analog zu oben.) Diese Zahl heißt dann *rechtsseitige Ableitung von* f *in* t_0.

Es ist leicht einzusehen, daß im Falle $t_0 \in \overset{\circ}{M}$ gilt, daß f genau dann differenzierbar in t_0 ist, wenn f in t_0 links- und rechtsseitig differenzierbar ist und zusätzlich $f'(t_0-) = f'(t_0+)$ gilt.

(Beachte, daß der Ausdruck auf der linken Seite der letzten Ungleichung für t von links gegen 1 gegen 0 strebt.)

Nun folgt für alle $t \in]-\delta+1,1[\, \subset]0,1[$

$$\begin{aligned} |f(t)-f(1)| &\overset{(134),(135)}{=} \left|(1-t)\sum_{k=0}^{\infty}(s_k-s)\,t^k\right| \\ &\leq (1-t)\left(\sum_{k=0}^{k_0}|s_k-s|\,t^k\right)+(1-t)\left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty}|s_k-s|\,t^k\right) \qquad (138) \\ &\overset{(136),(137)}{<} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}(1-t)\sum_{k=0}^{\infty}t^k = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die dritte der obigen Bemerkungen im Hinterkopf, sollten wir uns nun natürlich fragen, an welcher Stelle des gerade geführten Beweises die Argumentation im Falle eines komplexen Definitionsbereiches zusammenbricht.

Wir haben bei der Abschätzung (138) ausgenutzt, daß $|t| = t$ gilt. Dies gilt aber natürlich nur für reelle t in einer hinreichend kleinen δ-Umgebung von 1.

Die obige Argumentation kann im allgemeinen Falle nur aufrecht erhalten werden, wenn $|1-t|\sum_{k=0}^{\infty}|t|^k = \frac{|1-t|}{1-|t|}$ beschränkt ist, d.h. wenn t nur in einer der kompakten Mengen $\{a \in U_\delta(1) \,|\, |1-a| \leq C(1-|a|)\}$ mit $C \in [1,+\infty[$ liegen darf.

Hauptsatz 6.20.

Vor.: *Seien $M \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathring{M}$, $n \in \mathbb{N}_+$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in t_0 n-mal differenzierbar ist.*

*Wir definieren dann die n-*te Taylorsche[44] ganz-rationale Funktion *von f in t_0 als die folgende ganz-rationale Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grade $\leq n$*

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(x-t_0)^k = f(t_0)+\frac{f'(t_0)}{1!}(x-t_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(x-t_0)^n.$$

Beh.: g_n approximiert f in t_0 von höherer als n-ter Ordnung*, d.h. per definitionem $f(t_0) = g_n(t_0)$ und*

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-g_n(t)}{(t-t_0)^n} = 0.$$

$R_n := f - g_n\colon M \to \mathbb{R}$ *heißt das* n-te Taylorsche Restglied von f in t_0*.*

Bemerkung. Im Falle $n = 1$ gilt $g_1(x) = f(t_0)+f'(t_0)\,(x-t_0)$, d.h. die Behauptung besagt gerade $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'(t_0)$.

Beweis. $n = 1$: Klar nach Bemerkung.

$n \mapsto n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und die Behauptung gelte für n. Sei dann $f\colon M \to \mathbb{R}$ in t_0 $(n+1)$-mal differenzierbar, also ist f auf einer offenen Umgebung von t_0 n-mal differenzierbar und $f'\colon M \to \mathbb{R}$ in t_0 n-mal differenzierbar.

[44] nach Brook Taylor (1685–1731)

Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die $(n+1)$-te Taylorsche ganz-rationale Funktion von f in t_0 und $\tilde{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die n-te Taylorsche ganz-rationale Funktion von f' in t_0.

Man rechnet mühelos nach, daß gilt $g' = \tilde{g}$, also auch auf dem Definitionsbereich von f', der t_0 enthält,

$$(f-g)' = f' - \tilde{g}. \tag{139}$$

Ferner gilt nach Induktionsvoraussetzung (angewandt auf f')

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f'(t) - \tilde{g}(t)}{(t-t_0)^n} = 0. \tag{140}$$

t_0 ist innerer Punkt von M, also existiert eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit

$$]-\varepsilon + t_0, t_0 + \varepsilon[\subset M,$$

und wir können annehmen, daß f dort differenzierbar ist. Nach dem Mittelwertsatz existiert für jedes $t \in]-\varepsilon + t_0, t_0 + \varepsilon[\setminus \{t_0\}$ eine reelle Zahl ξ_t zwischen t und t_0 mit

$$\begin{aligned}
\frac{f(t) - g(t)}{(t-t_0)^{n+1}} &= \frac{\dfrac{(f-g)(t) - \overbrace{(f-g)(t_0)}^{=0}}{t - t_0}}{(t-t_0)^n} = \frac{(f-g)'(\xi_t)}{(t-t_0)^n} \\
&\overset{(139)}{=} \frac{(f'-\tilde{g})(\xi_t)}{(\xi_t - t_0)^n} \frac{(\xi_t - t_0)^n}{(t-t_0)^n}.
\end{aligned}$$

Im letzten Ausdruck strebt der erste Faktor für t gegen t_0 nach (140) gegen 0 (beachte, daß mit t auch ξ_t gegen t_0 strebt), und der zweite Faktor ist betraglich kleiner als 1 (nach Wahl von ξ_t). Das Produkt strebt daher gegen 0, und die Behauptung ist auch für $n+1$ gezeigt. □

Definition 6.21 (Lokale Extrema, Vorzeichenwechsel). Seien M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $t_0 \in M$. Wir definieren:

(i) *f besitzt in t_0 ein* $\left\{\begin{array}{c} \textit{strenges lokales Maximum} \\ \textit{lokales Maximum} \\ \textit{lokales Minimum} \\ \textit{strenges lokales Minimum} \end{array}\right\}$

$$:\Longleftrightarrow \exists_{\delta \in \mathbb{R}_+} \forall_{t \in M \cap]-\delta + t_0, t_0 + \delta[\setminus \{t_0\}}\, f(t) \left\{\begin{array}{c} < \\ \le \\ \ge \\ > \end{array}\right\} f(t_0).$$

f besitzt in t_0 ein lokales Extremum genau dann, wenn f in t_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum besitzt.

(ii) *f besitzt in t_0 einen Vorzeichenwechsel von* $\left\{\begin{array}{c} - \\ + \end{array}\right\}$ *nach* $\left\{\begin{array}{c} + \\ - \end{array}\right\}$

$:\Longleftrightarrow \exists_{\delta \in \mathbb{R}_+} \forall_{t \in M \cap]-\delta + t_0, t_0 + \delta[}$

$$\left(t < t_0 \Rightarrow f(t) \left\{\begin{array}{c} < \\ > \end{array}\right\} 0\right) \wedge \left(t > t_0 \Rightarrow f(t) \left\{\begin{array}{c} > \\ < \end{array}\right\} 0\right).$$

6.22 (Lokale Extrema).
Hauptsatz 1.

Vor.: *Seien $M \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in \overset{\circ}{M}$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in t_0 differenzierbar ist.*
Beh.: *f besitzt in t_0 ein lokales Extremum $\Longrightarrow f'(t_0) = 0$.*

Beweis. klar nach 6.3. (Führe $f'(t_0) > 0$ bzw. $f'(t_0) < 0$ zum Widerspruch.) □

Hauptsatz 2.

Vor.: *Seien $M \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in \overset{\circ}{M}$, $n \in \mathbb{N}_+$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in t_0 n-mal differenzierbar ist. Ferner gelte*

$$f'(t_0) = f''(t_0) = \ldots = f^{(n-1)}(t_0) = 0,$$
$$f^{(n)}(t_0) \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0.$$

Beh.:

(i) n gerade
$$\Longrightarrow f \text{ besitzt in } t_0 \text{ ein strenges lokales } \begin{Bmatrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{Bmatrix}.$$

(ii) n ungerade

$\Longrightarrow$ f besitzt in t_0 kein lokales Extremum (genauer besitzt $(f - f(t_0))$ in t_0 einen Vorzeichenwechsel von $\begin{Bmatrix} - \\ + \end{Bmatrix}$ nach $\begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix}$).

Beispiel. Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $f := x^n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gilt

$$\forall_{i \in \mathbb{N}}\, f^{(i)}(x) = n(n-1)\cdots(n-i+1)\, x^{n-i} = \frac{n!}{(n-i)!}\, x^{n-i},$$

also $f'(0) = f^{(n-1)}(0) = 0$ und $f^{(n)}(0) = n! > 0$.

Daher besitzt f in 0 im Falle n gerade ein strenges lokales Minimum und im Falle n ungerade einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für $t \in M \setminus \{t_0\}$

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - f(t_0)}{(t-t_0)^n} - \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} &= \frac{f(t) - f(t_0) - \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n}{(t-t_0)^n} \\ &= \frac{f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}\,(t-t_0)^k}{(t-t_0)^n}, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck konvergiert nach 6.20 für t gegen t_0 gegen 0, d.h. nach Voraussetzung

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{(t-t_0)^n} = \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} 0.$$

Hieraus folgt offenbar die Existenz einer Zahl $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $]-\delta+t_0, t_0+\delta[\,\subset M$ und

$$\forall_{t\in]-\delta+t_0,t_0+\delta[\setminus\{t_0\}} \frac{f(t)-f(t_0)}{(t-t_0)^n} \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0. \tag{141}$$

Zu (i): Ist n gerade, so gilt für t wie in (141) $(t-t_0)^n > 0$, also nach (141)

$$f(t) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} f(t_0),$$

d.h. f besitzt in t_0 ein strenges lokales $\left\{ \begin{array}{c} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \right\}$.

Zu (ii): Ist hingegen n ungerade, so gilt für t wie in (141)

$$t < t_0 \Longrightarrow (t-t_0)^n < 0 \overset{(141)}{\Longrightarrow} f(t)-f(t_0) \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\} 0,$$

und

$$t > t_0 \Longrightarrow (t-t_0)^n > 0 \overset{(141)}{\Longrightarrow} f(t)-f(t_0) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0,$$

d.h. $f - f(t_0)$ besitzt in t_0 einen Vorzeichenwechsel von $\left\{ \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \right\}$ nach $\left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\}$. □

Bemerkung. Aus (i) im Falle $n=2$ und Hauptsatz 1 folgt:

Seien $M \subset \mathbb{R}$ und $t_0 \in \mathring{M}$. Besitzt die Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ in t_0 ein lokales $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$, so besitzt sie dort kein strenges lokales $\left\{ \begin{array}{c} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \right\}$, und es gilt

$$f'(t_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(t_0) \left\{ \begin{array}{c} \le \\ \ge \end{array} \right\} 0.$$

Bei den folgenden beiden Sätzen handelt es sich um Anwendungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes 6.11:

Hauptsatz 6.23 (Regel von de l'Hospital[45]).
Vor.: *Seien $\alpha, \beta \in \widehat{\mathbb{R}}$ mit $\alpha < \beta$, $J :=]\alpha, \beta[$, $\overline{J} := [\alpha, \beta] \subset \widehat{\mathbb{R}}$ sowie $a \in \overline{J}$ und seien $f, g\colon J \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit*

$$\forall_{t\in J\setminus\{a\}}\, g'(t) \neq 0. \tag{142}$$

Ferner gelte entweder

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \tag{143}$$

oder

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty. \tag{144}$$

[45]Johann Bernoulli (1667–1748) unterrichtete Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital (1661–1704) als Privatlehrer. Der Marquis kaufte Bernoullis Ergebnisse (u.a. diesen Satz) und veröffentlichte sie dann zusammen mit eigenen unter seinem Namen in *Analyse des infiniment petits.*

[Im Falle (143) folgt[46] *aus (142)*

$$\forall_{t\in J\setminus\{a\}} g(t) \neq 0, \tag{145}$$

und im Falle (144) dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (145) gilt.]
Beh.: *Wenn* $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *in* $\widehat{\mathbb{R}}$ *existiert, so existiert* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *in* $\widehat{\mathbb{R}}$ *und die Limites stimmen überein.*

Beweis. Wir zeigen den Satz im Falle $a = \alpha$. Der Fall $a = \beta$ läuft analog, und im Falle $a \in \,]\alpha,\beta[$ wende man diese Fälle auf $J \cap \,]-\infty, a[$ sowie $J \cap \,]a, +\infty[$ an und nutze aus, daß $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ in $\widehat{\mathbb{R}}$ existiert, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und übereinstimmen.[47]

Nach Voraussetzung existiert $c := \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \widehat{\mathbb{R}}$. Es genügt nun zu zeigen, daß gilt

$$\forall_{c_1\in\mathbb{R}, c_1<c}\exists_{s\in J, s>a}\forall_{t\in]a,s[}\; c_1 \leq \frac{f(t)}{g(t)}, \tag{146}$$

$$\forall_{c_2\in\mathbb{R}, c_2>c}\exists_{s\in J, s>a}\forall_{t\in]a,s[}\; \frac{f(t)}{g(t)} \leq c_2. \tag{147}$$

(Ggf. ist eine der beiden Aussagen übrigens leer, weil es z.B. im Falle $c = -\infty$ kein c_1 wie oben gibt.)

Wir zeigen (147). Analog sieht man (146) ein.

Sei also $c_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_2 > c$. Nach Voraussetzung existiert dann $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{s} > a$ und

$$\forall_{\xi\in]a,\tilde{s}[}\; \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < c_2.$$

Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz 6.11 folgt daher

$$\forall_{t,\tilde{t}\in]a,\tilde{s}[, t\neq\tilde{t}}\; \frac{f(t)-f(\tilde{t})}{g(t)-g(\tilde{t})} < c_2. \tag{148}$$

---

[46] g läßt sich in a stetig durch 0 fortsetzen. Zwischen einer weiteren Nullstelle von g und a läge daher nach dem Mittelwertsatz eine Nullstelle von g', im Widerspruch zur Voraussetzung.

[47] Ist $M \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $f\colon M \setminus \{t_0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, daß $]-\delta+t_0, t_0[\, \subset M$ für ein $\delta \in \mathbb{R}_+$, so heißt im Falle der Existenz des Limes in $\widehat{\mathbb{R}}$

$$\boxed{f(t_0-)} := \boxed{\lim_{h\to 0-} f(t_0+h)} := \lim_{0>h\to 0} f(t_0+h)$$

der *linksseitige Grenzwert* oder *Limes von* f *in* t_0.

Analog definiert man im Falle $]t_0, t_0+\delta[\, \subset M$ den *rechtsseitigen Grenzwert* oder *Limes von* f *in* t_0 und schreibt im Falle der Existenz des Limes in $\widehat{\mathbb{R}}$

$$\boxed{f(t_0+)} := \boxed{\lim_{h\to 0+} f(t_0+h)} = \lim_{0<h\to 0} f(t_0+h).$$

Es ist leicht einzusehen, daß im Falle $]-\delta+t_0, t_0+\delta[\setminus\{t_0\} \subset M$ gilt, daß $f(t)$ genau dann für t gegen t_0 konvergiert, wenn f links- und rechtsseitig für t gegen t_0 konvergiert und zusätzlich $f(t_0-) = f(t_0+)$ gilt.

1. Fall: Es gilt (143). Mit $s := \tilde{s}$ folgt dann (147), da nach (148) für $t \in]a,s[$ gilt

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{]a,s[\ni\tilde{t}\to a} \frac{f(t)-f(\tilde{t})}{g(t)-g(\tilde{t})} \le c_2.$$

2.Fall: Es gilt (144). Sei $\tilde{t} \in]a,\tilde{s}[$. Dann existiert nach Voraussetzung $\tilde{\tilde{s}} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{\tilde{s}} > a$ derart, daß für alle $t \in]a,\tilde{\tilde{s}}[$ gilt

$$1 - \frac{g(\tilde{t})}{g(t)} > 0 \tag{149}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{f(t)}{g(t)} &= \frac{f(t)-f(\tilde{t})}{g(t)-g(\tilde{t})}\,\frac{g(t)-g(\tilde{t})}{g(t)} + \frac{f(\tilde{t})}{g(t)} \\ &= \frac{f(t)-f(\tilde{t})}{g(t)-g(\tilde{t})}\left(1-\frac{g(\tilde{t})}{g(t)}\right) + \frac{f(\tilde{t})}{g(t)} \\ &\overset{(148),(149)}{<} c_2\left(1-\frac{g(\tilde{t})}{g(t)}\right) + \frac{f(\tilde{t})}{g(t)}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck strebt für t von rechts gegen a gegen c_2, also folgt die Existenz von $s \in]a,\tilde{\tilde{s}}[$ mit

$$\forall_{t\in]a,s[}\frac{f(t)}{g(t)} \le c_2,$$

d.h. (147) ist gezeigt und der Hauptsatz vollständig bewiesen. □

Bemerkung. Durch Anwendung auf Real- und Imaginärteil kann der letzte Satz ins Komplexe übertragen werden.

Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Die Regel von de l'Hospital ergibt dann

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{n\,x^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n\,x^n} = 0,$$

d.h. „ln strebt schwächer gegen unendlich als jede Potenzfunktion."

n-malige Anwendung der Regel liefert außerdem

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty,$$

d.h. „e^x strebt schneller gegen unendlich als jede Potenzfunktion."

Hauptsatz 6.24 (Taylorscher Satz)**.**
Vor.: *Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion. Ferner seien $t, t_0 \in J$.*
Beh.: *Es existiert eine Zahl $\vartheta \in]0,1[$ derart, daß gilt*

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(t_0+\vartheta(t-t_0))}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}.$$

Bemerkung.

1.) Der Spezialfall $n = 0$ von 6.24 ist im wesentlichen der Mittelwertsatz 6.10.

2.) Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $f^{(n+1)}$ in einer Umgebung von t_0 beschränkt ist, folgt aus 6.24 die Behauptung von 6.20, denn dann gilt
$$\lim_{t\to t_0} \frac{f^{(n+1)}(t_0 + \vartheta(t-t_0))}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1} = 0.$$
Aber in 6.20 war die Behauptung unter der schwächeren Voraussetzung der n-maligen Differenzierbarkeit von f in t_0 gezeigt worden.

Beweis. Im Falle $t = t_0$ ist die Behauptung trivial (mit $\vartheta = \frac{1}{2}$).

Sei daher $t \neq t_0$. Wir definieren differenzierbare Funktionen $F, G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$F(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(t-x)^k \quad \text{und} \quad G(x) := (t-x)^{n+1}.$$

Dann gilt
$$\begin{aligned}
F'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(t-x)^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x)}{k!}k}_{=\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}}(t-x)^{k-1}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(t-x)^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(t-x)^k\right) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}, \\
G'(x) &= -(n+1)(t-x)^n.
\end{aligned}$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz 6.11 existiert nun eine Zahl ξ, die echt zwischen t und t_0 liegt, d.h. $\xi = t_0 + \vartheta(t-t_0)$ mit $\vartheta \in \,]0,1[$ derart, daß gilt
$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}}_{=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}} &= \frac{F(t_0) - F(t)}{G(t_0) - G(t)} \\
&= \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k\right) - f(t)}{(t-t_0)^{n+1}},
\end{aligned}$$
und hieraus folgt die Behauptung. □

Korollar 6.25. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ganz-rationale Funktion vom Grade $\leq n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $t_0 \in \mathbb{R}$*
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(x-t_0)^k.$$

Beweis. Klar nach 6.24. □

7 Elementare Funktionen

Die Funktionen, die wir in diesem Kapitel betrachten, sind von fundamentaler Bedeutung in der Mathematik und den Naturwissenschaften, insbesondere in der Physik und der Biologie.

Die wichtigste der Funktionen, die wir als elementar bezeichnen wollen, ist die Exponentialfunktion. Alle weiteren im folgenden zu besprechenden Funktionen stehen mit ihr im Zusammenhang. Entweder handelt es sich um solche, die durch die Exponentialfunktion enthaltende Ausdrücke definiert werden können, oder deren Umkehrfunktionen.

7.1 (Die Exponentialfunktion)**.** Per definitionem gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots . \tag{150}$$

[Beachte, daß das Quotientenkriterium die Konvergenz der Reihe auf der r.S. liefert.]

Insbesondere gilt $\exp(0) = 1$, und man definiert die *Eulersche Zahl*

$$\boxed{\mathrm{e}} := \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots \ (= 2,718281\dots).$$

Nach 6.17 ist $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und gemäß 6.16 gilt

$$\exp' = \exp . \tag{151}$$

[$\exp' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.]

Es gilt das *Additionstheorem der Exponentialfunktion*

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ \exp(a+b) = \exp(a)\cdot\exp(b). \tag{152}$$

[Für fest gewählte $a, b \in \mathbb{R}$ sei

$$f := \exp(a+b-x)\cdot\exp(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Mittels (151) rechnet man nach, daß $f' = 0$ gilt, also folgt aus 6.12: f ist konstant. Insbesondere gilt $f(0) = f(b)$ und d.h. genau (152).]

Aus (152) folgt

$$\forall_{a\in\mathbb{R}}\ \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \tag{153}$$

(wegen $\exp(a)\exp(-a) = \exp(0) = 1$.)

Wir behaupten

$$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+. \tag{154}$$

[„$\subset$“ Sei $t \in \mathbb{R}$. Im Falle $t \geq 0$ gilt

$$\exp(t) = 1 + \underbrace{t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots}_{\geq 0} > 0.$$

Im Falle $t < 0$ gilt $-t > 0$, also $\exp(-t) > 0$ und folglich nach (153) auch $\exp(t) > 0$.

„$\supset$" Wegen $\forall_{n\in\mathbb{N}} \exp(n) = 1 + \underbrace{n} + \frac{n^2}{2} + \ldots \geq n$ gilt $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = +\infty$, folglich gilt nach (153) auch

$$\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\exp(n)} = 0.$$

Ferner ist exp stetig (sogar differenzierbar), also folgt aus dem Zwischenwertsatz offenbar „$\supset$".]

Aus (154), (151) folgt $\forall_{t\in\mathbb{R}} \exp'(t) = \exp(t) > 0$, also ist $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend (und surjektiv).

Bemerkung. Analog zum Beweis von (152) kann man mittels „komplexer Differentialrechnung" zeigen, daß (152) auch für die komplexe Exponentialfunktion und $a, b \in \mathbb{C}$ gilt, also folgt

$$\exp(x + \mathrm{i}y) = \exp(x) \cdot \exp(\mathrm{i}y).$$

Des weiteren gilt wegen 4.37 (i)

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}y) &= 1 + \mathrm{i}y + \frac{(\mathrm{i}y)^2}{2} + \frac{(\mathrm{i}y)^3}{6} + \frac{(\mathrm{i}y)^4}{24} + \frac{(\mathrm{i}y)^5}{120} + \ldots \\
&= 1 + \mathrm{i}y - \frac{y^2}{2} - \mathrm{i}\frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \mathrm{i}\frac{y^5}{120} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - + \ldots\right) + \mathrm{i}\left(y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} - + \ldots\right) \\
&= \cos(y) + \mathrm{i}\sin(y),
\end{aligned}$$

also ergibt sich die *Eulersche Formel*

$$\exp(x + \mathrm{i}y) = \exp(x)\left(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\right). \tag{155}$$

Wir beweisen in 7.2 die 2π-Periodizität von cos und sin, wobei π die *Kreiszahl* ist. Also folgt aus der Eulerschen Formel

$$\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^* \text{ ist } 2\pi\mathrm{i}\text{-periodisch.}$$

Übrigens folgt ebenfalls aus der Eulerschen Formel, daß $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ gilt. Genauer bildet exp für jedes halboffene Intervall I der Länge 2π die Menge $\mathbb{R} \times I$ bijektiv auf $\mathbb{C}^*$ ab.

7.2 (Die Funktionen Sinus und Cosinus)**.** Per definitionem gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots, \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots.
\end{aligned} \tag{156}$$

[Beachte, daß die beiden Reihen in (156) nach dem Quotientenkriterium konvergieren.]

Insbesondere gilt

$$\sin(0) = 0, \ \ \cos(0) = 1, \ \ \sin(-x) = -\sin(x), \ \ \cos(-x) = \cos(x).$$

Nach 6.17 sind $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, und nach 6.18 gilt offenbar

$$\sin' = \cos \quad \text{und} \quad \cos' = -\sin. \tag{157}$$

Es gelten die *Additionstheoreme von Sinus und Cosinus*

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R}} \quad \begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \end{aligned} \tag{158}$$

also insbesondere $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

[Zum Beweis von (158) betrachte für $a, b \in \mathbb{R}$

$$f := \sin(a+b-x)\cdot\cos(x) + \cos(a+b-x)\cdot\sin(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$g := \cos(a+b-x)\cdot\cos(x) - \sin(a+b-x)\cdot\sin(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

f und g sind konstant (wegen $f' = 0, g' = 0$), also gilt $f(0) = f(b)$ sowie $g(0) = g(b)$, und dies liefert die Behauptung.]

Ferner gilt

$$\sin^2 + \cos^2 = 1 \tag{159}$$

[$f := \sin^2 + \cos^2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (wegen $f' = 0$) konstant vom Wert $f(0) = 1$.]

Wir werden nun zeigen, daß cos in $]0, 2[$ genau eine Nullstelle besitzt. Hierzu zeigen wir zunächst

$$\cos(0) = 1 > 0 \quad \text{und} \quad \cos(2) < 0. \tag{160}$$

[$\cos(0) = 1$ haben wir oben schon konstatiert.

$$\begin{aligned} \cos(2) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!} - + \ldots \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\right) - \ldots \\ &= 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} \underbrace{- \frac{2^6}{6!}\underbrace{\left(1 - \frac{2^2}{7\cdot 8}\right)}_{>0} - \frac{2^{10}}{10!}\underbrace{\left(1 - \frac{2^2}{11\cdot 12}\right)}_{>0} - \ldots}_{<0} \\ &< 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0. \ \ ] \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\forall_{t\in]0,2[}\ \sin(t) > 0. \tag{161}$$

[Für $t \in\ ]0, 2[$ gilt

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + - \ldots = t\underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{2\cdot 3}\right)}_{>0} + \frac{t^5}{5!}\underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{6\cdot 7}\right)}_{>0} + \ldots > 0. \ \ ]$$

Wegen $\forall_{t\in]0,2[}\ \cos'(t) \overset{(157)}{=} -\sin(t) \overset{(161)}{<} 0$ ist $\cos|_{[0,2]}$ nach 6.11 streng monoton fallend. Aus (161) und dem Zwischenwertsatz folgt daher:

Es existiert genau eine Zahl $\xi \in]0,2[$ mit $\cos(\xi) = 0$. Wir definieren nun die *Kreiszahl*

$$\boxed{\pi} := 2\xi \ (= 3,141593\ldots).$$

Dann gilt also

$$\frac{\pi}{2} \text{ ist die einzige Nullstelle von } \cos|_{]0,2[} \tag{162}$$

und

$$\cos|_{[0,\frac{\pi}{2}]} \text{ ist streng monoton fallend von } \cos(0) = 1 \text{ nach } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Wegen $\forall_{t\in]0,\frac{\pi}{2}[}\ \sin'(t) = \cos(t) > 0$, $\sin(0) = 0$ und $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ gilt weiterhin

$$\sin|_{[0,\frac{\pi}{2}]} \text{ ist streng monoton wachsend von } \sin(0) = 0 \text{ nach } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Wir erhalten

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \overset{(158)}{=} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cos(-x) + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \sin(-x) = \cos(-x) = \cos(x),$$

$$\cos(\pi) \overset{(158)}{=} \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = -1,$$

$$\sin(\pi) \overset{(158)}{=} 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0,$$

$$\cos(\pi - x) \overset{(158)}{=} \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\,\underbrace{\cos(-x)}_{=\cos(x)} - \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \sin(-x) = -\cos(x),$$

$$\cos(\pi + x) \overset{(158)}{=} \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} \cos(x) - \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \sin(x) = -\cos(x),$$

$$\cos(2\pi + x) \overset{(158)}{=} \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} \cos(x) - \underbrace{\sin(2\pi)}_{= 2\underbrace{\sin(\pi)}\cos(\pi) = 0} \sin(x) = \cos(x),$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \overset{(158)}{=} \cos(x)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x) \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1} = \sin(x).$$

Hieraus folgt

$$\sin \text{ und } \cos \text{ sind } 2\pi-\text{periodisch}, \tag{163}$$

$$\overline{\sin}^1(\{0\}) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{und} \quad \overline{\cos}^1(\{0\}) = \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \tag{164}$$

Bemerkung.

1.) Es folgt leicht, daß die Abbildung

$$[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))$$

den Einheitskreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$ parametrisiert.

Für $t \in [0,2\pi]$ hat der auf dem Einheitskreis von $(\cos(0), \sin(0)) = (1,0)$ gegen den Uhrzeigersinn nach $(\cos(t), \sin(t))$ verlaufende Bogen die Länge

$$\begin{aligned}\int_0^t \left\|(\cos(x), \sin(x))'(\tau)\right\| \mathrm{d}\tau &= \int_0^t \left\|(-\sin(x), \cos(x))'(\tau)\right\| \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \sin^2(\tau) + \cos^2(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{d}\tau = t,\end{aligned}$$

vgl. Kapitel 11.

2.) Aus der Eulerschen Formel (155) folgt

$$\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\exp(\mathrm{i}x) - \exp(-\mathrm{i}x)\right), \tag{165}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)\right). \tag{166}$$

3.) Die komplexen Funktionen $\sin, \cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind surjektiv, vgl. Funktionentheorie.

7.3 (Die natürliche Logarithmusfunktion)**.**

(i) Nach 7.1 ist $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bijektiv und streng monoton wachsend. Wir definieren den *logarithmus naturalis* (*natürlichen Logarithmus*)

$$\ln := \exp^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{167}$$

also ist

$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ bijektiv, streng monoton wachsend und } \ln(1) = 0,\ \ln(\mathrm{e}) = 1. \tag{168}$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt aus $\exp'(t) = \exp(t) > 0$ und 6.7, daß ln in $\exp(t) \in \mathbb{R}_+$ differenzierbar ist mit $\ln'(\exp(t)) = \frac{1}{\exp'(t)} = \frac{1}{\exp(t)}$. Daher gilt

$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist differenzierbar mit } \ln' = \frac{1}{x}|_{\mathbb{R}_+}. \tag{169}$$

Für alle $c, d \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\ln(\exp(c) \cdot \exp(d)) = \ln(\exp(c+d)) = c + d = \ln(\exp(c)) + \ln(\exp(d)),$$

also gilt

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}_+}\ \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \tag{170}$$

und somit (wegen $\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(a) \overset{(170)}{=} \ln(1) = 0$)

$$\forall_{a \in \mathbb{R}_+}\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a). \tag{171}$$

(ii) (Potenzreihenentwicklung der Funktion $\ln(1+x)$)

Für jedes $t \in \,]-1,1[$ gilt

$$(\ln(1+x))'(t) \overset{(169)}{=} \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k,$$

d.h.

$$(\ln(1+x))'|_{]-1,1[} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots \tag{172}$$

Die rechte Seite von (172) ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1, die durch gliedweise Differentiation aus der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \ldots$$

erhalten wird, und letztere hat das Konvergenzintervall $]-1,1]$, vgl. 4.25 und 4.36.

Wir definieren $f\colon\,]-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall_{t\in]-1,1]}\, f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}t^{k+1}. \tag{173}$$

Aus 6.16, (173) und (172) folgt

$$f|_{]-1,1[} \text{ ist differenzierbar und } \forall_{t\in]-1,1[}\quad \underbrace{f'(t) = \ln(1+x)'(t),}_{\Leftrightarrow\, (f-\ln(1+x))'(t)=0} \tag{174}$$

und aus dem Abelschen Grenzwertsatz 6.19 folgt zusätzlich

$$f \text{ ist stetig in } 1. \tag{175}$$

Aus (174) und $(f - \ln(1+x))(0) = \underbrace{f(0)}_{=0} - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = 0$ ergibt sich

$$\forall_{t\in]-1,1[}\, f(t) = \ln(1+t). \tag{176}$$

Aus (175), (176) folgt, daß (176) auch füt $t = 1$ gilt, d.h.

$$f(1) = \ln(1+1) = \ln(2). \tag{177}$$

Wegen (176), (177), (173) ist gezeigt

$$\ln(1+x)|_{]-1,1]} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \ldots,$$

insbesondere

$$\boxed{\ln(2) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \ldots.}$$

Beispiel 7.4. Nach 7.3 (ii) gilt

$$\begin{aligned}
\forall_{t\in]-1,1]}\,(1+t)\ln(1+t) &= (1+t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\,t^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\,t^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\,t^{k+2}\\
&= t+\sum_{k=2}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{(-1)^{k-2}}{k-1}\right)}_{=(-1)^{k-1}\frac{-1}{(k-1)k}}t^k\\
&= t+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)k}\,t^k,
\end{aligned}$$

und diese Reihe konvergiert für $t=-1$ gegen

$$\begin{aligned}
-1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k} &= -1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\underbrace{\frac{1}{(k-1)k}}_{=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}}\\
&= -1+\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-+\ldots+-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=-1+1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.
\end{aligned}$$

Die Potenzreihe $x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)k}\,x^k$ stellt nun nach dem Abelschen Grenzwertsatz 6.19 und 6.16 eine stetige Funktion

$$f\colon[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$$

mit $f(-1)=0$ und $\forall_{t\in]-1,1]}\,f(t)=(1+t)\ln(1+t)$ dar, die auf $]-1,1[$ differenzierbar und offenbar in 1 linksseitig differenzierbar ist.

f ist in -1 aber nicht rechtsseitig differenzierbar:
Es gilt nämlich $\lim_{0<h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{0<h\to 0}\frac{h\ln(h)}{h}=-\infty$.

7.5 (Die allgemeine Potenz)**.**

(i) Wir definieren

$$\forall_{a\in\mathbb{R}_+}\forall_{b\in\mathbb{R}}\,\boxed{a^b}:=\exp\left(b\ln(a)\right). \tag{178}$$

Bemerkung.

1.) In 2.46 (i) war a^b definiert worden für alle $a\in\underline{\mathbb{R}}\supset\mathbb{R}_+$, und $b\in\underline{\mathbb{Z}}\subset\mathbb{R}$ als $a^b=\prod_{i=1}^{b}a$ für $b\geq 0$ und $a^b=\frac{1}{a^{-b}}$ für $b<0$. Die frühere Definition ist mit (178) verträglich.

[Es gilt nämlich für $a\in\mathbb{R}_+$

$$\exp\left(0\cdot\ln(a)\right)=\exp(0)=1$$

und für $b \in \mathbb{N}$ nach 7.1 (152)

$$\begin{aligned}\exp\left((b+1)\ \ln(a)\right) &= \exp\left(b\ \ln(a) + \ln(a)\right) \\ &= \exp\left(b\ \ln(a)\right)\ \exp\left(\ln(a)\right) = \exp\left(b \ln(a)\right)\ a\end{aligned}$$

sowie nach 7.1 (153)

$$\exp\left(-b\ \ln(a)\right) = \frac{1}{\exp\left(b\ \ln(a)\right)}. \quad]$$

2.) Im Spezialfall $a = \mathrm{e}$ gilt nach (178) für jedes $b \in \mathbb{R}$ wegen $\ln(\mathrm{e}) = 1$

$$\mathrm{e}^b = \exp(b).$$

Es gilt für alle $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$, $b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}_+$

$$a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1+b_2}, \tag{179}$$

$$\left(a^{b_1}\right)^{b_2} = a^{b_1 \cdot b_2}, \tag{180}$$

$$a_1^b \cdot a_2^b = (a_1 \cdot a_2)^b, \tag{181}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}, \tag{182}$$

$$\begin{gathered} a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m, \\ \text{insbesondere } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}. \end{gathered} \tag{183}$$

[Zu (179): l.S. $= \exp\left(b_1 \ln(a)\right) \cdot \exp\left(b_2 \ln(a)\right) = \exp\left((b_1 + b_2) \ln(a)\right) =$ r.S.
Zu (180):

$$\begin{aligned}\text{l.S.} &= \exp\left(b_2 \ln(a^{b_1})\right) = \exp\left(b_2 \ln\left(\exp\left(b_1 \ln(a)\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(b_2\, b_1 \ln(a)\right) = \text{ r.S.}\end{aligned}$$

Zu (181):

$$\begin{aligned}\text{l.S.} &= \exp\left(b \ln(a_1)\right) \cdot \exp\left(b \ln(a_2)\right) = \exp\left(b(\ln(a_1) + \ln(a_2))\right) \\ &= \exp\left(b \ln(a_1 a_2)\right) = \text{ r.S.}\end{aligned}$$

Zu (182): l.S. $= \exp\left(-b \ln(a)\right) = \dfrac{1}{\exp\left(b \ln(a)\right)} =$ r.S.

Zu (183):

$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n &= \exp\left(\frac{m}{n} \ln(a)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\frac{m}{n} \ln(a)\right)\right) = \exp\left(n \frac{m}{n} \ln(a)\right) \\ &= \exp\left(m \ln(a)\right) = a^m\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, also auch $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ und nach (180) $\sqrt[n]{a}^m = a^{\frac{m}{n}}$.]

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}_+$ fest vorgegeben. Dann heißt

$$a^x \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die *Exponentialfunktion zur Basis a.*

Im Spezialfall $a = \mathrm{e} = \exp(1)$ gilt also

$$\mathrm{e}^x = \exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{184}$$

Es folgt offenbar

$$a^x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist differenzierbar mit } (a^x)' = \ln(a)\, a^x. \tag{185}$$

Im Falle $a = 1$ ist a^x konstant vom Wert 1. Im Falle $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ gilt $a^x(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$, und a^x ist streng monoton wachsend für $a > 1$ sowie streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

(iii) Sei $b \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben. Dann heißt

$$x^b\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

Potenzfunktion zum Exponenten b.[48] Es folgt

$$x^b\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist differenzierbar mit } \left(x^b\right)' = b\, x^{b-1}. \tag{186}$$

[Die Differenzierbarkeit ist klar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \left(x^b\right)' &= \exp\left(b \ln(x)\right)' = \exp'\left(b\ln(x)\right) b \ln'(x) = \exp\left(b\ln(x)\right) b \frac{1}{x} \\ &= b x^b \frac{1}{x} \overset{(179),(182)}{=} b x^{b-1}. \quad] \end{aligned}$$

Im Falle $b = 0$ ist x^b konstant vom Wert 1.

Im Falle $b \neq 0$ gilt $x^b(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ und x^b ist streng monoton wachsend für $b > 0$ sowie streng monoton fallend für $b < 0$. Insbesondere bildet x^b $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab, und es gilt für die Umkehrfunktion

$$\left(x^b\right)^{-1} = x^{\frac{1}{b}}. \tag{187}$$

[Denn nach (180) gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$ $\left(t^b\right)^{\frac{1}{b}} = t = \left(x^{\frac{1}{b}}\right)^b$.]

7.6 (Die allgemeine Logarithmusfunktion). Sei $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Nach 7.5 (ii) ist $a^x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bijektiv und streng monoton wachsend für $a > 1$ sowie streng monoton fallend für $0 < a < 1$. Wir definieren den *Logarithmus zur Basis a*

$$\log_a := (a^x)^{-1} \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{188}$$

(Der Exponent -1 meint hier die Umkehrfunktion und nicht etwa das Reziproke von a^x.)

[48] Für $b \in \mathbb{N}$ bzw. $b \in -\mathbb{N}_+$ kann man x^b natürlich wie früher auch als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ betrachten.

Für $a = e$ erhalten wir offenbar den natürlichen Logarithmus ln.

Für $a = 2$ nennt man $\log_a$ auch den *binären, dualen* oder *dyadischen Logarithmus* (i.Z. ld für *logarithmus dualis*) und für $a = 10$ den *gewöhnlichen, Briggschen* oder *dekadischen Logarithmus* (i.Z. lg für *logarithmus generalis*).

Die Definition impliziert

$$\log_a\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ bijektiv und streng monoton} \begin{cases} \text{wachsend} & \text{für } a > 1, \\ \text{fallend} & \text{für } 0 < a < 1, \end{cases} \tag{189}$$

und aus $x = a^{\log_a(x)} = \exp\left(\log_a(x)\ln(a)\right)$ folgt sofort

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \tag{190}$$

also auch

$$\log_a\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist differenzierbar mit } \log_a{}' = \frac{1}{\ln(a)x}\Big|_{\mathbb{R}_+}. \tag{191}$$

Für alle $b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a(b_1) + \log_a(b_2) \tag{192}$$

$$\log_a(b_1^{b_2}) = b_2 \cdot \log_a(b_1) \tag{193}$$

$$\log_a(-b) = \frac{1}{\log_a(b)} \tag{194}$$

[(192) und (194) haben wir in 7.3 (i) schon für $a = e$ gezeigt und folgen daher aus (190). Ebenfalls hieraus und $\ln(b_1^{b_2}) = \ln\left(\exp(b_2\ln(b_1))\right) = b_2\ln(b_1)$ folgt (193).]

7.7 (Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus)**.** Wir definieren für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \\ \cosh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots. \end{aligned} \tag{195}$$

[Beachte, daß die beiden Reihen in (195) nach dem Quotientenkriterium konvergieren.]

Insbesondere gilt

$$\sinh(0) = 0, \quad \cosh(0) = 1, \quad \sinh(-x) = -\sinh(x), \quad \cosh(-x) = \cosh(x)$$

sowie

$$\exp(x) = \cosh(x) + \sinh(x),$$

also auch

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \tfrac{1}{2}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right), \\ \sinh(x) &= \tfrac{1}{2}\left(\exp(x) - \exp(-x)\right). \end{aligned} \tag{196}$$

Nach 6.17 sind $\sinh, \cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, und nach 6.18 gilt offenbar

$$\sinh' = \cosh \quad \text{und} \quad \cosh' = \sinh\,. \tag{197}$$

Es gelten die *Additionstheoreme von Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus*

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R}} \quad \begin{aligned} \sinh(a+b) &= \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b), \\ \cosh(a+b) &= \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b), \end{aligned} \tag{198}$$

insbesondere $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ und $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$.

[Zum Beweis von (198) betrachte für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f &:= \sinh(a+b-x)\cdot\cosh(x) + \cosh(a+b-x)\cdot\sinh(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ g &:= \cosh(a+b-x)\cdot\cosh(x) + \sinh(a+b-x)\cdot\sinh(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

f und g sind konstant (wegen $f' = 0, g' = 0$), also gilt $f(0) = f(b)$ sowie $g(0) = g(b)$, und dies liefert die Behauptung.]

Ferner gilt

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1 \tag{199}$$

[$f := \cosh^2 - \sinh^2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (wegen $f' = 0$) konstant vom Wert $f(0) = 1$.]

Offenbar gilt

$$\forall_{t\in\mathbb{R}_+} \sinh(t) > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to+\infty} \sinh(t) = +\infty, \tag{200}$$

also folgt aus $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ und dem Zwischenwertsatz

$$\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}. \tag{201}$$

Weiterhin gilt

$$\forall_{t\in[0,+\infty[} \cosh(t) \geq 1 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to+\infty} \cosh(t) = +\infty,$$

also folgt aus $\cosh(-x) = \cosh(x)$, $\cosh(0) = 1$ und dem Zwischenwertsatz

$$\cosh(\mathbb{R}) = [1, \infty[. \tag{202}$$

Des weiteren gilt

$$\sinh \text{ und } \cosh|_{[0,+\infty[} \text{ sind streng monoton wachsend.} \tag{203}$$

[(203) folgt aus

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \sinh'(t) = \cosh(t) \overset{(202)}{>} 0 \quad \text{und} \quad \forall_{t\in\mathbb{R}_+} \cosh'(t) = \sinh(t) \overset{(200)}{>} 0$$

sowie 6.12.]

Bemerkung.

1.) Es folgt leicht, daß die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (\cosh(t), \sinh(t))$$

den rechten Ast der Hyperbel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 1\}$ parametrisiert.

2.) Aus der 2πi-Periodizität der komplexen Exponentialfunktion und (196) folgt, daß auch die komplexen Funktionen

$$\sinh, \cosh\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

die man (195) entsprechend definiert, 2πi-periodisch sind.

7.8 (Die Funktionen Tangens (hyperbolicus) und Cotangens (hyperbolicus)). Wir definieren die Funktionen

$$\begin{aligned}
\tan &:= \frac{\sin}{\cos}\colon \mathbb{R} \setminus \overline{\cos}^1(\{0\}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{Tangens,}\\
\cot &:= \frac{\cos}{\sin}\colon \mathbb{R} \setminus \overline{\sin}^1(\{0\}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{Cotangens,}\\
\tanh &:= \frac{\sinh}{\cosh}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{Tangens hyperbolicus,}\\
\coth &:= \frac{\cosh}{\sinh}\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \quad \textit{Cotangens hyperbolicus.}
\end{aligned}$$

Es gilt offenbar

$$\begin{array}{l}
\tan(-x) = -\tan(x), \ \ \cot(-x) = -\cot(x)\\
\tanh(-x) = -\tanh(x), \ \ \coth(-x) = -\coth(x)
\end{array} \tag{204}$$

Aus der Quotientenregel folgt die Differenzierbarkeit von tan, cot, tanh, coth und

$$\begin{array}{lcl}
\tan' & = & \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = 1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}\\
\cot' & = & -\frac{\sin^2+\cos^2}{\sin^2} = -(1+\cot^2) = -\frac{1}{\sin^2}\\
\tanh' & = & \frac{\cosh^2-\sinh^2}{\cosh^2} = 1-\tanh^2 = \frac{1}{\cosh^2}\\
\coth' & = & \frac{\sinh^2-\cosh^2}{\sinh^2} = 1-\coth^2 = -\frac{1}{\sinh^2}
\end{array} \tag{205}$$

Ferner gilt

$$\tan, \cot \ \text{ sind } \pi-\text{periodisch.} \tag{206}$$

[Es gilt

$$\begin{aligned}
\tan(x+\pi) &= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin(x)\cos(\pi)+\cos(x)\sin(\pi)}{\cos(x)\cos(\pi)-\sin(x)\sin(\pi)}\\
&= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x),
\end{aligned}$$

und die zweite Aussage folgt analog oder aus $\cot = \frac{1}{\tan}$.]

Weiterhin gilt:

$$\begin{array}{l}
\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist bijektiv und streng monoton wachsend,}\\
\cot|_{]0,\pi[}\colon]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist bijektiv und streng monoton fallend,}\\
\tanh\colon \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[\text{ ist bijektiv und streng monoton wachsend,}\\
\coth|_{\mathbb{R}_+}\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow]1,+\infty[\text{ ist bijektiv und streng monoton fallend.}
\end{array} \tag{207}$$

[Die Monotonie-Aussagen folgen aus (205).

Wir verwenden im folgenden für $a \in \widehat{\mathbb{R}}$ die Schreibweisen $t \to a+$ bzw. $t \to a-$. Damit ist gemeint, daß t von rechts bzw. links gegen a strebt.

Zum Tangens:

$$\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}+}\tan(t)=\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}+}\frac{\overbrace{\sin(t)}^{\to-1}}{\underbrace{\cos(t)}_{\to0+}}=-\infty$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\tan(t)=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\overbrace{\sin(t)}^{\to1}}{\underbrace{\cos(t)}_{\to0+}}=+\infty$$

Zum Cotangens:

$$\lim_{t\to0+}\tan(t)=\lim_{t\to0+}\frac{\overbrace{\cos(t)}^{\to1}}{\underbrace{\sin(t)}_{\to0+}}=+\infty$$

$$\lim_{t\to\pi-}\tan(t)=\lim_{t\to\pi-}\frac{\overbrace{\cos(t)}^{\to-1}}{\underbrace{\sin(t)}_{\to0+}}=-\infty$$

Zum Tangens hyperbolicus: Nach 7.7 gilt für jedes $t\in\mathbb{R}$

$$\tanh(t) \quad = \quad \frac{\exp(t)-\exp(-t)}{\exp(t)+\exp(-t)}=\frac{1}{1+\frac{1}{\exp(2t)}}-\frac{1}{\exp(2t)+1},$$

und dieser Ausdruck strebt für t gegen $+\infty$ gegen 1 und für t gegen $-\infty$ gegen -1.

Zum Cotangens hyperbolicus: Es gilt

$$\lim_{t\to0+}\coth(t)=\lim_{t\to0+}\frac{\overbrace{\cosh(t)}^{\to1}}{\underbrace{\sinh(t)}_{\to0+}}=+\infty,$$

und nach 7.7 gilt für jedes $t\in\mathbb{R}_+$

$$\coth(t) \quad = \quad \frac{\exp(t)+\exp(-t)}{\exp(t)-\exp(-t)}=\frac{1}{1-\frac{1}{\exp(2t)}}+\frac{1}{\exp(2t)-1},$$

und dieser Ausdruck strebt für t gegen $+\infty$ gegen 1.]

Schließlich gilt

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot(x). \tag{208}$$

[Denn

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-x)}$$
$$= \frac{\cos(-x)}{-\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x). \quad]$$

Bemerkung. Die komplexen Funktionen $\tanh := \frac{\sinh}{\cosh}\colon \mathbb{C} \setminus \overline{\cosh}(\{0\}) \to \mathbb{C}$, $\coth := \frac{\cosh}{\sinh}\colon \mathbb{C} \setminus \overline{\sinh}(\{0\}) \to \mathbb{C}$ sind mit sinh und cosh ebenfalls 2πi-periodisch.

7.9 (Die Arcus-Funktionen)**.**

(i) Nach 7.2 ist $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\colon [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1](\subset \mathbb{R})$ bijektiv und differenzierbar[49]. Wir definieren die *Arcussinus-Hauptwert-Funktion* durch

$$\arcsin := \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}\colon [-1,1] \longrightarrow \left([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \subset\right)\mathbb{R}.$$

Nach 5.17 ist arcsin stetig, und wegen $\forall_{t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\ \sin'(t) = \cos(t) > 0$ folgt aus 6.7 die Differenzierbarkeit von arcsin mit

$$\forall_{t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\ \arcsin'(\sin(t)) = \frac{1}{\cos(t)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}},$$

d.h.

$$\forall_{t\in]-1,1[}\ \arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{209}$$

Es folgt

$$\forall_{t\in[-1,1]}\ \arcsin(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\binom{-\frac{1}{2}}{n}}{2n+1}t^{2n+1} = t+\frac{1}{2}\frac{t^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{t^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{t^7}{7}+\ldots. \tag{210}$$

[Beweisskizze: Zunächst zeige[50] man für jedes $b\in\mathbb{R}$

$$\forall_{t\in]-1,1[}\ \sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}t^n = (1+t)^b. \tag{211}$$

Aus (211) kann man (210) für alle $t\in\,]-1,1[$ herleiten.

[49] In den Randpunkten ist darunter rechts- bzw. linksseitige Differenzierbarkeit zu verstehen.

[50] Tip zu (211) im Falle $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$:
Seien $f,g\colon]-1,1[\,\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$\forall_{t\in]-1,1[}\ f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}t^n \quad\text{und}\quad g(t) = (1+t)^b.$$

Hier muß übrigens die Wohldefiniertheit von f überprüft werden, d.h., daß die in der Definition von f angegebene Reihe Konvergenzradius 1 hat.
Zeige dann $f'(x) = \frac{bf(x)}{1+x}$, $g'(x) = \frac{bg(x)}{1+x}$ und differenziere $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Für $t = 1$ betrachte für $n \in \mathbb{N}_+$

$$s_n(x) := x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\frac{1}{2n+1}.$$

Überlege dann zunächst

$$s_n(x) < \arcsin(x) \leq \arcsin(1) \text{ auf } [0,1[$$

und folglich auch auf $[0,1]$. Analog verfahre man für $t = -1$.]

Aus (210) folgt (für $t = 1$)

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots .} \tag{212}$$

(ii) Nach 7.2 ist $\cos|_{[0,\pi]}\colon [0,\pi] \to [-1,1] (\subset \mathbb{R})$ bijektiv und differenzierbar. Wir definieren die *Arcuscosinus-Hauptwert-Funktion* durch

$$\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \longrightarrow ([0,\pi] \subset) \, \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\forall_{t \in [-1,1]} \; \arcsin(t) + \arccos(t) = \frac{\pi}{2}. \tag{213}$$

[Wegen $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ gilt $\frac{\pi}{2} - x = \arccos(\sin(x))$. Dies liefert (213) mit $x = \arccos(t)$.]

Aus (213) und (i) folgt, daß arccos stetig und auf $]-1,1[$ differenzierbar ist mit

$$\forall_{t \in]-1,1[} \; \arccos'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{214}$$

(iii) Nach 7.8 ist $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ bijektiv und differenzierbar. Wir definieren die *Arcustangens-Hauptwert-Funktion* durch

$$\arctan := \left(\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\subset\right) \mathbb{R}.$$

Aus $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$ und 6.7 folgt die Differenzierbarkeit von arctan mit

$$\forall_{t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \; \arctan'(\tan(t)) = \frac{1}{1+\tan^2(t)},$$

d.h.

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} \; \arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}. \tag{215}$$

Hieraus folgt

$$\forall_{t \in]-1,1[} \; \arctan'(t) = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, (t^2)^n. \tag{216}$$

Analog zu den Ausführungen in 7.3 (ii) (dort wurde $\ln(1+x)$ betrachtet) sieht man (zunächst für $x \in]-1,1]$ und sodann)

$$\arctan|_{[-1,1]} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{217}$$

Insbesondere gilt wegen $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ die folgende Gleichheit, die Leibniz mit den Worten „numero deus impare gaudet“ kommentierte:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots .} \tag{218}$$

(iv) Nach 7.8 ist $\cot|_{]0,\pi[} \colon]0,\pi[\to \mathbb{R}$ bijektiv und differenzierbar. Wir definieren die *Arcuscotangens-Hauptwert-Funktion* durch

$$\operatorname{arccot} := \left(\cot|_{]0,\pi[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (]0,\pi[\subset) \, \mathbb{R}.$$

Aus $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$ folgt wiederum

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \arctan(t) + \operatorname{arccot}(t) = \frac{\pi}{2}, \tag{219}$$

also ist arccot differenzierbar mit

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{arccot}'(t) = -\frac{1}{1+t^2}. \tag{220}$$

Bemerkung (zur Namenswahl *Arcus*-Funktionen)**.** Wähle $s \in [-1,1]$ und setze dann $t := \arccos(s) \in [0,\pi]$. Der Bogen (lat.: Arcus), der auf dem Einheitskreis von $(\cos(0),\sin(0)) = (1,0)$ gegen den Uhrzeigersinn nach $(\cos(t),\sin(t))$ verläuft, hat Länge t.

7.10 (Die Area-Funktionen)**.**

(i) Nach 7.7 sind $\sinh \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh|_{[0,+\infty[} \colon [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ bijektiv und differenzierbar[51]. Wir definieren den *Areasinus hyperbolicus* durch

$$\operatorname{Arsinh} := (\sinh)^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und den *Areacosinus hyperbolicus* durch

$$\operatorname{Arcosh} := \left(\cosh|_{[0,+\infty[}\right)^{-1} : [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[.$$

Arsinh und $\operatorname{Arcosh}|_{]1,+\infty[}$ sind differenzierbar mit

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{Arsinh}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{221}$$

$$\forall_{t\in]1,+\infty[} \operatorname{Arcosh}'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}. \tag{222}$$

[51] Im Randpunkt ist darunter rechtsseitige Differenzierbarkeit zu verstehen.

[Dies folgt aus $\sinh' = \cosh = \sqrt{1+\sinh^2}$ sowie $\cosh' = \sinh = \sqrt{\cosh^2 - 1}$ und 6.7.]

Aus (221) folgt

$$\begin{aligned}\forall_{t\in[-1,1]}\operatorname{Arsinh}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{-\frac{1}{2}}{n}}{2n+1}t^{2n+1} \\ &= t-\frac{1}{2}\frac{t^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{t^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{t^7}{7}+-\dots .\end{aligned} \tag{223}$$

[Für $t\in]-1,1[$ folgt (223) aus (211). Für $t=\pm 1$ die Reihe auf der r.S. von (223) nach (210) absolut konvergent, also konvergent. Hieraus und aus dem Abelschen Grenzwertsatz 6.19 folgt dann (223) auch für $t=\pm 1$.]

Aus (223) und (226) (s.u.) ergibt sich übrigens

$$\boxed{\ln(1+\sqrt{2}) = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}+-\dots ,}$$

$$\boxed{\ln(\sqrt{2}-1) = -1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}-+\dots .}$$

(ii) Nach 7.8 sind $\tanh\colon \mathbb{R}\to\,]-1,1[\,(\subset\mathbb{R})$, $\coth|_{\mathbb{R}_+}\colon \mathbb{R}_+\to\,]1,+\infty[$ bijektiv und differenzierbar. Wir definieren den *Areatangens hyperbolicus* durch

$$\operatorname{Artanh} := (\tanh)^{-1} : \,]-1,1[\,\longrightarrow \mathbb{R}$$

und den *Areacotangens hyperbolicus* durch

$$\operatorname{Arcoth} := (\coth|_{\mathbb{R}_+})^{-1} : \,]1,+\infty[\,\longrightarrow (\mathbb{R}_+\subset)\mathbb{R}.$$

Artanh und Arcoth sind differenzierbar mit

$$\forall_{t\in]-1,1[}\operatorname{Artanh}'(t) = \frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}t^{2n} = 1+t^2+t^4+t^6+\dots , \tag{224}$$

$$\forall_{t\in]1,+\infty[}\operatorname{Arcoth}'(t) = \frac{1}{1-t^2}. \tag{225}$$

[Dies folgt aus $\tanh' = 1-\tanh^2 > 0$ sowie $\coth'|_{\mathbb{R}_+} = 1-\coth^2|_{\mathbb{R}_+} < 0$ und 6.7.]

(iii) Es gilt

$$\operatorname{Arsinh} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}), \tag{226}$$

$$\operatorname{Arcosh} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})|_{[1,+\infty[}, \tag{227}$$

$$\operatorname{Artanh} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)|_{]-1,1[}, \tag{228}$$

$$\operatorname{Arcoth} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)|_{]1,+\infty[}. \tag{229}$$

[Leite die rechten Seiten von (226) - (229) ab und stelle fest, daß die Ergebnisse die rechten Seiten von (221) - (225) sind. Daher genügt es zu zeigen, daß beide Seiten von (226) - (229) an jeweils einer Stelle übereinstimmen, und das ist trivial.]

Bemerkung (zur Namenswahl *Area*-Funktionen)**.** Wähle $s \in [1, \infty[$ und setze $t := \operatorname{Arcosh}(s) \in [0, +\infty[$. Dann ist der Flächeninhalt der Fläche (lat.: Area), die von den geradliniegen Verbindungen des Ursprunges mit $(\cosh(\pm t), \sinh(\pm t))$ und dem auf dem rechten Ast der Hyperbel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 = x^2 - 1\}$ verlaufenden Bogen von $(\cosh(-t), \sinh(-t))$ nach $(\cosh(t), \sinh(t))$ berandet wird, gleich t.

8 Riemannsche Integration

Integrationstheorie beginnt schon in der Antike. Archimedes von Syrakus (287 v. Chr. – 212 v. Chr.) berechnet den Flächeninhalt der Fläche zwischen der Parabel $x^2|_{[0,t]}$ und der Abzisse als $\frac{1}{3}t^3$ und nimmt dabei bereits Ideen Bernhard Riemanns vorweg. Den Zusammenhang zwischen der geometrischen Anwendung – nämlich allgemein der Bestimmung des Flächeninhaltes der Fläche zwischen einem Funktionsgraphen und der Abzisse – sowie einer Art *Anti-Ableitung* entdecken Newton und Leibniz im 17. Jahrhundert unabhängig voneinander, als sie die von ihnen entwickelte Differentialrechnung betreiben. Ihr Ergebnis nennen wir heute den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.* Cauchy sowie kurz darauf Riemann und Darboux entwickeln dann im 19. Jahrhundert die Integrationstheorie, die man heute in der gymnasialen Oberstufe unterrichtet.

Diesem Zugang wollen wir uns im folgenden zuwenden.

Generalvoraussetzung. Seien in diesem Kapitel stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist also $[a, b]$ insbesondere ein kompaktes Intervall von $\mathbb{R}$.

Definition 8.1.

(i) Eine *Zerlegung* $\mathfrak{Z}$ *von* $[a, b]$ ist per definitionem eine endliche Teilmenge von $[a, b]$ mit $a, b \in \mathfrak{Z}$. Dann existieren also eindeutig bestimmte $k \in \mathbb{N}$ sowie $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ mit $a = a_0 < \ldots < a_k = b$ und $\mathfrak{Z} = \{a_0, \ldots, a_k\}$. Die Zahlen $a_0, \ldots, a_k$ heißen *Teilpunkte von* $\mathfrak{Z}$. Wir schreiben auch kurz

$$\mathfrak{Z}\colon a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b.$$

(ii) Für zwei Zerlegungen $\mathfrak{Z}, \widetilde{\mathfrak{Z}}$ von $[a, b]$ definieren wir:

$\widetilde{\mathfrak{Z}}$ heißt *Verfeinerung von* $\mathfrak{Z}$ $:\Longleftrightarrow \mathfrak{Z} \subset \widetilde{\mathfrak{Z}}$.

Eine Verfeinerung einer Zerlegung entsteht zu jener also aus dieser durch Hinzunahme weiterer (oder keiner) Teilpunkte.

(iii) Ist $\mathfrak{Z}\colon a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so definieren wir die *maximale Intervallänge von* $\mathfrak{Z}$ als

$$\boxed{d(\mathfrak{Z})} := \max\{a_i - a_{i-1} \,|\, i \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

Definition 8.2 (Ober- und Untersumme)**.** Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir definieren dann zu jeder Zerlegung $\mathfrak{Z}\colon a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ von $[a, b]$ die *Obersumme von* f *bzgl.* $\mathfrak{Z}$ als

$$\boxed{\overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z})} := \sum_{i=1}^{k} M_i\,(a_i - a_{i-1}), \quad \text{wobei } M_i := M_{a_{i-1}, a_i} := \sup f([a_{i-1}, a_i]) \in \mathbb{R}$$

und die *Untersumme von* f *bzgl.* $\mathfrak{Z}$ als

$$\boxed{\underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z})} := \sum_{i=1}^{k} m_i\,(a_i - a_{i-1}), \quad \text{wobei } m_i := m_{a_{i-1}, a_i} := \inf f([a_{i-1}, a_i]) \in \mathbb{R}.$$

(Daß gilt $M_i, m_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$, folgt aus der Beschränktheit von f.)

Trivialerweise gilt stets

$$\overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}) \geq \underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}).$$

Lemma 8.3. *Seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ zwei Zerlegungen von $[a,b]$.*

(i) $\mathfrak{Z}_2$ *Verfeinerung von* $\mathfrak{Z}_1$
$\Longrightarrow \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2) \le \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) \wedge \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) \le \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2)$,

d.h. beim Übergang zu einer Verfeinerung wird die Obersumme höchstens kleiner und die Untersumme höchstens größer.

(ii) $\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) \le \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2)$,

d.h. jede Untersumme ist untere Schranke für alle Obersummen, und jede Obersumme ist obere Schranke für alle Untersummen.

Beweis. Zu (i): Sei $\mathfrak{Z}_1\colon a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit existiere $c \in\,]a_0, a_1[$ mit

$$\mathfrak{Z}_2\colon a = a_0 < c < a_1 < \ldots < a_k = b.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) - \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2) &= M_{a_0,a_1}\underbrace{(a_1 - a_0)}_{=(c-a_0)+(a_1-c)} - M_{a_0,c}(c-a_0) - M_{c,a_1}(a_1-c) \\
&= (M_{a_0,a_1} - M_{a_0,c})\underbrace{(c-a_0)}_{>0} + (M_{a_0,a_1} - M_{c,a_1})\underbrace{(a_1-c)}_{>0}
\end{aligned}$$

Wegen $f([a_0,c]) \subset f([a_0,a_1])$ und $f([c,a_1]) \subset f([a_0,a_1])$ haben wir sowohl $(M_{a_0,a_1} - M_{a_0,c}) \ge 0$ als auch $(M_{a_0,a_1} - M_{c,a_1}) \ge 0$, also folgt

$$\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) - \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2) \ge 0.$$

Analog sieht man ein

$$\begin{aligned}
\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2) &= \underbrace{(m_{a_0,a_1} - m_{a_0,c})}_{\le 0}\underbrace{(c-a_0)}_{>0} + \underbrace{(m_{a_0,a_1} - m_{c,a_1})}_{\le 0}\underbrace{(a_1-c)}_{>0} \\
&\le 0.
\end{aligned}$$

Zu (ii): Betrachte $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2$, also ist $\mathfrak{Z}$ Verfeinerung sowohl von $\mathfrak{Z}_1$ als auch von $\mathfrak{Z}_2$. Dann gilt

$$\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) \overset{(i)}{\le} \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) \le \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) \overset{(i)}{\le} \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2).$$

□

Definition 8.4 (Ober- und Unterintegral)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir definieren dann das *Oberintegral von f* als

$$\boxed{\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x} := \inf\left\{\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]\right\} \in \mathbb{R}$$

und das *Unterintegral von f* als

$$\boxed{\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x} := \sup\{\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \in \mathbb{R}.$$

Beachte, daß $\{\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z}$ Zerlegung von $[a,b]\}$ nach 8.3 (ii) nach unten und $\{\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z}$ Zerlegung von $[a,b]\}$ nach oben beschränkt ist.

Es gilt also für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a,b]$

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}),$$
$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}).$$

Lemma 8.5. *Für jede beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Nach 8.3 (ii) gilt für je zwei Zerlegungen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ von $[a,b]$

$$\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) \leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2).$$

Hieraus folgt zunächst nach Definition des Oberintegrals

$$\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

und sodann nach Definition des Unterintegrals die Behauptung. □

Definition 8.6 (Riemann-Integrierbarkeit)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

f heißt *Riemann-integrierbar über* $[a,b]$ $:\Longleftrightarrow \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Ist f Riemann-integrierbar über $[a,b]$, so heißt die reelle Zahl

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x} := \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ [52]}$$

das *Riemann-Integral von f über* $[a,b]$.

[52]Die Leibnizsche Bezeichnung $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ entspricht der in 8.14 verständlicher werdenden Auffassung, das Integral als Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Größen zu verstehen. Das Zeichen $\int$ ist in Anlehnung an den ersten Buchstaben des Wortes *Summa* ein stilisiertes „S“.

Satz 8.7 (Riemannsches Integrabilitätskriterium).
Vor.: *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.*

Beh.: *f ist Riemann-integrierbar über $[a,b]$*
$\iff$ *Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a,b]$ derart, daß $\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon$.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach 8.4 existieren Zerlegungen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ von $[a,b]$ mit

$$\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) - \underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\overset{\text{Vor.}}{=} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \underbrace{\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\overset{\text{Vor.}}{=} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist $\mathfrak{Z} := \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2$ eine Verfeinerung sowohl von $\mathfrak{Z}_1$ als auch von $\mathfrak{Z}_2$, also folgt aus 8.3 (ii)

$$\underbrace{\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z})}_{\leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1)} - \underbrace{\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z})}_{\geq \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2)} \leq \underbrace{\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Wähle $\mathfrak{Z}$ gemäß der rechten Seite der Behauptung. Dann gilt

$$0 \overset{8.5}{\leq} \underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z})} - \underbrace{\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\geq \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z})} \leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ folgt nun $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. $\square$

Beispiel 8.8.

1.) Seien $c \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konstant vom Wert c.

Dann sind offenbar alle Ober- und Untersummen von f gleich $c(b-a)$, also ist f Riemann-integrierbar über $[a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a).$$

2.) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a,b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & t \notin [a,b] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann folgt für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}: a = a_0 < \ldots < a_k = b$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}) &= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{M_i}_{=1} (a_i - a_{i-1}) = (b-a), \\
\underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}) &= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{m_i}_{=0} (a_i - a_{i-1}) = 0,
\end{aligned}$$

also ist f nicht Riemann-integrierbar über $[a, b]$.

Satz 8.9. *Jede monotone Funktion* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar über* $[a, b]$.

Bemerkung. Die Funktion f im obigen Satz ist im Falle monotonen Wachstums beschränkt mit unterer Schranke $f(a)$ und oberer Schranke $f(b)$ und umgekehrt im Falle monotonen Fallens.

f braucht nicht stetig zu sein!

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß f monoton wächst. Ansonsten gehen wir von f zu $-f$ über.

Seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $\mathfrak{Z}_n$ die *äquidistante Zerlegung von* $[a, b]$

$$\mathfrak{Z}_n: a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

mit $a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}_+$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_{a_{i-1}, a_i} \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \left(f(a_1) + \ldots f(\underbrace{a_n}_{=b}) \right), \\
\underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_{a_{i-1}, a_i} \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \left(f(\underbrace{a_0}_{=a}) + \ldots f(a_{n-1}) \right),
\end{aligned}$$

also $\overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_n) - \underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_n) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Hieraus folgt nach 8.7 die Riemann-Integrierbarkeit von f über $[a, b]$. □

Hauptsatz 8.10. *Jede stetige Funktion* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar über* $[a, b]$.

Bemerkung. Die Funktion f im obigen Hauptsatz ist nach Satz vom Maximum bzw. Minimum 5.13 beschränkt.

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Nach Satz 5.20 ist f gleichmäßig stetig, also existiert $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{t, \tilde{t} \in [a,b]} \left(|t - \tilde{t}| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(\tilde{t})| < \frac{\varepsilon}{b-a} \right). \tag{230}$$

Wähle eine Zerlegung $\mathfrak{Z}: a = a_0 < \ldots < a_k = b$ von $[a, b]$ mit maximaler Intervallänge $d(\mathfrak{Z}) < \delta$. Nach dem Satz vom Maximum bzw. Minimum 5.13 existieren zu jedem $i \in \{1, \ldots, k\}$ reelle Zahlen $t_i, T_i \in [a_{i-1}, a_i]$ mit

$$\begin{aligned}
f(T_i) &= \max f([a_{i-1}, a_i]) = M_{a_{i-1}, a_i}, \\
f(t_i) &= \min f([a_{i-1}, a_i]) = m_{a_{i-1}, a_i}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt wegen $|T_i - t_i| < \delta$ (da $t_i, T_i \in [a_{i-1}, a_i]$, $|a_i - a_{i-1}| \le d(\mathfrak{Z}) < \delta$) nach (230)

$$|f(T_i) - f(t_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{231}$$

Nunmehr folgt

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) &= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(f(T_i) - f(t_i))}_{\ge 0} \underbrace{(a_i - a_{i-1})}_{\ge 0} \\
&= \sum_{i=1}^{k} |f(T_i) - f(t_i)| \, (a_i - a_{i-1}) \\
&\overset{(231)}{<} \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ folgt nach 8.7 die Riemann-Integrierbarkeit von f. □

Satz 8.11. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.*

Dann existiert zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ von $[a,b]$ gilt:

$$d(\mathfrak{Z}) < \delta \Longrightarrow \left(0 \le \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon\right) \wedge \left(0 \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon\right)$$

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Per definitionem existieren Zerlegungen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ von $[a,b]$ mit

$$0 \le \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad 0 \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{232}$$

Wir setzen $\mathfrak{Z}_0 := \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2$ und bezeichnen mit $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \ge 2$, die Anzahl der Teilpunkte der Zerlegung $\mathfrak{Z}_0$. Nach Voraussetzung gilt $C := \sup |f|([a,b]) \in \mathbb{R}$, und wir wählen $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$2(k_0 - 2)\, C\, \delta < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{233}$$

Wir zeigen, daß für dieses δ die Behauptung gilt. Sei dazu

$$\mathfrak{Z}\colon a = a_0 < \ldots < a_k = b$$

eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ mit $d(\mathfrak{Z}) < \delta$. Dann ist $\widetilde{\mathfrak{Z}} := \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}_0$ ebenfalls eine Zerlegung von $[a,b]$, und es gilt

$$\underbrace{\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\ge 0} = \left(\overline{\mathfrak{S}}(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}) - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) - \overline{\mathfrak{S}}(f,\widetilde{\mathfrak{Z}})\right), \tag{234}$$

$$\underbrace{\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z})}_{\geq 0} = \left(\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big)\right) + \left(\underline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z})\right). \tag{235}$$

Zum Nachweis der Behauptung genügt es zu zeigen, daß die beiden Summanden auf den rechten Seiten von (234) und (235) jeweils kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ sind.

$\widetilde{\mathfrak{Z}}$ ist eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_0$, und diese ist eine Verfeinerung sowohl von $\mathfrak{Z}_1$ als auch von $\mathfrak{Z}_2$. Daher folgt aus Lemma 8.3 (i)

$$\begin{aligned}
0 \leq \overline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) - \int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_0) - \int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) - \int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(232)}{<} \frac{\varepsilon}{2}, \\
0 \leq \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) &\leq \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_0) \\
&\leq \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2) \overset{(232)}{<} \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt daher

$$0 \leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) - \overline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad 0 \leq \underline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{236}$$

$\widetilde{\mathfrak{Z}}$ ist Verfeinerung von $\mathfrak{Z}$: $a = a_0 < \ldots < a_k = b$, also induziert jene für jedes $i \in \{1,\ldots,k\}$ eine Zerlegung $\widetilde{\mathfrak{Z}}_i$ von $[a_{i-1},a_i]$. Es folgt

$$0 \leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) - \overline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) = \sum_{i=1}^{k} \Big(M_{a_{i-1},a_i}(a_i - a_{i-1}) - \overline{\mathfrak{S}}\big(f|_{[a_{i-1},a_i]},\widetilde{\mathfrak{Z}}_i\big)\Big), \tag{237}$$

$$0 \leq \underline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) = \sum_{i=1}^{k} \Big(\underline{\mathfrak{S}}\big(f|_{[a_{i-1},a_i]},\widetilde{\mathfrak{Z}}_i\big) - m_{a_{i-1},a_i}(a_i - a_{i-1})\Big). \tag{238}$$

Die Zerlegung $\mathfrak{Z}_0$ von $[a,b]$ besitzt k_0 Teilpunkte, $k_0 \geq 2$. Wegen $\widetilde{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{Z}_0$ hat dann die Zerlegung $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ von $[a,b]$ höchstens $k_0 - 2$ Teilpunkte mehr als $\mathfrak{Z}$. M.a.W. gibt es in $\{1,\ldots,k\}$ höchstens $k_0 - 2$ Indizes derart, daß die entsprechenden Summanden auf den rechten Seiten von (237) und (238) ungleich null (d.h. größer null) sind. Und wegen $C = \sup|f|([a,b])$ sowie $d(\mathfrak{Z}) < \delta$ sind diese Summanden (betraglich) kleiner oder gleich $2\,C\,\delta$, also sind die rechten Seiten von (237) und (238) kleiner oder gleich $2\,(k_0 - 2)\,C\,\delta$. Wegen (233) haben wir daher (236) gezeigt, und hierauf hatten wir den Satz zurückgeführt. □

8.12 (ausgezeichnete Folgen von Zerlegungen).

Definiton. Sei $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$.

$(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ heißt *ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von* $[a,b]$ genau dann, wenn gilt $\lim_{\nu\to\infty} d(\mathfrak{Z}_\nu) = 0$.

Satz. *Ist* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion und* $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von* $[a,b]$*, so gilt*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to\infty} \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_\nu) \quad \textit{und} \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to\infty} \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_\nu)\,.$$

Beweis. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Wähle dazu $\delta \in \mathbb{R}_+$ gemäß 8.11. Da nach Voraussetzung $\nu_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{\nu\in\mathbb{N},\nu\geq\nu_0}\, d(\mathfrak{Z}_\nu) < \delta$ existiert, folgt hieraus für $\nu \geq \nu_0$

$$\left|\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_\nu) - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_\nu) - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

□

Definition 8.13 (Riemannsche Summen)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(i) Sei $\mathfrak{Z}\colon a = a_0 < \ldots < a_k = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$.

Dann heißt $\Xi = \{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$ ein *Zwischenpunktsystem von* $\mathfrak{Z}$ genau dann, wenn $\forall_{i\in\{1,\ldots,k\}}\, a_{i-1} \leq \xi_i \leq a_i$ gilt.

(ii) Sind $\mathfrak{Z}, \Xi$ wie in (i), so definieren wir die *Riemannsche Summe von* f *bzgl.* $\mathfrak{Z}$ *und* Ξ als

$$\boxed{\mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z},\Xi)} := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,(a_i - a_{i-1}).$$

Dann gilt offenbar (wegen $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$)

$$\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) \leq \mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z},\Xi) \leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z})\,. \tag{239}$$

Hauptsatz 8.14. *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt und Riemann-integrierbar über* $[a,b]$*.*

Sind weiter $(\mathfrak{Z}_\nu)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von* $[a,b]$ *und* Ξ_ν *ein Zwischenpunktsystem bzgl.* $\mathfrak{Z}_\nu$ *für jedes* $\nu \in \mathbb{N}$*, dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu).$$

Beweis. Nach 8.13 (239) gilt für jedes $\nu \in \mathbb{N}$

$$\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_\nu) \leq \mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu) \leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_\nu)\,,$$

und nach 8.12 strebt die linke Seite für $\nu \to \infty$ gegen $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Vor.}}{=} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und die rechte Seite gegen $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Vor.}}{=} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, also folgt die Behauptung. □

Satz 8.15.
Vor.: *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt und Riemann-integrierbar über* $[a,b]$*. Ferner sei* $h\colon f([a,b]) \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit*

$$\exists_{L\in\mathbb{R}_+} \forall_{s,t\in f([a,b])} \, |h(t) - h(s)| \le L\,|t-s|.^{53} \tag{240}$$

Beh.: *Dann ist auch* $h\circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt und Riemann-integrierbar über* $[a,b]$*.*

Beweis. Mit f ist nach (240), (39) und (40) auch $h\circ f$ beschränkt.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach 8.7 existiert eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$: $a = a_0 < \ldots a_k = b$ von $[a,b]$ mit

$$\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Für jedes $i \in \{1,\ldots,k\}$ und alle $s,t \in [a_{i-1},\ldots,a_i]$ gilt nach (240)

$$|h(f(t)) - h(f(s))| \le L\,|f(t) - f(s)| \le L\big(\sup f([a_{i-1},a_i]) - \inf f([a_{i-1},a_i])\big),$$

also auch

$$\begin{aligned} &\sup(h\circ f)([a_{i-1},a_i]) - \inf(h\circ f)([a_{i-1},a_i]) \\ \le\;& L\big(\sup f([a_{i-1},a_i]) - \inf f([a_{i-1},a_i])\big). \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\overline{\mathfrak{S}}(h\circ f,\mathfrak{Z}) - \underline{\mathfrak{S}}(h\circ f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon$, also ist $h\circ f$ nach 8.7 Riemann-integrierbar über $[a,b]$. □

Satz 8.16.
Vor.: *Seien* $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt und Riemann-integrierbar über* $[a,b]$*.*
Beh.: *Dann sind auch* $f+g, |f|, f\cdot g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt und Riemann-integrierbar über* $[a,b]$*.*

Beweis. Die Aussagen über die Beschränktheit sind trivial.

1.) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach 8.7 existieren Zerlegungen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ von $[a,b]$ mit

$$\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad\text{und}\quad \overline{\mathfrak{S}}(g,\mathfrak{Z}_2) - \underline{\mathfrak{S}}(g,\mathfrak{Z}_2) < \frac{\varepsilon}{2},$$

und nach 8.3 (i) gilt dann auch für $\mathfrak{Z} := \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2$

$$\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad\text{und}\quad \overline{\mathfrak{S}}(g,\mathfrak{Z}) - \underline{\mathfrak{S}}(g,\mathfrak{Z}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) + \underline{\mathfrak{S}}(g,\mathfrak{Z}) \le \underline{\mathfrak{S}}(f+g,\mathfrak{Z}) \le \overline{\mathfrak{S}}(f+g,\mathfrak{Z}) \le \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) + \overline{\mathfrak{S}}(g,\mathfrak{Z})$ impliziert

$$\overline{\mathfrak{S}}(f+g,\mathfrak{Z}) - \underline{\mathfrak{S}}(f+g,\mathfrak{Z}) < \varepsilon,$$

also ist $f+g$ nach 8.7 Riemann-integrierbar.

[53] Sind $M \subset \mathbb{R}$ und $h\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\exists_{L\in\mathbb{R}_+} \forall_{s,t\in M} \, |h(t) - h(s)| \le L\,|t-s|,$$

so heißt h *Lipschitz-stetig*. Es ist klar, daß Lipschitz-stetige Funktionen stetig sind. (Setzte beim Nachweis hiervon $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$.)

2.) Wir definieren $h\colon f([a,b]) \to \mathbb{R}$ durch $h(t) := |t|$. Dann erfüllt h nach 2.17 (40) die Voraussetzung (240) (mit $L = 1$) des letzten Satzes 8.15, d.h. h ist Lipschitz-stetig, also folgt die Riemann-Integrierbarkeit von $|f|$ über $[a,b]$.

3.) f, g und damit auch $f \pm g$ sind nach Voraussetzung beschränkt, d.h. es existiert $C \in \mathbb{R}_+$ mit $(f \pm g)([a,b]) \subset [-C, C]$, und $\lambda x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist für $\lambda \in \mathbb{R}$ offenbar Lipschitz-stetig (mit $L = |\lambda|$), also insbesondere für $\lambda \in \{-1, \frac{1}{4}\}$.

Wegen $4(f \cdot g) = (f+g)^2 - (f-g)^2$ genügt es daher nach 1.) und dem letzten Satz 8.15 zu zeigen, daß $x^2|_{[-C,C]}\colon [-C,C] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist. Dies ist aber klar, da nach dem Mittelwertsatz 6.10 gilt

$$\forall_{s,t \in [-C,C]}\, |t^2 - s^2| \leq \sup\left\{ |(x^2)'|(\tau) \mid \tau \in [-C,C] \right\} |t-s| = 2C\,|t-s|.$$

□

Hauptsatz 8.17 (Die $\mathbb{R}$-Linearität des Riemann-Integrales).
Vor.: *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über $[a,b]$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
Beh.: *$\lambda f + \mu g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und Riemann-integrierbar über $[a,b]$, und es gilt*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$ [54]

Beweis. Die Riemann-Integrierbarkeit von $\lambda f + \mu g$ über $[a,b]$ ist klar nach 8.16. Beachte, daß konstante Funktionen über $[a,b]$ Riemann-integrierbar sind.

Sei nun $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ und sei Ξ_ν für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ein Zwischenpunktsystem von $\mathfrak{Z}_\nu$. Dann folgt nach 8.14

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, \mathrm{d}x &= \lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{R}(\lambda f + \mu g, \mathfrak{Z}_\nu, \Xi_\nu) \\
&\overset{\text{wg.8.13}(ii)}{=} \lambda\, \mathfrak{R}(f, \mathfrak{Z}_\nu, \Xi_\nu) + \mu\, \mathfrak{R}(g, \mathfrak{Z}_\nu, \Xi_\nu) \\
&= \lambda \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Hauptsatz 8.18 (Die Monotonie des Riemann-Integrales).
Vor.: *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über $[a,b]$. Ferner gelte $f \leq g$, d.h. per definitionem $\forall_{t \in [a,b]}\, f(t) \leq g(t)$.*
Beh.: $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$.

Beweis. Sei $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ und sei Ξ_ν für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ein Zwischenpunktsystem von $\mathfrak{Z}_\nu$. Dann folgt aus

[54] Die linke Seite definieren wir als $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\, \mathrm{d}x$.

Hauptsatz 8.14

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to\infty} \underbrace{\mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu)}_{\overset{\text{Vor.}}{\leq}\mathfrak{R}(g,\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu)}$$
$$\leq \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z}_\nu,\Xi_\nu) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Satz 8.19.
Vor.: *Sei* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *beschränkt und Riemann-integrierbar über* $[a,b]$.
Beh.: $|f|\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *ist beschränkt und Riemann-integrierbar über* $[a,b]$*, und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$[55]

Beweis. Aus 8.16 folgt die Riemann-Integrierbarkeit von $|f|, -|f|\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Aus 8.18 und $-|f|\leq f\leq |f|$ folgt dann

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b -|f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

d.h. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. □

Satz 8.20 (Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Sei* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann existiert* $\xi\in[a,b]$ *mit*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. 8.20 ist der Spezialfall $g = 1|_{[a,b]}$ des folgenden Satzes 8.21. □

Satz 8.21 (Verallgemeinerter erster Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Seien* $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *Funktionen.* f *sei stetig und* g *beschränkt und Riemann-integrierbar über* $[a,b]$ *mit* $g\geq 0$ *(oder* $g\leq 0$*). Dann ist* $f\cdot g$ *beschränkt und Riemann-integrierbar über* $[a,b]$*, und es existiert* $\xi\in[a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$[56]

[55] Die rechte Seite definieren wir als $\int_a^b |f|(x)\,\mathrm{d}x$.
[56] Die linke Seite definieren wir als $\int_a^b (f\cdot g)(x)\,\mathrm{d}x$.

Beweis. Wir zeigen den Satz nur im Falle $g \geq 0$. Der Fall $g \leq 0$ läuft analog.

Die Riemann-Integrierbarkeit der betrachteten Funktionen über $[a,b]$ ergibt sich aus der bisherigen Diskussion in diesem Kapitel.

Wir setzen $G := \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, m := \min f([a,b]), M := \max f([a,b]) \in \mathbb{R}$. (Die Existent von m, M folgt aus der Stetigkeit von f mit 5.13.) Dann gilt (da $g \geq 0$) $m\,g \leq f \cdot g \leq M\,g$, und aus 8.17, 8.18 folgt

$$m\,G \leq \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\,G.$$

1. Fall: $G = 0$. Dann gilt auch $\int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ und die Behauptung ist trivialerweise für jedes $\xi \in [a,b]$ erfüllt.

2. Fall: $G \neq 0$. Dann gilt

$$m \leq \frac{1}{G} \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \leq M,$$

und nach Definition von m, M folgt die Behauptung aus der Stetigkeit von f und dem Zwischenwertsatz 5.12. □

Bemerkung. Die Voraussetzung, daß g keinen Vorzeichenwechsel besitzt, ist notwendig für die Gültigkeit dieses Satzes: Für jedes $\eta \in \mathbb{R}$ gilt nämlich (s.u.)

$$0 < \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x \cdot x\,\mathrm{d}x \neq \eta \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Definition 8.22. Seien $M \subset \mathbb{R}$ mit $[a,b] \subset M$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, daß $f|_{[a,b]}$ beschränkt ist. Ferner sei $c \in \mathbb{R}$. Wir definieren dann:

(i)

$$\int\limits_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_a^{\overline{b}} f|_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_{\underline{a}}^{b} f|_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int\limits_b^{\overline{a}} f(x)\,\mathrm{d}x := -\int\limits_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int\limits_{\underline{b}}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x := -\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int\limits_{\underline{c}}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_c^{\overline{c}} f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_c^{c} f(x)\,\mathrm{d}x := 0.$$

(ii) f heißt *Riemann-integrierbar über* $[a,b]$, wenn die Einschränkung $f|_{[a,b]}$ Riemann-integrierbar über $[a,b]$ ist, d.h.

$$\int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

In diesem Fall setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b f|_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lemma 8.23. *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt und sei* $c \in [a,b]$. *Dann folgt:*

$$\begin{aligned}
\int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{\underline{c}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x,\\
\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\overline{a}}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{c}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Beweis. Wir können $a < b < c$ annehmen, denn in den Fällen $c = a$ bzw. $c = b$ ist die Behauptung klar nach Definition 8.22 (i).

Sei $(\mathfrak{Z}_\nu)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ derart, daß $\forall_{\nu\in\mathbb{N}}\, c \in \mathfrak{Z}_\nu$ gilt. Dann existieren für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Zerlegungen $\mathfrak{Z}'_\nu$ bzw. $\mathfrak{Z}''_\nu$ von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$ mit $\mathfrak{Z}_\nu = \mathfrak{Z}'_\nu \cup \mathfrak{Z}''_\nu$. Wegen $d(\mathfrak{Z}'_\nu) \le d(\mathfrak{Z}_\nu)$ und $d(\mathfrak{Z}''_\nu) \le d(\mathfrak{Z}_\nu)$ sind auch $(\mathfrak{Z}'_\nu)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\mathfrak{Z}''_\nu)_{n\in\mathbb{N}}$ ausgezeichnete Folgen von Zerlegungen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$, und für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt offenbar

$$\overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_\nu) \overset{8.12}{=} \overline{\mathfrak{S}}\left(f|_{[a,c]},\mathfrak{Z}'_\nu\right) + \overline{\mathfrak{S}}\left(f|_{[c,a]},\mathfrak{Z}''_\nu\right).$$

Die linke Seite der letzten Gleichung geht für $\nu \to \infty$ gegen $\int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$, der erste Summand der rechten Seite gegen $\int_a^{\underline{c}} f|_{[a,c]}(x)\,\mathrm{d}x \overset{8.22}{=} \int_a^{\underline{c}} f(x)\,\mathrm{d}x$ und der zweite Summand gegen $\int_c^{\underline{b}} f|_{[c,b]}(x)\,\mathrm{d}x \overset{8.22}{=} \int_c^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$, woraus die erste Behauptung folgt.

Die zweite Behauptung zeigt man analog. □

Hauptsatz 8.24.
Vor.: *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion.*

Beh.:

(i) f *Riemann-integrierbar über* $[a,b]$
$\Longrightarrow \forall_{c,d\in[a,b],c<d}\, f$ *Riemann-integrierbar über* $[c,d]$*.*

(ii) *Für alle* $c\in\mathbb{R}$ *mit* $a<c<b$ *gilt:*
f *Riemann-integrierbar über* $[a,c]$ *und* f *Riemann-integrierbar über* $[c,b]$
$\Longrightarrow f$ *Riemann-integrierbar über* $[a,b]$ *und*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Zu (i): Wegen $a\le c<d\le b$ folgt

$$\begin{aligned}
0 &\overset{\text{Vor.}}{=} \int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{8.23}{=} \left(\int_a^{\underline{c}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{\underline{d}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&\qquad - \left(\int_{\overline{a}}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{c}}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{d}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \underbrace{\left(\int_a^{\underline{c}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\overline{a}}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{\overset{8.5}{\ge}0} + \underbrace{\left(\int_c^{\underline{d}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\overline{c}}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{\overset{8.5}{\ge}0} \\
&\qquad + \underbrace{\left(\int_d^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\overline{d}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{\overset{8.5}{\ge}0},
\end{aligned}$$

also sind alle drei Summen gleich null, insbesondere gilt $\int_c^{\underline{d}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\overline{c}}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x$, und das bedeutet gerade, daß f über $[c,d]$ Riemann-integrierbar ist.

Zu (ii): Aus

$$\begin{aligned}
\int_a^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x &\overset{8.23}{=} \int_a^{\underline{c}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{\underline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} \int_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} \int_{\overline{a}}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{c}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{8.23}{=} \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

folgt offenbar die Behauptung. $\square$

Lemma 8.25.
Vor.: *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über $[a,b]$.*
Beh.:

(i) $\forall_{c\in[a,b]} \int\limits_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$

(ii) $\forall_{c_1,c_2\in[a,b]} \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{c_2}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x,$

(iii) $\forall_{c_1,c_2,c_3\in[a,b]} \int\limits_{c_1}^{c_3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c_2}^{c_3} f(x)\,\mathrm{d}x.$

(iv) Falls $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zusätzlich stetig ist, so gilt

$$\forall_{c_1,c_2\in[a,b]} \exists_{\vartheta\in[0,1]} f(c_1 + \vartheta(c_2 - c_1)) = \frac{1}{c_2 - c_1} \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. (i) und (ii) sind trivial nach Definition 8.22.

(iii) ist in den Fällen $c_1 = c_2$ bzw. $c_2 = c_3$ klar nach (i), und falls $c_1 < c_2 < c_3$, so gilt (iii) nach Definition 8.22 und Hauptsatz 8.24 (ii). Hierauf lassen sich die übrigen Fälle (als Übung) durch Fallunterscheidung zurückführen.

Zu (iv): 1. Fall: $c_1 < c_2$. Dann folgt (iv) aus dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung 8.20.

2. Fall: $c_2 < c_1$. Dann existiert nach 1. Fall $\tilde{\vartheta} \in [0,1]$ derart, daß gilt

$$f(c_2 + \tilde{\vartheta}(c_1 - c_2)) = \frac{1}{c_1 - c_2} \int\limits_{c_2}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hieraus folgt nach (ii) die Behauptung von (iv) mit $\vartheta := 1 - \tilde{\vartheta}$. □

Definition 8.26. Seien J ein nicht-entartetes[57] Intervall von $\mathbb{R}$ sowie $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) $f\colon J \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* genau dann, wenn f in jedem $t_0 \in \mathring{J}$ (im Sinne der früheren Definition 6.1) differenzierbar ist und in $\min J$ bzw. $\max J$ rechts- bzw. linksseitig differenzierbar ist (vgl. die Fußnote in Bemerkung 2.) zu 6.19), falls $\min J$ bzw. $\max J$ existieren.

Bemerkung. Es läßt sich zeigen, daß $f\colon J \to \mathbb{R}$ genau dann differenzierbar ist, wenn ein offenes Intervall $\widetilde{J}$ von $\mathbb{R}$ mit $J \subset \widetilde{J}$ und eine differenzierbare Funktion $\tilde{f}\colon \widetilde{J} \to \mathbb{R}$ mit $f = \tilde{f}|_{\widetilde{J}}$ existieren.

[Falls J einen Randpunkt enthält, so setze f dort durch die lineare Funktionen mit Steigung der rechts- bzw. linksseitigen Ableitung in diesem Randpunkt fort.]

[57] Ein Intervall J von $\mathbb{R}$ heißt *nicht-entartet* genau dann, wenn gilt $\#J > 1$.

(ii) Falls $f\colon J \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, so wird durch

$$f' := \tilde{f}'|_J\colon J \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ wobei } \tilde{f}\colon \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ wie in der Bemerkung in (i)}$$

die sog. *(erste) Ableitung von f* definiert. Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl von $\tilde{f}$, denn offenbar gilt für alle $t \in J$

$$\tilde{f}'(t) = \begin{cases} f'(t), & \text{für} t \in \mathring{J}, \\ f'(t+), & \text{für} t = \min J, \text{ falls } \min J \text{ existiert}, \\ f'(t-), & \text{für} t = \max J, \text{ falls } \max J \text{ existiert}. \end{cases}$$

Anstelle von f' schreibt man auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Bemerkung. Falls J offen ist (d.h. $J = \mathring{J}$), so haben wir in (i) und (ii) nichts Neues definiert.

8.27. Analog zu 6.2, 6.4 und 6.6 beweist man die folgenden Sätze.

(i) **Satz.** *Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall, $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $t_0 \in J$. Dann gilt:*

f differenzierbar in $t_0 \Longrightarrow f$ stetig in t_0.

(ii) **Satz.** *Seien $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ nicht-entartete Intervalle, $f\colon J_1 \to \mathbb{R}, g\colon J_2 \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $t_0 \in J := J_1 \cap J_2$. Ferner seien f und g in t_0 differenzierbar.*

a) (Summenregel)
$f \pm g\colon J \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in t_0 und $(f \pm g)'(t_0) = f'(t_0) \pm g'(t_0)$.

b) (Leibnizsche Produktregel)
$f \cdot g\colon J \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in t_0 und

$$(f \cdot g)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0).$$

c) (Quotientenregel)
$g(t_0) \neq 0 \Longrightarrow \frac{f}{g}\colon J \setminus \overline{g}^1(\{0\}) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in t_0 und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(t_0) = \frac{f'(t_0)g(t_0) - f(t_0)g'(t_0)}{g(t_0)^2}.$$

(iii) **Satz** (Kettenregel)**.** *Seien I, J nicht-entartete Intervalle von $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Ferner gelte $g(J) \subset I$ und sei $t_0 \in J$. Dann gilt:*

g differenzierbar in t_0 und f differenzierbar in $g(t_0)$
$\Longrightarrow f \circ g\colon J \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in t_0 und

$$(f \circ g)'(t_0) = f'(g(t_0)) \cdot g'(t_0).$$

□

Definition 8.28. Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) f heißt *stetig differenzierbar* genau dann, wenn f differenzierbar und $f'\colon J \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(ii) $F\colon J \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion von f* genau dann, wenn F differenzierbar ist mit $F' = f$.

Hauptsatz 8.29 (der Differential- und Integralrechnung)**.**
Vor.: *Seien J ein nicht-entartetes Intervall von $\mathbb{R}$ sowie $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*
Beh.:

(i) (Leistung der Intergralrechnung für die Differentialrechnung)

Zu jedem $c \in J$ existiert genau eine Stammfunktion $F\colon J \to \mathbb{R}$ mit $F(c) = 0$, nämlich

$$\forall_{t\in J}\, F(t) := \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{241}$$

(Beachte, daß die rechte Seite nach 8.10 und 8.22 als reelle Zahl wohldefiniert ist.)

(ii) (Leistung der Differentialrechnung für die Integralrechnung)

Ist $F_1\colon J \to \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfunktion von f, so folgt

$$\forall_{c,d\in J} \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{F_1(x)\big|_c^d} := \boxed{[F_1(x)]_c^d} := F_1(d) - F_1(c).$$

Beweis. Sei $F\colon J \to \mathbb{R}$ durch (241) definiert. Dann gilt

$$F(c) = \int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Def.}}{=} 0 \tag{242}$$

und außerdem für alle $t_0 \in J$, $t \in J \setminus \{t_0\}$

$$F(t) - F(t_0) = \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^{t_0} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{8.25(iii)}{=} \int_{t_0}^t f(x)\,\mathrm{d}x,$$

also existiert nach 8.25 (iv) eine Zahl $\vartheta_t \in [0,1]$ mit

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(x)\,\mathrm{d}x = f(\underbrace{t_0 + \vartheta_t(t - t_0)}_{\xrightarrow{t\to t_0} t_0})$$

und somit wegen der Stetigkeit von f in t_0

$$\lim_{t\to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = f(t_0).$$

Damit ist gezeigt:

$$F \text{ ist Stammfunktion von } f. \tag{243}$$

Sei nun $F_1\colon J \to \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$F - F_1\colon J \to \mathbb{R} \text{ ist konstant.} \tag{244}$$

Zu (244): $F - F_1$ ist mit F und F_1 differenzierbar, und es gilt

$$\forall_{t \in J}\, (F - F_1)'(t) = f(t) - f(t) = 0,$$

also ist $F - F_1$ offenbar auch konstant auf J.

Zu (i): Zunächst ist die Existenz klar nach (242), (243), und die Einzigkeitsaussage folgt sodann aus (244).

Zu (ii): Nach (244) ist $F - F_1\colon J \to \mathbb{R}$ konstant, also folgt für alle $c, d \in J$

$$F(c) - F_1(c) = F(d) - F_1(d),$$

und hieraus ergibt sich mit (242) sowie (241) die Behauptung von (ii). □

Beispiel.

1.) $\int\limits_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$.

2.) $\int\limits_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = 0$.

3.) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x)|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(\pi) = 1 + 1 = 2$.

4.) Sei $t \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt: $\int\limits_{1}^{t} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln(x)|_1^t = \ln(t)$.

Hauptsatz 8.30 (Partielle Integration)**.**
Vor.: *Seien J ein nicht-entartetes Intervall von $\mathbb{R}$, $c, d \in J$ und $f, g\colon J \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen.*

Beh.: $\displaystyle\int_c^d f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)|_c^d - \int_c^d f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x$

Beweis. Wir definieren $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall_{t \in J}\, h(t) := \int_c^t \underbrace{f'(x) \cdot g(x)}_{\text{stetig}} \,\mathrm{d}x + \int_c^t \underbrace{f(x) \cdot g'(x)}_{\text{stetig}} \,\mathrm{d}x - f(t) \cdot g(t) + f(c) \cdot g(c).$$

Nach 8.29 (i) und 8.27 (ii) ist h differenzierbar, also nach 8.27 (i) auch stetig, und es gilt

$$\forall_{t \in J}\, h'(t) = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t) - f'(t) \cdot g(t) - f(t) \cdot g'(t) = 0$$

sowie $h(c) = 0$, also auch nach 6.12 (i): $h = 0$. Insbesondere folgt $h(d) = 0$, und hieraus ergibt sich die Behauptung. □

Beispiel. Seien $c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_c^d \cos^2(x)\,\mathrm{d}x &= \sin(x)\cos(x)|_c^d - \int\limits_c^d -\underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= (\sin(x)\cos(x)+x)|_a^b - \int\limits_c^d \cos^2(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

also

$$\int\limits_c^d \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,(\sin(x)\cos(x)+x)|_a^b\,.$$

Satz 8.31 (Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktionen. f sei stetig differenzierbar sowie monoton und g stetig. Dann ist $f \cdot g$ beschränkt und Riemann-integrierbar über $[a,b]$, und es existiert $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f monoton wachsend, also gilt $f' \geq 0$.

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung existiert eine differenzierbare Funktion $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $G' = g$. Dann folgt aus Hauptsatz 8.30 (dort $f = G$ und $g = f$)

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot G(x)|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\cdot G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aus dem Verallgemeinerten ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung 8.21 folgt außerdem wegen $f' \geq 0$ die Existenz von $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int\limits_a^b f'(x)\cdot G(x)\,\mathrm{d}x = G(\xi)\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = G(\xi)\;f(x)|_a^b\,.$$

Die letzten beiden Gleichungen ergeben die Behauptung. □

Hauptsatz 8.32 (Substitutionsregel).
Vor.: *Seien J ein nicht-entartetes Intervall von $\mathbb{R}$, $c, d \in J$ und $f\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*

Ferner seien auch I ein nicht-entartetes Intervall von $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in I$ sowie $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi(I) \subset J$, $\varphi(\alpha) = c$ und $\varphi(\beta) = d$.

Beh.: $\displaystyle\int\limits_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung existiert eine differenzierbare Funktion $F\colon J \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$. Dann ist nach 8.27 (iii) auch $F \circ \varphi\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$(F \circ \varphi)'(t) = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Die Funktion auf der rechten Seite der letzten Gleichung ist nach 8.27 (ii), (iii) mit f, φ und φ' stetig, also folgt wiederum aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x &= F(d) - F(c) = (F \circ \varphi)(d) - (F \circ \varphi)(c) \\ &= \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

□

Beispiel. Der Flächeninhalt des Halbkreises mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 in $\mathbb{R}^2$ beträgt $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(t)}}_{=\sqrt{\cos^2(t)}=|\cos(t)| \overset{t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}{=} \cos(t)} \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{2}\left(\sin(t)\cos(t) + t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\, t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

8.33 (Uneigentliche Riemann-Integrale)**.**

(i) (Uneigentliche Integrale über beschränkten Intervallen von $\mathbb{R}$)

a) Sei $f\colon [a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\forall_{t\in]a,b[}\ f|_{[a,t]} \text{ beschränkt und Riemann-integrierbar über } [a,t].$$

Falls f zusätzlich auf ganz $[a,b[$ beschränkt ist, so kann man zeigen, daß jede Fortsetzung $\tilde{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über $[a,b]$ ist. In diesem Fall nennen wir f *eigentlich Riemann-integrierbar über* $[a,b[$ und setzen das *eigentliche Riemann-Integral von f über* $[a,b[$ als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Überlege als Übung, daß diese Definition unabhängig von der speziellen Wahl der Fortsetzung $\tilde{f}$ ist.)
Im folgenden nehmen wir daher an, daß f nicht beschränkt ist. Wir definieren dann:
f uneigentlich Riemann-integrierbar über $[a,b[$
$:\Longleftrightarrow \lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert in $\widehat{\mathbb{R}}$.
Ist diese Bedingung erfüllt, so setzen wir das *uneigentliche Riemann-Integral von f über $[a,b[$* als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Sei $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\forall_{t\in]a,b[}\ f|_{[t,b]} \text{ beschränkt und Riemann-integrierbar über } [t,b].$$

Falls f zusätzlich auf ganz $]a,b]$ beschränkt ist, so kann man zeigen, daß jede Fortsetzung $\tilde{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über $[a,b]$ ist. In diesem Fall nennen wir f *eigentlich Riemann-integrierbar über $]a,b]$* und setzen das *eigentliche Riemann-Integral von f über $]a,b]$* als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl der Fortsetzung $\tilde{f}$.)
Im folgenden nehmen wir daher an, daß f nicht beschränkt ist. Wir definieren dann:
f uneigentlich Riemann-integrierbar über $]a,b]$
$:\Longleftrightarrow \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert in $\widehat{\mathbb{R}}$.
Ist diese Bedingung erfüllt, so setzen wir das *uneigentliche Riemann-Integral von f über $]a,b]$* als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel. Seien $\alpha, b \in \mathbb{R}_+$. Wir wollen $\frac{1}{x^\alpha}|_{]0,b]}\colon]0,b] \to \mathbb{R}$ integrieren.
Sei $t \in]0,b[$. Dann gilt:
1. Fall: $\alpha = 1$.

$$\int_t^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(x)|_t^b.$$

2. Fall: $\alpha \neq 1$.

$$\int_t^b \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1}\Big|_t^b.$$

Hieraus folgt $\displaystyle\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & 0 < \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$

c) Sei $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\forall_{t_1,t_2 \in]a,b[, t_1<t_2} \quad f|_{[t_1,t_2]} \text{ beschränkt und Riemann-integrierbar über } [t_1,t_2].$$

Falls f zusätzlich auf ganz $]a,b[$ beschränkt ist, so kann man zeigen, daß jede Fortsetzung $\tilde{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über $[a,b]$ ist. In diesem Fall nennen wir f *eigentlich Riemann-integrierbar über* $]a,b[$ und setzen das *eigentliche Riemann-Integral von f über* $]a,b[$ als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl der Fortsetzung $\tilde{f}$.)
Im folgenden nehmen wir daher an, daß f nicht beschränkt ist. Wir definieren dann:
f heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar über* $]a,b[$ genau dann, wenn für ein (und damit für alle) $c \in]a,b[$ gilt:
$f|_{]a,c]}$ ist eigentlich oder uneigentlich Riemann-integrierbar über $]a,c]$ und $f|_{[c,b[}$ ist eigentlich oder uneigentlich Riemann-integrierbar über $[c,b[$, und es sind nicht $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ und $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$ oder sowohl jenes gleich $-\infty$ und dieses gleich $+\infty$.
Ist diese Bedingung erfüllt, so setzen wir das *uneigentliche Riemann-Integral von f über* $]a,b[$ als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $c \in]a,b[$ beliebig sei. (Beachte, daß die Integrale auf der rechten Seite dieser Definition gemäß a) und b) definiert sind.) Für jedes $C \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ setzen wir hierbei $C + (+\infty) = (+\infty) + C = +\infty$ und $D + (-\infty) = (-\infty) + D = -\infty$ für jedes $D \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Beispiel. Für $t \in]0,1[$ und $s \in]-1,0[$ gilt

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)\big|_0^t \xrightarrow{t\to 1-} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_s^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)\Big|_s^0 \overset{s\to -1+}{\longrightarrow} -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2},$$

also folgt $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$

(ii) (Uneigentliche Integrale über nicht-beschränkten abgeschlossenen Intervallen von $\mathbb{R}$)

a) Sei $f\colon [a,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\forall_{t\in\mathbb{R},t>a}\, f|_{[a,t]} \text{ beschränkt und Riemann-integrierbar über } [a,t].$$

Wir definieren dann:
f uneigentlich Riemann-integrierbar über $[a,+\infty[$
$:\Longleftrightarrow \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert in $\widehat{\mathbb{R}}$.
Ist diese Bedingung erfüllt, so setzen wir das *uneigentliche Riemann-Integral von f über $[a,+\infty[$* als

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel. Seien $a,\alpha\in\mathbb{R}_+$. Wir wollen $\frac{1}{x^\alpha}|_{[a,+\infty[}\colon [a,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ integrieren.
Sei $t\in\mathbb{R}_+$ mit $t>a$. Dann gilt:
1. Fall: $\alpha = 1$.

$$\int_a^t \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad = \quad \ln(x)\big|_a^t.$$

2. Fall: $\alpha \neq 1$.

$$\int_a^t \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \quad = \quad \frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\Big|_a^t.$$

Hieraus folgt $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & 0<\alpha\le 1,\\ \frac{a^{-\alpha+1}}{\alpha-1}, & \alpha>1.\end{cases}$

b) Sei $f\colon\ ]-\infty,b]\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\forall_{t\in\mathbb{R},t<b}\, f|_{[t,b]} \text{ beschränkt und Riemann-integrierbar über } [t,b].$$

Wir definieren dann:

f uneigentlich Riemann-integrierbar über $]-\infty, b]$
$:\Longleftrightarrow \lim_{t\to-\infty} \int\limits_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert in $\widehat{\mathbb{R}}$.
Ist diese Bedingung erfüllt, so setzen wir das *uneigentliche Riemann-Integral von f über* $]-\infty, b]$ als

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to-\infty} \int\limits_{t}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

c) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$\forall_{t_1,t_2\in\mathbb{R},t_1<t_2}$ $\quad f|_{[t_1,t_2]}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über $[t_1,t_2]$.

Wir definieren dann:
f heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar über* $\mathbb{R}$ genau dann, wenn für ein (und damit für alle) $c \in \mathbb{R}$ gilt:
$f|_{]-\infty,c]}$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar über $]-\infty, c]$, $f|_{[c,+\infty[}$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar über $[c, +\infty[$, und es sind nicht $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ und $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$ oder sowohl jenes gleich $-\infty$ und dieses gleich $+\infty$.
Ist diese Bedingung erfüllt, so setzen wir das *uneigentliche Riemann-Integral von f über* $\mathbb{R}$ als

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig sei. (Beachte, daß die Integrale auf der rechten Seite dieser Definition gemäß a) und b) definiert sind.) Für jedes $C \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ setzen wir hierbei wieder $C + (+\infty) = (+\infty) + C = +\infty$ und $D + (-\infty) = (-\infty) + D = -\infty$ für jedes $D \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Beispiel. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{s\to-\infty} \arctan(x)|_s^0 + \lim_{t\to+\infty} \arctan(x)|_0^t = \pi$

(iii) (Uneigentliche Riemann-Integrale über unbeschränkten offenen Intervallen von $\mathbb{R}$)

a) Sei $f\colon]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$\forall_{t_1,t_2\in]a,+\infty[,t_1<t_2}$ $\quad f|_{[t_1,t_2]}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über $[t_1,t_2]$.

Wir definieren dann:
f heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar über* $]a, +\infty[$ genau dann, wenn für ein (und damit für alle) $c \in]a, +\infty[$ gilt:

$f|_{]a,c]}$ ist eigentlich oder uneigentlich Riemann-integrierbar über $]a,c]$ und $f|_{[c,+\infty[}$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar über $[c,+\infty[$, und es sind nicht $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ und $\int\limits_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$ oder sowohl jenes gleich $-\infty$ und dieses gleich $+\infty$.

Ist diese Bedingung erfüllt, so setzen wir das *uneigentliche Riemann-Integral von f über $]a,+\infty[$* als

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $c \in\ ]a,+\infty[$ beliebig sei. (Beachte, daß die Integrale auf der rechten Seite dieser Definition gemäß (i) b) und (ii) a) definiert sind.) Die Summen mit nicht-reellen Zahlen sind hierbei wie oben zu verstehen.

b) Sei $f\colon]-\infty,b[\ \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\forall_{t_1,t_2\in]-\infty,b[,t_1<t_2} \qquad f|_{[t_1,t_2]} \text{ beschränkt und Riemann-integrierbar über } [t_1,t_2].$$

Wir definieren dann:

f heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar über* $]-\infty,b[$ genau dann, wenn für ein (und damit für alle) $c \in\ ]-\infty,b[$ gilt:

$f|_{]-\infty,c]}$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar über $]-\infty,c]$, $f|_{[c,+\infty[}$ ist eigentlich oder uneigentlich Riemann-integrierbar über $[c,+\infty[$, und es sind nicht $\int\limits_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ und $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$ oder jenes gleich $-\infty$ und dieses gleich $+\infty$.

Ist diese Bedingung erfüllt, so setzen wir das *uneigentliche Riemann-Integral von f über $]-\infty,b[$* als

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $c \in\ ]-\infty,b[$ beliebig sei. (Beachte, daß die Integrale auf der rechten Seite dieser Definition gemäß (i) a) und (ii) b) definiert sind.) Die Summen mit nicht-reellen Zahlen sind hierbei wieder wie oben zu verstehen.

Warnung. In (i) c), (ii) c), (iii) a) und b) haben wir uneigentliche Riemann-Integrale durch zwei voneinander unabhängig Grenzwertprozesse definiert. Das folgende Beispiel zeigt, daß diese nicht simultan durchgeführt werden dürfen:

Die Funktion $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht uneigentlich Riemann-integrierbar über $\mathbb{R}$, denn

$$\int\limits_0^t \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\big|_0^t = -\cos(t) + 1,$$

$$\int_{-t}^{0} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)|_{-t}^{0} = -1 + \cos(-t) = -1 + \cos(t)$$

konvergieren nicht für t gegen $+\infty$. Aber es gilt

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{t\to+\infty} \cos(t)|_{-t}^{t} = \lim_{t\to+\infty} 0 = 0.$$

(Falls $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allerdings existiert, so gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$.)

Wir wollen im folgenden die Integration rationaler Funktionen studieren. Hierzu stellen wir in 8.34 zunächst drei Ergebnisse bereit.

8.34.

(i) **Satz.** *Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei ganz-rationale Funktionen mit*

$$\mathrm{Grad}(f) \geq \mathrm{Grad}(g).$$

Dann existieren ganz-rationale Funktionen $q, r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f = g \cdot q + r$$

und $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(g)$.

Beweis als Übung durch vollständige Induktion nach $\mathrm{Grad}(f) - \mathrm{Grad}(g)$. □

(ii) **Satz 1** (Fundamentalsatz der Algebra im Reellen). *Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ganz-rationale Funktion vom Grade $n \in \mathbb{N}$ mit Leitkoeffizient Eins.*

Es existieren dann $r, s \in \mathbb{N}_+$ sowie $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$ und $n_1, \ldots, n_r, m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{N}_+$ derart, daß gilt:

a) (Primfaktorzerlegung von g über $\mathbb{R}$)
$g = \prod_{i=1}^{r} (x - a_i)^{n_i} \cdot \prod_{j=1}^{s} (x^2 + b_j x + c_j)^{m_j}$.

b) Die $a_1, \ldots, a_r$ sind paarweise verschieden.

c) Die $(b_1, c_1), \ldots, (b_s, c_s)$ sind paarweise verschieden.

d) Für jedes $j \in \{1, \ldots, s\}$ gilt $b_j^2 - 4c_j < 0$, d.h. $x^2 + b_j x + c_j$ hat keine reelle Nullstelle.

Die in a) angegebene Darstellung von g ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt.

Satz 2 (von der Partialbruchzerlegung im Reellen). *Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ganz-rationale Funktionen mit* $\mathrm{Grad}(f) < \mathrm{Grad}(g)$. *$g$ sei gemäß Satz 1 in Primfaktoren zerlegt.*

Dann existieren zu jedem $i \in \{1, \dots, r\}$ reelle Zahlen $A_{i,1}, \dots, A_{i,n_i} \in \mathbb{R}$ und zu jedem $j \in \{1, \dots, s\}$ reelle Zahlen $B_{j,1}, \dots, B_{j,m_j}, C_{j,1}, \dots, C_{j,m_j} \in \mathbb{R}$ mit $n_i, m_j \in \mathbb{N}_+$ derart, daß gilt

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} \quad = \quad & \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{A_{i,1}}{(x-a_i)^1} + \frac{A_{i,2}}{(x-a_i)^2} + \dots + \frac{A_{i,n_i}}{(x-a_i)^{n_i}} \right) \\ & + \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{B_{j,1} \cdot x + C_{j,1}}{(x^2 + b_j x + c_j)^1} + \dots + \frac{B_{j,m_j} \cdot x + C_{j,m_j}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{m_j}} \right). \end{aligned} \tag{245}$$

Diese Zerlegung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Summanden.

Beweise von Satz 1 und Satz 2 vgl. [11, Nr. 69]. □

Bemerkung (Methode zur Bestimmung der Koeffizienten in (245))**.** Multiplikation von (245) mit g liefert $f = g \cdot h$, wobei h die rechte Seite von (245) ist. Ordnet man $g{\cdot}h$ nun nach den Potenzen von x – beachte, daß $g{\cdot}h$ eine ganz-rationale Funktion ist –, so liefert der Koeffizientenvergleich mit den Koeffizienten von f ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $A_{i,\nu}, B_{j,\mu}, C_{j,\mu}$.

8.35 (Integration rationaler Funktionen)**.** Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ganz-rationale Funktionen mit $\forall_{t \in [a,b]}\, g(t) \neq 0$. Wir wollen ein „allgemeines Rezept“ zur Berechnung von $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$ angeben.

(i) Falls $\mathrm{Grad}(f) \geq \mathrm{Grad}(g)$, so bestimme zunächst gemäß 8.34 (i) ganz-rationale Funktionen $q, r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(g)$ und

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Beispiel.

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& x^3 & +4x^2 & +x & -1 &) & : & (& x^2+2 &) & = \; x + 4 + \dfrac{-x-9}{x^2+2} \\ -(& x^3 & & +2x & &) \\ \hline & & 4x^2 & -x & -1 & \\ & -(& 4x^2 & & 8 &) \\ \hline & & & -x & -9 & \end{array}$$

Dann gilt also

$$\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b q(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{r(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x,$$

wobei das Integral über die ganz-rationale Funktion q trivial zu lösen ist.

(ii) Wegen (i) dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt $\mathrm{Grad}(f) < \mathrm{Grad}(g)$ und daß der Leitkoeffizient von g gleich eins ist.

Bestimme dann gemäß 8.34 (ii) Satz 1 die Primfaktorzerlegung von g über $\mathbb{R}$ – das ist evtl. schwierig – und danach die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung von $\frac{f}{g}$ wie in 8.34 (ii) Satz 2.

Beispiel.

1.) $f(x) = 3x^7 + 5$ und $g(x) = (x-1)^3(x+2)(x^2+x+2)^2$, die Primfaktorzerlegung von g ist also bereits gegeben.
Dann existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, B_{11}, B_{12}, C_{11}, C_{12} mit

$$\begin{aligned}\frac{3x^7+5}{(x-1)^3(x+2)(x^2+x+2)^2} &= \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{A_{13}}{(x-1)^3} + \frac{A_{21}}{x+2} \\ &\quad + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+x+2} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+x+2)^2}\end{aligned}$$

Multipliziert man die letzte Gleichung mit $g(x)$, so erhält man durch Koeffizientenvergleich ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem für $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, B_{11}, B_{12}, C_{11}, C_{12}$. Dieses kann man mit Methoden der linearen Algebra lösen.

2.) $f(x) = 2$ und $g(x) = (x-1)(x+2)$. Dann existieren eindeutig bestimmte $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ mit $\frac{2}{(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}$.
Denn wegen

$$\begin{aligned}&\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}}\ \frac{2}{(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2} \\ &\Longrightarrow \forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}}\ 2 = A_1(x+2) + A_2(x-1) \\ &\Longrightarrow \forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}}\ 2 = (A_1+A_2)x + (2A_1 - A_2) \\ &\Longrightarrow (A_1 + A_2 = 0) \wedge (2A_1 - A_2 = 2) \\ &\Longrightarrow A_1 = \frac{2}{3} \wedge A_2 = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

gilt $\displaystyle\frac{2}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)}$.

(iii) Wegen (ii) ist das Integrationsproblem reduziert auf die Berechnung von Integralen der folgenden Form, wobei $n \in \mathbb{N}_+$ ist:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^n} = \begin{cases} \ln(|x-\alpha|)\big|_a^b, & n = 1, \\ -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}\Big|_a^b, & n \geq 2, \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{x}{x^2+\beta x+\gamma}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\beta x+\gamma}, \tag{246}$$

wobei die Nenner in (246) keine reellen Nullstellen haben, d.h. es existiert genau eine Zahl $\zeta \in \mathbb{R}_+$ mit $\zeta^2 = \gamma - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2$.

Wegen $x^2+\beta x+\gamma = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \zeta^2\left(\left(\frac{x}{\zeta} - \frac{\beta}{2\zeta}\right)^2 + 1\right)$ können die Integrale in (246) durch einfache Substitution zurückgeführt werden auf Integrale der Form

$$\int_a^b \frac{x}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_a^b, & n=1,\\ -\dfrac{1}{2(n-1)}\,\dfrac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\Bigg|_a^b, & n \geq 2, \end{cases}$$

und $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$. Letzteres läßt sich, da für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} &= \left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}\Bigg|_a^b\right) \end{aligned}$$

gilt – zeige dies als Übung –, rekursiv auf $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)} = \arctan(x)\big|_a^b$ zurückführen.

Beispiel.

1.) Bestimmung der Koeffizienten der Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{x(x^2+1)}$ liefert $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$, also gilt

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)} = \left[\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^2 \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(5) + \frac{1}{2}\ln(2) = \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) \end{aligned}$$

2.) $$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\Bigg|_{-1}^1\right) = \frac{1}{2}\arctan(x)\big|_{-1}^1 + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

8.36. Zum Abschluß dieses Kapitels sei noch erwähnt, daß – im Gegensatz zur Bestimmung der Ableitung – das Auffinden einer Stammfunktion zu ernsten Schwierigkeiten führen kann. Es erstaunt daher nicht, daß ganze Bücher aus Integraltafeln bestehen.

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, daß die zu einer (auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definierten) reellwertigen Funktion f häufig verwendete Schreibweise $\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$ für das sog. *unbestimmte Integral von f* die Menge aller Stammfunktionen von f bezeichnet. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist klar, daß aus der Kenntnis einer Stammfunktion F von f folgt $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F + C \,|\, C \in \mathbb{R}\}$.

In der Literatur findet sich häufig der Ausdruck $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. Obwohl die Bedeutung dieser Notation offensichtlich ist, so ist sie doch nicht ganz unproblematisch, da auf der linken Seite der Gleichung eine Menge und auf der rechten Seite eine Funktion steht.

Das Nachschlagewerk schlechthin ist [2]. Es enthält nahezu alle bekannten Integrale, die man durch elementare Funktionen darstellen kann. Auch im Internet finden sich viele Integraltafeln, siehe z.B. `http://www.integral-table.com`. Nach der Meinung des Autors findet der Leser dort die in der Praxis am häufigsten benötigten unbestimmten Integrale.

9 Grundlagen der Topologie

Der Begriff *Topologie* leitet sich von den griechischen Worten $\tau\acute{o}\pi o\varsigma$ (dt.: der Ort) und $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (dt.: das Wort, die Lehre) ab. Die Topologie, als Teilgebiet der Mathematik, beschäftigt sich mit der relativen Lage – dem Ort –, die Punktmengen – sog. Räume – zueinander einnehmen; hierbei spielen im Gegensatz zur Geometrie quantitative Größen wie Abstände oder Winkel keine Rolle. Konkreter gesprochen, handelt es sich um die Lehre von Räumen zwischen denen man den Begriff der stetigen Abbildung definieren kann und das Studium letzterer. Natürlich soll der Begriff der Stetigkeit dabei so eingeführt werden, daß im Spezialfall die in Kapitel 5 eingeführten stetigen Abbildungen von Teilmengen von $\mathbb{R}$ wiedererkannt werden. Eng verbunden mit der Definition der Stetigkeit ist die der Folgenkonvergenz. Auch diese läßt sich auf topologischem Niveau einführen.

Wir interessieren uns in diesem Kapitel bei unserer Diskussion im wesentlichen für Räume, die Teilmengen von endlich-dimensionalen euklidischen Vektorräumen sind. Wenn sich die Beweisführung aber von der in allgemeineren Räumen nicht unterscheidet, so formulieren wir unsere Ergebnisse in der allgemeineren Form. Eine über dieses Kapitels hinausgehende (aber dennoch einführende) Behandlung des Themas stellt der Inhalt des Buches [12] dar.

Generalvoraussetzung. Seien stets $n, m \in \mathbb{N}_+$.

Einführung

9.1 (Euklidisches Skalarprodukt, Norm und Metrik)**.**

(i) Soweit nicht ausdrücklich anders erwähnt, betrachten wir auf

$$\mathbb{R}^n = \left\{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall_{i \in \{1,\ldots,n\}}\, a_i \in \mathbb{R}\right\}$$

das aus der linearen Algebra bekannte *euklidische Skalarprodukt*

$$\forall_{a=(a_1,\ldots,a_n), b=(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n}\ \langle a, b\rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i.$$

$\langle \ldots, \ldots \rangle_2$ ist offenbar bilinear, symmetrisch und positiv definit[58].

Definiton. Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so heißt eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \ldots, \ldots \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein *Skalarprodukt auf* V.[59]

(ii) Soweit nicht ausdrücklich anders erwähnt, betrachten wir auf $\mathbb{R}^n$ die *euklidische Norm*

$$\|\ldots\| = \|\ldots\|_2 \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

die jedem $a \in \mathbb{R}^n$ seine *Länge*

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a\rangle_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2}$$

[58]Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so heißt eine symmetrische Bilineraform $\langle \ldots, \ldots \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ *positiv definit* genau dann, wenn $\forall_{a \in V}\ \langle a, a\rangle \geq 0 \wedge (\langle a, a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0)$ gilt.

[59]Das Paar $(V, \langle \ldots, \ldots \rangle)$, das wir auch kurz mit V bezeichnen, heißt ein *euklidischer Vektorraum* – auch wenn im Falle $V = \mathbb{R}^n$ das Skalarprodukt nicht das euklidische ist.

zuordnet. Es gilt (vgl. lineare Algebra)

(N1)	$\forall_{a\in\mathbb{R}^n}\ \|a\| \geq 0 \wedge (\|a\| = 0 \Longleftrightarrow a = 0)$,	(Positiv-Definitheit),
(N2)	$\forall_{\lambda\in\mathbb{R}}\forall_{a\in\mathbb{R}^n}\ \|\lambda\, a\| = \|\lambda\|\,\|a\|$,	(Homogenität),
(N3)	$\forall_{a,b\in\mathbb{R}^n}\ \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$,	(Dreiecksungleichung)

sowie die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$\text{(CS)} \quad \forall_{a,b\in\mathbb{R}^n}\ |\langle a,b\rangle| \leq \|a\|\,\|b\|.$$

Definiton. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. $\|\ldots\|\colon V \to \mathbb{R}$ mit (N1)-(N3) – und somit auch (CS), falls $\|\ldots\|$ durch ein Skalarprodukt induziert ist (s.u.) – mit V statt $\mathbb{R}^n$, heißt eine *Norm auf* V. Das Paar $(V,\|\ldots\|)$ heißt dann ein *normierter Vektorraum*. Für $(V,\|\ldots\|)$ schreiben wir auch kurz V.

Ist auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ein Skalarprodukt $\langle\ldots,\ldots\rangle$ gegeben, so wird durch $\forall_{a\in V}\ \|a\| := \sqrt{\langle a,a\rangle}$ in kanonischer Weise eine Norm induziert.

(iii) Die *euklidische Metrik* [60]

$$d = d_2\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ordnet je zwei Elementen $a,b\in\mathbb{R}^n$ ihren *euklidischen Abstand* oder ihre *Distanz*

$$d(a,b) = \|a-b\| \tag{247}$$

zu. Dann gilt

(D1)	$\forall_{a,b\in\mathbb{R}^n}\ d(a,b) \geq 0 \wedge (d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b)$,	(Positiv-Definitheit),
(D2)	$\forall_{a,b\in\mathbb{R}^n}\ d(a,b) = d(b,a)$,	(Symmetrie),
(D3)	$\forall_{a,b,c\in\mathbb{R}^n}\ d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$,	(Dreiecksunglei-chung).

[(D1) ist klar nach (N1).

Zu (D2): $d(a,b) = \|a-b\| = |-1|\,\|a-b\| \overset{(N2)}{=} \|b-a\| = d(b,a)$.

Zu (D3):

$$\begin{aligned} d(a,c) &= \|a-c\| = \|(a-b)+(b-c)\| \\ &\overset{(N3)}{\leq} \|a-b\| + \|b-c\| = d(a,b) + d(b,c). \ ] \end{aligned}$$

Definiton. Ist M eine Menge, so heißt eine Abbildung $d\colon M\times M \to \mathbb{R}$, die (D1)-(D3) mit M anstelle von $\mathbb{R}^n$ erfüllt, eine *Metrik auf* M. Das Paar (M,d) heißt dann ein *metrischer Raum*. Anstelle von (M,d) schreiben wir auch kurz M. Übrigens ist eine Teilmenge eines metrischen Raumes natürlich in kanonischer Weise selbst ein metrischer Raum.

Ist $(V,\|\ldots\|)$ ein normierter Vektorraum, so wird V in kanonischer Weise zu einem metrischen Raum, indem man eine Metrik d durch (247) für alle $a,b\in V$ definiert.

Wir betrachten jeden normierten Vektorraum als metrischen Raum mit dieser kanonischen Metrik.

[60] vom griechischen $\mu\varepsilon\tau\rho\iota\kappa o\varsigma$ (dt.: aus dem Meter)

Definition 9.2 (Offene und abgeschlossene Mengen in metrischen Räumen). Sei M ein metrischer Raum.

(i) Für jedes $a \in M$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ heißt die Menge

$$\boxed{U_\varepsilon(a)} := \{p \in M \,|\, d(a,p) < \varepsilon\}$$

die *(offene) ε-Umgebung von a.*

(ii) Eine Teilmenge G von M heißt *offen in M* genau dann, wenn gilt

$$\forall_{a \in G} \exists_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} U_\varepsilon(a) \subset G.$$

Beispiel. Offene ε-Umgebungen sind offen.

[Seien nämlich $a \in M$ sowie $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gegeben und $b \in U_\varepsilon(a)$, also $d(a,b) < \varepsilon$.

Zu zeigen ist, daß $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $U_\delta(b) \subset U_\varepsilon(a)$ existiert. Wir zeigen, daß $\delta := \varepsilon - d(a,b) \in \mathbb{R}_+$ dies leistet:

Für $c \in U_\delta(b)$ gilt $d(a,c) \le d(a,b) + d(b,c) < d(a,b) + \delta = \varepsilon$.]

(iii) Eine Teilmenge A von M heißt *abgeschlossen in M* genau dann, wenn ihr Komplement $M \setminus A$ offen ist.

Warnung. „Abgeschlossen" bedeutet nicht das Gegenteil von „offen". Z.B. sind $\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ stets sowohl offen als auch abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Dagegen ist $]0,1] \subset \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Satz 9.3 (Metrische Räume als topologische Räume). *Seien M ein metrischer Raum und*

$$\mathcal{T}_M := \{U \subset M \,|\, U \text{ offen in } M\} \subset \mathfrak{P}(M).$$

Dann gilt:

(T1) $\quad \varnothing, M \in \mathcal{T}_M$

(T2) $\quad (I \text{ beliebige Menge} \wedge \forall_{i \in I}\, U_i \in \mathcal{T}_M) \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_M$

(T3) $\quad U_1, U_2 \in \mathcal{T}_M \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_M$

Beweis als Übung.

Definition 9.4 (Topologischer Raum, offene Mengen, abgeschlossene Mengen, Umgebungen).

(i) Ein Paar $(M, \mathcal{T}_M)$, bestehend aus einer Menge M zusammen mit einer Teilmenge $\mathcal{T}_M$ von $\mathfrak{P}(M)$, das (T1)-(T3) erfüllt, heißt ein *topologischer Raum.*

$\mathcal{T}_M$ nennt man dann *Topologie für M* und die Elemente von $\mathcal{T}_M$ die *offenen Mengen des topologischen Raumes* $(M, \mathcal{T}_M)$.

Anstelle von $(M, \mathcal{T}_M)$ schreiben wir auch kurz M.

Beispiel. Ist M eine Menge, so heißt $\{\varnothing, M\}$ die *triviale Topologie für M* und $\mathfrak{P}(M)$ die *diskrete Topologie für M.*

(ii) Sei M ein topologischer Raum.

  (a) A heißt *abgeschlossen in* M genau dann, wenn $M \setminus A$ offen ist.

  (b) Ist $p \in M$, so heißt eine Teilmenge U von M *Umgebung von* p *in* M genau dann, wenn U offen in M ist und $p \in U$ gilt.

  Mit $\boxed{\mathcal{U}^\circ(p, M)}$ bezeichnen wir die Menge aller Umgebungen von p in M.

Bemerkung. Ist (M, d) ein metrischer Raum, so wird durch den in Definition 9.2 und Satz 9.3 beschrieben Prozeß nach letzterem eine Topologie auf M definiert. Jeder metrische Raum ist also in kanonischer Weise ein topologischer Raum.

Wir betrachten jeden metrischen Raum als topologischen Raum mit dieser kanonischen Topologie.

Definition 9.5 (Teilraumtopologie)**.** Seien $(N, \mathcal{T}_N)$ ein topologischer Raum und M eine Teilmenge von N sowie G eine Teilmenge von M.

G heißt *offen im Teilraum* M *von* N genau dann, wenn eine in N offene Menge H existiert mit

$$G = H \cap M.$$

Satz. *Seien* $(N, \mathcal{T}_N)$ *ein topologischer Raum und* M *eine Teilmenge von* N. *Dann ist*

$$\mathcal{T}_{M,N} := \{G \subset M \,|\, G \text{ offen im Teilraum } M \text{ von } N\}$$

eine Topologie für M, *die sog.* Teilraumtopologie von M bzgl. N.

Beweis als Übung. □

Wir betrachten eine Teilmenge eines topologischen Raumes stets als topologischen Raum mit der durch den umgebenden Raum induzierten Teilraumtopologie.

Bemerkung. Ist M eine Teilmenge eine metrischen Raumes N, so stimmt die Teilraumtopologie von M bzgl. der durch den metrischen Raum N induzierten Topologie für N offenbar mit der Topologie, die durch den metrischen Raum M – als metrischer Teilraum von N – induziert wird, überein.

Definition 9.6 (offener Kern, innerer Punkt, abgeschlossene Hülle, Berührungspunkt, Rand)**.** Sei M eine Teilmenge eines topologischen Raumes $(N, \mathcal{T}_N)$.

(i) Wir definieren den *offenen Kern von* M *in* N als

$$\boxed{\mathring{M}} := \bigcup_{U \in \mathcal{T}_N, U \subset M} U. \tag{248}$$

Nach (T2) ist $\mathring{M}$ offen in N, also ist $\mathring{M}$ offenbar die größte offene Teilmenge von N, die in M enthalten ist.

Es gilt:

$$\overset{\circ}{M} \subset M, \tag{249}$$

$$\overset{\circ}{M} = \{p \in N \,|\, \exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,N)}\, U \subset M\}. \tag{250}$$

Einen Punkt $p \in N$ mit $\exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,N)}\, U \subset M$ nennen wir einen *inneren Punkt von M in N*.

[(249) folgt trivial aus (248).

Beweis von (250): „$\subset$" Sei $p \in \overset{\circ}{M}$. Dann existiert nach (248) ein $U \in \mathcal{T}_N$ mit $U \subset M$ und $p \in U$, also $U \in \mathcal{U}^\circ(p,N)$ mit $U \subset M$, d.h. p ist innerer Punkt von M in N.

„$\supset$" Sei p ein innerer Punkt von M in N. Dann existiert $U \in \mathcal{U}^\circ(p,N)$ mit $U \subset M$. Folglich gilt nach (248): $p \in \overset{\circ}{M}$.]

(ii) Die *abgeschlossene Hülle von M in N* ist definiert als

$$\boxed{\overline{M}} := \bigcap_{A \subset N \text{abgeschlossen}, A \supset M} A. \tag{251}$$

Wegen (T2) ist $\overline{M}$ abgeschlossen in N, also ist $\overline{M}$ offenbar die kleinste abgeschlossene Teilmenge von N, die M umfaßt.

Es gilt:

$$\overset{\circ}{M} \subset M \subset \overline{M}, \tag{252}$$

$$\overline{M} = \{p \in N \,|\, \forall_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,N)}\, U \cap M \neq \varnothing\}. \tag{253}$$

Einen Punkt $p \in N$ mit $\forall_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,N)}\, U \cap M \neq \varnothing$ nennen wir einen *Berührungspunkt von M in N*.

[(252) folgt trivial aus (251).

Beweis von (253): „$\subset$" Seien $p \in \bigcap_{A \subset N \text{abgeschlossen}, A \supset M} A$ und $U \in \mathcal{U}^\circ(p,N)$ beliebig. Angenommen $U \cap M = \varnothing$. Dann ist p kein Element der abgeschlossenen Obermenge $N \setminus U$ von M, Widerspruch!

„$\supset$" Sei $p \in N$ mit $\forall_{U \in \mathcal{U}^\circ(p,N)}\, U \cap M \neq \varnothing$. Angenommen es existiert eine abgeschlossene Obermenge A von M mit $p \notin A$, d.h. p liegt in der offenen Menge $N \setminus A$, die wegen $A \supset M$ mit M einen leeren Schnitt hat, Widerspruch!]

(iii) Der *Rand von M in N* ist per definitionem die Menge

$$\boxed{\partial M} := \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}. \tag{254}$$

Aus (250) sowie (253) folgt sofort

$$\partial M = \{p \in N \,|\, \forall_{U\in\mathcal{U}^\circ(p,M)} \big(U \cap M \neq \varnothing\big) \wedge \big(U \cap (N \smallsetminus M) \neq \varnothing\big)\}, \qquad (255)$$

und dies zeigt auch, daß $\partial M = \overline{M} \cap \overline{N \smallsetminus M}$ in N abgeschlossen ist.

Die in ∂M enthaltenen Punkte heißen *Randpunkte von M in N.*

Beispiel.

(i) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der durch die euklidische Metrik induzierte Topologie. Die *abgeschlossenene Einheitskreisscheibe* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ besitzt sich selbst als abgeschlossene Hülle in $\mathbb{R}^2$ und die *offene Einheitskreisscheibe* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1\}$ als offenen Kern in $\mathbb{R}^2$. Beider Mengen Rand in $\mathbb{R}^2$ ist der *Einheitskreis* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.

(ii) Wir betrachten $M := \{(x,y,0) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ als Teilmenge der Hyperebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ des $\mathbb{R}^3$ mit der durch den euklidischen $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie. Dann ist $\{(x,y,0) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ die abgeschlossene Hülle von M in $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und $\{(x,y,0) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Rand von M in $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Betrachtet man hingegen M als Teilmenge des euklidischen $\mathbb{R}^3$, so sind abgeschlossene Hülle und Rand von M in $\mathbb{R}^3$ gleich $\{(x,y,0) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Satz 9.7 (Metrische Räumen als Hausdorff-Räume)**.** *Sei M ein metrischer Raum – z.B. $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann hat M die sog.* Punktetrennungseigenschaft*, d.h. sind $p, q \in M$ derart, daß gilt $p \neq q$, so existieren $U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)$ und $V \in \mathcal{U}^\circ(q,M)$ mit $U \cap V = \varnothing$.*

Beweis. Wegen $p \neq q$ und (D1) gilt $\varepsilon := \frac{1}{2} d(p,q) \in \mathbb{R}_+$. Da $U_\varepsilon(p)$ und $U_\varepsilon(q)$ offen sind, genügt es zu zeigen, daß ihr Schnitt leer ist.

Angenommen es existiert $a \in U_\varepsilon(p) \cap U_\varepsilon(q)$, d.h. $d(p,a) < \varepsilon$ und $d(q,a) < \varepsilon$. Dann folgt aus (D2), (D3): $2\varepsilon = d(p,q) \leq d(p,a) + d(a,q) < 2\varepsilon$, Widerspruch! □

Definition 9.8. Ein topologischer Raum M, der die Punktetrennungseigenschaft hat, heißt *Hausdorff*[61]*-Raum* oder *hausdorffsch.*

Beispiel. Der letzte Satz zeigt, daß jeder metrische Raum hausdorffsch ist. Für topologische Räume ist das i.a. nicht richtig, denn ist M eine Menge mit $\#M \geq 2$, so ist M, versehen mit der trivialen Topologie $\{\varnothing, M\}$, nicht hausdorffsch.

Satz 9.9. *Seien M ein Hausdorff-Raum (z.B. $M \subset \mathbb{R}^n$) und $p \in M$. Dann ist $\{p\}$ abgeschlossen in M.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß $M \smallsetminus \{p\}$ offen ist.

Zu jedem $q \in M \smallsetminus \{p\}$ existieren nach 9.8 $U_q \in \mathcal{U}^\circ(p,M)$ sowie $V_q \in \mathcal{U}^\circ(q,M)$ mit $U_q \cap V_q = \varnothing$. Insbesondere gilt wegen $q \in V_q$: $p \notin V_q$, d.h. $V_q \subset M \smallsetminus \{p\}$. Hieraus folgt

$$M \smallsetminus \{p\} = \bigcup_{q \in M \smallsetminus \{p\}} V_q. \qquad (256)$$

[„$\subset$“ gilt wegen $\forall_{q\in M\smallsetminus\{p\}}\, q \in V_q$ und „$\supset$“ wegen $\forall_{q\in M\smallsetminus\{p\}}\, V_q \subset M \smallsetminus \{p\}$.]

Die rechte Seite von (256) ist mit den V_q nach (T2) offen. Damit ist der Satz gezeigt. □

[61] nach Felix Hausdorff (1868–1942)

Konvergenz von Folgen

9.10 (Konvergenz von Folgen).

Definition 1. Seien M ein topologischer Raum, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M und $p \in M$.

$$\begin{aligned}&(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert in } M \textit{ gegen } p\\ &\quad :\Longleftrightarrow \forall_{U\in\mathcal{U}^\circ(p,M)} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}} \left(k \geq k_0 \Rightarrow p_k \in U\right)\end{aligned}$$

Lemma. *Sind M ein Hausdorff-Raum (z.B. $M \subset \mathbb{R}^n$) und $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die sowohl gegen $p \in M$ als auch gegen $q \in M$ konvergiert, so gilt $p = q$.*

Beweis. Angenommen $p \neq q$. Dann existieren nach 9.7 $U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)$ und $V \in \mathcal{U}^\circ(q,M)$ mit $U \cap V = \varnothing$. Nach Voraussetzung existieren $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k\in\mathbb{N},k\geq k_1} p_k \in U \quad \text{und} \quad \forall_{k\in\mathbb{N},k\geq k_2} p_k \in V,$$

also folgt für $k_0 \coloneqq \max\{k_1, k_2\}$: $p_{k_0} \in U \cap V$, Widerspruch! □

Definition 2. Sind daher M ein Hausdorff-Raum (z.B. $M \subset \mathbb{R}^n$) und $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen $p \in M$ konvergiert, so ist p mit dieser Eigenschaft (nach dem Lemma) eindeutig bestimmt, und wir setzen

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} p_k} \coloneqq p$$

und nennen p den *Grenzwert* oder *Limes von* $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *für* k *gegen unendlich.*

Bemerkung. Im Falle eines nicht-hausdorffschen Raumes M kann man zwar Definition 1 geben, aber eine konvergente Folge konvergiert i.a. nicht gegen nur einen Punkt. Versieht man z.B. eine Menge M mit der trivialen Topologie, so konvergiert jede Folge in M gegen jeden Punkt von M.

Satz 9.11. *Seien M eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raumes N (z.B. $N \subset \mathbb{R}^n$) und $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. (Letzteres heißt $\forall_{k\in\mathbb{N}} p_k \in M$.) Ist dann $p \in N$ derart, daß $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen p konvergiert, so gilt $p \in M$.*

Beweis. Da M abgeschlossen ist, ist $N \setminus M$ offen. Angenommen $p \in N \setminus M$. Nach 9.10 Definition 1 existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $\forall_{k\in\mathbb{N},k\geq k_0} p_k \in N \setminus M$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 9.12. *Sei M ein metrischer Raum – z.B. $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle Folgen $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M und alle $p \in M$:*

$$\lim_{k\to\infty} p_k = p \iff \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}} \Big(k \geq k_0 \Rightarrow \underbrace{p_k \in U_\varepsilon(p)}_{\Leftrightarrow\, d(p_k,p)<\varepsilon} \Big). \tag{257}$$

Die rechte Seite von (257) besagt gerade, daß $\lim_{k\to\infty} d(p_k,p) = 0$ im Sinne von Definition 4.1 gilt.

Beweis. Zu „⇒“: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da $U_\varepsilon(p)$ in M offen ist, folgt nach Voraussetzung der linken Seite von (257) dann, daß $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{k\in\mathbb{N},k\geq k_0}\, p_k \in U_\varepsilon(p) \cap M \subset U_\varepsilon(p)$ existiert.

Zu „⇐“: Sei $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$. Zu zeigen ist, daß fast alle[62] p_k in U liegen. Da U offen ist, folgt nach Definition 9.2 (ii) die Existenz von $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $U_\varepsilon(p) \subset U$. Nun existiert hierzu gemäß der rechten Seite von (257) $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt $\forall_{k\in\mathbb{N},k\geq k_0}\, p_k \in U_\varepsilon(p) \subset U$. □

Satz 9.13. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $a_k = (a_{1,k}, \dots, a_{n,k}) \in \mathbb{R}^n$ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \ \textit{(in } (\mathbb{R}^n, d_2)\textit{)} \iff \forall_{i\in\{1,\dots,n\}} \lim_{k\to\infty} a_{i,k} = a_i.$$

Wir bereiten den Beweis von 9.13 durch das folgende Lemma vor:

Lemma 9.14. *Für $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\|a - b\|_\infty \leq d_2(a, b) \leq \sqrt{n}\, \|a - b\|_\infty,$$

wobei wir $\|a - b\|_\infty := \max\{\, |a_1 - b_1|, \dots, |a_n - b_n|\,\}$ setzen.

Beweis. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$|a_i - b_i| = \sqrt{(a_i - b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_j - b_j)^2} = d_2(a, b)$$

und

$$d_2(a, b) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_j - b_j)^2} \leq \sqrt{n \max\{\, (a_1 - b_1)^2, \dots, (a_n - b_n)^2\,\}} = \sqrt{n}\, \|a - b\|_\infty.$$

□

Bemerkung (Maximumsnorm)**.** Durch

$$\forall_{a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n}\ \|a\|_\infty := \max\{\, |a_1|, \dots, |a_n|\,\}$$

wird eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert, die sog. *Maximumsnorm.*

Beweis von Satz 9.13. „⇒“ Es gelte $\lim_{k\to\infty} a_k = a$, d.h. nach 9.12

$$\lim_{k\to\infty} d_2(a_k, a) = 0,$$

also für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$0 = \lim_{k\to\infty} d_2(a_k, a) \overset{9.14}{\geq} \lim_{k\to\infty} |a_{i,k} - a_i| \geq 0$$

und somit $\lim_{k\to\infty} a_{i,k} = a_i$.

[62] d.h. per definitionem alle bis auf endlich viele

„$\Leftarrow$" Gelte $\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} \lim_{k\to\infty} a_{i,k} = a$.
Ist dann $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, so existieren also $N_1, \ldots, N_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} \forall_{k\in\mathbb{N}, k\geq N_i} |a_{i,k} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \max\{N_1, \ldots, N_n\}$ folgt

$$d_2(a_k, a) \overset{9.14}{\leq} \sqrt{n} \max\{|a_{1,k} - a_1|, \ldots, |a_{n,k} - a_n|\} < \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon,$$

d.h. nach Satz 9.12: $\lim_{k\to\infty} a_k = a$. □

Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Definition 9.15 (Beschränktheit, Kompaktheit)**.** Seien V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $M \subset V$.

(i) M heißt *beschränkt* $:\Longleftrightarrow \exists_{C\in\mathbb{R}} \forall_{p\in M} \|p\| = d(p, 0) \leq C$.

Ist M allgemeiner eine Teilmenge metrischen Raumes (N, d), so heißt M genau dann *beschränkt*, wenn für ein (und damit für alle) $p_0 \in M$ gilt $\exists_{C_{p_0}\in\mathbb{R}_+} \forall_{p\in M} d(p, p_0) \leq C_{p_0}$.

(ii) M heißt *kompakt* $:\Longleftrightarrow M$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Warnung. In allgemeinen metrischen Räumen (N, d) nennt man Teilmengen M von N, die beschränkt und abgeschlossen sind, nicht kompakt, da solche die unten zu beweisenden „schönen Eigenschaften" von Kompakta i.a. nicht haben.

In beliebigen topologischen Räumen N heißt eine Teilmenge M von N kompakt, wenn jede Überdeckung von M durch offene Mengen von N eine endliche Teilüberdeckung besitzt.[63] Man kann dann zeigen, daß diese Definition im Falle eines endlich-dimensionalen normierten $\mathbb{R}$-Vektorraumes mit unserer Definition übereinstimmt.

Definition 9.16. Eine Folge in einem metrischen Raum heißt *beschränkt* genau dann, wenn die Menge ihrer Folgenglieder beschränkt ist.

Satz 9.17. *Seien M ein metrischer Raum und $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine in M gegen $p \in M$ konvergente Folge. Dann ist $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{k\in\mathbb{N}, k\geq k_0} p_k \in U_1(p)$, d.h. $\forall_{k\in\mathbb{N}, k\geq k_0} d(p_k, p) < 1$, also folgt $\forall_{k\in\mathbb{N}} d(p_k, p) \leq \max\{\|p_0\|, \ldots, \|p_{k_0-1}\|, 1\}$. □

Definition 9.18 (Häufungspunkt)**.** Seien M eine Teilmenge eines metrischen Raumes N und $p \in N$.

p heißt *Häufungspunkt von M in N*

$$:\overset{\text{(i)}}{\Longleftrightarrow} \forall_{U\in\mathcal{U}^\circ(p,N)} U \cap (M \setminus \{p\}) \neq \varnothing$$

$\overset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow}$ Es existiert eine Folge in $M \setminus \{p\}$, die (in M) gegen p konvergiert.

[63] Genauer heißt M genau dann *kompakt*, wenn für jede Menge I und alle in N offenen Mengen U_i $(i \in I)$ aus $\bigcup_{i\in I} U_i \supset M$ die Existenz einer endlichen Teilmenge I_0 von I mit $\bigcup_{i\in I_0} U_i \supset M$ folgt.

[Zum Beweis von (ii): Beim Nachweis von „$\Rightarrow$" wähle man zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $p_k \in U_{\frac{1}{k+1}}(a) \cap (M \setminus \{p\})$ und betrachte die Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. „$\Leftarrow$" folgt sofort aus der Definition der Konvergenz in 9.10.]

Bemerkung.

1.) Ein Element von M braucht nicht Häufungspunkt von M in $\mathbb{R}^n$ zu sein: Die Menge der Häufungspunkte von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ ist die leere Menge.

2.) Ein Häufungspunkt von M in N braucht nicht Element von M zu sein: Die Menge der Häufungspunkte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$.

Satz 9.19 (von Bolzano-Weierstraß)**.**

(i) (Folgenversion)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

(ii) (Teilmengenversion)
Jede beschränkte unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.

Bemerkung. Wir werden in Satz 9.41 – letztenendes unter Verwendung von Satz 9.19 – sehen, daß je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum dieselbe Topologie erzeugen. Hieraus folgt dann, daß der Satz auch für jeden endlich-dimensionalen normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum anstelle von $\mathbb{R}^n$ gilt.

Beweis. Zu (i): Sei $\big(\underbrace{(a_{1,k},\dots,a_{n,k})}_{=a_k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$, d.h. es existiert $C \in \mathbb{R}_+$ mit $\forall_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|_2 \le C$. Dann gilt

$$\forall_{i\in\{1,\dots,n\}} \forall_{k\in\mathbb{N}} |a_{i,k}| = |a_{i,k} - 0| \overset{9.14}{\le} d_2(a_k, 0) = \|a_k\|_2 \le C. \tag{258}$$

Nach dem reellwertigen Satz von Bolzano-Weierstraß 4.11 (ii) besitzt daher $(a_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{1,j_1(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

Wegen (258) können wir nun 4.11 (ii) auf $(a_{2,j_1(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ anwenden und erhalten eine konvergente Teilfolge $(a_{2,j_2(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Da $(a_{1,j_1(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ bereits konvergierte, so natürlich auch $(a_{1,j_2(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

Nach insgesamt n-maliger Anwendung von Satz 4.11 (ii) erhalten wir schließlich eine Teilfolge $\big((a_{1,j_n(k)},\dots,a_{n,j_n(k)})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ derart, daß für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ die Folge $(a_{i,j_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Die Behauptung von (i) folgt dann aus Satz 9.13.

Zu (ii): Sei M eine beschränkte unendliche Menge. Die Unendlichkeit von M bedeutet genau die Existenz einer injektiven Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow M,\ k \longmapsto p_k. \tag{259}$$

Da M beschränkt ist, so auch $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, also besitzt $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach (i) eine gegen ein $a \in \mathbb{R}^n$ konvergente Teilfolge $(p_{i(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

Wir behaupten, daß a Häufungspunkt von M in $\mathbb{R}^n$ ist.

Aus der Injektivität der Abbildung (259) folgt, daß $p_{i(k_0)} = a$ für höchstens ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt. Falls ein solches k_0 existiert, so ist $(p_{i(k_0+1+k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Andernfalls hat bereits $(p_{i(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ diese Eigenschaft. □

Satz 9.20. *Seien K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Dann besitzt $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine in K konvergente Teilfolge.*

Beweis. Der Satz folgt sofort aus 9.19 (i) und 9.11. □

Bemerkung.

1.) Wenn wir 9.41 bewiesen haben, folgt, daß auch dieser Satz für beliebige endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume anstelle von $\mathbb{R}^n$ gilt.

2.) In einem beliebigen topologischen Raum M nennt man eine Teilmenge K *folgenkompakt*, wenn sie die Eigenschaft des letzten Satzes hat, d.h., wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.

    Man kann zeigen, daß in metrischen Räumen die Begriffe der Kompaktheit (vgl. die Warnung in 9.15) und der Folgenkompaktheit zusammenfallen.

Stetigkeit

Definition 9.21 (Stetigkeit)**.** Seien M, N topologische Räume und $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

(i) Sei $p \in M$.
f heißt *stetig in p* $:\iff \forall_{U\in\mathcal{U}^\circ(f(p),N)}\exists_{V\in\mathcal{U}^\circ(p,M)}\, f(V) \subset U$.

(ii) f heißt *stetig* $:\iff \forall_{p\in M}\, f$ ist stetig in p.

$\boxed{\mathcal{C}(M,N)}$ bezeichne die Menge aller stetigen Abbildungen $M \to N$.

Beispiel. Ist $q \in N$, so ist die konstante Abbildung $f\colon M \to N$ vom Wert q stetig.

[Denn sind $p \in M$ und $U \in \mathcal{U}^\circ(\underbrace{f(p)}_{=q}, N)$, so gilt zum einen $M \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ und zum anderen $f(M) = \{q\} \subset U$.]

Satz 9.22. *Seien M, N topologische Räume und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann folgt:*

(i) Für jede Teilmenge $\widetilde{M}$ von M und alle $p \in \widetilde{M}$ gilt:
$f\colon M \to N$ stetig in $p \Longrightarrow f|_{\widetilde{M}}\colon \widetilde{M} \to N$ stetig in p.

(ii) Für jede Teilmenge $\widetilde{N}$ von N mit $f(M) \subset \widetilde{N}$ und alle $p \in M$ gilt:
$f\colon M \to N$ stetig in $p \iff f\colon M \to \widetilde{N}$ stetig in p.

Beweis als Übung.

Bemerkung. Die Richtung „$\Leftarrow$“ in (i) ist i.a. falsch, wie das Beispiel $\widetilde{M} = \varnothing$ zeigt.

Satz 9.23. *Seien $(M, \mathcal{T}_M), (N, \mathcal{T}_N)$ topologische Räume und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann gilt:*

$$f \text{ ist stetig} \iff \forall_{U\in\mathcal{T}_N}\, \overset{-1}{f}(U) \in \mathcal{T}_M \tag{260}$$

$$\iff \forall_{A\subset N \text{ abgeschlossen}}\, \overset{-1}{f}(A) \text{ abgeschlossen in } M \tag{261}$$

Beweis. Zu (260): „⇒" Sei U offen in N. Wegen der Stetigkeit von f existiert zu jedem $p \in \overset{-1}{f}(U)$ – d.h. $U \in \mathcal{U}^\circ(f(p), N)$ – ein $V_p \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ mit $f(V_p) \subset U$, d.h. $V_p \subset \overset{-1}{f}(U)$. Dann folgt

$$\overset{-1}{f}(U) = \bigcup_{p \in \overset{-1}{f}(U)} V_p, \tag{262}$$

und die rechte Seite von (262) ist offen nach (T2).

[(262) „$\subset$" gilt wegen $\forall_{p \in \overset{-1}{f}(U)}\, p \in V_p$ und „$\supset$" wegen $\forall_{p \in \overset{-1}{f}(U)}\, V_p \subset \overset{-1}{f}(U)$.]

„⇐" Sei $p \in M$ und $U \in \mathcal{U}^\circ(f(p), N)$.

Dann gilt $p \in \overset{-1}{f}(U)$ und nach Voraussetzung ist $\overset{-1}{f}(U)$ offen in M, also $V := \overset{-1}{f}(U) \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ und $f(V) = f(\overset{-1}{f}(U)) \subset U$.

Zu (261): Für jede Teilmenge A von N gilt

$$A \text{ abgeschlossen } \iff N \setminus A \in \mathcal{T}_N \quad \text{und} \quad \overset{-1}{f}(N \setminus A) = M \setminus \overset{-1}{f}(A).$$

Daher folgt (261) aus (260). □

Satz 9.24. *Es seien M_1, M_2, M_3 topologische Räume sowie $f\colon M_2 \to M_3$ und $g\colon M_1 \to M_2$ zwei Abbildungen. Ferner sei $p \in M_1$. Dann gilt:*

(i) g stetig in p und f stetig in $g(p) \Longrightarrow f \circ g$ stetig in p.

(ii) g stetig und f stetig $\Longrightarrow f \circ g$ stetig.

Beweis. Zu (i): Zu $U_3 \in \mathcal{U}^\circ((f \circ g)(p), M_3)$ existiert zunächst wegen der Stetigkeit von f in $g(p)$ ein $U_2 \in \mathcal{U}^\circ(g(p), M_2)$ mit $f(U_2) \subset U_3$ und sodann wegen der Stetigkeit von g in p ein $U_1 \in \mathcal{U}^\circ(p, M_1)$ mit $g(U_1) \subset U_2$, also folgt

$$(f \circ g)(U_1) = f(g(U_1)) \subset f(U_2) \subset U_3.$$

Aus der Beliebigkeit von U_3 folgt die Behauptung von (i).

(ii) folgt trivial aus (i). □

Satz 9.25 (Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen)**.** *Seien M, N metrische Räume und $f\colon M \to N$ eine Abbildung sowie $p \in M$. Dann sind die folgenden drei Aussagen paarweise äquivalent:*

(i) f ist stetig in p.

(ii) $\forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \exists_{\delta \in \mathbb{R}_+} \underbrace{\forall_{q \in M} \big(d(p,q) < \delta \Rightarrow d(f(p), f(q)) < \varepsilon\big)}_{\Leftrightarrow\, f(U_\delta(p)) \subset U_\varepsilon(f(p))}.$

(iii) Für jede Folge $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in M mit $\lim_{k \to \infty} p_k = p$ gilt $\lim_{k \to \infty} f(p_k) = f(p)$.

Beweisskizze. „(i) ⇔ (ii)" zeigt man sofort mittels Definition 9.21.

Zum Nachweis von „(ii) ⇒ (iii)" verwendet man Satz 9.12 und wählt zu vorgegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine Zahl $\delta \in \mathbb{R}_+$ gemäß (ii). Aus $\lim_{k \to \infty} p_k = p$ folgt dann, daß fast alle p_k in $U_\delta(p)$ liegen. Dies ergibt die Behauptung.

Zu „(iii) ⇒ (ii)“: Angenommen (ii) ist falsch. Dann existieren $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \left(d(p_k, p) < \frac{1}{k+1} \wedge d(f(p_k), f(p)) \geq \varepsilon \right),$$

und dies widerspricht (iii). □

Bemerkung.

1.) Beachte, daß wir in (ii) zwei verschiedene Metriken mit d bezeichnet haben.

2.) Die Eigenschaft (iii) nennt man *Folgenstetigkeit von f in p*.

In beliebigen topologischen Räumen folgt aus der Stetigkeit zwar Folgenstetigkeit, aber die Umkehrung ist i.a. falsch.

Definition 9.26.

(i) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bezeichne im folgenden stets die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left(e_i = (e_{i1}, \ldots, e_{in}) \wedge \forall_{j\in\{1,\ldots,n\}}\, e_{ij} = \delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{array} \right\} \right),$$

und $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bezeichne die dazu duale Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$, dem $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Linearformen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, d.h.

$$\forall_{i,\in\{1,\ldots,n\}}\, x_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Dann gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x_i(p) = x_i \left(\sum_{j=1}^{n} p_j e_j \right) = p_i,$$

m.a.W. ist $x_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die *i-te Komponentenfunktion des $\mathbb{R}^n$*.

Im Spezialfall $n = 1$ schreiben wir x anstelle von x_1, im Spezialfall $n = 2$ auch x bzw. y anstelle von x_1 bzw. x_2 und im Spezialfall $n = 3$ auch x, y bzw. z anstelle von x_1, x_2 bzw. x_3.

(ii) Seien M eine Menge und $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann ist für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$f_i := x_i \circ f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

die *i-te Komponentenfunktion von f*, also $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Beispiel.

1.) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = (x_1, \ldots, x_n)$.

2.) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ und N eine Menge sowie $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, so gilt $f = f \circ (x_1, \ldots, x_n) =: f(x_1, \ldots, x_n)$.

Satz 9.27. *Seien M ein metrischer Raum sowie $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $p \in M$. Dann gilt:*

$$f\colon M \to \mathbb{R}^n \text{ stetig in } p \Longleftrightarrow \forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\, f_i\colon M \to \mathbb{R} \text{ stetig in } p.$$

Beweis. Nach 9.25 ist f genau dann stetig in p, wenn f folgenstetig in p ist. Dies ist nach 9.13 genau dann der Fall, wenn jede Komponentenfunktion von f folgenstetig in p ist, d.h. nach 9.25 genau dann, wenn jede Komponente von f stetig in p ist. □

Satz 9.28 (Kompaktheitstreue stetiger Abbildungen). *Es seien $M \subset \mathbb{R}^m$ und $K \subset M$ derart, daß K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ist. Sei $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ ferner eine stetige Abbildung. Dann ist $f(K)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß $f(K)$ sowohl beschränkt als auch abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist.

1.) Angenommen $f(K)$ ist nicht beschränkt. Dann existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $p_k \in M$ mit $\|f(p_k)\|_2 > k$, d.h. $\lim_{k\to\infty} \|f(p_k)\|_2 = +\infty$. Nun ist $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in dem Kompaktum K, besitzt also nach Satz 9.20 eine in K konvergente Teilfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit konvergiere $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ selbst gegen ein $p \in K$.

Dann folgt aus der Stetigkeit von f in p und Satz 9.25 $\lim_{k\to\infty} f(p_k) = f(p)$, d.h. $\lim_{k\to\infty} d_2(f(p_k), f(p)) = 0$. Hieraus ergibt sich ein Widerspruch, da für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\underbrace{d_2(f(p_k),0)}_{=\|f(p_k)\|_2 \xrightarrow{k\to\infty} +\infty} \quad\le\quad \underbrace{d_2(f(p_k),f(p))}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} + d_2(f(p),0).$$

2.) Angenommen $f(K)$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$, d.h. $\mathbb{R}^n \setminus f(K)$ ist nicht offen in $\mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $q \in \mathbb{R}^n \setminus f(K)$ derart, daß q nicht innerer Punkt von $\mathbb{R}^n \setminus f(K)$ ist, d.h.

$$\forall_{U\in\mathcal{U}^\circ(q,\mathbb{R}^n)} \quad \underbrace{U \not\subset W \setminus f(K)}_{\Leftrightarrow U \cap f(K) \neq \varnothing} \ .$$

Es existiert daher zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $q_k \in f(K)$ mit $d_2(q_k, q) < \frac{1}{k+1}$, d.h. $\lim_{k\to\infty} q_k = q$. Weiterhin gibt für $k \in \mathbb{N}$ ein $p_k \in K$ mit $f(p_k) = q_k$. Wegen der Kompaktheit von K besitzt nun $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gemäß 9.20 wieder eine in K konvergente Teilfolge, und wir können erneut annehmen, daß $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ein $p \in K$ konvergiert.

Da f nach Voraussetzung in p stetig ist, folgt nochmals aus 9.25

$$q = \lim_{k\to\infty} q_k = \lim_{k\to\infty} f(p_k) = f(p),$$

d.h. $q \in f(K)$, Widerspruch! □

Korollar 9.29 (Satz vom Maximum bzw. Minimum). *Seien $M \subset \mathbb{R}^m$, $K \subset M$ derart, daß K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ist, und sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann nimmt f auf K ein Maximum und ein Minimum an.*

Beweis. Wir zeigen nur, daß f ein Maximum annimmt. Die Aussage für ein Minimum zeigt man analog.

Nach 9.28 ist $f(K)$ kompakt, also beschränkt. Daher gilt $\eta := \sup f(K) \in \mathbb{R}$. Da η das Supremum ist, existiert eine Folge $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $f(K)$ mit $\lim_{k\to\infty} \eta_k = \eta$. Als Kompaktum ist $f(K)$ insbesondere abgeschlossen in $\mathbb{R}$, also folgt aus 9.11: $\eta \in f(K)$, d.h. $\eta = \max f(K)$. □

Bemerkung. Wenn wir 9.41 bewiesen haben, so folgt, daß auch 9.28 und 9.29 für beliebige endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume V und W anstelle von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ gelten.

Definition 9.30 (Homöomorphismus)**.** Seien M, N topologische Räume.

Eine bijektive stetige Abbildung $f\colon M \to N$ heißt *Homöomorphismus* genau dann, wenn $f^{-1}\colon N \to M$ stetig ist.

M und N heißen zueinander *homöomorph*, wenn ein Homöomorphismus $M \to N$ existiert.

Satz 9.31. *Seien K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und $f\colon K \to \mathbb{R}^n$ eine injektive stetige Abbildung. Dann ist $f\colon K \to f(K)$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Daß $f\colon K \to f(K)$ eine bijektive stetige Abbildung ist, ist klar nach 9.22 (ii). Zu zeigen ist, daß $f^{-1}\colon f(K) \to K$ stetig ist. Hierzu genügt es nach Satz 9.23 (261) zu zeigen, daß für jede abgeschlossene Teilmenge A von K gilt:

$$\overline{f^{-1}}^{1}(A) = f(A) \text{ ist abgeschlossen in } f(K).$$

Sei also $A \subset K$ abgeschlossen in K. Dann[64] ist A abgeschlossen in $\mathbb{R}^m$ und ferner als Teilmenge des Kompaktums K beschränkt. Somit ist A eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Nach 9.28 folgt nun die Kompaktheit von $f(A)$ in $\mathbb{R}^n$ und somit insbesondere die Abgeschlossenheit. □

Bemerkung. Wenn wir 9.41 bewiesen haben, so folgt, daß auch 9.31 für beliebige endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume V und W anstelle von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ gilt.

Definition 9.32 (gleichmäßige Stetigkeit)**.** Seien M, N metrische Räume.

$f\colon M \to N$ heißt *gleichmäßig stetig* genau dann, wenn gilt

$$\forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \exists_{\delta \in \mathbb{R}_+} \forall_{p,q \in M} \left(d(p,q) < \delta \Rightarrow d(f(p), f(q)) < \varepsilon \right).$$

[64] Es gilt nämlich allgemeiner:

Lemma. *Sind M ein topologischer Raum, $B \subset M$ eine in M abgeschlossene Teilmenge und $A \subset B$ eine in B abgeschlossene Teilmenge, so ist A abgeschlossen in M.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß jedes $p \in M \setminus A = (M \setminus B) \cup (B \setminus A)$ innerer Punkt von $M \setminus A$ in M ist. Im Falle $p \in M \setminus B$ ist dies klar, da B offen in M ist. Gelte daher $p \in B \setminus A$. Zu zeigen ist die Existenz von $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ mit $U \subset M \setminus A$.

Nach Voraussetzung ist $B \setminus A$ offen in B, d.h. es existiert $U \in \mathcal{T}_M$ mit $B \setminus A = U \cap B$, also folgt $p \in U$ bzw. $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$. Außerdem gilt $U \subset M \setminus A$, denn andernfalls wäre

$$\varnothing \neq U \cap A \subset U \cap B = B \setminus A,$$

insbesondere existierte $q \in A \cap (B \setminus A)$, im Widerspruch zu $A \subset B$. □

Satz 9.33. *Seien K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und $f\colon K \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f\colon K \to \mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig.*

Beweis analog zu Satz 5.20 unter Verwendung von 9.19 (i) und 9.11. □

Bemerkung. Wenn wir 9.41 bewiesen haben, so folgt, daß auch 9.33 für beliebige endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume V und W anstelle von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ gilt.

Satz 9.34. *Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

(i) $\|\ldots\|\colon V \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

(ii) Die Addition sowie die Subtraktion $\ldots \pm \ldots\colon V \times V \to V$ *und die skalare Multiplikation* $\ldots \cdot \ldots\colon \mathbb{R} \times V \to V$ *sind stetig, wobei wir* $\mathbb{R} \times V$ *und* $V \times V$ *jeweils mit der Maximumsnorm* $\|\ldots\|_{\max}$, *welche durch*

$$\|(\lambda, v)\|_{\max} := \max\{|\lambda|, \|v\|\} \text{ bzw. } \|(v, w)\|_{\max} := \max\{\|v\|, \|w\|\}$$

für alle $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V$ *bzw.* $(v, w) \in V \times V$ *gegeben ist, versehen.*

Wir bereiten den Beweis von 9.34 durch das folgende Lemma vor:

Lemma 9.35. *Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für alle $v, w \in V$ gilt*

$$\|v\| - \|w\| \leq \big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v - w\|.$$

Beweis. Die erste Ungleichung ist trivial, und die zweite gilt, weil aus

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|(v - w) + w\| \leq \|v - w\| + \|w\|, \\ \|w\| &= \|(w - v) + v\| \leq \|w - v\| + \|v\| = \|v - w\| + \|v\| \end{aligned}$$

sowohl $\|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|$ als auch $-(\|v\| - \|w\|) \leq \|v - w\|$ folgt. □

Beweis des Satzes. (i) folgt sofort aus der zweiten Ungleichung des letzten Lemmas.

Zu (ii): 1.) Seien $(v, w) \in V \times V$ und $(v_k, w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $V \times V$ mit $\lim_{k\to\infty} \max\{\|v_k - v\|, \|w_k - w\|\} = 0$. Dann folgt $\lim_{k\to\infty} v_k = v$, $\lim_{k\to\infty} w_k = w$, und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|(v_k \pm w_k) - (v \pm w)\| = \|(v_k - v) \pm (w_k - w)\| \leq \underbrace{\|v_k - v\|}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} + \underbrace{\|w_k - w\|}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

2.) Seien $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V$ und $(\lambda_k, v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \times V$ derart, daß gilt $\lim_{k\to\infty} \max\{|\lambda_k - \lambda|, \|v_k - v\|\} = 0$. Dann folgt $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda$ sowie $\lim_{k\to\infty} v_k = v$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\lambda_k v_k - \lambda v\| &= \|\lambda_k (v_k - v) + (\lambda_k - \lambda) v\| \\ &\leq \|\lambda_k (v_k - v)\| + \|(\lambda_k - \lambda) v\| = \underbrace{\underbrace{|\lambda_k|}_{\xrightarrow{k\to\infty} \lambda} \underbrace{\|v_k - v\|}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} + \underbrace{|\lambda_k - \lambda|}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} \|v\|}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}. \end{aligned}$$

Aus 1.) und 2.) folgt die Behauptung von (ii). □

Lineare Abbildungen

Definition 9.36. Seien V, W $\mathbb{R}$-Vektorräume. Wir setzen

$$\boxed{\mathcal{L}(V,W)} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) = \{\varphi \in W^V \mid \varphi \ \mathbb{R}\text{-linear}\}.$$

$\mathcal{L}(V,W)$ ist in kanonischer Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum: Für $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V,W)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind $\varphi + \psi, \lambda\varphi \in \mathcal{L}(V,W)$ definiert durch

$$\forall_{v \in V} \big((\varphi+\psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v) \ \wedge \ (\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v) \big).$$

Satz 9.37. *Seien V, W normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. (Beide Normen seien mit $\|\ldots\|$ bezeichnet.) Für jedes $\varphi \in \mathcal{L}(V,W)$ sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent:*

(i) *φ ist stetig.*

(ii) *φ ist stetig in* 0.

(iii) *φ ist ein* beschränkter Operator, *d.h. per definitionem*

$$\exists_{C \in \mathbb{R}} \forall_{v \in V} \, \|\varphi(v)\| \le C\|v\|.$$

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)" ist trivial.

Zu „(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Angenommen (iii) ist falsch. Dann existiert eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V mit $\forall_{k \in \mathbb{N}_+} \|\varphi(v_k)\| > k^2\|v_k\|$, also $v_k \neq 0$. Folglich ist $\left(\frac{v_k}{k\,\|v_k\|}\right)_{k\in\mathbb{N}_+}$ eine Nullfolge mit (beachte, daß φ linear ist)

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \varphi\left(\frac{v_k}{k\,\|v_k\|} \right) \right\| = \lim_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(v_k)\|}{k\,\|v_k\|} = +\infty,$$

im Widerspruch zur Stetigkeit von φ in $0 = \varphi(0)$.

Zu „(iii) $\Rightarrow$ (i)": Es seien $v \in V$ beliebig und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V mit $\lim_{k\to\infty} v_k = v$. Dann folgt aus der Linearität von φ und (iii) für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi(v_k) - \varphi(v)\| = \|\varphi(v_k - v)\| \le C\|v_k - v\| \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

d.h. φ ist stetig in v. □

Definition 9.38. Sind V, W normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume, so bezeichnen wir mit $\boxed{\mathcal{L}_c(V,W)}$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen $V \to W$.

Satz 9.39 (Operatornorm)**.** *Seien V, W normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume.*

(i) *Durch*

$$\forall_{f \in \mathcal{L}_c(V,W)} \, \|f\| := \sup\left\{ \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} \mid v \in V \setminus \{0\} \right\} (:= 0, \ \textit{falls } V = \{0\})$$

wird eine Norm, die sog. Operatornorm *auf $\mathcal{L}_c(V,W)$, definiert.*

(ii) Für jedes $f \in \mathcal{L}_c(V,W)$ gilt

$$\|f\| = \sup\{\|f(v)\| \mid v \in V \wedge \|v\| \le 1\} = \underbrace{\sup\{\|f(v)\| \mid v \in V \wedge \|v\| = 1\}}_{:=0,\ \textit{falls}\ V=\{0\}} \quad (263)$$

sowie

$$\forall_{v \in V} \|f(v)\| \le \|f\| \|v\|. \quad (264)$$

Darüber hinaus ist $\|f\|$ die kleinste reelle Zahl mit der Eigenschaft (264).

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\dim_{\mathbb{R}} V > 0$.
Zu (i): 9.37 „(i) ⇒ (iii)" gibt die Wohldefiniertheit von $\|f\|$ für $f \in \mathcal{L}_c(V,W)$.
Beweis, daß $\|\ldots\|$ eine Norm für $\mathcal{L}_c(V,W)$ ist:
(N1) ist trivial. Weiter gilt für alle $f, g \in \mathcal{L}_c(V,W)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V \setminus \{0\}$

$$\frac{\|(\lambda f)(v)\|}{\|v\|} = |\lambda| \frac{\|f(v)\|}{\|v\|},$$
$$\frac{\|(f+g)(v)\|}{\|v\|} \le \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} + \frac{\|g(v)\|}{\|v\|} \le \|f\| + \|g\|,$$

also folgen (N2) und (N3).

Zu (ii): Sei $f \in \mathcal{L}_c(V,W)$. Für alle $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\|v\| \le 1$ gilt

$$\|f(v)\| \le \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} \le \|f\|,$$

weshalb

$$\sup\{\|f(v)\| \mid v \in V \wedge \|v\| = 1\} \le \sup\{\|f(v)\| \mid v \in V \wedge \|v\| \le 1\} \le \|f\|$$

folgt.

Andererseits gilt für $v \in V \setminus \{0\}$

$$\frac{\|f(v)\|}{\|v\|} = \left\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| \le \sup\{\|f(\tilde{v})\| \mid \tilde{v} \in V \wedge \|\tilde{v}\| = 1\},$$

also folgt auch $\|f\| \le \sup\{\|f(\tilde{v})\| \mid \tilde{v} \in V \wedge \|\tilde{v}\| = 1\}$. Damit ist (263) gezeigt.

Die übrigen Aussagen in (ii) folgen sofort aus der Definition in (i). □

Beispiel 9.40 (Spektralnorm)**.** Wir versehen sowohl $\mathbb{R}^m$ als auch $\mathbb{R}^n$ mit dem jeweiligen euklidischen Skalarprodukt $\langle \ldots, \ldots \rangle_2$ und der daraus abgeleiteten Norm $\|\ldots\|_2$. Die zugehörige Operatornorm auf $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, die wir ebenfalls mit $\|\ldots\|_2$ bezeichnen, heißt *Spektralnorm*.

Sei $\varphi \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichne die Matrix von φ bzgl. der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^m$ sowie $\mathbb{R}^n$ und ρ sei der *Spektralradius* der symmetrischen Matrix ${}^{\tau}\!A\, A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, d.h. per definitionem

$$\rho = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } {}^{\tau}\!A\, A\}.^{65}$$

Dann gilt

$$\|\varphi\|_2 = \sqrt{\rho}.$$

[65] Hier sind sogar alle Eigenwerte nicht-negativ, da es sich um solche des Produktes einer Matrix mit ihrer Transponierten handelt.

Beweisskizze. Man rechnet mühelos nach, daß für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\langle A\,b, A\,b\rangle_2^{\mathbb{R}^n} = \langle {}^{\tau}\!A\,A\,b, b\rangle_2^{\mathbb{R}^m}.$$

Da ${}^{\tau}\!A\,A$ symmetrisch ist, besitzt es reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, und die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Daher existiert eine orthogonale Matrix $T \in \mathrm{O}(m)$ mit

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots \lambda_m) = T^{-1}\,{}^{\tau}\!A\,A\,T.$$

Somit gilt für alle $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}(\|A\,T\,b\|_2^{\mathbb{R}^n})^2 &= \langle A\,T\,b, A\,T\,b\rangle_2^{\mathbb{R}^n} = \langle {}^{\tau}\!A\,A\,T\,b, T\,b\rangle_2^{\mathbb{R}^m} \\ &\overset{T\in\mathrm{O}(m)}{=} \langle T^{-1}\,{}^{\tau}\!A\,A\,T\,b, T^{-1}T\,b\rangle_2^{\mathbb{R}^m} = \langle \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots \lambda_m)\,b, b\rangle_2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,{b_i}^2.\end{aligned}$$

(Hieraus folgt auch, daß die Eigenwerte nicht negativ sind.)

Nun folgt aus der Orthogonalität von T, daß gilt $T(S^{m-1}) = S^{m-1}$, wobei $S^{m-1} := \{b \in \mathbb{R}^m \mid \|b\|_2^{\mathbb{R}^m} = 1\}$, also ergibt sich mit der letzten Gleichung

$$\|\varphi\|_2 = \sup\{\|A\,b\|_2^{\mathbb{R}^n} \mid b \in S^{m-1}\} = \sup\{\|A\,T\,b\|_2^{\mathbb{R}^n} \mid b \in S^{m-1}\} = \sqrt{\rho}.$$

□

Satz 9.41. *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\dots\|$, $\|\dots\|_*$ zwei Normen auf V. Dann ist die Abbildung*

$$\mathrm{id}\colon (V, \|\dots\|_*) \longrightarrow (V, \|\dots\|)$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Nach Wahl einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V können wir $V = \mathbb{R}^n$ annehmen, denn unter dem Isomorphismus

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,v_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,e_i,$$

entsprechen die Normen auf V umkehrbar eindeutig den Normen für $\mathbb{R}^n$. Nun genügt es offenbar den Fall $\|\dots\|_* = \|\dots\|_2$ zu zeigen. Hierzu verwenden wir Satz 9.37 „(iii) $\Rightarrow$ (i)“.

Für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in \mathbb{R}^n$ gilt mit $C := \sum_{i=1}^n \|e_i\| \in \mathbb{R}_+$

$$\|a\| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i| \|e_i\| \le \|a\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|e_i\| \overset{9.14}{\le} C\,d_2(a, 0) = C\,\|a\|_2.$$

Ferner ist $S^{n-1} := \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|a\|_2 = 1\}$ als Urbild von $\{1\}$ der stetigen Funktion $\|\dots\|_2\colon (\mathbb{R}^n, \|\dots\|_2) \to \mathbb{R}$ abgeschlossen und trivialerweise beschränkt (bzgl. $\|\dots\|_2$), also kompakt. Daher nimmt die Beschränkung der stetigen (s.u.) Funktion $\|\dots\|\colon (\mathbb{R}^n, \|\dots\|_2) \to \mathbb{R}$ auf S^{n-1} wegen $\|S^{n-1}\| \subset \mathbb{R}_+$ nach 9.29 ein Minimum $D \in \mathbb{R}_+$ an. Also folgt $\left\|\frac{a}{\|a\|_2}\right\| \ge D$, d.h. $\|a\|_2 \le \frac{1}{D}\,\|a\|$.

[$\|\dots\|\colon (\mathbb{R}^n, \|\dots\|) \to \mathbb{R}$ ist stetig nach 9.34. Außerdem haben wir bereits bewiesen, daß $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}^n, \|\dots\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\dots\|)$ stetig ist. Daher folgt die Stetigkeit von $\|\dots\|\colon (\mathbb{R}^n, \|\dots\|_2) \to \mathbb{R}$ aus 9.24.] □

Bemerkung. Der letzte Satz besagt, daß je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum dieselbe Topologie erzeugen, d.h. der zu Beginn dieses Kapitels beschriebene Prozeß liefert dieselben offenen Mengen.

Bisher haben wir auf $\mathbb{R}^n$ stets die euklidische Norm $\| \dots \|_2$ betrachtet. Nun haben wir eingesehen, daß die spezielle Wahl der Norm auf $\mathbb{R}^n$ für topolgische Aussagen gar keine Rolle spielt.

Darüber hinaus haben wir gesehen, daß wir jeden endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V nach Wahl einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ via

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ \sum_{i=1}^n \lambda_i \, v_i \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \, e_i,$$

isomorph auf $\mathbb{R}^n$ abbilden können, und die Normen auf V entsprechen dann unter diesem Isomorphismus umkehrbar eindeutig den Normen auf $\mathbb{R}^n$, d.h. topologisch unterscheidet sich ein n-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum nicht von $\mathbb{R}^n$.

Satz 9.42. *Sind* V, W *normierte* $\mathbb{R}$*-Vektorräume mit* $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$*, so gilt*

$$\mathcal{L}_c(V, W) = \mathcal{L}(V, W),$$

d.h. jedes $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ *ist stetig.*

Beweis. Wir können wieder $V = \mathbb{R}^n$ annehmen, und nach dem letzten Satz genügt es, auf V die euklidischen Normen zu betrachten.

Für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|a_i| \leq \|a\|_\infty^{\mathbb{R}^n} \overset{9.14}{\leq} d_2^{\mathbb{R}^n}(a, 0) = \|a\|_2^{\mathbb{R}^n},$$

also mit $C := \sum_{i=1}^n \|\varphi(e_i)\| \in \mathbb{R}_+$

$$\|\varphi(a)\| = \sum_{i=1}^n |a_i| \|\varphi(e_i)\| \leq \|a\|_2^{\mathbb{R}^n} C.$$

Daher folgt aus Satz 9.37 die Stetigkeit von φ. □

Bemerkung. Im Falle unendlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorräume sind lineare Abbildungen zwischen solchen i.a. nicht stetig, und je zwei Normen erzeugen i.a. auch nicht dieselbe Topologie.

Wir versehen den unendlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ mit der sog. *Supremumsnorm*, die gegeben ist durch

$$\forall_{f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])} \ \|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| \,|\, t \in [0,1]\} \in \mathbb{R}.$$

[Daß auf der rechten Seite der Definition tatsächlich eine reelle Zahl steht, liegt daran, daß f insbesondere stetig und $[0,1]$ kompakt ist. Die Normeigenschaften folgen sofort aus den Eigenschaften der Betragsfunktion auf $\mathbb{R}$.]

Die Abbildung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \colon \big(\mathcal{C}^\infty([0,1]), \| \dots \|_\infty\big) \longrightarrow \big(\mathcal{C}^\infty([0,1]), \| \dots \|_\infty\big) \tag{265}$$

ist nach 6.4 (i) $\mathbb{R}$-linear. Sie ist aber nicht stetig!

[Für $k \in \mathbb{N}_+$ sei $f_k := x^k|_{[0,1]} \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$. Dann gilt

$$\forall_{k\in\mathbb{N}_+} \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_k\|_\infty = \|kx^{k-1}|_{[0,1]}\| = k \geq 1 = \|f_k\|_\infty,$$

also kann 9.37 (iii) – dort $\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ – für kein $C \in \mathbb{R}$ erfüllt sein.]

Wir definieren durch

$$\forall_{f\in\mathcal{C}^\infty([0,1])} \|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \in \mathbb{R}$$

eine weitere Norm auf $\mathcal{C}^\infty([0,1])$. Im Gegensatz zu (265) ist die Abbildung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \colon \big(\mathcal{C}^\infty([0,1]), \|\ldots\|_{\mathcal{C}^1}\big) \longrightarrow \big(\mathcal{C}^\infty([0,1]), \|\ldots\|_\infty\big)$$

stetig, insbesondere erzeugen $\|\ldots\|_\infty$ und $\|\ldots\|_{\mathcal{C}^1}$ nicht dieselben Topologien für $\mathcal{C}^\infty([0,1])$.

[Zum Nachweis der Stetigkeit genügt es nach 9.37 zu zeigen, daß gilt

$$\forall_{f\in\mathcal{C}^\infty([0,1])} \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\|_\infty \leq \|f\|_{\mathcal{C}^\infty} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

und das ist trivial.]

Vollständige metrische Räume und Konvergenz in Räumen von Abbildungen

Wir studieren in diesem Abschnitt eine gewisse Klasse nicht notwendig endlichdimensionaler Vektorräume, sog. Banachräume, bzw. allgemeiner vollständige metrische Räume. Diese sind zwar auch für sich genommen von Interesse, wir betrachten sie hier aber deshalb, weil wir Ergebnisse über sie teilweise für Beweise in den folgenden Kapiteln benötigen werden.

Definition 9.43 (Cauchy-Folge, vollständiger metrischer Raum, Banachraum)**.**

(i) Seien M ein metrischer Raum (mit Metrik d) – z.B. $M \subset \mathbb{R}^n$ – und $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M.

$(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge (in M)*
$:\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k,l\in\mathbb{N}} \, (k \geq k_0 \wedge l \geq k_0 \Rightarrow d(p_k, p_l) < \varepsilon)$.

Dann folgt:

$$(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } M \Longrightarrow (p_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge in } M.$$

[Denn sind p in M, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen p und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig, so existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall_{k\geq k_0} d(p_k, p) < \frac{\varepsilon}{2}$, also folgt für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k, l \geq k_0$

$$d(p_k, p_l) \leq d(p_k, p) + d(p, p_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad]$$

M heißt *vollständig* $:\Longleftrightarrow$ Jede Cauchy-Folge in M konvergiert in M.

(ii) Ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, der als metrischer Raum vollständig ist, heißt ein *($\mathbb{R}$-)Banachraum*[66].

[66] nach Stefan Banach (1892-1945)

Beispiel.

1.) $\mathbb{R}$ ist als normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Norm $|\ldots|$ ein Banachraum (nach Cauchyschem Konvergenzkriterium 4.12).

2.) $\mathbb{Q}$ ist als Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein metrischer Raum, der nicht vollständig ist.

[Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i 10^{-i}$ die dekadische Entwicklung einer nicht-rationalen reellen Zahl $a \in [0,1]$. Dann ist die rationale Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegeben ist durch $\forall_{k\in\mathbb{N}}\, p_k := \sum_{i=1}^{k} a_i 10^{-i}$, offenbar eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die nicht in $\mathbb{Q}$ konvergiert.]

Satz 9.44. *Jeder endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorraum ist ein Banachraum.*

Beweis. Es genügt offenbar zu zeigen, daß $(\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty)$ ein Banachraum ist. (Beachte, daß je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ dieselbe Topologie erzeugen.)

Sei also $\big(\underbrace{(a_{1,k}, \ldots, a_{n,k})}_{=a_k}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty)$, d.h.

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k,l\in\mathbb{N}} \left(k \geq k_0 \wedge l \geq k_0 \Rightarrow \|a_k - a_l\|_\infty < \varepsilon\right).$$

Dann folgt für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k,l\in\mathbb{N}} \big(k \geq k_0 \wedge l \geq k_0 \Rightarrow \|a_{i,k} - a_{i,l}\|_\infty < \varepsilon\big),$$

d.h. nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium 4.12

$$(a_{i,k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent in } \mathbb{R}.$$

Nach Satz 9.13 und der Tatsache, daß Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ nicht von der Wahl der Norm abhängt, ist dann auch $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent in $(\mathbb{R}^n, \|\ldots\|_\infty)$. □

Definition 9.45. Seien M eine Menge und W ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(i) $f \colon M \to W$ heißt *beschränkt* $:\Longleftrightarrow \sup\{\|f(p)\| \,|\, p \in M\} < \infty$.

Wir bezeichnen dann den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller beschränkten Abbildungen $M \to W$ mit $\boxed{\mathcal{B}(M,W)}$.

Die Vektorraum-Struktur auf $\mathcal{B}(M,W)$ ist gegeben durch

$$\forall_{f,g\in\mathcal{B}(M,W)} \forall_{\lambda\in\mathbb{R}} \forall_{p\in M}\, (f+g)(p) = f(p) + g(p) \wedge (\lambda f)(p) = \lambda f(p).$$

Beachte, daß die so definierten Abbildungen mit f und g auch wieder beschränkt sind.

Durch

$$\forall_{f\in\mathcal{B}(M,W)}\, \|f\|_\infty := \sup\{\|f(p)\| \,|\, p \in M\}$$

wird dann offenbar eine Norm, die sog. *Supremumsnorm* auf $\mathcal{B}(M,W)$, definiert.

(ii) Ist M sogar ein topologischer Raum, so schreiben wir

$$\boxed{\mathcal{C}_b(M,W)} := \mathcal{B}(M,W) \cap \mathcal{C}(M,W)$$

für den $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen und beschränkten Funktionen $M \to W$.

[Die $\mathbb{R}$-Vektorraum-Struktur vererbt sich von $\mathcal{B}(M,W)$, denn $\mathcal{C}_b(M,W)$ ist nach Satz 9.34 (ii) bzgl. Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen.]

Sind M, W wie in 9.45 und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{B}(M,W)$, die gegen eine Abbildung $f\colon M \to W$ bzgl. $\|\ldots\|_\infty$ konvergiert, so gilt

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}} \ (k \geq k_0 \Rightarrow \|f_k - f\|_\infty < \varepsilon)\,,$$

d.h. genau

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}} \forall_{p\in M} \ (k \geq k_0 \Rightarrow \|f_k(p) - f(p)\| < \varepsilon)\,.$$

Dies motiviert Teil (ii) der folgenden Definition.

Definition 9.46 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Folgen von Abbildungen)**.** Seien M eine beliebige Menge und N ein metrischer Raum. Ferner sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in N^M (d.h. eine Folge von Abbildungen $f_k\colon M \to N$) und sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

(i) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert (punktweise) gegen* f
$:\Longleftrightarrow \forall_{p\in M} \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}} \ (k \geq k_0 \Rightarrow d(f_k(p), f(p)) < \varepsilon)\,.$

(ii) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig gegen* f
$:\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}} \forall_{p\in M} \ (k \geq k_0 \Rightarrow d(f_k(p), f(p)) < \varepsilon)\,.$

Bemerkung.

1.) Teil (i) der letzten Definition kann man allgemeiner für topologische (Hausdorff [67]-)Räume N geben, indem man fordert

$$\forall_{p\in M} \forall_{U\in\mathcal{U}^\circ(f(p),N)} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k\in\mathbb{N}} \ (k \geq k_0 \Rightarrow f_k(p) \in U)\,.$$

Auf Teil (ii) trifft dies nicht zu.

2.) Unter punktweiser Konvergenz von Abbildungen bleibt i.a. weder Beschränktheit[68] noch Stetigkeit erhalten. Zur Stetigkeit vgl. 4.45 (i) a) Beispiel 1.), und zur Beschränktheit betrachte die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegeben ist durch

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} \ f_k\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \begin{cases} n+1, & \text{falls } t \in \,]0, \frac{1}{k+1}], \\ \frac{1}{t}, & \text{falls } t \in \,]\frac{1}{k+1}, 1]. \end{cases}$$

$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge beschränkter Funktionen, die punktweise gegen die unbeschränkte Funktion $\frac{1}{x}|_{\mathbb{R}_+}$ konvergiert.

[67] Die Hausdorff-Eigenschaft wird benötigt, damit der Grenzwert (eindeutig) existiert.

[68] Eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen einer Menge M und einem metrischen Raum N heißt *beschränkt* genau dann, wenn für ein – und damit für alle – $q \in N$ ein $C_q \in \mathbb{R}$ mit $\forall_{p\in M}\, d(f(p), q) \leq C_q$ existiert.

Satz 9.47. *Seien M eine Menge, N ein metrischer Raum und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter Abbildungen $f_k\colon M \to N$, die gleichmäßig gegen eine Abbildung $f\colon M \to N$ konvergiert. Dann ist auch f beschränkt.*

Beweis. Seien $q \in N$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{p\in M}\, d(f_{k_0}(p), f(p)) < \varepsilon. \tag{266}$$

Da f_{k_0} beschränkt ist, existiert $C_q \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall_{p\in M}\, d(f_{k_0}(p), q) \le C_q. \tag{267}$$

Es folgt für jedes $p \in M$

$$d(f(p), q) \le d(f(p), f_{k_0}(p)) + d(f_{k_0}(p), q) \overset{(266),(267)}{\le} \varepsilon + C_q.$$

□

Satz 9.48. *Seien M, N ein metrische Räume und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Abbildungen $f_k\colon M \to N$, die gleichmäßig gegen eine Abbildung $f\colon M \to N$ konvergiert. Dann ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $p_0 \in M$. Zu zeigen ist, daß f stetig in p_0 ist.
Hierzu sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{p\in M}\, d(f_{k_0}(p), f(p)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{268}$$

Da f_{k_0} stetig in p_0 ist, existiert $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{p\in M}\, \left(d(p,p_0) < \delta \Longrightarrow d(f_{k_0}(p), f_{k_0}(p_0)) < \varepsilon\right). \tag{269}$$

Es folgt für jedes $p \in M$ mit $d(p,p_0) < \delta$

$$d(f(p), f(p_0)) \le \underbrace{d(f(p), f_{k_0}(p))}_{\overset{(268)}{<}\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(f_{k_0}(p), f_{k_0}(p_0))}_{\overset{(269)}{<}\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(f_{k_0}(p_0), f(p_0))}_{\overset{(268)}{<}\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

□

Satz 9.49. *Seien M eine Menge und W ein vollständiger $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

(i) $(\mathcal{B}(M,W), \|\ldots\|_\infty)$ *ist ein Banachraum.*

(ii) Ist M ein metrischer Raum, so ist $(\mathcal{C}_b(M,W), \|\ldots\|_\infty)$ *ein Banachraum.*

Beweis. Es sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{B}(M,W), \|\ldots\|_\infty)$. Dann ist $(f_k(p))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $p \in M$ eine Cauchy-Folge in W, also existiert eine Abbildung $f\colon M \to W$ mit

$$\forall_{p\in M}\, f(p) = \lim_{k\to\infty} f_k(p). \tag{270}$$

Wir zeigen, daß $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann folgt (i) aus Satz 9.47 und (ii) aus ebendiesem und Satz 9.48.

Sei also $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\ldots\|_\infty$ ist, existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k,l\in\mathbb{N}}\forall_{p\in M}\left(k \geq k_0 \wedge l \geq k_0 \Longrightarrow d(f_k(p), f_l(p)) < \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{271}$$

Sei $p \in M$. Es genügt zu zeigen

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\ (k \geq k_0 \Longrightarrow d(f_k(p), f(p)) < \varepsilon)\,.$$

Wegen (270) existiert $k_p \in \mathbb{N}$ mit $k_p \geq k_0$

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\left(k \geq k_p \Longrightarrow d(f_k(p), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{272}$$

und es folgt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$

$$d(f_k(p), f(p)) \leq \underbrace{d(f_k(p), f_{k_p}(p))}_{\overset{(271)}{<}\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(f_{k_p}(p), f(p))}_{\overset{(272)}{<}\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

□

Satz 9.50 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Seien (M,d) ein vollständiger metrischer Raum, $A \subset M$ eine nicht-leere abgeschlosssene Teilmenge und $f\colon A \to M$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

f ist kontrahierend, *d.h. per definitionem*

$$\exists_{C\in]0,1[}\forall_{p,q\in A}\, d\,(f(p), f(q)) \leq C\, d(p,q) \tag{273}$$

und

$$f(A) \subset A. \tag{274}$$

Dann gilt

(i) Es existiert genau ein $p_* \in A$ mit $f(p_*) = p_*$.

(ii) Ist $p_0 \in A$ beliebig gewählt und ist die Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $\forall_{k\in\mathbb{N}}\, p_{k+1} := f(p_k)$, so gilt $\lim_{k\to\infty} p_k = p_*$ und darüber hinaus

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}\, d(p_k, p_*) \leq \frac{C^k}{1-C}\, d(p_0, p_1). \tag{275}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst:

$$(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge.} \tag{276}$$

[Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}_+$

$$\begin{aligned} d(p_k, p_{k+1}) &= d\,(f(p_{k-1}), f(p_k)) \overset{(273)}{\leq} C\, d\,(p_{k-1}, p_k) \\ &\overset{(273)}{\leq} C^2\, d\,(p_{k-2}, p_{k-1}) \leq \ldots \leq C^k\, d(p_0, p_1), \end{aligned}$$

also auch für $l \in \mathbb{N}_+$

$$d(p_k, p_{k+l}) \leq \sum_{i=1}^{l-1} \underbrace{d(p_{k+i}, p_{k+i+1})}_{\leq C^{k+i} d(p_0, p_1)} \leq \underbrace{\frac{C^k}{1-C} d(p_0, p_1)}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0}, \tag{277}$$

und hieraus folgt (276).]

Da M vollständig ist, folgt aus (276) die Existenz von $p_* \in M$ mit

$$\lim_{k\to\infty} p_k = p_*,$$

und weil $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der abgeschlossenen Menge A ist, gilt $p_* \in A$ nach Satz 9.11.

Die Gültigkeit von (275) folgt aus (277) durch Bildung des Grenzwertes für $l \to \infty$.

Zum Nachweis des Satzes bleibt daher zu zeigen, daß p_* die in (i) genannte Eigenschaft hat:

Aus (273) folgt, daß $f\colon A \to M$ stetig ist, also gilt

$$p_* = \lim_{k\to\infty} p_{k+1} = \lim_{k\to\infty} f(p_k) = f(p_*).$$

Sei $p \in A$ beliebig mit $f(p) = p$. Dann ergibt (273)

$$d(p_*, p) = d\left(f(p_*), f(p)\right) \leq \underbrace{C}_{\in]0,1[} d(p_*, p),$$

und dies ist nur im Falle $d(p_*, p) = 0$, d.h. $p = p_*$, möglich. □

Satz 9.51. *Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) V ist vollständig.

(ii) Für jede Folge $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in V gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|p_i\| \text{ konvergiert in } \mathbb{R}\,^{69} \Longrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} p_i \text{ konvergiert in } V.$$

Hierbei ist $\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} p_i}$ *definiert als Partialsummenfolge* $\left(\sum_{i=0}^{k} p_i\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)" Aus der Konvergenz von $\sum_{i=0}^{\infty} \|p_i\|$ in $\mathbb{R}$ folgt nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium für Reihen 4.23

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{k_0\in\mathbb{N}} \forall_{k,l\in\mathbb{N}} \left(l > k \geq k_0 \Longrightarrow \sum_{i=k+1}^{l} \|p_i\| < \varepsilon\right).$$

[69] d.h. per definitionem $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ *ist absolut konvergent.*

Da nach Dreiecksungleichung stets für $l > k$ gilt

$$\| \sum_{i=0}^{l} p_i - \sum_{i=0}^{k} p_i \| = \| \sum_{i=k+1}^{l} p_i \| \leq \sum_{i=k+1}^{l} \|p_i\|,$$

so ist $\left(\sum_{i=0}^{k} p_i \right)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V, die wegen (i) in V konvergiert.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V. Dann existiert zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine $k_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k,l \in \mathbb{N}} \left(k \geq k_i \wedge l \geq k_i \Longrightarrow \|q_k - q_l\| < \frac{1}{2^i} \right),$$

und $(q_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in V mit

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} \|q_{k_i} - q_{k_{i+1}}\| < \frac{1}{2^i}.$$

Für $i \in \mathbb{N}$ sei $p_i := q_{k_{i+1}} - q_{k_i}$, also gilt $\sum_{i=0}^{\infty} \|p_i\| \leq 2 < \infty$. Wegen (ii) existiert dann $p \in V$ mit

$$\lim_{l \to \infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{l} p_i}_{= q_{k_{l+1}} - q_{k_0}} = p,$$

und es folgt $\lim_{l \to \infty} q_{k_l} = p + q_{k_0}$.

Schließlich gilt auch $\lim_{k \to \infty} q_k = p + q_{k_0}$, d.h. (i) ist gezeigt.

[Sei nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist, existiert $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{k,l \in \mathbb{N}} \left(k \geq i_0 \wedge l \geq i_0 \Longrightarrow \|q_k - q_l\| < \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

und wegen $\lim_{l \to \infty} q_{k_l} = p + q_{k_0}$ existiert $i_1 \in \mathbb{N}$ mit $i_1 \geq i_0$ und

$$\forall_{l \in \mathbb{N}} \left(l \geq i_1 \Longrightarrow \|q_{k_l} - (p + q_{k_0})\| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Daher folgt für für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq i_1 (\geq i_0)$

$$\|q_k - (p + q_{k_0})\| \leq \|q_k - q_{k_{i_1}}\| + \|q_{k_{i_1}} - (p + q_{k_0})\| < \varepsilon. \quad]$$

□

10 Differentialrechnung in endlich-dimensionalen Räumen

Wir wollen nun die Differentialrechnung, die wir in Kapitel 6 für reelle Funktionen auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ betrieben haben, auf den Fall von Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen ausdehnen.

In der eindimensionalen Theorie haben wir eine Funktion f aus $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ in p_0 differenzierbar genannt, wenn $A \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{p \to p_0} \dfrac{f(p) - f(p_0) - A(p - p_0)}{p - p_0} = 0$ existiert, und im Falle der Existenz war A durch $A := \lim\limits_{p \to p_0} \dfrac{f(p) - f(p_0)}{p - p_0}$ eindeutig bestimmt.

Zumindest auf den ersten Blick stellt uns der Übertrag auf den allgemeinen Fall allerdings vor Probleme. Zum einen macht der Differentialquotient für vektorwertige Abbildungen $f\colon V \to W$ auf einem Vektorraum überhaupt keinen Sinn, da wir in allgemeinen Vektorräumen nicht dividieren können – und das schon gar nicht, wenn die Vektoren im Zähler und im Nenner auch noch in unterschiedlichen Räumen liegen. Zum anderen müssen wir einen adäquaten Ersatz für die Multiplikation mit der reellen Zahl A finden.

Die Lösung des zweitgenannten Problemes ist einfach: Die Multiplikation $x \mapsto A \cdot x$ stellt eine lineare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dar, und wir ersetzen sie im allgemeinen Fall durch eine lineare Abbildung $A\colon V \to W$.

Die Lösung des ersten Problemes besteht aus der Wahl einer Norm auf V, denn nach Anwendung dieser auf den Nenner, ist obiger Quotient wohldefiniert. Wir müssen dann allerdings zeigen, daß die Existenz von A unabhängig von der speziellen Wahl der Norm ist.

Des weiteren ist – im Gegensatz zum eindimensionalen Fall – die Eindeutigkeit von A nicht sofort ersichtlich.

Generalvoraussetzung. Seien stets V, W endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume.[70] I.d.R. bezeichnen wir beide Normen mit $\|\ldots\|$.

Definition 10.1 (Differenzierbarkeit und Differential)**.** Seien M eine Teilmenge von V und $f\colon M \to W$ eine Abbildung. Ferner sei $p_0 \in \mathring{M}$.

(i) f heißt *differenzierbar in* p_0

$:\Longleftrightarrow \exists_{A \in \mathcal{L}(V,W)} \forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \exists_{\delta \in \mathbb{R}_+} \forall_{p \in M \setminus \{p_0\}}$

$$\left(\|p - p_0\| < \delta \Rightarrow \frac{\|f(p) - f(p_0) - A(p - p_0)\|}{\|p - p_0\|} < \varepsilon \right) \tag{278}$$

$\overset{\text{klar}}{\Longleftrightarrow} \exists_{A \in \mathcal{L}(V,W)} \forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \exists_{\delta \in \mathbb{R}_+} \forall_{h \in V \setminus \{0\}}$

$$\left((p_0 + h \in M \wedge \|h\| < \delta) \Rightarrow \frac{\|f(p_0 + h) - f(p_0) - A(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon \right) \tag{279}$$

[70] Man denke hier nicht nur an die „üblichen“ Vektorräume. V und W können auch Untervektorräume anderer Vektorräume sein, z.B. Hyperebenen o.ä.

Es sei angemerkt, daß man die Theorie leicht auf (evtl. unendlich-dimensionale) Banachräume W übertragen kann. Dann spielt die Wahl der Norm auf W eine Rolle – im Falle $\dim_{\mathbb{R}} W < \infty$ ist dies nicht der Fall.

$$\iff \exists_{A\in\mathcal{L}(V,W)} \lim_{p\to p_0} \frac{f(p)-f(p_0)-A(p-p_0)}{\|p-p_0\|} = 0 \;^{71}. \tag{280}$$

[„(278) $\Leftrightarrow$ (280)“ folgt aus Satz 9.25.]

Beachte, daß (280) – und damit die Definition – nach Satz 9.41 nicht von der speziellen Wahl der Norm auf W abhängt.

Wir behaupten:

(a) Die Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl der Norm auf V.

(b) Ist f differenzierbar in p_0, so ist $A \in \mathcal{L}(V,W)$ mit (279) (d.h. mit (278), (280)) eindeutig bestimmt.

[Zu (a): Seien $\|\ldots\|_1$, $\|\ldots\|_2$ zwei Normen auf V. Dann gibt es gemäß der Sätze Satz 9.41 und 9.37 reelle Zahlen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{v\in V\smallsetminus\{0\}} \frac{1}{\|v\|_1} \le C_1 \frac{1}{\|v\|_2} \wedge \frac{1}{\|v\|_2} \le C_2 \frac{1}{\|v\|_1}.$$

Also folgt für $p \in M \smallsetminus \{p_0\}$

$$\begin{aligned} \left\|\frac{f(p)-f(p_0)-A(p-p_0)}{\|p-p_0\|_1}\right\| &\le C_1 \left\|\frac{f(p)-f(p_0)-A(p-p_0)}{\|p-p_0\|_2}\right\| \\ &\le C_1\, C_2 \left\|\frac{f(p)-f(p_0)-A(p-p_0)}{\|p-p_0\|_1}\right\|, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich (a).

Zu (b): Erfüllten sowohl $A_1 \in \mathcal{L}(V,W)$ als auch $A_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ (279) anstelle von A.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Dann existieren $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_+$ derart, daß für $i \in \{1,2\}$ gilt

$$U_{\delta_i} = \{p_0 + h \,|\, h \in V \wedge \|h\| < \delta_i\} \subset M, \tag{281}$$

$$\forall_{h\in V\smallsetminus\{0\}} \left(\|h\| < \delta_i \Rightarrow \frac{\|f(p_0+h)-f(p_0)-A_i(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon\right). \tag{282}$$

Hieraus folgt mittels der Dreiecksungleichung für jedes $h \in V \smallsetminus \{0\}$ mit $\|h\| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\frac{\|(A_1-A_2)(h)\|}{\|h\|} < 2\,\varepsilon. \tag{283}$$

[71] Sind $M \subset V$, $g\colon M \to W$ eine Abbildung und $a \in V$ ein *Häufungspunkt von M in V* (d.h. per definitionem, daß eine Folge in $M \smallsetminus \{a\}$ existiert, die gegen a konvergiert), so heißt $w \in W$ der *Limes* oder *Grenzwert von g für p gegen a* (i.Z. $\boxed{\lim_{p\to a} g(p)}$) genau dann, wenn für jede Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M mit $\lim_{k\to\infty} p_k = a$ gilt $\lim_{k\to\infty} g(p_k) = w$.

Da A_1, A_2 linear sind, gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{\|(A_1 - A_2)(\lambda h)\|}{\|\lambda h\|} = \frac{\|(A_1 - A_2)(h)\|}{\|h\|},$$

also folgt, daß (283) auch für jedes $h \in V \setminus \{0\}$ gilt. Aus 9.39 ergibt sich dann $\|A_1 - A_2\| \le 2\varepsilon$. Da dies für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gezeigt ist, erhalten wir $A_1 - A_2 = 0 \in \mathcal{L}(V, W)$, d.h. $A_1 = A_2$.]

Ist f differenzierbar in p_0, so heißt das nach (b) eindeutig bestimmte Element $A \in \mathcal{L}(V, W)$ mit (278) (d.h. mit (278), (280)) das *(erste) Differential von f an der Stelle p_0* und wird mit $\boxed{\mathrm{d}_{p_0} f}$ bezeichnet.

(ii) f heißt *differenzierbar* $:\Longleftrightarrow$ M offen und $\forall_{p \in M}\, f$ differenzierbar in p.

(iii) Die Abbildung $\boxed{\mathrm{d}f \colon \{p \in \overset{\circ}{M} \mid f \text{ differenzierbar in } p\} \to \mathcal{L}(V, W)}$, $p \mapsto \mathrm{d}_p f$, heißt das *(erste) Differential von f.*

Satz 10.2. *Seien $M \subset V$, $f \colon M \to W$ eine Abbildung und $p \in \overset{\circ}{M}$. Dann gilt:*

$$f \textit{ differenzierbar in } p \Longrightarrow \forall_{v \in V} \boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(p)} := \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \mathrm{d}_p f(v).^{72}$$

Beweis. Im Falle $v = 0$ ist die Behauptung klar, sei also im folgenden $v \neq 0$. Weiter sei $(t_k)_{k \in N}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{k \to \infty} t_k = 0$. Dann folgt aus 9.34 (ii) $\lim_{k \to \infty} p + t_k v = p$, und wegen $p \in \overset{\circ}{M}$ gilt $p + t_k v \in M$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt wegen der Differenzierbarkeit von f in p

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \to \infty} \left\| \frac{f(p + t_k v) - f(p) - \mathrm{d}_p f(t_k v)}{\|t_k v\|} \right\| \\ &= \lim_{k \to \infty} \left\| \frac{f(p + t_k v) - f(p) - t_k \, \mathrm{d}_p f(v)}{t_k \, \|v\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|v\|} \lim_{k \to \infty} \left\| \frac{f(p + t_k v) - f(p)}{t_k} - \mathrm{d}_p f(v) \right\|, \end{aligned}$$

also auch $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{f(p + t_k v) - f(p)}{t_k} = \mathrm{d}_p f(v)$. □

Bemerkung. Die Richtung „$\Leftarrow$“ des letzten Satzes ist i.a. falsch, vgl. die Bemerkung zu Satz 10.13 unten.

Satz 10.3. *Seien $M \subset V$, $f \colon M \to W$ eine Abbildung und $p \in \overset{\circ}{M}$. Dann gilt:*

$$f \textit{ differenzierbar in } p \Longrightarrow f \textit{ ststig in } p.$$

[72] Für $v \in V$ heißt $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ die *Richtungsableitung von f in p in Richtung v*. Mit $\frac{\partial}{\partial v}(f) := \frac{\partial f}{\partial v}$ bezeichnen wir die entsprechende Abbildung von $\{p \in \overset{\circ}{M} \mid \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} \text{ existiert in W}\}$ nach W, die sog. *Richtungsableitung von f in Richtung v*.

Beweis. Sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M \setminus \{p\}$ mit $\lim_{k\to\infty} p_k = p$. Es genügt offenbar zu zeigen, daß dann $\lim_{k\to\infty} f(p_k) = f(p)$ folgt. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\|f(p_k) - f(p)\| &= \frac{\|f(p_k) - f(p)\|}{\|p_k - p\|}\|p_k - p\| \\
&\leq \frac{\|f(p_k) - f(p) - \mathrm{d}_p f(p_k - p)\|}{\|p_k - p\|}\|p_k - p\| + \frac{\|\mathrm{d}_p f(p_k - p)\|}{\|p_k - p\|}\|p_k - p\| \\
&\overset{(264)}{\leq} \underbrace{\underbrace{\frac{\|f(p_k) - f(p) - \mathrm{d}_p f(p_k - p)\|}{\|p_k - p\|}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0 \text{ nach Vor.}} \underbrace{\|p_k - p\|}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} + \|\mathrm{d}_p f\| \underbrace{\|p_k - p\|}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0},
\end{aligned}$$

also folgt $\lim_{k\to\infty} f(p_k) = f(p)$. □

Satz 10.4. *Seien M, N Teilmengen von V und $f: M \to W$, $g: N \to W$ Abbildungen sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) *$f: M \to W$ konstant*
$\Longrightarrow \forall_{p\in \mathring{M}}$ *f differenzierbar in p und $\mathrm{d}_p f = 0 \in \mathcal{L}(V, W)$.*

(ii) *$\varphi \in \mathcal{L}(V, W) \Longrightarrow \varphi$ differenzierbar und $\forall_{p\in V}\ \mathrm{d}_p\varphi = \varphi$.*

(iii) *Für alle $p \in \mathring{M} \cap \mathring{N}$ gilt:*
$\big(f, g$ differenzierbar in p
$\Longrightarrow f + g: M \cap N \to W$ differenzierbar in p und $\mathrm{d}_p(f + g) = \mathrm{d}_p f + \mathrm{d}_p g\big)$

(iv) *Für alle $p \in \mathring{M}$ gilt:*
$\big(f$ differenzierbar in p
$\Longrightarrow \lambda f: M \to W$ differenzierbar in p und $\mathrm{d}_p(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{d}_p f\big)$

Beweisskizze. Man überprüft sofort, daß der Differentialquotient mit der jeweils in der Behauptung als Differential genannten Abbildung gegen null konvergiert. □

Bemerkung. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Nach (ii) ist $x_i \in (\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (vgl. 9.26 (i)) differenzierbar, und es gilt $\forall_{p\in\mathbb{R}^n}\ \mathrm{d}_p x_i = x_i$, d.h.

$$\mathrm{d}x_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ ist konstant vom Wert } x_i.$$

Hauptsatz 10.5 (Kettenregel)**.**
Vor.: *Seien V_1 und V_2 endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume, M_i Teilmengen von V_i für $i \in \{1, 2\}$ sowie $g: M_1 \to V_2$, $f: M_2 \to W$ Abbildungen mit $g(M_1) \subset M_2$. Ferner sei $p \in \mathring{M}_1$ derart, daß gilt $g(p) \in \mathring{M}_2$.*
Beh.: *Ist g differenzierbar in p und f differenzierbar in $g(p)$, so gilt*

$$p \in \overset{\circ}{\overbrace{\overline{g}^{1}(M_2)}}, \tag{284}$$

und $f \circ g: \overline{g}^{1}(M_2) \to W$ ist differenzierbar in p mit

$$\mathrm{d}_p(f \circ g) = \mathrm{d}_{g(p)} f \circ \mathrm{d}_p g.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst (284).

[$g(p)$ ist innerer Punkt von M_2, also existiert $U_2 \in \mathcal{U}^\circ(g(p), V_2)$ mit $U_2 \subset M_2$, und wegen der Stetigkeit von $g\colon M_1 \to V$ in p (da g differenzierbar in p) existiert weiter $G \in \mathcal{U}^\circ(p, M_1)$ mit $g(G) \subset U_2$. Da M_1 ein topolgischer Teilraum von V_1 ist, folgt die Existenz von $H \in \mathcal{U}^\circ(p, V_1)$ mit $G = H \cap M_1$, d.h. es gilt

$$g(H \cap M_1) \subset U_2 \subset M_2.$$

Da p innerer Punkt von M_1 ist, existiert $\widetilde{U}_1 \in \mathcal{U}^\circ(p, V_1)$ mit $\widetilde{U}_1 \subset M_1$. Dann gilt auch $U_1 := \widetilde{U}_1 \cap H \in \mathcal{U}^\circ(p, V_1)$ und $U_1 \subset M_1$ sowie

$$g(\underbrace{U_1}_{=U_1 \cap M_1}) \subset U_2 \subset M_2,$$

also $U_1 \subset \overline{g}^1(M_2)$, d.h. p ist innerer Punkt von $\overline{g}^1(M_2)$.]

Wir definieren nun Abbildungen $h_1\colon M_1 \to V_2$ und $h_2\colon M_2 \to W$ durch

$$\forall_{q \in M_1 \setminus \{p\}}\, h_1(q) = \frac{g(q) - g(p) - d_p g(q-p)}{\|q-p\|} \quad \wedge \quad h_1(p) = 0$$

und

$$\forall_{\tilde{q} \in M_2 \setminus \{g(p)\}}\, h_2(\tilde{q}) = \frac{f(\tilde{q}) - f(g(p)) - d_{g(p)} f(\tilde{q} - g(p))}{\|\tilde{q} - g(p)\|} \quad \wedge \quad h_2(g(p)) = 0.$$

Dann folgt aus der Differenzierbarkeit von g in p und der Differenzierbarkeit von f in $g(p)$:

$$\begin{aligned} &\forall_{q \in M_1} g(q) = g(p) + d_p g(q-p) + \|q-p\|\, h_1(q),\ h_1(p) = 0 \\ &\text{und } h_1 \text{ ist stetig in } p \end{aligned} \tag{285}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\forall_{\tilde{q} \in M_2} f(\tilde{q}) = f(g(p)) + d_{g(p)} f(\tilde{q} - g(p)) + \|\tilde{q} - g(p)\|\, h_2(\tilde{q}), \\ &h_2(g(p)) = 0 \text{ und } h_2 \text{ ist stetig in } g(p). \end{aligned} \tag{286}$$

Sei nun $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{g}^1(M_2) \setminus \{p\}$ mit $\lim_{k\to\infty} q_k = p$. Dann folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(q_k) &= f(g(q_k)) \\ &\overset{(286)}{=} f(g(p)) + d_{g(p)} f(\underbrace{g(q_k) - g(p)}_{\overset{(285)}{=} d_p g(q_k - p) + \|q_k - p\|\, h_1(q_k)}) \\ &\quad + \|g(q_k) - g(p)\|\, h_2(g(q_k)), \end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned} &\left\|(f \circ g)\,(q_k) - (f \circ g)\,(p) - \left(\left(\mathrm{d}_{g(p)} f\right) \circ (\mathrm{d}_p g)\right)(q_k - q)\right\| \\ &= \left\|\mathrm{d}_{g(p)} f\left(\, \|q_k - p\|\, h_1\,(q_k)\,\right) + \|g(q_k) - g(p)\|\, h_2(g(q_k))\right\| \\ &\overset{(264)}{\leq} \left\|\mathrm{d}_{g(p)} f\right\| \|q_k - p\| \left\|h_1\,(q_k)\right\| + \|g(q_k) - g(p)\| \left\|h_2(g(q_k))\right\| \end{aligned}$$

Hieraus und aus

$$\begin{aligned}\|g(q_k)-g(p)\| &\overset{(285)}{=} \|\mathrm{d}_p g(q_k-p)+\|q_k-p\|\,h_1(q_k)\| \\ &\overset{(264)}{\leq} \|\mathrm{d}_p g\|\,\|q_k-p\|+\|q_k-p\|\,\|h_1(q_k)\|\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}&\left\|(f\circ g)(q_k)-(f\circ g)(p)-\big((\mathrm{d}_{g(p)}f)\circ(\mathrm{d}_p g)\big)(q_k-q)\right\| \\ &\leq \|q_k-p\|\underbrace{\Big(\|\mathrm{d}_{g(p)}f\|\underbrace{\|h_1(q_k)\|}_{\underset{(285)}{\xrightarrow{k\to\infty}}0}+\Big(\|\mathrm{d}_p g\|+\underbrace{\|h_1(q_k)\|}_{\underset{(285)}{\xrightarrow{k\to\infty}}0}\Big)\underbrace{\|h_2(\underbrace{g(q_k)}_{\xrightarrow{k\to\infty}g(p)})\|}_{\underset{(286)}{\xrightarrow{k\to\infty}}0}\Big)}_{\xrightarrow{k\to\infty}0}.\end{aligned}$$

Beachte, daß $\lim_{k\to\infty} g(q_k)=g(p)$ gilt, weil g stetig in p ist, da g differenzierbar in p ist.

Nun folgt $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\left\|(f\circ g)(q_k)-(f\circ g)(p)-\big((\mathrm{d}_{g(p)}f)\circ(\mathrm{d}_p g)\big)(q_k-q)\right\|}{\|q_k-p\|}=0.$ □

10.6 (Weg, Geschwindigkeitsvektor, Beschleunigungsvektor)**.**

(i) Sei M eine beliebige Menge. Dann ist ein *Weg in M* per definitionem eine Abbildung eines Intervalles von $\mathbb{R}$ in M.

(ii) Seien $J\subset\mathbb{R}$ ein Intervall und $c\colon J\to V$ ein Weg in V sowie $t_0\in\overset{\circ}{J}$. Dann folgt

$$c \text{ differenzierbar in } t_0 \iff \lim_{h\to 0}\frac{c(t_0+h)-c(t_0)}{h} \text{ existiert in } V. \tag{287}$$

Gilt eine der beiden Seiten von (287), so folgt darüber hinaus

$$\boxed{c'(t_0)} := \lim_{h\to 0}\frac{c(t_0+h)-c(t_0)}{h}=\mathrm{d}_{t_0}c(1). \tag{288}$$

$c'(t_0)$ heißt *Geschwindigkeitsvektor von c zur Zeit t_0* oder die *(erste) Ableitung von c in t_0.*

[Ist c differenzierbar in t_0, so folgt die rechte Seite von (287) sowie (288) aus 10.2.

Zu (287) „$\Leftarrow$“: Existiere also $v\in V$ mit $v=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c(t_0+h)-c(t_0)}{h}$. Mit

$$A\in\mathcal{L}(\mathbb{R},V),\ \forall_{t\in\mathbb{R}}\, A(t)=t\,v$$

folgt dann

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{c(t_0+h)-c(t_0)-h\,v}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c(t_0+h)-c(t_0)-A(h)}{h}.$$

Daher ist c differenzierbar in t_0 mit $\mathrm{d}_{t_0}c = A$, d.h. $\mathrm{d}_{t_0}c(1) = A(1) = v$, also gilt die linke Seite von (287).]

Im Falle der Existenz von $t_- := \min J$ bzw. $t_+ := \max J$ heißt c im Falle der Existenz von $c'(t_-) := c'(t_-+)$ bzw. $c'(t_+) := c'(t_+-)$ [73] *differenzierbar in t_- bzw. t_+*, und wir nennen diesen Vektor den *Geschwindigkeitsvektor von c zur Zeit t_- bzw. t_+* oder die *(erste) Ableitung von c in t_- bzw. t_+.*

c heißt *differenzierbar* genau dann, wenn c in jedem $t \in J$ differenzierbar ist. In diesem Falle heißt $c'\colon J \to V$ das *Geschwindigkeitsvektorfeld von c.*

Ist auch c' in $t \in J$ differenzierbar, so heißt $c''(t) := (c')'(t)$ der *Beschleunigungsvektor von c zur Zeit t* oder die *zweite Ableitung von c in t*, und im Falle der Differenzierbarkeit von c' heißt $c'' := (c')'\colon J \to \mathbb{R}$ das *Beschleunigungsvektorfeld von c* oder die *zweite Ableitung von c.*

Bemerkung. Der Spezialfall $V = \mathbb{R}$ von 10.7 (ii) zeigt, daß die Definitionen der Differenzierbarkeit und der Ableitung in diesem Kapitel Verallgemeinerungen der entsprechenden Definitionen in 6.1 – beachte, daß zu einem inneren Punkt $t \in M \subset \mathbb{R}$ per definitionem ein nicht-entartetes offenes Intervall J mit $p \in J \subset M$ existiert – und 8.26 sind.

Satz 10.7 (Geometrische Veranschaulichung des Differentials)**.** *Seien $M \subset V$, $f\colon M \to W$ eine Abbildung, die in $p \in \mathring{M}$ differenzierbar ist, und sei $v \in V$.*

Dann folgt für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und jeden differenzierbaren Weg $c\colon]-\varepsilon + t_0, t_0 + \varepsilon[\to V$ mit $c(]-\varepsilon + t_0, t_0 + \varepsilon[) \subset M$, $c(t_0) = p$ und $c'(t_0) = v$

$$(f \circ c)'(t_0) = \mathrm{d}_{c(t_0)}f(c'(t_0)) = \mathrm{d}_p f(v).$$

Beweis. Nach der Kettenregel 10.5 ist $f \circ c$ in t_0 differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}(f \circ c)'(t_0) &\overset{(288)}{=} \mathrm{d}_{t_0}(f \circ c)(1) \overset{10.5}{=} (\mathrm{d}_{c(t_0)}f) \circ (\mathrm{d}_{t_0}c)(1) \\ &\overset{(288)}{=} \mathrm{d}_p f(c'(t_0)) = \mathrm{d}_p f(v).\end{aligned}$$

□

Nachdem wir nun ein geometrisches Verständnis für die mehrdimensionale Differenzierbarkeit gewonnen haben, wollen wir nun mittels des folgenden Satzes den Zusammenhang zwischen reellwertigen und $\mathbb{R}^n$-wertigen differenzierbaren Abbildungen aufzeigen.

Satz 10.8.
Vor.: *Seien $n \in \mathbb{N}_+$, $M \subset V$, $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $p \in \mathring{M}$.*
Beh.:

$$f \text{ differenzierbar in } p \iff \forall_{i \in \{1,\dots,n\}}\, f_i \text{ differenzierbar in } p. \tag{289}$$

Gilt eine der Seiten von (289), so folgt

$$\forall_{i \in \{1,\dots,n\}}\, (\mathrm{d}_p f)_i = \mathrm{d}_p f_i,$$

d.h. $\mathrm{d}_p f = (\mathrm{d}_p f_1, \dots, \mathrm{d}_p f_n)$.

---

[73] Hierbei sind für eine Abbildung $f\colon M \to V$ auf einer Teilmenge M von $\mathbb{R}$ für $t \in M$ die Limites $f'(t-)$ und $f'(t+)$ völlig analog zur entsprechenden Definition in Kapitel 5 definiert.

Beweis. 1.) Sei f differenzierbar in p und sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da $x_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ in $f(p)$ differenzierbar ist, so ist nach der der Kettenregel 10.5 $f_i = x_i \circ f \colon M \to \mathbb{R}$ differenzierbar in p, und es gilt

$$\mathrm{d}_p f_i = (\underbrace{\mathrm{d}_{f(p)} x_i}_{=x_i}) \circ (\mathrm{d}_p f) = (\mathrm{d}_p f)_i.$$

2.) Es sei $f_i \colon M \to \mathbb{R}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ in p differenzierbar. Es gilt dann $\mathrm{d}_p f_i \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, also auch $(\mathrm{d}_p f_1, \ldots, \mathrm{d}_p f_n) \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^n)$.

Weiter folgt für jede Folge $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im $M \smallsetminus \{p\}$ mit $\lim_{k\to\infty} q_k = p$

$$\forall_{i \in \{1,\ldots,n\}} \lim_{k\to\infty} \frac{f_i(q_k) - f_i(p) - \mathrm{d}_p f_i(q_k - p)}{\|q_k - p\|} = 0,$$

also auch nach 9.13

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(q_k) - f(p) - (\mathrm{d}_p f_1, \ldots, \mathrm{d}_p f_n)(q_k - p)}{\|q_k - p\|} = 0,$$

d.h. f ist differenzierbar mit $\mathrm{d}_p f = (\mathrm{d}_p f_1, \ldots, \mathrm{d}_p f_n)$. □

Wir haben in Kapitel 6 den Mittelwertsatz als das wichtigste Ergebnis der eindimensionalen Differentialrechnung herausgearbeitet. Wir zeigen nun, daß das entsprechende Analogon auch für reellwertige Funktionen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum gilt, während für vektorwertige Abbildungen nur eine abgeschwächte Fassung gültig ist.

Satz 10.9 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Es seien $M \subset V$ und $f \colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter seien $p, q \in M$ mit $p \neq q$ derart, daß gilt*

$$[p,q] := \{p + t(q-p) \,|\, t \in [0,1]\} \subset M \text{ sowie }]p,q[:= [a,b] \smallsetminus \{a,b\} \subset \mathring{M},$$

und f ist in allen Punkten von $[p,q]$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann existiert $\vartheta \in]0,1[$ mit

$$f(q) - f(p) = \mathrm{d}_{p+\vartheta(q-p)} f(q-p).$$

Beweis. $h \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(p + t(q-p))$, ist nach Voraussetzung stetig und auf $]0,1[$ differenzierbar. Daher existiert nach dem Mittelwertsatz 6.10 $\vartheta \in]0,1[$ mit $h(1) - h(0) = h'(\vartheta) = \mathrm{d}_\vartheta h(1)$, also gilt

$$f(q) - f(p) = \mathrm{d}_{p+\vartheta(q-p)} f \circ \big(t \mapsto p + t(q-p)\big)'(1).$$

Hieraus folgt die Behauptung.[74] □

Bemerkung. Der letzte Satz gilt nicht für vektorwertige Abbildungen! Betrachte $c \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Dann gilt $c(1) - c(0) = (0,0)$ und $\forall_{\vartheta \in [0,2\pi]} \mathrm{d}_\vartheta c(1) = c'(\vartheta) = 2\pi(-\sin(2\pi\vartheta), \cos(2\pi\vartheta)) \neq (0,0)$.

[74] Man überlege sich zunächst, daß es genügt, den Fall $V = \mathbb{R}^m$ zu betrachten und sodann mit Satz 10.8, daß man die Ableitung von $t \mapsto p + t(q-p)$ durch komponentenweises Ableiten erhält.

Hauptsatz 10.10 (Mittelwertabschätzungssatz der Differentialrechnung). *Seien $M \subset V$ und $f\colon M \to W$ eine Abbildung. Weiter seien $p, q \in M$ mit $p \neq q$ derart, daß gilt $[p,q] \subset \overset{\circ}{M}$, und f ist in allen Punkten von $[p,q]$ differenzierbar. Dann folgt*

$$\|f(q) - f(p)\| \leq \sup\{\|\mathrm{d}_a f\| \mid a \in [p,q]\} \cdot \|q - p\|.$$

(Die Operatornorm auf $\mathcal{L}_c(V,W) = \mathcal{L}(V,W)$ (vgl. 9.37, 9.39) ist hier natürlich bzgl. der Normen auf V und W zu bilden.)

Zusatz. *Ist f nur in allen Punkten von $]p,q[$ differenzierbar und in p sowie q stetig, wobei p, q nicht notwendig innere Punkte von M sein müssen, so gilt*

$$\|f(q) - f(p)\| \leq \sup\{\|\mathrm{d}_a f\| \mid a \in \,]p,q[\} \cdot \|q - p\|.$$

Beweis. Im Falle $C := \sup\{\|\mathrm{d}_a f\| \mid a \in [p,q]\} = +\infty$ ist nichts zu zeigen. Sei daher $C < +\infty$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Wir definieren zwei Abbildungen

$$h\colon [0,1] \longrightarrow W,\ t \longmapsto f(p + t(q-p)),$$
$$\lambda\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \|h(t) - h(0)\| - t(C+\varepsilon)\|q-p\|$$

und werden zeigen

$$\lambda(1) \leq 0. \tag{290}$$

Die Behauptung folgt dann aus der Beliebigkeit von $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Zu (290): Zunächst ist $\lambda\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ offenbar stetig. Als Urbild einer abgeschlossenen Menge ist dann $\emptyset \neq A := \overset{-1}{\lambda}(]-\infty, 0])$ abgeschlossen in $[0,1]$, und es gilt $s := \sup A \in A$.

[Zum einen gilt $0 \in A$, also $A \neq \emptyset$. Zum anderen existiert eine Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A mit $\lim_{k\to\infty} s_k = s$, und es folgt $\lambda(s) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\lambda(s_k)}_{\leq 0} \leq 0$ (beachte, daß λ stetig ist), d.h. $s \in A$.]

Zum Nachweis von (290) genügt es nun zu zeigen, daß gilt $s = 1$.

Beweis hiervon: Angenommen es gilt $s < 1$. Da f in $p + s(q-p)$ differenzierbar ist, existiert dann $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $[s, s+\delta] \subset [0,1]$ derart, daß für alle $t \in [s, s+\delta]$ gilt

$$\frac{\|f(p+t(q-p)) - f(p+s(q-p)) - \mathrm{d}_{p+s(q-p)} f((t-s)(q-p))\|}{\|(t-s)(q-p)\|} < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\|h(t) - h(s) - (t-s)\,\mathrm{d}_{p+s(q-p)} f((q-p))\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(t-s)\|(q-p)\|,$$

also nach 9.35 und der Definition von C

$$\|h(t) - h(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}(t-s)\|(q-p)\| + C\,(t-s)\|q-p\| \tag{291}$$

und somit nach Definition von λ

$$\lambda(t) \quad = \quad \underbrace{\|h(t) - h(0)\|}_{\leq \|h(t)-h(s)\| + \|h(s)-h(0)\|} \quad - \underbrace{t}_{=t-s+s}(C+\varepsilon)\|q-p\|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad \|h(t)-h(s)\|-(t-s)(C+\varepsilon)\|q-p\| \\
&\qquad + \underbrace{\|h(s)-h(0)\|-s(C+\varepsilon)\|q-p\|}_{=\lambda(s)} \\
&\overset{(291)}{\leq} \quad C\,(t-s)\|q-p\|-(t-s)(C+\frac{\varepsilon}{2})\|q-p\|+\lambda(s) \\
&\overset{s\in A}{\leq} \quad -(t-s)\frac{\varepsilon}{2}\|q-p\| \leq 0.
\end{aligned}
$$

Insbesondere gilt also $\lambda(s+\delta) \leq 0$, im Widerspruch zur Definition von s.

Zum Zusatz: In der Situation des Zusatzes haben wir gerade bereits bewiesen, daß für alle $t_1, t_2 \in \,]0,1[\,$ mit $t_1 < t_2$ gilt

$$\|f(p+t_2(q-p))-f(p+t_1(q-p))\| \quad \leq \quad \sup\{\|\mathrm{d}_a f\| \mid a \in \,]p,q[\,\}\cdot(t_2-t_1)\|q-p\|.$$

Da f in p und q stetig ist, folgt die Behauptung des Zusatzes durch Grenzwertbildung für $t_2 \to 1$ und $t_1 \to 0$. □

Satz 10.11. *Sei M eine offene Teilmenge von V mit der Eigenschaft, daß es zu je zwei Punkten $p, q \in M$ endlich viele $a_0, \ldots, a_k \in M$ mit $a_0 = p$, $a_k = q$ und $[a_{i-1}, a_i] \subset M$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ gibt. Weiter sei $f\colon M \to W$ eine differenzierbare Abbildung mit $\forall_{a\in M}\, \mathrm{d}_a f = 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Der Satz folgt sofort aus 10.10. □

Wir haben in 10.2 bereits für eine Funktion $V \to W$ die Richtungsableitungen definiert. Im Falle $V = \mathbb{R}^m$ besitzt V die kanonosche Basis $\{e_1, \ldots, e_m\}$, und die Richtungsableitungen in Richtung e_i für $i \in \{1, \ldots, m\}$ spielen eine besondere Rolle. Sie sind nämlich „verhältnismäßig einfach zu bestimmen“ und ermöglichen daher – wie wir in 10.13 sehen werden – die Angabe eines „einfach zu überprüfenden“ hinreichenden Kriteriums für Differenzierbarkeit.

Definition 10.12 ((Stetige) Partielle Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen)**.** Es seien $m \in \mathbb{N}_+$, $M \subset \mathbb{R}^m$ und $f\colon M \to W$ eine Abbildung. Ferner sei $p_0 = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathring{M}$.

(i) Sei $i \in \{1, \ldots, m\}$.

f heißt *partiell differenzierbar in p nach x_i*
$:\Longleftrightarrow \lim_{t\to 0} \dfrac{f(p_0+t\,e_i)-f(p_0)}{t}$ existiert in W.

Falls f partiell differenzierbar in p_0 nach x_i ist, so heißt

$$
\begin{aligned}
\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)} \quad &:= \quad \lim_{t\to 0}\frac{f(p_0+t\,e_i)-f(p_0)}{t} \\
&\overset{10.6}{=} \quad (t \longmapsto f(p_1,\ldots,p_{i-1},p_i+t,p_{i+1},\ldots,p_m))'(0) \\
&= \quad (t \longmapsto f(p_1,\ldots,p_{i-1},t,p_{i+1},\ldots,p_m))'(p_i)
\end{aligned}
$$

die *i-te partielle Ableitung von f in p_0*. Es gilt also $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = \dfrac{\partial f}{\partial e_i}(p_0)$.

Statt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$ schreibt man auch $\boxed{f_{x_i}(p_0)}$.

Wir setzen $M_{x_i} := \{p \in \mathring{M} \,|\, f$ partiell differenzierbar in p nach $x_i\}$ und nennen die Abbildung

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}(f) := \frac{\partial f}{\partial x_i} \colon M_{x_i} \longrightarrow W}, \; p \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

die *i-te partielle Ableitung von f*. Statt $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ schreibt man auch $\boxed{f_{x_i}}$.

f heißt *partiell differenzierbar nach x_i*
$:\Longleftrightarrow \forall_{p \in M}\, f$ partiell differenzierbar in p nach x_i.

(ii) f heißt *partiell differenzierbar in p_0*
$:\Longleftrightarrow \forall_{i \in \{1,\ldots,m\}}\, f$ partiell differenzierbar in p_0 nach x_i.

f heißt *partiell differenzierbar*
$:\Longleftrightarrow \forall_{i \in \{1,\ldots,m\}}\, f$ partiell differenzierbar nach x_i.

(iii) f heißt *stetig partiell differenzierbar in p_0* genau dann, wenn es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^{\circ}(p_0, \mathbb{R}^m)$ mit $U \subset M$ gibt derart, daß $f|_U$ partiell differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_U$ für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ stetig in p_0 ist.

f heißt *stetig partiell differenzierbar*
$:\Longleftrightarrow \forall_{p \in M}\, f$ stetig partiell differenzierbar in p.

Beispiel. $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (\mathrm{e}^x \cos(y), \mathrm{e}^x \sin(y))$, ist partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos(y), \mathrm{e}^x \sin(y)) \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-\mathrm{e}^x \sin(y), \mathrm{e}^x \cos(y)),$$

d.h. es gelten die sog. *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Bemerkung. Seien $m \in \mathbb{N}_+$, $M \subset \mathbb{R}^m$ und $f \colon M \to W$ eine Abbildung. Dann gilt

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i.$$

Denn ist f in $p \in \mathring{M}$ differenzierbar, so gilt für $v = \sum_{i=1}^m v_i e_i \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_p f(v) &= \mathrm{d}_p f\left(\sum_{i=1}^{m} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} v_i \mathrm{d}_p f(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, v_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, x_i(v) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, \mathrm{d}_p x_i(v). \end{aligned}$$

Teil (ii) des folgenden Satzes stellt nun das angekündigte hinreichende Kriterium für Differenzierbarkeit, welches sich mittels der Kenntnis der partiellen Ableitungen überprüfen läßt, dar.

Hauptsatz 10.13.
Vor.: *Es seien $m \in \mathbb{N}_+$, $M \subset \mathbb{R}^m$ und $f\colon M \to W$ eine Abbildung. Ferner sei $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathring{M}$.*
Beh.:

(i) f differenzierbar in p
$$\Longrightarrow f \text{ partiell differenzierbar in } p \text{ und } \forall_{i \in \{1,\dots,m\}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \mathrm{d}_p f(e_i).$$

(ii) Ist f in p stetig partiell differenzierbar, so ist f differenzierbar in p.

Beweis. (i) folgt sofort aus Satz 10.2.

Zu (ii): Wir können offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinhet annehmen, daß $n \in \mathbb{N}_+$ mit $W = \mathbb{R}^n$ existiert, und wegen Satz 10.8 genügt es dann, den Satz für den Fall $W = \mathbb{R}$ zu beweisen. Ferner versehen wir $\mathbb{R}^m$ mit der Maximumsnorm $\|\dots\|_\infty$.

Nach Voraussetzung existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $U := U_\varepsilon(p) \subset M$ derart, daß $f|_U$ partiell differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_U$ für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ stetig in p ist. Wir definieren eine Abbildung $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ durch

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \tag{292}$$

(Beachte, ist f in p differenzierbar, so muß $\mathrm{d}_p f = A$ gelten.)

Für jedes $q = (q_1, \dots, q_m) \in U$ und jedes $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ist dann auch $(p_1, \dots, p_i, q_{i+1}, \dots, q_m) \in U$, und es gilt

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) \quad = \quad & f(q_1, \dots, q_m) - f(p_1, q_2, \dots, q_m) \\ & + f(p_1, q_2, \dots, q_m) - f(p_1, p_2, q_3 \dots, q_m) \\ & \vdots \\ & + f(p_1, \dots, p_{m-1}, q_m) - f(p_1, \dots, p_m). \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz 6.10 – angewandt auf jede Zeile – existieren für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ reelle Zahlen ξ_i^q zwischen q_i und p_i mit

$$f(q) - f(p) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, \dots, p_{i-1}, \xi_i^q, q_{i+1}, \dots, q_m)\,(q_i - p_i),$$

und hieraus ergibt sich mit (292)

$$\begin{aligned} & \frac{f(q) - f(p) - A(q-p)}{\|q-p\|_\infty} \\ & \quad = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{q_i - p_i}{\|q-p\|_\infty}}_{\in [-1,1]} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, \dots, p_{i-1}, \xi_i^q, q_{i+1}, \dots, q_m) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right). \end{aligned}$$

Für $q \to p$ strebt auch $(p_1, \dots, p_{i-1}, \xi_i^q, q_{i+1}, \dots, q_m)$ gegen p (beachte, daß die ξ_i^q zwischen q_i und p_i liegen), und $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_U$ ist stetig in p. Daher folgt, daß der zweite Faktor eines jeden Summanden der rechten Seite der letzten Gleichung gegen null konvergiert, und der erste ist beschränkt. Damit konvergiert die gesamte rechte Seite für $q \to p$ gegen null und somit auch die linke. Also ist f differenzierbar in p mit $\mathrm{d}_p f = A$. $\square$

Beispiel. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (\mathrm{e}^x \cos(y), \mathrm{e}^x \sin(y))$, ist differenzierbar, denn $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind offenbar stetig.

Bemerkung.

(i) Die Richtung „$\Leftarrow$" in Teil (i) des letzten Satzes ist i.a. falsch. Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } y = x^2 > 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

ist partiell differenzierbar in $(0,0)$ (mit $\forall_{v \in \mathbb{R}^2}\ \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$), aber nicht einmal stetig in $(0,0)$.

(ii) Ist M eine Teilmenge von V anstelle von $\mathbb{R}^m$, so gilt (ii) entsprechend, wenn man voraussetzt, daß zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_m\}$ von V alle Richtungsableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial v_i}$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ auf einer Umgebung von p existieren und dort stetig sind.

Unser nächstes Ziel ist es, u.a. zu beweisen, daß mit zwei reellwertigen Funktionen auch ihr Produkt differenzierbar ist. Dies läßt sich aus dem folgenden Satz, der auch für sich von Interesse ist, ableiten.

Wir haben oben bereits eingesehen, daß lineare Abbildungen differenzierbar sind und sich in jedem Punkt selbst als Differential besitzen. Wir zeigen nun, daß auch multilineare Abbildungen differenzierbar sind.

Satz 10.14. *Seien $k \in \mathbb{N}_+$ und $V_1, \ldots, V_k$ endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. Ferner sei $\varphi\colon \times_{i=1}^k V_i \to W$ eine k-fach $\mathbb{R}$-multilineare Abbildung. Dann ist φ differenzierbar, und für alle $p = (p_1, \ldots, p_k), v = (v_1, \ldots, v_k) \in \times_{i=1}^k V_i$ gilt*

$$\mathrm{d}_p\varphi(v) = \sum_{i=1}^k \varphi(p_1, \ldots, p_{i-1}, v_i, p_{i+1}, \ldots, p_k).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}_+$ mit $V_1 = \mathbb{R}^{n_1}, \ldots, V_k = \mathbb{R}^{n_k}$ existieren, also folgt $\times_{i=1}^k V_i = \mathbb{R}^n$ mit $n = \sum_{i=1}^k n_i \in \mathbb{N}_+$.

Für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ bezeichne $\{e_{i,1}, \ldots, e_{i,n_i}\}$ die kanonische Basis von $V_i = \mathbb{R}^{n_i}$. Dann können wir $\{e_{1,1}, \ldots, e_{1,n_1}, \ldots, e_{k,1}, \ldots, e_{k,n_k}\}$ mit der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ identifizieren. $\{x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1}, \ldots, x_{k,1}, \ldots, x_{k,n_k}\}$ sei die dazu duale Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$.

Wir bezeichnen weiter mit $\|\ldots\|_i$ ($i \in \{1, \ldots, k\}$) bzw. $\|\ldots\|_\infty$ die Maximumsnormen auf $\mathbb{R}^{n_i}$ bzw. $\mathbb{R}^n$. Dann gilt also

$$\forall_{a=(a_{1,1},\ldots,a_{1,n_1},\ldots,a_{k,1},\ldots,a_{k,n_k}) \in \times_{i=1}^k \mathbb{R}^{n_i}}\ \forall_{i \in \{1,\ldots,k\}}\ \forall_{j \in \{1,\ldots,n_i\}}\ |a_{i,j}| \le \|a_i\|_i \le \|a\|_\infty. \tag{293}$$

Wir zeigen zunächst:

$$\varphi\colon \bigtimes_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{n_i} \longrightarrow W \text{ ist stetig.} \tag{294}$$

[Für $i \in \{1, \dots, k\}$ sei $a_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} e_{i,j} \in V_i = \mathbb{R}^{n_i}$. Dann gilt

$$\varphi(a_1, \dots, a_k) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_k=1}^{n_k} a_{1,j_1} \cdots a_{k,j_k}\, \varphi(e_{1,j_1}, \dots, e_{k,j_k}),$$

also

$$\begin{aligned} \|\varphi(a_1, \dots, a_k)\| \quad &\leq \quad \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_k=1}^{n_k} |a_{1,j_1}| \cdots |a_{k,j_k}|\, \|\varphi(e_{1,j_1}, \dots, e_{k,j_k})\| \\ &\overset{(293)}{\leq} \quad \|a\|_\infty \underbrace{k \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_k=1}^{n_k} \|\varphi(e_{1,j_1}, \dots, e_{k,j_k})\|}_{=:\, C \,\in\, \mathbb{R}_+}. \end{aligned}$$

(294) folgt nun aus Satz 9.37.]

Sei nun $p = (p_1, \dots, p_k) \in \bigtimes_{i=1}^{k} V_i = \mathbb{R}^n$. Nach Voraussetzung ist dann für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ die Abbildung

$$\varphi_{p,i}\colon \mathbb{R}^{n_i} \longrightarrow W,\ q \longmapsto \varphi(p_1, \dots, p_{i-1}, q, p_{i+1}, \dots, p_k)$$

linear, also nach 10.4 (ii) differenzierbar mit $\forall_{q \in \mathbb{R}^{n_i}}\, \mathrm{d}_q \varphi_{p,i} = \varphi_{p,i}$. Aus 10.13 (i) folgt die partielle Differenzierbarkeit von $\varphi_{p,i}$ sowie für alle $j \in \{1, \dots, n_i\}$ und $q \in \mathbb{R}^{n_i}$

$$\frac{\partial \varphi_{p,i}}{\partial x_{i,j}}(q) = \mathrm{d}_q \varphi_{p,i}(e_{i,j}) = \varphi_{p,i}(e_{i,j}) = \varphi(p_1, \dots, p_{i-1}, e_{i,j}, p_{i+1}, \dots, p_k),$$

also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{i,j}}(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_k) = \frac{\partial \varphi_{p,i}}{\partial x_{i,j}}(p) = \varphi(p_1, \dots, p_{i-1}, e_{i,j}, p_{i+1}, \dots, p_k). \tag{295}$$

Aus (294) und Satz 9.22 folgt nun zunächst, daß die rechte Seite von (295) stetig in p ist und sodann aus der Beliebigkeit von $p \in \bigtimes_{l=1}^{k} V_l = \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \dots, k\}$ und $j \in \{1, \dots, n_i\}$, daß φ stetig partiell differenzierbar ist, also nach 10.13 differenzierbar.

Außerdem erhalten wir für alle $p = (p_1, \dots, p_k), v = (v_1, \dots, v_k) \in \bigtimes_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{n_i}$ mit $v_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i})$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ aus der Multilinearität von φ

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_p \varphi(v) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i=1}^{n_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i,j_i}}(p)\, v_{i,j_i} \\ &\overset{(295)}{=} \quad \sum_{i=1}^{k} \sum_{j_i=1}^{n_i} v_{i,j_i}\, \varphi(p_1, \dots, p_{i-1}, e_{i,j_i}, p_{i+1}, \dots, p_k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k} \varphi(p_1, \ldots, p_{i-1}, \sum_{j_i=1}^{n_i} v_{i,j_i} e_{i,j_i}, p_{i+1}, \ldots, p_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \varphi(p_1, \ldots, p_{i-1}, v_i, p_{i+1}, \ldots, p_k),
\end{aligned}
$$

und wir haben den Satz vollständig bewiesen. □

Satz 10.15 (Verallgemeinerte Leibnizsche Produktregel). *Es seien $V_1, \ldots, V_k$ endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume und $\varphi\colon \times_{i=1}^{k} V_i \to W$ eine k-fach $\mathbb{R}$-multilineare Abbildung. Des weiteren seien M eine Teilmenge von V und $f_1\colon M \to V_1$, …, $f_k\colon M \to V_k$ Abbildungen, die sämtlich in $p \in \overset{\circ}{M}$ differenzierbar sind. Dann ist auch $\varphi \circ (f_1, \ldots, f_k)\colon M \to W$ in p differenzierbar, und es gilt für alle $v \in V$*

$$
\mathrm{d}_p\big(\varphi \circ (f_1, \ldots, f_k)\big)(v) = \sum_{i=1}^{k} \varphi\big(f_1(p), \ldots, f_{i-1}(p), \mathrm{d}_p f_i(v), f_{i+1}(p), \ldots, f_k(p)\big).
$$

Beweisskizze. Wie üblich kann man den Beweis durch Basiswahlen auf den Fall $V_i = \mathbb{R}^{n_i}$ und $V = \mathbb{R}^m$ reduzieren. Mittels Satz 10.8 überlegt man sich, daß $(f_1, \ldots, f_k)\colon M \to \times_{i=1}^{k} \mathbb{R}^{n_i}$ in p differenzierbar ist mit $\mathrm{d}_p f = (\mathrm{d}_p f_1, \ldots, \mathrm{d}_p f_k)$. Dann folgt die Behauptung aus der Kettenregel 10.5 und 10.14. □

Satz 10.16. *Seien M, N Teilmengen von V und $p \in \overset{\circ}{\widehat{M \cap N}}$. Ferner sei $\langle \ldots, \ldots \rangle$ ein Skalarprodukt auf W.*

(i) (Leibnizsche Produktregel)

Seien $f\colon M \to \mathbb{R}$ und $g\colon N \to \mathbb{R}$ zwei Abbildungen, die in p differenzierbar sind. Dann ist $f \cdot g\colon M \cap N \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar, und es gilt für jedes $v \in V$

$$
\mathrm{d}_p(f \cdot g)(v) = \mathrm{d}_p f(v) \cdot g(p) + f(p) \cdot \mathrm{d}_p g(v).
$$

(ii) Seien $\lambda\colon N \to \mathbb{R}$ sowie $f\colon M \to W$ zwei Abbildungen, die in p differenzierbar sind. Dann ist $\lambda \cdot f\colon M \cap N \to W$ in p differenzierbar, und es gilt für jedes $v \in V$

$$
\mathrm{d}_p(\lambda \cdot f)(v) = \mathrm{d}_p \lambda(v) \cdot f(p) + \lambda(p) \cdot \mathrm{d}_p f(v).
$$

(iii) Seien $f\colon M \to W$ und $g\colon N \to W$ zwei Abbildungen, die in p differenzierbar sind. Dann ist $\langle f, g\rangle\colon M \cap N \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar, und es gilt für jedes $v \in V$

$$
\mathrm{d}_p(\langle f, g\rangle)(v) = \langle \mathrm{d}_p f(v), g(p)\rangle + \langle f(p), \mathrm{d}_p g(v)\rangle.
$$

Beweis. Da die Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie die skalare Multiplikation $\mathbb{R} \times W \to W$ und $\langle \ldots, \ldots \rangle\colon W \times W \to \mathbb{R}$ bilineare Abbildungen sind, folgt der Satz aus der Verallgemeinerten Leibnizschen Produktregel 10.15. □

Korollar 10.17 (Quotientenregel). *Es seien M und N Teilmengen von V und $f\colon M \to \mathbb{R}$ sowie $g\colon N \to \mathbb{R}$ zwei Abbildungen, die in $p \in \overset{\circ}{\widehat{M \cap N}}$ differenzierbar sind. Ferner gelte $g(p) \neq 0$.*

Dann ist $\frac{f}{g}$: $M \cap \left(N \setminus \overset{-1}{g}(\{0\})\right) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in p, und es gilt für jedes $v \in V$

$$\mathrm{d}_p\left(\frac{f}{g}\right)(v) = \frac{\mathrm{d}_p f(v) g(p) - f(p) \mathrm{d}_p g(v)}{g(p)^2}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist g stetig in p, also ist p innerer Punkt von $N \setminus \overset{-1}{g}(\{0\})$. Dann folgt aus der Kettenregel – angewandt auf $\frac{1}{x} \circ g$ an der Stelle p – die Differenzierbarkeit von $\frac{1}{g}$ in p mit $\mathrm{d}_p(\frac{1}{g}) = -\frac{\mathrm{d}_p g}{g(p)^2}$. Die Behauptung ergibt sich nun aus der Leibnizschen Produktregel 10.16 (i) – angewandt auf f und $\frac{1}{g}$ an der Stelle p. □

10.18. Seien V_1, V_2 endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume, $M, N \subset V$ und Φ: $M \to \mathcal{L}(V_2, W)$ sowie Ψ: $N \to \mathcal{L}(V_1, V_2)$ zwei Abbildungen.

(i) **Definition.** Wir definieren $\Phi \circ \Psi$: $M \cap N \to \mathcal{L}(V_1, W)$ durch

$$\forall_{p \in M \cap N}\ (\Phi \circ \Psi)(p) := \Phi(p) \circ \Psi(p).$$

(ii) **Satz.** Ist $p \in \overset{\circ}{\widehat{M \cap N}}$ derart, daß sowohl Φ als auch Ψ in p differenzierbar sind, so ist auch $\Phi \circ \Psi$ in p differenzierbar, und es gilt

$$\forall_{v \in V}\ \mathrm{d}_p (\Phi \circ \Psi)(v) = \Phi(p) \circ \mathrm{d}_p \Psi(v) + \mathrm{d}_p \Phi(v) \circ \Psi(p) \in \mathcal{L}(V_1, W).$$

Beweis. Die Abbildung $\mathcal{L}(V_1, V_2) \times \mathcal{L}(V_2, W) \to (V_1, W)$, $(\psi, \varphi) \mapsto \varphi \circ \psi$, ist offenbar bilinear, also folgt die Behauptung aus der Verallgemeinerten Leibnizschen Produktregel 10.15. □

Satz 10.19.
Vor.: *Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$, $M \subset \mathbb{R}^m$ und f: $M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Ferner sei f in $p \in \overset{\circ}{M}$ differenzierbar.*
Beh.: *Die Matrix von $\mathrm{d}_p f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ bzgl. der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ ist gleich*

$$\mathcal{J}_p f = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}\right|_p .$$

$\mathcal{J}_p f$ heißt Funktionalmatrix *oder* Jacobi[75]-Matrix von f in p.
Für $v \in \mathbb{R}^m$ gilt also

$$\mathcal{J}_p f \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_p f(v)_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}_p f(v)_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $v = \sum_{j=1}^m v_j e_j \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\mathrm{d}_p f(v)_i \overset{10.8}{=} \mathrm{d}_p f_i\left(\sum_{j=1}^m v_j e_j\right) = \sum_{j=1}^m v_j\, \mathrm{d}_p f_i(e_j) \overset{10.13(i)}{=} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\, v_j$$

□

[75] nach Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)

Satz 10.20 (Kettenregel in Matrizenschreibweise).
Vor.: *Seien $m_1, m_2, n \in \mathbb{N}_+$, M_1 eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{m_1}$ und M_2 eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{m_2}$. Ferner seien $g\colon M_1 \to \mathbb{R}^{m_2}$ sowie $f\colon M_2 \to \mathbb{R}^n$ Abbildungen und $p \in \mathring{M}_1$ derart, daß gilt $g(p) \in \mathring{M}_2$.*
Beh.: *Ist g in p und f in $g(p)$ differenzierbar, so ist $f \circ g\colon \overline{g}^1(M_2) \to \mathbb{R}^n$ in p differenzierbar, und es gilt*

$$\mathcal{J}_p(f \circ g) = \mathcal{J}_{g(p)} f \cdot \mathcal{J}_p g.$$

Bemerkung. Bezeichnet man mit $y_1, \ldots, y_{m_2}$ die Komponentenfunktionen auf $\mathbb{R}^{m_2}$ (anstelle von $x_1, \ldots, x_{m_2}$) und die auf $\mathbb{R}^{m_1}$ weiterhin mit $x_1, \ldots, x_{m_1}$, so besagt die letzte Gleichung für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, m_1\}$

$$\frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_j}(p) = \sum_{k=1}^{m_2} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(g(p)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(p).$$

In der Literatur findet sich hierfür gelegentlich die abkürzende, nach Meinung des Autors unglückliche, Schreibweise

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}.$$

Beweis. Klar nach der Kettenregel 10.5 und der linearen Algebra. □

Wir erinnern daran, daß wir in Satz 9.39 den Vektorraum $\mathcal{L}_c(V, W)$ der beschränkten Operatoren zwischen den normierten Vektorräumen V und W mit einer Norm versehen haben. Da V endlich-dimensional ist, stimmt der Raum der linearen Abbildungen $\mathcal{L}(V, W)$ mit dem der beschränkten Operatoren überein. Daher macht es z.B. Sinn, von einer differenzierbaren Abbildung $V \to \mathcal{L}(V, W)$ zu sprechen, also auch von einer zwei-mal differenzierbaren Funktion $V \to W$.

Definition 10.21 (k-malige (stetige) Differenzierbarkeit, k-tes Differential).
Seien M eine Teilmenge von V und $f\colon M \to W$ eine Abbildung.

(i) (a) Wir definieren rekursiv für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $M_{(k)}$ von M, einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\widetilde{\mathcal{L}}^k(V, W)$ und eine Abbildung

$$\boxed{\mathrm{d}^k f\colon M_{(k)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}^k(V, W)}$$

– das sog. *k-te Differential von f* – wie folgt:

$k = 0$: $M_{(0)} := M$, $\mathrm{d}^0 f := f\colon M_{(0)} \to W =: \widetilde{\mathcal{L}}^0(V, W)$.

$k = 1$: $M_{(1)} := \{p \in \mathring{M} \mid f \text{ differenzierbar in } p\}$,
$\mathrm{d}^1 f := \mathrm{d} f\colon M_{(1)} \to \mathcal{L}(V, W) =: \widetilde{\mathcal{L}}^1(V, W)$.

$k = 2$: $M_{(2)} := \{p \in \mathring{\widehat{M_{(1)}}} \mid \mathrm{d} f \text{ differenzierbar in } p\}$,
$\mathrm{d}^2 f := \mathrm{d}(\mathrm{d}^1 f)\colon M_{(2)} \to \mathcal{L}(V, \widetilde{\mathcal{L}}^1(V, W)) =: \widetilde{\mathcal{L}}^2(V, W)$,
$p \mapsto \mathrm{d}_p(\mathrm{d}^1 f) =: \mathrm{d}_p^2 f$.

$k \geq 3$: $M_{(k)} := \{p \in \overset{\circ}{\widehat{M_{(k-1)}}} \,|\, \mathrm{d}^{(k-1)} f$ differenzierbar in $p\}$,
$\mathrm{d}^k f := \mathrm{d}(\mathrm{d}^{k-1} f)\colon M_{(k)} \to \mathcal{L}(V, \widetilde{\mathcal{L}}^{k-1}(V,W)) =: \widetilde{\mathcal{L}}^k(V,W)$,
$p \mapsto \mathrm{d}_p(\mathrm{d}^{k-1} f) =: \mathrm{d}_p^k f$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}_+$. Wir setzen

$$\boxed{\mathcal{L}^k(V,W)} := \{\varphi \in W^{(V^k)} \,|\, \varphi \ k\text{-fach } \mathbb{R}\text{-multilinear}\}.$$

Nach Korollar B.6 gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^k(V,W) = (\dim_{\mathbb{R}} V)^k \cdot (\dim_{\mathbb{R}} W)$. Dann hat man einen kanonischen $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus

$$\widetilde{\mathcal{L}}^k(V,W) = \mathcal{L}\big(V, \widetilde{\mathcal{L}}^{k-1}(V,W)\big) \longrightarrow \mathcal{L}^k(V,W),$$

welcher durch die Zuordnung

$$\psi \longmapsto [(v_1,\ldots,v_k) \mapsto \big(\ldots\big(\psi(v_1)(v_2)\big)\ldots\big)(v_k)]$$

gegeben ist. Die inverse Zuordnung lautet

$$\varphi \longmapsto \Big(v_1 \mapsto \big(v_2 \mapsto \ldots \big(v_k \mapsto \varphi(v_1,\ldots,v_k)\big)\ldots\big)\Big).$$

Wir werden in Zukunft $\widetilde{\mathcal{L}}^k(V,W)$ und $\mathcal{L}^k(V,W)$ miteinander identifizieren, d.h. wir fassen obigen Isomorphismus als Identität auf.

(c) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $p_0 \in M$.
f heißt *k-mal differenzierbar in p_0* $:\Longleftrightarrow p_0 \in M_{(k)}$.
Ist f in p_0 k-mal differenzierbar, so heißt das Element $\boxed{\mathrm{d}_{p_0}^k f}$ von $\mathcal{L}^k(V,W)$ das *k-te Differential von f in p_0*.
Sei $k \in \mathbb{N}_+$. f heißt *k-mal stetig differenzierbar in p_0* genau dann, wenn sogar gilt $p_0 \in \overset{\circ}{\widehat{M_{(k)}}}$ und $\mathrm{d}^k f\colon M_{(k)} \to \mathcal{L}^k(V,W)$ in p_0 stetig ist.

(d) Sei $p_0 \in M$.
f heißt *beliebig oft* oder *∞-mal differenzierbar in p_0* genau dann, wenn f k-mal differenzierbar in p_0 ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$.

f heißt *k-mal differenzierbar* genau dann, wenn f in jedem $p \in M$ k-mal differenzierbar ist.

f heißt *k-mal stetig differenzierbar* (i.Z. $f \in \boxed{\mathcal{C}^k(M,W)}$) genau dann, wenn f in jedem $p \in M$ k-mal stetig differenzierbar ist.

(iii) f heißt *beliebig oft* oder *∞-mal differenzierbar* (i.Z. $f \in \boxed{\mathcal{C}^\infty(M,W)}$) genau dann, wenn f in jedem $p \in M$ beliebig oft differenzierbar ist.

Satz 10.22. *Seien $M \subset V$, $f\colon M \to W$ eine Abbildung, $p \in \mathring{M}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Ist f k-mal differenzierbar in p, so gilt für alle $v_1, \dots, v_k \in V$*

$$\boxed{\frac{\partial^k f}{\partial v_1 \dots \partial v_k}(p)} := \frac{\partial}{\partial v_k}\left(\dots \frac{\partial}{\partial v_2}\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\right)\dots\right)(p) = \mathrm{d}_p^k f(v_1, \dots, v_k),^{76}$$

insbesondere existiert die linke Seite.

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}_+$. Den Fall $k = 1$ haben wir bereits in 10.2 eingesehen.

Seien $k \in \mathbb{N}_+$, f $(k+1)$-mal differenzierbar in p, $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$ und gelte

$$\frac{\partial}{\partial v_k}\left(\dots \frac{\partial}{\partial v_2}\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\right)\dots\right)(p) = \mathrm{d}_p^k f(v_1, \dots, v_k). \tag{296}$$

Die Abbildung $\Phi\colon \mathcal{L}^k(V, W) \to W$, $\psi \mapsto \psi(v_1, \dots, v_k)$ ist linear. Daher ist $\Phi \circ \mathrm{d}^k f$ nach Kettenregel in p differenzierbar mit

$$\mathrm{d}_p(\Phi \circ \mathrm{d}^k f)(v_{k+1}) = \Phi \circ \mathrm{d}_p(\mathrm{d}^k f)(v_{k+1}) = \mathrm{d}_p^{k+1} f(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}). \tag{297}$$

Des weiteren gilt nach (296)

$$\Phi \circ \mathrm{d}_p^k = \mathrm{d}_p^k f(v_1, \dots, v_k) = \frac{\partial}{\partial v_k}\left(\dots \frac{\partial}{\partial v_2}\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\right)\dots\right)(p),$$

also folgt aus dem bereits bewiesenen Fall für $k = 1$

$$\mathrm{d}_p\left(\Phi \circ \mathrm{d}^k f\right)(v_{k+1}) = \frac{\partial}{\partial v_{k+1}}\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\left(\dots \frac{\partial}{\partial v_2}\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\right)\dots\right)\right)(p),$$

d.h. wegen (297) gilt (296) für $k+1$ anstelle von k. □

Bemerkung. Wir haben schon im Falle $k = 1$ gesehen, daß aus der Existenz aller partieller Ableitungen in einem Punkt nicht die dortige Differenzierbarkeit folgt.

Wir halten ein Teilergebnis des letzten Beweises – nämlich (297) – im folgenden Satz fest.

Satz 10.23. *Seien $M \subset V$, $f\colon M \to W$ eine Abbildung, $p_0 \in \mathring{M}$ und $k \in \mathbb{N}$. Ist f $(k+1)$-mal differenzierbar in p_0, so ist für alle $v_1, \dots, v_k \in V$ die Abbildung*

$$\mathrm{d}_\cdot^k f(v_1, \dots, v_k)\colon M_{(k)} \longrightarrow W,\ p \longmapsto \mathrm{d}_p^k f(v_1, \dots, v_k)$$

differenzierbar in p_0, und es gilt für jedes $v_{k+1} \in V$

$$\mathrm{d}_{p_0}\left(\mathrm{d}_\cdot^k f(v_1, \dots, v_k)\right)(v_{k+1}) = \mathrm{d}_{p_0}^{k+1} f(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}).$$

□

[76] Für $v \in V$ heißt $\frac{\partial^k f}{\partial v_1 \dots \partial v_k}(p)$ die *k-te Richtungsableitung von f in p in Richtung* $(v_1, \dots, v_k)$.

Satz 10.24.
Vor.: *Seien* $n \in \mathbb{N}_+$, $V_1, \dots, V_n$ *endlich-dimensionale normierte* $\mathbb{R}$-*Vektorräume,* $M \subset V$, $f = (f_1, \dots, f_n)\colon M \to \times_{i=1}^n V_i$ *eine Abbildung,* $p \in \mathring{M}$ *und* $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$.
Beh.:

(i) *Es folgt*

$$f \text{ } k\text{-mal differenzierbar in } p \iff \forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\, f_i \text{ } k\text{-mal differenzierbar in } p, \tag{298}$$

und gilt eine der Seiten von (298), so folgt außerdem

$$\forall_{i\in\{1,\dots,n\}} \left(\mathrm{d}_p^k f\right)_i = \mathrm{d}_p^k f_i,$$

d.h. $\mathrm{d}_p^k f = \left(\mathrm{d}_p^k f_1, \dots, \mathrm{d}_p^k f_n\right)$.

(ii) f *k-mal stetig differenzierbar in* p
$\iff \forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\, f_i$ *k- mal stetig differenzierbar in* p.

Beweis. Wir können zunächst (nach Basiswahl) ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $n_i \in \mathbb{N}_+$, $i \in \{1, \dots, n\}$, mit $V_i = \mathbb{R}^{n_i}$ existieren und sodann, daß gilt $\forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\, n_i = 1$. (Denn der allgemeine Fall folgt, wenn wir den Satz für $\tilde{n} = \sum_{i=1}^n n_i$ bewiesen haben.)

Zu (i): Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}_+$ – damit ist dann auch der Fall $k = \infty$ gezeigt –, wobei der Fall $k = 1$ bereits in 10.8 bewiesen wurde.

$k \mapsto k+1$: Ist f in p $(k+1)$-mal differenzierbar, so insbesondere k-mal auf einer Umgebung U von p. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann $f_1, \dots, f_n$ auf U k-mal differenzierbar mit $\forall_{q\in U}\, \mathrm{d}_q^k f = \left(\mathrm{d}_q^k f_1, \dots, \mathrm{d}_q^k f_n\right)$, und weiter ist $\mathrm{d}^k f$ in p differenzierbar. Also folgt aus 10.8 die Differenzierbarkeit von $\mathrm{d}^k f_1, \dots, \mathrm{d}^k f_n$ in p – d.h. $f_1, \dots, f_n$ sind $(k+1)$-mal differenzierbar in p – mit

$$\mathrm{d}_p^{k+1} f = \mathrm{d}_p\left(\mathrm{d}_p^k f\right) = \left(\mathrm{d}_p\left(\mathrm{d}^k f_1\right), \dots, \mathrm{d}_p\left(\mathrm{d}^k f_n\right)\right) = \left(\mathrm{d}_p^{k+1} f_1, \dots, \mathrm{d}_p^{k+1} f_n\right).$$

Sind $f_1, \dots, f_n$ in p $(k+1)$-mal differenzierbar, so k-mal auf einer Umgebung U von p. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann f auf U k-mal differenzierbar mit $\forall_{q\in U}\, \mathrm{d}_q^k f = \left(\mathrm{d}_q^k f_1, \dots, \mathrm{d}_q^k f_n\right)$, und $\mathrm{d}^k f_1, \dots, \mathrm{d}^k f_n$ sind in p differenzierbar. Wiederum nach 10.8 ist dann $\mathrm{d}^k f$ in p differenzierbar, also f $(k+1)$-mal differenzierbar in p, und es gilt $\mathrm{d}_p^{k+1} f = \left(\mathrm{d}_p^{k+1} f_1, \dots, \mathrm{d}_p^{k+1} f_n\right)$.

Zu (ii): Nach 9.27 ist $\mathrm{d}^k f = \left(\mathrm{d}^k f_1, \dots, \mathrm{d}^k f_n\right)$ genau dann auf einer Umgebung von p stetig, wenn die einzelnen Komponenten dort stetig sind. Daher gilt (ii). □

Satz 10.25.

(i) *Ist* $\varphi\colon V \to W$ *linear, so ist* φ *unendlich oft differenzierbar,* $\mathrm{d}\varphi$ *ist konstant vom Wert* φ *und für* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k \geq 2$ *gilt* $\mathrm{d}^k\varphi = 0$.

(ii) *Sind* V_1, V_2 *endlich-dimensionale normierte* $\mathbb{R}$-*Vektorräume und außerdem* $\varphi\colon V_1 \times V_2 \to W$ *eine bilineare Abbildung, so ist* φ *unendlich oft differenzierbar,* $\mathrm{d}\varphi$ *ist linear,* $\mathrm{d}^2\varphi$ *konstant und für alle* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k \geq 3$ *gilt* $\mathrm{d}^k\varphi = 0$.

Beweis. Der Satz folgt sofort aus Satz 10.14. □

Hauptsatz 10.26 (Kettenregel für k-malige (stetige) Differenzierbarkeit).
Vor.: *Seien V_1 und V_2 endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume, M_i Teilmengen von V_i für $i \in \{1,2\}$ sowie $g\colon M_1 \to V_2$, $f\colon M_2 \to W$ Abbildungen mit $g(M_1) \subset M_2$. Ferner sei $p \in \mathring{M}_1$ derart, daß gilt $g(p) \in \mathring{M}_2$.*
Beh.: *Ist $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$, g k-mal (stetig) differenzierbar in p und f k-mal (stetig) differenzierbar in $g(p)$, so gilt $p \in \mathring{\overline{\overline{g}^{1}(M_2)}}$ und $f \circ g\colon \overline{g}^{1}(M_2) \to W$ ist k-mal (stetig) differenzierbar in p.*

Beweis. Wir beweisen beide Aussagen durch vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}_+$. Damit haben wir dann auch den Fall $k = \infty$ bewiesen.

1.) In der differenzierbaren Kategorie ist der Fall $k = 1$ klar nach 10.5.

$k \mapsto k+1$: Seien g in p und f in $g(p)$ $(k+1)$-mal differenzierbar, also auch $\mathrm{d}\,f$ k-mal differenzierbar in $g(p)$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß $(\mathrm{d}\,f) \circ g$ k-mal differenzierbar in p ist, und weiter nach 10.24 (i), daß $(\mathrm{d}\,g, (\mathrm{d}\,f) \circ g)$ k-mal in p differenzierbar ist.

Die Abbildung

$$\Phi\colon \mathcal{L}(V_1, V_2) \times \mathcal{L}(V_2, W) \longrightarrow \mathcal{L}(V_1, W),\ (\psi, \varphi) \longmapsto \varphi \circ \psi \tag{299}$$

ist bilinear, also nach 10.25 unendlich oft differenzierbar, also folgt aus der Induktionsvoraussetzung die k-malige Differenzierbarkeit der rechten Seite von

$$\mathrm{d}\,(f \circ g) = ((\mathrm{d}\,f) \circ g) \circ \mathrm{d}\,g = \Phi \circ (\mathrm{d}\,g, (\mathrm{d}\,f) \circ g)$$

in p, d.h. $f \circ g$ ist $(k+1)$-mal differenzierbar in p.

2.) Zur stetig differenzierbaren Kategorie: Im Falle $k = 1$ seien f auf einer Umgebung $V \in \mathcal{U}^\circ(g(p), M_2)$ und g auf eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M_1)$ differenzierbar und $d\,f|_V$ in $g(p)$ sowie $\mathrm{d}\,g|_U$ in p stetig. Da g stetig in p ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $g(U) \subset V$ gilt. Dann ist $f \circ g$ auf U differenzierbar und

$$\mathrm{d}\,(f \circ g) = \underbrace{((\mathrm{d}\,f) \circ g)\,|_U}_{U \longrightarrow \mathcal{L}(V_2, V_3)} \circ \underbrace{\mathrm{d}\,g|_U}_{U \longrightarrow \mathcal{L}(V_1, V_2)}\,. \tag{300}$$

Da $\mathrm{d}\,f$ stetig in $g(p)$, g stetig in p, $\mathrm{d}\,f$ stetig in p, und weil (299) unendlich oft differenzierbar ist, folgt, daß $((\mathrm{d}\,f) \circ g|_U) \circ \mathrm{d}\,g|_U = \Phi \circ (\mathrm{d}\,g, (\mathrm{d}\,f) \circ g)\,|_U$ stetig ist. Daher ist $f \circ g$ stetig differenzierbar in p.

$k \mapsto k+1$: Seien nun f auf einer Umgebung $V \in \mathcal{U}^\circ(g(p), M_2)$ und g auf eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M_1)$ $(k+1)$-mal differenzierbar und $d^{k+1}f|_V$ in $g(p)$ sowie $\mathrm{d}^{k+1}g|_U$ in p stetig. Wir können wieder annehmen, daß $g(U) \subset V$ gilt, also ist nach 1.) $f \circ g$ auf U $(k+1)$-mal differenzierbar, und es gilt erneut (300).

Nun sind $\mathrm{d}\,f$ k-mal stetig differenzierbar in $g(p)$, g sogar $(k+1)$-mal stetig differenzierbar in p und $\mathrm{d}\,f$ k-mal stetig differenzierbar in p. Weil (299) unendlich oft differenzierbar ist, folgt aus 10.24 (ii) und der Induktionsvoraussetzung, daß $((\mathrm{d}\,f) \circ g|_U) \circ \mathrm{d}\,g|_U = \Phi \circ (\mathrm{d}\,g, (\mathrm{d}\,f) \circ g)\,|_U$ k-mal stetig differenzierbar ist, d.h. $(f \circ g)$ ist $(k+1)$-mal stetig differenzierbar in p. □

10.27. Ist $k \in \mathbb{N}_+$, so gelten Satz 10.16 (d.i. u.a. die Leibnizsche Produktregel), Korollar 10.17 (Quotientenregel) und Satz 10.18 (ii) entsprechend, wenn man „differenzierbar" durch „k-mal (stetig) differenzierbar" ersetzt.

[Die Beweise führt man unter Verwendung von 10.25 und 10.26 völlig analog zu oben.]

Beispiel. Es seien V_1, V_2 endlich-dimensionale normierte Vektorräume sowie $g: V_1 \to V_2$ und $f: V_2 \to W$ zwei zweimal differenzierbare Abbildungen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
d^2(f \circ g) &= \mathrm{d}\Big(\big(\underbrace{(\mathrm{d}f) \circ g}_{V_1 \longrightarrow \mathcal{L}(V_2,W)}\big) \circ \underbrace{\mathrm{d}g}_{V_1 \longrightarrow \mathcal{L}(V_1,V_2)}\Big) \\
&= \underbrace{\mathrm{d}\big((\mathrm{d}f) \circ g\big)}_{V_1 \longrightarrow \mathcal{L}(V_1,\mathcal{L}(V_2,W))} \circ \underbrace{\mathrm{d}g}_{V_1 \longrightarrow \mathcal{L}(V_1,V_2)} \\
&\quad + \big(\underbrace{(\mathrm{d}f) \circ g}_{V_1 \longrightarrow \mathcal{L}(V_2,W)}\big) \circ \underbrace{\mathrm{d}^2 g}_{V_1 \longrightarrow \mathcal{L}(V_1,\mathcal{L}(V_1,V_2))} \\
&= \Big(\big((\mathrm{d}^2 f) \circ g\big) \circ \mathrm{d}g\Big) \circ \mathrm{d}g + \big((\mathrm{d}f) \circ g\big) \circ \mathrm{d}^2 g,
\end{aligned}$$

d.h. es gilt für alle $p, v, \tilde{v} \in V_1$

$$\mathrm{d}_p^2(f \circ g) = (\mathrm{d}_{g(p)}^2 f \circ \mathrm{d}_p g) \circ \mathrm{d}_p g + \mathrm{d}_{g(p)} f \circ \mathrm{d}_p^2 g,$$
$$\mathrm{d}_p^2(f \circ g)(v, \tilde{v}) = \mathrm{d}_{g(p)}^2 f\big(\mathrm{d}_p g(v), \mathrm{d}_p g(\tilde{v})\big) + \mathrm{d}_{g(p)} f\big(\mathrm{d}_p^2 g(v, \tilde{v})\big).$$

Ist $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $k \in \mathbb{N}_+$, so zeigt Satz 10.22, daß aus der k-maligen Differenzierbarkeit von f in $t \in \mathring{M}$ im Sinne von 10.21 die k-malige Differenzierbarkeit von f in t im Sinne von 6.14 folgt. Wir werden zeigen, daß auch die Umkehrung gilt und den Zusammenhang zwischen der k-ten Ableitung $f^{(k)}(t)$ und dem k-ten Differential $\mathrm{d}_t^k f$ herausarbeiten. Für den Fall $k = 1$ haben wir in 10.6 bereits gesehen, daß gilt $f'(t) = \mathrm{d}_t f(1)$, also $\mathrm{d}_t f(s) = f'(t)s$ für $s \in \mathbb{R}$. Ein ähnlicher Zusammenhang besteht auch für die höheren Ableitungen, die wir auch allgemeiner für Abbildungen $M \to W$ einführen können.

Definition 10.28 (k-te Ableitung)**.** Seien $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to W$ eine Abbildung und $t_0 \in \mathring{M}$. In 10.5 (ii) haben wir gesehen

$$f \text{ differenzierbar in } t_0 \iff f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \text{ existiert in } W \tag{301}$$

und, daß im Falle der Gültigkeit einer der beiden Seiten von (301) gilt $f'(t_0) = \mathrm{d}_{t_0} f(1)$. Dieses Element von W nennen wir den *Wert der (ersten) Ableitung von f in t_0.*

Setzen wir $M'_{(1)} := M_{(1)} = \{t \in \mathring{M} \,|\, f \text{ differenzierbar in } t\}$, so erhalten wir eine Abbildung $f^{(1)} := f': M'_{(1)} \to W$, $t \mapsto f'(t)$, aus $\mathbb{R}$ nach W, die sog. *(erste) Ableitung von f.*

Da die Ableitung einer Funktion selbst auch wieder eine Abbildung aus $\mathbb{R}$ nach V ist, können wir für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ rekursiv definieren

$$M'_{(k+1)} := \{t \in \overset{\circ}{\widehat{M'_{(k)}}} \mid f^{(k)}(t) \text{ ist definiert}\} \overset{\text{s.u. } 10.29}{=} M_{(k+1)},$$
$$f^{(k+1)} := \left(f^{(k)}\right)' : M'_{(k+1)} \longrightarrow W.$$

$f^{(k+1)}$ heißt die $(k+1)$*-te Ableitung von* f.

Satz 10.29. *Seien $M \subset \mathbb{R}$ und $f\colon M \to W$ eine Abbildung. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_+$ und alle $t_0 \in M$*

$$\underbrace{f \textit{ k-mal differenzierbar in } t_0}_{\textit{d.h. } \mathrm{d}^k_{t_0} f \textit{ ist definiert}} \Longleftrightarrow f^{(k)}(t_0) \textit{ ist definiert.} \tag{302}$$

Gilt eine der beiden Seiten von (302), so folgt außerdem

$$f^{(k)}(t_0) = \mathrm{d}^k_{t_0} f(\underbrace{1,\ldots,1}_{k \textit{ Stück}}), \tag{303}$$

d.h. $\forall_{s_1,\ldots,s_k \in \mathbb{R}}\, \mathrm{d}^k_{t_0} f(s_1,\ldots,s_k) = s_1 \cdots s_k f^{(k)}(t)$.

Beweis. Ist f k-mal differenzierbar in $t_0 \in M$, so folgt die rechte Seite von (302) sowie (303) aus 10.22.

Zu (302) „$\Leftarrow$“: Den Fall $k = 1$ haben wir bereits in 10.6 (ii) bewiesen. Wir nehmen daher induktiv an, daß die Behauptung bereits für $k \in \mathbb{N}_+$ gezeigt ist.

Sei $t_0 \in M$ und existiere $f^{(k+1)}(t_0)$. Dann gibt es $U \in \mathcal{U}^\circ(p, M)$ derart, daß f auf U k-mal differenzierbar ist, und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\forall_{t \in U}\, f^{(k)}(t) = \mathrm{d}^k_t f(1,\ldots,1). \tag{304}$$

Wir definieren $A \in \mathcal{L}^{k+1}(\mathbb{R}, W)$ durch

$$\forall_{s_1,\ldots,s_{k+1} \in \mathbb{R}}\, A(s_1,\ldots,s_{k+1}) := s_1 \cdots s_{k+1} f^{(k)}(t_0) \tag{305}$$

und werden zeigen, daß die Behauptung mit $d^{k+1}_{t_0} f = A$ erfüllt ist. Hierzu bemerken wir zunächst, daß für $B \in \mathcal{L}^i(\mathbb{R}, W) = \widetilde{\mathcal{L}}^i(\mathbb{R}, W) = \mathcal{L}(\mathbb{R}, \widetilde{\mathcal{L}}^{i-1}(\mathbb{R}, W))$, $i \in \mathbb{N}_+$, gilt

$$\|B\|_{\widetilde{\mathcal{L}}^i} = \sup\{\|B(t)\|_{\widetilde{\mathcal{L}}^{i-1}} \mid t \in \mathbb{R} \wedge |t| = 1\} = \|B(1)\|_{\widetilde{\mathcal{L}}^{i-1}}, \tag{306}$$

wobei die Normen jeweils die Operatornormen seien. Nun folgt für jedes $h \in \mathbb{R}^*$ mit $t_0 + h \in U$, daß gilt

$$\left\| \frac{\mathrm{d}^k_{t_0+h} f - \mathrm{d}^k_{t_0} f - A(h, \overbrace{.,\ldots,.}^{k \text{ Leerstellen}})}{|h|} \right\|_{\widetilde{\mathcal{L}}^k} = \left\| \frac{\mathrm{d}^k_{t_0+h} f - \mathrm{d}^k_{t_0} f - A(h,.,\ldots,.)}{h} \right\|_{\widetilde{\mathcal{L}}^k}$$
$$= \Bigg\| \underbrace{\frac{\mathrm{d}^k_{t_0+h} f - \mathrm{d}^k_{t_0} f}{h} - A(1,.,\ldots,.)}_{=:\, B_h} \Bigg\|_{\widetilde{\mathcal{L}}^k} \overset{(306)}{=} \|B_h(1)\|_{\widetilde{\mathcal{L}}^{k-1}} = \ldots$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(306)}{=} \quad \|(\ldots((B_h(1))(1))\ldots(1))(1)\|_{\widetilde{\mathcal{L}}^0=W}\\
&= \quad \left\|\frac{\mathrm{d}^k_{t_0+h}f(\overbrace{1,\ldots,1}^{k\text{ Stück}})-\mathrm{d}^k_{t_0}f(\overbrace{1,\ldots,1}^{k\text{ Stück}})}{h}-A(\overbrace{1,\ldots,1}^{k+1\text{ Stück}})\right\|_W\\
&\overset{(304),(305)}{=} \quad \left\|\frac{f^{(k)}(t_0+h)-f^{(k)}(t_0)}{h}-f^{(k+1)}(t_0)\right\|_W \xrightarrow{h\to 0} 0 \text{ nach Vor.}
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Korollar 10.30. *Seien $M \subset V$, $k \in \mathbb{N}_+$, $f\colon M \to W$ eine Abbildung, die in $p \in \overset{\circ}{M}$ k-mal differenzierbar ist, und sei $v \in V$. Für hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ bildet dann der unendlich oft differenzierbare Weg $c\colon]-\varepsilon,\varepsilon[\to V$, $t \mapsto p + tv$, das Intervall $]-\varepsilon,\varepsilon[$ in M ab, und $f \circ c$ ist k-mal differenzierbar in 0 mit*

$$\forall_{i\in\{1,\ldots,k\}}\,(f\circ c)^{(i)}(0) = \mathrm{d}^i_{c(0)}f(c'(0),\ldots,c'(0)) = \mathrm{d}^i_p f(v,\ldots,v).$$

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt

$$\forall_{t\in]-\varepsilon,\varepsilon[}\ f \text{ ist in } c(t)\ (k-1)\text{-mal differenzierbar} \tag{307}$$

und zeigen zunächst durch Induktion nach $i \in \{1,\ldots,k-1\}$, daß $f \circ c$ i-mal differenzierbar ist mit

$$\forall_{t\in]-\varepsilon,\varepsilon[}\,(f\circ c)^{(i)}(t) = \mathrm{d}^i_{c(t)}(v,\ldots,v). \tag{308}$$

[Zu (308): Der Fall $i = 1$ ist klar nach 10.7.

Sei nun $i \in \mathbb{N}_+$ mit $i < k-1$ und $f \circ c\colon]-\varepsilon,\varepsilon[\to W$ i-mal differenzierbar und gelte (308) für dieses i.

Wegen $\mathrm{d}^i_{c(t)}f(v,\ldots,v) = \mathrm{d}^i_{\cdot}f(v,\ldots,v)\circ c(t)$, $i+1 \le k-1$, (307) und der Differenzierbarkeit von c folgt aus Satz 10.23 und der Kettenregel 10.5 die Differenzierbarkeit der rechten Seite von (308) und für alle $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$

$$\begin{aligned}
(f\circ c)^{(i+1)}(t) &= \mathrm{d}_t\left(\mathrm{d}^i_{\cdot}f(v,\ldots,v)\circ c\right)(1)\\
&\overset{10.5}{=} \mathrm{d}_{c(t)}\left(\mathrm{d}^i_{\cdot}f(v,\ldots,v)\right)\circ \mathrm{d}_t c(1)\\
&\overset{10.23}{=} \mathrm{d}^{i+1}_{c(t)}f(v,\ldots,v,c'(t)) = \mathrm{d}^{i+1}_{c(t)}f(v,\ldots,v,v),
\end{aligned}$$

d.h. (308) gilt auch für $i+1$ anstelle von i.]

Nun folgt aus (308) für $i = k-1$, der k-maligen Differenzierbarkeit von f in $p = c(0)$, Satz 10.23 und der Kettenregel 10.5 analog zur Argumentation im vorangegangenen Induktionsschritt $(f\circ c)^{(k)}(0) = \mathrm{d}^k_{c(0)}f(v,\ldots,v)$. □

Als nächstes widmen wir uns den höheren Differentialen und zeigen, daß diese symmetrisch sind. Dies hat zur Folge, daß die Reihenfolge der einzelnen Richtungsableitungen bei der Bildung der k-ten Richtungsableitung keine Rolle spielt.

Satz 10.31 (von Schwarz[77]: Die Symmetrie des zweiten Differentiales)**.** *Seien $M \subset V$ und $f\colon M \to W$ eine Abbildung, die in $p \in \mathring{M}$ zweimal differenzierbar ist. Sind dann $v_1, v_2 \in V$, so gilt*

$$\mathrm{d}_p^2 f(v_1, v_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv_1+tv_2) - f(p+tv_1) - f(p+tv_2) + f(p)}{t^2}.$$

Insbesondere ist $d_p^2 f$ symmetrisch.

Beweis. Nach Basiswahl in W können wir $W = \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}_+$ annehmen. Da Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ gleichbedeutend ist mit der Konvergenz einer jeden Komponente, können wir weiter annehmen $n = 1$, d.h. $W = \mathbb{R}$.

Seien $v_1, v_2 \in V$ beliebig und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da f in p zweimal differenzierbar ist, existiert eine Zahl $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{h \in U_\delta(p)} \left\| \mathrm{d}_{p+h} f - \mathrm{d}_p f - \mathrm{d}_p^2 f(h, \ldots) \right\| < \frac{\varepsilon}{2\left(\|v_1\| + \|v_2\|\right)\|v_2\|}\|h\|. \tag{309}$$

.

Wir folgern hieraus

$$\forall_{u_1,u_2 \in V} \left(\|u_1\| + \|u_2\| < \delta \right.$$
$$\Longrightarrow \left\| f(p+u_1+u_2) - f(p+u_1) - f(p+u_2) + f(p) - \mathrm{d}_p^2(u_1,u_2) \right\| \tag{310}$$
$$\left. < \varepsilon \frac{\left(\|u_1\| + \|u_2\|\right)\|u_2\|}{\left(\|v_1\| + \|v_2\|\right)\|v_2\|} \right).$$

Ist dann $t \in \mathbb{R}^*$ mit $\|t\,v_1\| + \|t\,v_2\| < \delta$, so folgt

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{f(p+t\,v_1+t\,v_2) - f(p+t\,v_1) - f(p+t\,v_2) + f(p)}{t^2} - \mathrm{d}_p^2(v_1,v_2) \right\| \\
&\quad = \frac{\left\| f(p+t\,v_1+t\,v_2) - f(p+t\,v_1) - f(p+t\,v_2) + f(p) - \mathrm{d}_p^2(t\,v_1, t\,v_2) \right\|}{t^2} \\
&\quad \overset{(310)}{<} \frac{\varepsilon}{t^2} \frac{\left(\|t\,v_1\| + \|t\,v_2\|\right)\|t\,v_2\|}{\left(\|v_1\| + \|v_2\|\right)\|v_2\|} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

d.h. es gilt die Behauptung.

Zu zeigen bleibt (310). Beweis hiervon:

Seien also $u_1, u_2 \in V$ mit $\|u_1\| + \|u_2\| < \delta$. Wir definieren dann eine differenzierbare Funktion

$$g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(p+u_1+t\,u_2) - f(p+t\,u_2).$$

Es gilt $f(p+u_1+u_2) - f(p+u_1) - f(p+u_2) + f(p) = g(1) - g(0)$, also folgt aus dem Mittelwertsatz 6.10 die Existenz einer Zahl $\xi \in \left]0,1\right[$ mit

[77] Hermann Amandus Schwarz (1843–1921)

$$\begin{aligned}
&f(p+u_1+u_2) - f(p+u_1) - f(p+u_2) + f(p)\\
&\quad = g'(\xi)\\
&\quad = \mathrm{d}_{p+u_1+\xi u_2} f(u_2) - d_{p+\xi u_2} f(u_2)\\
&\quad = \left(\mathrm{d}_{p+u_1+\xi u_2} f - \mathrm{d}_p f\right)(u_2) - \left(d_{p+\xi u_2} f - \mathrm{d}_p f\right)(u_2).
\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{d}_p^2 f(u_1,u_2) = \mathrm{d}_p^2 f(u_1+\xi u_2, u_2) - \mathrm{d}_p^2 f(\xi u_2, u_2)$ folgt hieraus weiter

$$\begin{aligned}
&\|f(p+u_1+u_2) - f(p+u_1) - f(p+u_2) + f(p) - \mathrm{d}_p f(u_1,u_2)\|\\
&\quad \le \|\mathrm{d}_{p+u_1+\xi u_2} f - \mathrm{d}_p f - \mathrm{d}_p^2 f(u_1+\xi u_2, \ldots)\| \|u_2\|\\
&\qquad + \|\mathrm{d}_{p+\xi u_2} f - \mathrm{d}_p f - \mathrm{d}_p^2 f(\xi u_2, \ldots)\| \|u_2\|\\
&\quad \overset{(309)}{<} \frac{\varepsilon}{2\left(\|v_1\|+\|v_2\|\right)\|v_2\|} \|u_1+\xi u_2\| \|u_2\| + \frac{\varepsilon}{2\left(\|v_1\|+\|v_2\|\right)\|v_2\|} \|\xi u_2\| \|u_2\|\\
&\quad < \frac{\varepsilon}{\left(\|v_1\|+\|v_2\|\right)\|v_2\|} \left(\|u_1\|+\|u_2\|\right)\|u_2\|,
\end{aligned}$$

d.h. es gilt (310), und der Satz ist vollständig bewiesen. □

Satz 10.32 (Die Symmetrie des k-ten Differentiales)**.** *Seien $M \subset V$, $k \in \mathbb{N}_+$ und $f\colon M \to W$ eine Abbildung, die in $p \in \mathring{M}$ k-mal differenzierbar ist. Sind dann $v_1, \ldots, v_k \in V$, so gilt für jedes $\sigma \in S_k$, wobei S_k die Gruppe aller Permutationen von $\{1, \ldots, k\}$ bezeichne,*

$$\mathrm{d}_p^k f(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{d}_p^k f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

Beweisskizze. Nach Satz 10.31 und Satz 10.22 kommutieren je zwei benachbarte Richtungsableitungen $\dfrac{\partial}{\partial v_{i+1}}$ und $\dfrac{\partial}{\partial v_i}$, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, in

$$\frac{\partial}{\partial v_k}\left(\ldots \frac{\partial}{\partial v_2}\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\right)\ldots\right)(p) = \mathrm{d}_p^k f(v_1, \ldots, v_k).$$

In der linearen Algebra zeigt man, daß jedes $\sigma \in S_k$ in der Form

$$\sigma = \tau_{i_1} \circ \ldots \circ \tau_{i_l}, \quad l \in \mathbb{N}_+,$$

geschrieben werden kann, wobei $i_j \in \{1, \ldots, k-1\}$ für $j \in \{1, \ldots, l\}$, und τ_{i_j} ist die Transposition, die die Elemente i_j und $i_j + 1$ vertauscht.

Hieraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Es läßt sich zeigen [10, Hauptsatz 8.22], daß unter den Voraussetzungen des letzten Satzes gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}_p^k f(v_1, \ldots, v_k)\\
&\quad = \lim_{t \to 0} \frac{(-1)^k f(p) + \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_i \le k} f(p + t(v_{j_1} + \ldots + v_{j_i}))}{t^k}.
\end{aligned}$$

Korollar 10.33. *Seien $M \subset V$, $f\colon M \to W$ eine Abbildung, $p \in \mathring{M}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Ist f k-mal differenzierbar in p, so gilt für alle $v_1, \dots, v_k \in V$ und $\sigma \in S_k$*

$$\frac{\partial^k f}{\partial v_1 \dots \partial v_k}(p) = \frac{\partial^k f}{\partial \sigma(v_1) \dots \partial \sigma(v_k)}(p).$$

□

Definition 10.34 (k-malige (stetige) partielle Differenzierbarkeit, partielle Ableitungen k-ter Ordnung)**.** Seien $m \in \mathbb{N}_+$, $M \subset \mathbb{R}^m$ und $f\colon M \to W$ eine Abbildung. Ferner sei $p_0 = (p_1, \dots, p_m) \in \mathring{M}$.

(i) Sei $i_1 \in \{1, \dots, m\}$.
In 10.12 haben wir bereits die sog. *i_1-te partielle Ableitung erster Ordnung von f in p_0* als

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(f)(p_0) := \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_0 + t\, e_{i_1}) - f(p)}{t}$$

gesetzt, falls der Grenzwert auf der rechten Seite in W existiert. So erhielten wir auf $M_{x_{i_1}} := \{p \in \mathring{M} \mid \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0+t\,e_{i_1})-f(p)}{t}$ existiert in W$\}$ eine Abbildung

$$\frac{\partial^1 f}{\partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\colon M_{x_{i_1}} \longrightarrow W,\ p \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(p).$$

Wir definieren rekursiv für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ und alle $i_1, \dots, i_{k+1} \in \{1, \dots, m\}$ eine Menge

$$M_{x_{i_1},\dots,x_{i_{k+1}}} := \{p \in \widehat{M_{x_{i_1},\dots,x_{i_k}}}^{\circ} \mid \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \quad \text{partiell differenzierbar nach } x_{i_{k+1}} \text{ in } p\}$$

und, falls $p_0 \in M_{x_{i_1},\dots,x_{i_{k+1}}}$, die *$(i_1, \dots, i_{k+1})$-te partielle Ableitung der Ordnung $(k+1)$ von f in p_0* durch

$$\boxed{\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}}(p_0)} := \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}\right)(p_0).$$

f heißt dann *$(k+1)$-mal partiell differenzierbar in p_0 nach $x_{i_1}, \dots, x_{i_{k+1}}$*. Die zugehörige Abbildung (mit offensichtlicher Abbildungsvorschrift)

$$\boxed{\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}}\colon M_{x_{i_1},\dots,x_{i_{k+1}}} \longrightarrow W}$$

heißt *$(i_1, \dots, i_{k+1})$-te partielle Ableitung der Ordnung $(k+1)$ von f.*

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}_+$.
f heißt *k-mal partiell differenzierbar in p_0* genau dann, wenn alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung k in p_0 definiert sind.

f heißt *k-mal stetig partiell differenzierbar in p_0* genau dann, wenn alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung k in einer Umgebung U von p_0 definiert sind, diejenigen bis zur Ordnung $k-1$ sind stetig auf U, und diejenigen der Ordnung k sind stetig in p_0.

(iii) f heißt *unendlich oft (stetig) partiell differenzierbar in p_0* genau dann, wenn f für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ k-mal (stetig) partiell differenzierbar in p_0 ist.

(iv) Sei $k \in \mathbb{N}_+$.

f heißt *k-mal partiell differenzierbar* genau dann, wenn f in jedem Punkt von M k-mal partiell differenzierbar ist.

f heißt *k-mal stetig partiell differenzierbar* genau dann, wenn f in jedem Punkt von M k-mal stetig partiell differenzierbar ist.
Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn alle partiellen Ableitungen von f bis zur Ordnung k auf ganz M definiert und dort stetig sind.

(v) f heißt *unendlich oft partiell differenzierbar* genau dann, wenn f in jedem Punkt von M unendlich oft partiell differenzierbar ist.
Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn alle partiellen Ableitungen von f von beliebig hoher Ordnung auf ganz M definiert und dort stetig sind.

Bemerkung. Seien $m, k \in \mathbb{N}_+$, $M \subset \mathbb{R}^m$ und $f\colon M \to W$ eine Abbildung. Dann gilt, vgl. Satz B.12,

$$d^k f = \sum_{i_1=1}^{m} \dots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \, \mathrm{d}x_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{d}x_{i_k}.$$

(Beachte, daß gilt $\forall_{i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,m\}} \, \mathrm{d}^k f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$.)

Satz 10.35. *Seien $m \in \mathbb{N}_+$, $M \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon M \to W$ eine Abbildung, $p \in \mathring{M}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Ist f k-mal differenzierbar in p, so gilt für alle $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ und $\sigma \in S_k$*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(p) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(i_1)} \dots \partial x_{\sigma(i_k)}}(p).$$

Beweis. Klar nach Korollar 10.33. □

Beispiel. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y = 0, \\ xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige als Übung, daß f zweimal partiell differenzierbar – also insbesondere stetig partiell differenzierbar und somit differenzierbar – ist. Zeige weiterhin, daß $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ gilt. Nach dem letzten Satz kann f daher nicht zweimal in $(0,0)$ differenzierbar sein.

Hauptsatz 10.36.
Vor.: *Es seien $m \in \mathbb{N}_+$, $M \subset \mathbb{R}^m$ und $f\colon M \to W$ eine Abbildung. Ferner seien $p \in \overset{\circ}{M}$ und $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$.*
Beh.:

(i) f k-mal differenzierbar in p
$\Longrightarrow$ f k-mal partiell differenzierbar in p und falls $k \neq \infty$

$$\forall_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,m\}}\ \mathrm{d}_p^k f(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(p).$$

(ii) f k-mal stetig partiell differenzierbar in p
$\Longleftrightarrow$ f k-mal stetig differenzierbar in p.

Wir bereiten den Beweis des Hauptsatzes durch den folgenden Satz vor:

Satz 10.37. *Es seien $\widetilde{V}$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\widetilde{M}$ eine Teilmenge von $\widetilde{V}$, $F\colon \widetilde{M} \to \mathcal{L}^k(V,W)$, $q \mapsto F_q$, eine Abbildung sowie $\{v_1,\ldots,v_m\}$ eine Basis von V und $\{w_1,\ldots,w_n\}$ eine Basis von W. Ferner seien $p \in \widetilde{M}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt:*

(i) F stetig in $p \Longleftrightarrow \forall_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,m\}}\ F(v_{i_1},\ldots,v_{i_k})\colon \widetilde{M} \to W$ stetig in p.

(ii) Ist $p \in \overset{\circ}{\widetilde{M}}$, so gilt:
F k-mal (stetig) differenzierbar in p
$\Longleftrightarrow \forall_{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,m\}}\ F(v_{i_1},\ldots,v_{i_k})\colon \widetilde{M} \to W$ k-mal (stetig) differenzierbar in p.

Beweisskizze. Der Satz folgt sofort aus den Sätzen 9.27 und 10.24, da die $w_j^* \circ F(v_{i_1},\ldots,v_{i_k})$ die Komponentenfunktionen von F bzgl. der Basiselemente $(v_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes v_{i_k}) \otimes w_j$ der in Satz B.12 genannten Basis von $\mathcal{L}^k(V,W)$ sind und $F(v_{i_1},\ldots,v_{i_k}) = \sum_{i=1}^n w_j^* \circ F(v_{i_1},\ldots,v_{i_k})\, w_j$. □

Beweis des Hauptsatzes. (i) folgt sofort aus Satz 10.22.

Zu (ii): „$\Rightarrow$“ beweisen wir durch vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}_+$. Die Differenzierbarkeitsaussage ist im Falle $k = 1$ klar nach Hauptsatz 10.13. Da die $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \mathrm{d}f(e_i)$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, in p stetig sind, folgt aus Satz 10.37 außerdem die Stetigkeit von $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^m \mathrm{d}f(e_i)\,\mathrm{d}x_i$ in p.

$k \mapsto k+1$: Sei f in p $(k+1)$-mal stetig partiell differenzierbar. Dann existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^\circ(p,M)$ derart, daß f auf U k-mal stetig partiell differenzierbar ist. Nach Induktionsannahme ist f dann auf U k-mal stetig differenzierbar. Zu zeigen ist, daß $\mathrm{d}^k f$ stetig differenzierbar in p ist, d.h. nach Satz 10.37, daß für alle $i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,m\}$ $\mathrm{d}^k f(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}$ stetig differenzierbar in p ist. Nach dem bereits bewiesenen Fall für $k = 1$ ist hierfür zu zeigen, daß $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}$ stetig partiell differenzierbar in p ist, und das ist nach Voraussetzung gegeben.

„$\Leftarrow$" Ist f k-mal stetig differenzierbar in p, so ist f insbesondere auf einer Umgebung von U von p k-mal differenzierbar, also folgt aus (i), daß f k-mal partiell differenzierbar auf U ist und $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}|_U = \mathrm{d}^k f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})|_U$. Nun ist $d^k f = \sum_{i_1=1}^m \ldots \sum_{i_k=1}^m \mathrm{d}^k f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})\, \mathrm{d}x_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x_{i_k}$ auf U definiert und in p stetig, also sind die $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}$ nach Satz 10.37 stetig in p. $\square$

Beispiel. Die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist zweimal differenzierbar, aber nicht zweimal stetig differenzierbar in 0. Entsprechendes gilt auch für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto g(x)$.

Definition 10.38 (Polynom, ganz-rationale Funktion)**.** Sind $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_+$ und $a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{R}$ für alle $i_1, \ldots, i_k \in \{0, \ldots, n\}$ mit $i_1 + \ldots + i_k \leq n$, so heißt

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N} \\ i_1+\ldots+i_k=i}} a_{i_1,\ldots,i_k}\, {x_1}^{i_1} \ldots {x_k}^{i_k}$$

ein *Polynom in k Veränderlichen* mit *Koeffizienten* $a_{i_1,\ldots,i_k}$.

Existieren $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ mit $i_1 + \ldots + i_k = n$ und $a_{i_1,\ldots,i_k} \neq 0$, so heißt n der *Grad des Polynomes* $\sum_{i=0}^n \sum_{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}, i_1+\ldots+i_k=i} a_{i_1,\ldots,i_k}\, {x_1}^{i_1} \ldots {x_k}^{i_k}$.

Im Falle $n = 0$ und $a_{0,\ldots,0} = 0$ definieren wir den Grad des Polynomes als $-\infty$.

Die Funktion

$$\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_k) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N} \\ i_1+\ldots+i_k=i}} a_{i_1,\ldots,i_k}\, {x_1}^{i_1} \ldots {x_k}^{i_k},$$

heißt eine *ganz-rationale Funktion (des $\mathbb{R}^k$)*.

Der *Grad* und die *Koeffizienten der ganz-rationalen Funktion* sind per definitionem diejenigen des zugehörigen Polynomes.

Hauptsatz 10.39.

Vor.: *Seien $M \subset V$, $p_0 \in \mathring{M}$, $k \in \mathbb{N}_+$ und $f\colon M \to W$ eine Funktion, die in p_0 k-mal differenzierbar ist.*

Wir definieren dann die k-te Taylorsche ganz-rationale Funktion von f in p_0 *als die Funktion $g_k\colon V \to W$, die gegeben ist durch*

$$\forall_{p \in V}\ g_k(p) = f(p_0) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \mathrm{d}^i_{p_0} f(\underbrace{p - p_0, \ldots, p - p_0}_{i \text{ Stück}}).$$

Beh.: g_k approximiert f in p_0 von höherer als k-ter Ordnung*, d.h. per definitionem $f(p_0) = g_k(p_0)$ und*

$$\lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - g_k(p)}{\|p - p_0\|^k} = 0.$$

$R_k := f - g_k\colon M \to \mathbb{R}$ heißt das k-te Taylorsche Restglied von f in p_0*.*

Bemerkung. Im Falle $V = \mathbb{R}^m$ sei $p_0 = (p_1, \ldots, p_m)$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ gilt dann

$$\mathrm{d}^i_{p_0} f(x - p_0, \ldots, x - p_0) = \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_i=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_i}}(p_0)\,(x_{j_1} - p_{j_1}) \ldots (x_{j_i} - p_{j_i}).$$

Dies erklärt die Namenswahl „k-te Taylorsche ganz-rationale Funktion von f in p_0" im obigen Hauptsatz.

Beweis. Wir führen den Beweis des Hauptsatzes durch vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}_+$. Der Fall $k = 1$ ist klar, denn die Behauptung ist dann gerade die Definition der Differenzierbarkeit von f in p_0.

Sei $k \in \mathbb{N}_+$ und die Aussage des Satzes für k bewiesen. Weiter sei nun f $(k+1)$-mal differenzierbar in p_0 und g die $(k+1)$-te Taylorsche ganz-rationale Funktion von f in p_0, also

$$\forall_{p \in V}\, g(p) = f(p_0) + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i!}\, \mathrm{d}^i_{p_0} f(\underbrace{p - p_0, \ldots, p - p_0}_{i \text{ Stück}})$$

Zu zeigen ist:

$$\forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} \exists_{\delta \in \mathbb{R}_+} \forall_{p \in M} \left(\|p - p_0\| < \delta \Longrightarrow \frac{\|f(p) - g(p)\|}{\|p - p_0\|^{k+1}} < \varepsilon \right). \tag{311}$$

Sei also $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Da f in p_0 $(k+1)$-mal differenzierbar ist, ist f auf einer Umgebung $U_{\tilde{\delta}}(p_0)$ von p_0 (mit $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}_+$) k-mal differenzierbar und weiter $\mathrm{d}f|_{U_{\tilde{\delta}}(p_0)}\colon U_{\tilde{\delta}}(p_0) \to \mathcal{L}(V, W)$ in p_0 k-mal differenzierbar. Bezeichnet daher $\tilde{g}\colon V \to \mathcal{L}(V, W)$ die k-te Taylorsche ganz-rationale Funktion von $\mathrm{d}f$ in p_0, d.h.

$$\forall_{p \in V}\, \tilde{g}(p) = \mathrm{d}_{p_0} f + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \left(\mathrm{d}^i_{p_0}(\mathrm{d}f)\right) (\underbrace{p - p_0, \ldots, p - p_0}_{i \text{ Stück}}) \in \mathcal{L}(V, W), \tag{312}$$

so existiert nach Induktionsvoraussetzung $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $\delta < \tilde{\delta}$ und

$$\forall_{p \in U_\delta(p_0) \setminus \{p_0\}} \frac{\|\mathrm{d}_p f - \tilde{g}(p)\|}{\|p - p_0\|^k} < \varepsilon, \tag{313}$$

wobei wir $\mathcal{L}(V, W)$ – wie üblich – mit der Operatornorm versehen.

Wir zeigen als nächstes

$$\forall_{p \in V}\, \mathrm{d}_p g = \tilde{g}(p). \tag{314}$$

[Beweis hiervon: Für $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ sei die Abbildung $\Delta_i\colon V \to V^i$ gegeben durch $\Delta_i(p) = (\underbrace{p - p_0, \ldots, p - p_0}_{i \text{ Stück}})$. Dann gilt $g = f(p_0) + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i!} \left(\mathrm{d}^i_{p_0} f\right) \circ \Delta_i$, und aus der Kettenregel folgt für alle $p, v \in V$

$$\mathrm{d}_p g(v) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i!} \left(\mathrm{d}_{\Delta_i(p)} \left(\mathrm{d}^i_{p_0} f\right)\right) \circ \mathrm{d}_p \Delta_i(v) \overset{10.24(i)}{=} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i!} \left(\mathrm{d}_{\Delta_i(p)} \left(\mathrm{d}^i_{p_0} f\right)\right) (\underbrace{v, \ldots, v}_{i \text{ Stück}}).$$

Da $\mathrm{d}^i_{p_0} f$ für jedes $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ i-fach multilinear ist, folgt aus Satz 10.14 und der Symmetrie von $\mathrm{d}_{p_0} f$ (vgl. Satz 10.32) weiter

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_p g(v) &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{i}{i!} \mathrm{d}^i_{p_0} f(\underbrace{p-p_0, \ldots, p-p_0}_{i-1 \text{ Stück}}, v) \\
&= \mathrm{d}_{p_0} f(v) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \mathrm{d}^{i+1}_{p_0} f(\underbrace{p-p_0, \ldots, p-p_0}_{i \text{ Stück}}, v) \overset{(312)}{=} \tilde{g}(p)(v),
\end{aligned}$$

also gilt $\mathrm{d}_p g = \tilde{g}(p)$.]

Nun folgt aus dem Mittelwertabschätzungssatz 10.10 für $p \in U_\delta(p_0)$ – beachte, daß dann auch $[p, p_0] \subset U_\delta(p_0)$ –

$$\begin{aligned}
\|f(p) - g(p)\| &= \|(f-g)(p) - \overbrace{(f-g)(p_0)}^{=0}\| \\
&\overset{10.10}{\leq} \sup\{\|\mathrm{d}_a(f-g)\| \mid a \in [p, p_0]\} \cdot \|p - p_0\| \\
&\overset{(314)}{=} \sup\{\underbrace{\|\mathrm{d}_a f - \tilde{g}(a)\|}_{\overset{(313)}{\leq} \varepsilon \|a - p_0\|^k} \mid a \in [p, p_0]\} \cdot \|p - p_0\| \leq \|p - p_0\|^{k+1}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt (311), und der Hauptsatz ist gezeigt. □

Analog zur eindimensionalen Theorie ermöglicht der letzte Satz die Herleitung notwendiger und hinreichender Kriterien für das Vorliegen lokaler Extrema. Hierfür geben wir zunächst die folgenden Definitionen. Die nun einzuführende *Hesse-Matrix* wird bei der Diskussion lokaler Extrema von Funktionen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ die Rolle übernehmen, die die zweite Ableitung im Eindimensionalen gespielt hat.

10.40 (Hesse-Matrix, (Semi-)Definitheit).

(i) **Definition.** Seien $m \in \mathbb{R}_+$, M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und $f \colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $p_0 \in \mathring{M}$ zweimal differenzierbar ist. Dann heißt die symmetrische Matrix

$$\mathcal{H}_{p_0} f := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(p_0) \end{pmatrix}$$

die *Hesse*[78]*-Matrix von f in p_0*.

[78]nach Ludwig Otto Hesse (1811–1874)

Es gilt für alle $v = (v_1, \dots, v_m), \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2_{p_0} f(v, \tilde{v}) &= \mathrm{d}^2_{p_0} f\left(\sum_{i=1}^m v_i\, e_i, \sum_{j=1}^m \tilde{v}_j\, e_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m v_i \tilde{v}_j\, \mathrm{d}^2_{p_0} f(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) \tilde{v}_j v_i = \sum_{i=1}^m \left(\mathcal{H}_{p_0} f\, v\right)_i \tilde{v}_i \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 & \dots & \tilde{v}_m \end{pmatrix} \mathcal{H}_{p_0} f \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_{p_0} f$ ist also die Matrix von $\mathrm{d}^2_{p_0} f$ bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$.

Beispiel. Im Falle $m = 1$ gilt $\mathcal{H}_{p_0} f = (f''(p_0))$.

(ii) **Definition.** Seien $k \in \mathbb{N}_+$ und $l\colon V^k \to \mathbb{R}$ eine k-Linearform, d.h. genau $l \in \mathcal{L}^k(V, \mathbb{R})$. Wir definieren:

(a) l heißt *positiv definit* $:\Longleftrightarrow \forall_{v \in V \setminus \{0\}}\, l(v, \dots, v) > 0$.

(b) l heißt *positiv semidefinit* $:\Longleftrightarrow \forall_{v \in V}\, l(v, \dots, v) \geq 0$.

(c) l heißt *negativ semidefinit* $:\Longleftrightarrow \forall_{v \in V}\, l(v, \dots, v) \leq 0$.

(d) l heißt *negativ definit* $:\Longleftrightarrow \forall_{v \in V \setminus \{0\}}\, l(v, \dots, v) < 0$.

(e) l heißt *indefinit* genau dann, wenn l weder positiv noch negativ semidefinit ist, d.h. es existieren $v_-, v_+ \in V$ mit $l(v_-, \dots, v_-) < 0$ und $l(v_+, \dots, v_+) > 0$.

Bemerkung.

1.) Im Spezialfall $V = \mathbb{R}$ und k gerade kann eine indefinite symmetrische k-Linearform $l \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ wegen $\forall_{v \in \mathbb{R}}\, l(v, \dots, v) = v^k l(1, \dots, 1)$ nicht existieren. Dies gilt entsprechend für jeden eindimensionalen Vektorraum.

2.) Sind $k \in \mathbb{N}_+$, $M \subset \mathbb{R}$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine in $p_0 \in \mathring{M}$ k-mal differenzierbare Funktion, so gilt nach Satz 10.29

$$\mathrm{d}^k_{p_0} f \left\{ \begin{array}{c} \text{positiv definit} \\ \text{positiv semidefinit} \\ \text{negativ semidefinit} \\ \text{negativ definit} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow f^{(k)}(p_0) \left\{ \begin{array}{c} > \\ \geq \\ \leq \\ < \end{array} \right\} 0.$$

Lemma Sind $k \in \mathbb{N}_+$ und $l \in \mathcal{L}^k(V, \mathbb{R})$ eine symmetrische k-Linearform, d.h. für alle $v_1, \dots, v_k \in V$ und jedes $\sigma \in S_k$, wobei S_k die Gruppe aller Permutationen von $\{1, \dots, k\}$ bezeichne, gilt $l(v_1, \dots, v_k) = l(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$, so folgt

(a) $\forall_{v \in V}\, l(v, \dots, v) = 0 \Longrightarrow l = 0$,

(b) k ungerade $\Longrightarrow (l \text{ indefinit} \vee l = 0)$.

Beweisskizze. Zu (a): Beweis durch vollständige Induktion nach $k \in \mathbb{N}_+$. Der Fall $k = 1$ ist trivial.

$k \mapsto k+1$: Für $v, w \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= l(tv+w,\dots,tv+w) = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} l(\underbrace{tv,\dots,tv}_{i \text{ Stück}}, w,\dots,w) \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} t^i \binom{k+1}{i} l(\underbrace{v,\dots,v}_{i \text{ Stück}}, w,\dots,w). \end{aligned}$$

Da eine ganz-rationale Funktion nur dann konstant vom Wert null sein kann, wenn ale Koeffizienten null sind, folgt insbesondere $l(v,\dots,v,w) = 0$. $l(.,\dots,.,w)$ ist symmetrisch und k-fach linear, also nach Induktionsvoraussetzung identisch gleich null, und es gilt $l(v_1,\dots,v_n,w) = 0$ für alle $v_1,\dots,v_n \in V$. Aus der Beliebigkeit von w folgt die Behauptung.

Zu (b): Entweder existiert $v \in V$ mit $l(v,\dots,v) \neq 0$ – und dann hat $l(-v,\dots,-v)$ das andere Vorzeichen –, oder aus (i) folgt $l = 0$. □

(iii) **Satz.** Seien $m \in \mathbb{N}_+$, $M \subset \mathbb{R}^m$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine in $p_0 \in \mathring{M}$ zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt:

(a) Die folgenden Aussagen sind paarweise äquivalent:
   1.) $\mathrm{d}^2_{p_0} f$ ist positiv definit.
   2.) Alle Eigenwerte von $\mathcal{H}_{p_0} f$ sind positiv.
   3.) $\forall_{k \in \{1,\dots,m\}} \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in \{1,\dots,k\}} > 0.$

(b) Die folgenden Aussagen sind paarweise äquivalent:
   1.) $\mathrm{d}^2_{p_0} f$ ist negativ definit.
   2.) Alle Eigenwerte von $\mathcal{H}_{p_0} f$ sind negativ.
   3.) $\forall_{k \in \{1,\dots,m\}} (-1)^k \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in \{1,\dots,k\}} > 0.$

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   1.) $\mathrm{d}^2_{p_0} f$ ist $\left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$ semidefinit.
   2.) Alle Eigenwerte von $\mathcal{H}_{p_0} f$ sind $\left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \right\} 0.$

(d) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   1.) $\mathrm{d}^2_{p_0} f$ ist indefinit.
   2.) Es gibt einen positiven und einen negativen Eigenwert von $\mathcal{H}_{p_0} f$.

Beweisskizze. Das entscheidende Hilfsmittel ist die Tatsache, daß eine symmetrische Matrix diagonalisierbar ist (mit den Eigenwerten auf der Hauptdiagonalen). Für weitere Ausführungen vgl. lineare Algebra. □

(iv) **Satz.** Seien $M \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine in $p_0 \in \mathring{M}$ zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt:

(a) $\mathrm{d}^2_{p_0} f \left\{ \begin{array}{c} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$ definit $\iff \det \mathcal{H}_{p_0} f > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0.$

(b) $\mathrm{d}^2_{p_0} f \left\{ \begin{array}{c} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$ semidefinit $\iff \det \mathcal{H}_{p_0} f \geq 0 \wedge \operatorname{Spur} \mathcal{H}_{p_0} f \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \right\} 0.$

(c) $\mathrm{d}^2_{p_0} f$ indefinit $\iff \det \mathcal{H}_{p_0} f < 0.$

Beweis. Klar nach (iii). □

Definition 10.41 (Lokale Extrema)**.** Es seien M ein topologischer Raum und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion sowie $p_0 \in M$. Wir definieren dann in Verallgemeinerung von 6.21 (i)

$$f \text{ besitzt in } p_0 \text{ ein } \left\{ \begin{array}{c} \textit{strenges lokales Maximum} \\ \textit{lokales Maximum} \\ \textit{lokales Minimum} \\ \textit{strenges lokales Minimum} \end{array} \right\}$$

$$:\iff \exists_{U \in \mathcal{U}^\circ(p_0, M)} \forall_{p \in U \setminus \{p_0\}} f(p) \left\{ \begin{array}{c} < \\ \leq \\ \geq \\ > \end{array} \right\} f(p_0).$$

f besitzt in p_0 ein *lokales Extremum* genau dann, wenn f in p_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum besitzt.

10.42 (Lokale Extrema)**.**
Hauptsatz 1.

Vor.: Seien $M \subset V$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine in $p_0 \in \mathring{M}$ differenzierbare Funktion.
Beh.: f besitzt in p_0 ein lokales Extremum $\Longrightarrow \mathrm{d}_{p_0} f = 0$ [79].
(Also gilt auch: $\mathrm{d}_{p_0} f \neq 0 \Longrightarrow f$ besitzt in p_0 kein lokales Extremum.)

Beweis. Zu zeigen ist: $\forall_{v \in V}\, \mathrm{d}_{p_0} f(v) = 0$.

Sei also $v \in V$ beliebig. Da p_0 innerer Punkt von M ist, existiert eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ derart, daß für den differenzierbaren Weg

$$c\colon\,]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow V,\ t \longmapsto p_0 + t\,v,$$

$c(]-\varepsilon,\varepsilon[) \subset M$ gilt. Dann ist $f \circ c\colon\,]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}$ in p_0 differenzierbar und besitzt in 0 ein lokales Extremum, also folgt mit 6.22 Hauptsatz 1

$$0 = \mathrm{d}_{p_0}(f \circ c) \overset{10.7}{=} \mathrm{d}_{p_0} f(v).$$

□

[79] Im Falle $m \in \mathbb{N}_+$ und $V = \mathbb{R}^m$ heißt das genau $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0) = 0$ bzw. $\mathcal{J}_{p_0} f = 0$.

Hauptsatz 2.

Vor.: Seien $k \in \mathbb{N}_+$, $M \subset V$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine in $p_0 \in \mathring{M}$ k-mal differenzierbare Funktion. Ferner gelte

$$\mathrm{d}_{p_0} f = 0, \ \ldots, \ \mathrm{d}_{p_0}^{k-1} f = 0,$$
$$\mathrm{d}_{p_0}^{k} f \neq 0.$$

Beh.:

(i) k gerade und f besitzt in p_0 ein lokales $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$

$\Longrightarrow \mathrm{d}_{p_0}^k f \left\{ \begin{array}{c} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{array} \right\}$ semidefinit.

(Also gilt auch:
k gerade und $\mathrm{d}_{p_0}^k f$ indefinit $\Longrightarrow f$ besitzt in p_0 kein lokales Extremum.)

(ii) $\mathrm{d}_{p_0}^k f \left\{ \begin{array}{c} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{array} \right\}$ definit – insbes. k gerade nach Lemma 10.40 (ii) –

$\Longrightarrow f$ besitzt in p_0 ein strenges lokales $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$.

(iii) k ungerade [80] $\Longrightarrow f$ besitzt in p_0 kein lokales Extremum.

Beweis. Sei R_k das k-te Taylorsche Restglied von f in p_0, vgl. Satz 10.39. Dann gilt nach Voraussetzung für $p \in M \setminus \{p_0\}$

$$\frac{f(p) - f(p_0)}{\|p - p_0\|^k} - \frac{1}{k!} \mathrm{d}_{p_0}^k f \left(\frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}, \ldots, \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|} \right) = \frac{R_k(p)}{\|p - p_0\|^k}, \tag{315}$$

und die rechte Seite konvergiert für $p \to p_0$ nach 10.39 gegen null.

Zu (i): Es sei k gerade. Außerdem besitze f in p_0 ein lokales $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$. Dann folgt aus (315) die Existenz einer Zahl $\delta_1 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{p \in U_{\delta_1}(p_0) \setminus \{p_0\}} \ \frac{R_k(p)}{\|p - p_0\|^k} + \frac{1}{k!} \mathrm{d}_{p_0}^k f \left(\frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}, \ldots, \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|} \right) \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \right\} 0,$$

und wegen $\lim_{p \to p_0} \frac{R_k(p)}{\|p - p_0\|^k} = 0$ existiert weiter $\delta_2 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{p \in U_{\delta_2}(p_0) \setminus \{p_0\}} \ \frac{1}{k!} \mathrm{d}_{p_0}^k f \left(\frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}, \ldots, \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|} \right) \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \right\} 0, \tag{316}$$

denn andernfalls folgte ein Widerspruch zur vorherigen Ungleichung.

Ist nun $v \in V$, so gilt für hinreichend kleines $t \in \mathbb{R}^*$: $p_t := p_0 + t\,v \in U_{\delta_2}(p_0)$. Also folgt aus (316)

$$\left(\frac{t}{|t|} \right)^k \mathrm{d}_{p_0}^k f \left(\frac{v}{\|v\|}, \ldots, \frac{v}{\|v\|} \right) \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \right\} 0,$$

und da k gerade ist, gilt $\mathrm{d}_{p_0}^k f \left(\frac{v}{\|v\|}, \ldots, \frac{v}{\|v\|} \right) \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \right\} 0$. Hieraus folgt wegen der Beliebigkeit von $v \in V$ die Behauptung von (i).

[80] also $\mathrm{d}_{p_0}^k f$ indefinit nach Lemma 10.40 (ii)

Zu (ii) und (iii): $\mathrm{d}_{p_0}^k f\colon V^k \to \mathbb{R}$ ist stetig (sogar differenzierbar), also auch $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \mathrm{d}_{p_0}^k(v,\dots,v)$. Da $S := \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ kompakt ist, existieren somit

$$m := \min\{\mathrm{d}_{p_0}^k(v,\dots,v) \mid v \in S\} \text{ und } M := \max\{\mathrm{d}_{p_0}^k(v,\dots,v) \mid v \in S\}$$

als reelle Zahlen.

Ist $\mathrm{d}_{p_0}^k f$ positiv definit, so folgt $m \in \mathbb{R}_+$, also $-\frac{m}{2k!} < 0$. Da $\lim_{p\to p_0} \frac{R_k(p)}{\|p-p_0\|^k} = 0$, existiert dann $\delta_3 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{p\in U_{\delta_3}\setminus\{p_0\}}\ \frac{R_k(p)}{\|p-p_0\|^k} > -\frac{m}{2k!}.$$

Hieraus und aus (315) folgt nun für jedes $p \in U_{\delta_3}(p_0) \setminus \{p_0\}$

$$f(p) - f(p_0) = \frac{\|p-p_0\|^k}{k!}\Bigg(\underbrace{\underbrace{\mathrm{d}_{p_0}^k f\left(\frac{p-p_0}{\|p-p_0\|},\dots,\frac{p-p_0}{\|p-p_0\|}\right)}_{\geq m} + \underbrace{k!\frac{R_k(p)}{\|p-p_0\|^k}}_{>-\frac{m}{2}}}_{>\frac{m}{2}}\Bigg) > 0,$$

d.h. f besitzt in p_0 ein strenges lokales Minimum.

Ist $\mathrm{d}_{p_0}^k f$ negativ definit, so ist $\mathrm{d}_{p_0}^k(-f)$ positiv definit, also besitzt $-f$ nach dem gerade Bewiesenem in p_0 ein strenges lokales Minimum, d.h. f besitzt in p_0 ein strenges lokales Maximum. Damit ist (ii) bewiesen.

Zu zeigen bleibt (iii): Sei k ungerade. Nach Voraussetzung ist $\mathrm{d}_{p_0}^k f \neq 0$, also nach Lemma 10.40 (ii) indefinit. Dann folgt $m < 0 < M$, und wegen $\lim_{p\to p_0} \frac{R_k(p)}{\|p-p_0\|^k} = 0$ existiert $\delta_4 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{p\in U_{\delta_4}\setminus\{p_0\}}\ -\frac{M}{2k!} < \frac{R_k(p)}{\|p-p_0\|^k} < -\frac{m}{2k!}.$$

Es existieren $v_1, v_2 \in S$ mit $m = \mathrm{d}_{p_0}^k(v_1,\dots,v_1), M = \mathrm{d}_{p_0}^k(v_2,\dots,v_2)$. Daher gilt nach Definition von S für alle $t \in [0,1]$ $p_{i,t} := p_0 + t\,\frac{\delta_4}{2}\,v_i \in U_{\delta_4}(p_0)$, $i \in \{1,2\}$, und aus (315) folgt für alle $t \in \,]0,1]$

$$f(p_{1,t}) - f(p_0) = \frac{\|p_{1,t}-p_0\|^k}{k!}\Bigg(\underbrace{\underbrace{\mathrm{d}_{p_0}^k f\,(v_1,\dots,v_1)}_{=m} + \underbrace{k!\frac{R_k(p)}{\|p-p_0\|^k}}_{<-\frac{m}{2}}}_{<\frac{m}{2}}\Bigg) < 0,$$

$$f(p_{2,t}) - f(p_0) = \frac{\|p_{2,t}-p_0\|^k}{k!}\Bigg(\underbrace{\underbrace{\mathrm{d}_{p_0}^k f\,(v_2,\dots,v_2)}_{=M} + \underbrace{k!\frac{R_k(p)}{\|p-p_0\|^k}}_{>-\frac{M}{2}}}_{>\frac{M}{2}}\Bigg) > 0.$$

Wegen $\lim_{t\to 0} p_{1,t} = \lim_{t\to 0} p_{2,t} = p_0$ kann f in p_0 somit kein lokales Extremum besitzen. $\square$

Bemerkung. Besitzt f in $p_0 \in M$ ein lokales Extremum, so muß also einer der folgenden vier Fälle vorliegen:

- $p_0 \in M \setminus \overset{\circ}{M}$,
- $p_0 \in \overset{\circ}{M}$ und f ist in p_0 nicht differenzierbar,
- $p_0 \in \overset{\circ}{M}$, f ist in p_0 differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar, und es gilt $\mathrm{d}_{p_0} f = 0$,
- $p_0 \in \overset{\circ}{M}$, f ist in p_0 zweimal differenzierbar, $\mathrm{d}_{p_0} f = 0$ und $\mathrm{d}^2_{p_0} f$ ist positiv oder negativ semidefinit.

Beispiel. Wir wollen alle lokalen Extrema von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^2-\mathrm{e}^{xy}$, bestimmen. f ist unendlich oft differenzierbar, und es gilt:

$$\mathcal{J}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x - y\,\mathrm{e}^{xy} & 2y - x\,e^{xy} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2 - y^2\,\mathrm{e}^{xy} & -\mathrm{e}^{xy}(xy+1) \\ -\mathrm{e}^{xy}(xy+1) & 2 - x^2\,e^{xy} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{J}_{(x,y)} f = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt hieraus, daß die durch $\begin{pmatrix} 2x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$ dargestellte lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht injektiv ist, d.h. $0 = \det \begin{pmatrix} 2x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} = 2x^2 - 2y^2 = 2(x+y)(x-y)$, also $x = \pm y$.

1. Fall: $x = y \neq 0$. Dann folgt aus $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, daß gilt $2x - x\,\mathrm{e}^{x^2} = 0$, d.h. $x^2 = \ln(2)$, also $x = y = \pm\sqrt{\ln(2)}$ und $\mathcal{J}_{(x,y)} f = 0$.

2. Fall: $x = -y \neq 0$. Dann folgt aus $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, daß gilt $2x + x\,\mathrm{e}^{x^2} = 0$, also $2 + e^{x^2} = 0$, Widerspruch!

3. Fall: $x = y = 0$. Dann ist $\mathcal{J}_{(x,y)} f = 0$.

Daher folgt, daß f höchstens in $(0,0)$ und $\pm(\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(2)})$ lokale Extrema besitzt.

$\mathcal{H}_{(0,0)} f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ist wegen $2 > 0$ und $\det \mathcal{H}_{(0,0)} f = 3 > 0$ positiv definit, also besitzt f in $(0,0)$ ein strenges lokales Minimum.

$\mathcal{H}_{\pm(\sqrt{\ln(2)},\sqrt{\ln(2)})} f = \begin{pmatrix} 2 - 2\ln(2) & -2(\ln(2)+1) \\ -2(\ln(2)+1) & 2 - 2\ln(2) \end{pmatrix}$ ist indefinit, denn es gilt $\det \mathcal{H}_{\pm(\sqrt{\ln(2)},\sqrt{\ln(2)})} f = -16\ln(2) < 0$. Also besitzt f in $\pm(\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(2)})$ kein lokales Extremum.

Der folgende *Taylorsche Satz* stellt im wesentlichen eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes dar. Da schon dieser nur für reellwertige Funktionen gilt, können wir von jenem auch nicht anderes erwarten.

Hauptsatz 10.43 (Taylorscher Satz)**.**
Vor.: *Seien $k \in \mathbb{N}$, $M \subset V$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter seien $p_0, p \in M$ mit $p_0 \neq p$ derart, daß $[p_0, p] \subset \overset{\circ}{M}$, und f ist in allen Punkten von $[p_0, p]$ $(k+1)$-mal differenzierbar.*

Beh.: *Es existiert* $\vartheta \in \,]0,1[$ *derart, daß gilt*

$$\begin{aligned} f(p) &= f(p_0) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\, \mathrm{d}^i_{p_0} f(\underbrace{p-p_0,\ldots,p-p_0}_{i \text{ Stück}}) \\ &\quad + \frac{1}{(k+1)!}\, \mathrm{d}^{k+1}_{p_0+\vartheta(p-p_0)} f(\underbrace{p-p_0,\ldots,p-p_0}_{k+1 \text{ Stück}}). \end{aligned}$$

Beweis. Wir wenden den eindimensionalen Taylorschen Satz 6.24 auf die nach Voraussetzung differenzierbare Funktion

$$\tilde{f}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(p_0 + t(p-p_0)),$$

an: Es folgt die Existenz von $\vartheta \in]0,1[$ mit

$$\begin{aligned} f(p) &= \tilde{f}(1) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\tilde{f}^i(0)}{i!} + \frac{\tilde{f}^{(k+1)}(\vartheta)}{(k+1)!} \\ &\overset{10.29}{=} f(p_0) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\, \mathrm{d}^i_{p_0} f(p-p_0,\ldots,p-p_0) \\ &\qquad + \frac{1}{(k+1)!}\, \mathrm{d}^{k+1}_{p_0+\vartheta(p-p_0)} f(p-p_0,\ldots,p-p_0). \end{aligned}$$

□

Als nächstes beschäftigen wir uns mit Umkehrabbildungen differenzierbarer Abbildungen. Im Eindimensionalen war es zu einer bijektiven Abbildung, die in einem Punkt differenzierbar ist, notwendig und hinreichend für Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung im Bildpunkt, daß die Ableitung der Abbildung in dem Punkte nicht verschwindet. Das Analogon im höherdimensionalen Fall dazu ist die dortige Bijektivität des Differentiales. Die Notwendigkeit folgt aus der Kettenregel, und daß dies auch hinreichend ist, werden wir unten zeigen.

Es sei aber auf folgenden Unterschied zwischen ein- und mehrdimensionaler Theorie hingewiesen: Eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall von $\mathbb{R}$ mit nirgends-verschwindender Ableitung ist injektiv. Dahingegen ist die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (\mathrm{e}^x \cos(y), \mathrm{e}^x \sin(y))\,,$$

nicht injektiv, besitzt aber in jedem Punkt ein invertierbares Differential (wegen $\det \mathcal{J}_{(x,y)} f = \mathrm{e}^x > 0$). Sie ist jedoch, wie der nächste Satz zeigen wird, lokal umkehrbar (d.h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung, die bijektiv auf ihr Bild abgebildet wird), und die lokale Umkehrung ist differenzierbar.

Hauptsatz 10.44 (Umkehrsatz)**.**

Vor.: *Seien* M *eine Teilmenge von* V, $p_0 \in \mathring{M}$ *und* $f\colon M \to W$ *eine in* p_0 *stetig differenzierbare Abbildung. Ferner sei*

$$\mathrm{d}_{p_0} f\colon V \longrightarrow W \ \textit{bijektiv.}$$

Insbesondere gilt dann $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$.

Beh.: *Es existiert* $U \in \mathcal{U}^\circ(p_0, V)$ *mit* $U \subset M$ *und den folgenden Eigenschaften:*

(i) $f|_U \colon U \to W$ *ist differenzierbar und bildet* U *homöomorph auf* $f(U)$ *ab,*

(ii) $f(U) \in \mathcal{U}^\circ(f(p_0), W)$, $(f|_U)^{-1} \colon f(U) \to W$ *ist differenzierbar, und es gilt*

$$\forall_{p \in U}\, \mathrm{d}_{f(p)}\big((f|_U)^{-1}\big) = (\mathrm{d}_p f)^{-1}\,.$$

Zusatz. *Darüber hinaus gilt für jedes* $k \in \mathbb{N}_+$

$$f \left\{ \begin{matrix} k\text{-mal differenzierbar} \\ k\text{-mal stetig differenzierbar} \\ k\text{-mal differenzierbar in } p_0 \end{matrix} \right\}$$

$$\Longrightarrow (f|_U)^{-1} \left\{ \begin{matrix} k\text{-mal differenzierbar} \\ k\text{-mal stetig differenzierbar} \\ k\text{-mal differenzierbar in } f(p_0) \end{matrix} \right\}.$$

Wir bereiten den Beweis des Umkehrsatzes durch das folgende Lemma vor:

Lemma 10.45. *Die Teilmenge* $\boxed{\mathrm{Iso}(V, W)} := \{\varphi \in \mathcal{L}(V, W) \,|\, \varphi \text{ bijektiv}\}$ *aller* $\mathbb{R}$*-Vektorraum-Isomorphismen* $V \to W$ *von* $\mathcal{L}(V, W)$ *ist offen in* $\mathcal{L}(V, W)$.

Darüber hinaus ist die Abbildung

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{Iso}(V, W) \longrightarrow \mathcal{L}(V, W),\ \varphi \longmapsto \varphi^{-1},$$

unendlich oft differenzierbar mit

$$\forall_{\varphi \in \mathrm{Iso}(V,W)} \forall_{\psi \in \mathcal{L}(V,W)}\, \mathrm{d}_\varphi \mathrm{inv}(\psi) = -\varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1},$$

Beweisskizze. Im Falle $\dim_{\mathbb{R}} V \neq \dim_{\mathbb{R}} W$ ist nichts zu zeigen. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $n \in \mathbb{N}_+$ mit $V = W = \mathbb{R}^n$ existiert.

Die Offenheit von $\mathrm{Iso}(V, W)$ folgt nun aus der Stetigkeit von $\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, den Rest überlassen wir als Übung mittels der Cramerschen Regel. □

Beweis des Hauptsatzes 10.44. Wir wählen Skalarprodukte und damit auch Normen auf V und W. Damit sind dann auch $\mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{L}(W, V)$ und $\mathcal{L}(V, V)$ mit den jeweiligen Operatornormen normiert. Da aus dem Kontext zu entnehmen ist, welche Norm gemeint ist, werden im folgenden sämtliche Normen mit $\|\ldots\|$ bezeichnet.

Wir setzen zur Abkürzung

$$A := \mathrm{d}_{p_0} f \quad \text{und} \quad C := \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|}. \tag{317}$$

Aus (317) und der stetigen Differenzierbarkeit von f in p_0 folgt sofort

$$\exists_{\delta \in \mathbb{R}_+} \quad \begin{aligned} & U_\delta(p_0) \subset M, \\ & f|_{U_\delta(p_0)} \text{ ist differenzierbar,} \\ & \forall_{p \in U_\delta(p_0)} \|\mathrm{d}_p f - A\| < C. \end{aligned} \tag{318}$$

Sei im folgenden δ wie in (318). Wir behaupten

$$\forall_{p\in U_\delta(p_0)} \quad \begin{array}{c}\|A^{-1}\circ(\mathrm{d}_pf - A)\| \le \frac{1}{2},\\ \mathrm{d}_pf \in \mathrm{Iso}(V,W).\end{array} \tag{319}$$

[Zu 319: Sei $p\in U_\delta(p_0)$. Dann gilt

$$\|A^{-1}\circ(\mathrm{d}_pf - A)\| \overset{\text{wegen (264)}}{\le} \|A^{-1}\|\,\|(\mathrm{d}_pf - A)\| \overset{(318)}{\le} \|A^{-1}\|\cdot C \overset{(317)}{=} \frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt für alle $v\in V$ mit $\mathrm{d}_pf(v) = 0$

$$\|v\| = \|A^{-1}\circ(\mathrm{d}_pf - A)(v)\| \le \frac{1}{2}\|v\|,$$

also $v = 0$. Somit ist d_pf injektiv, also aus Dimensionsgründen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum Isomorphismus.]

Wir zeigen als nächstes

$$\forall_{p_1,p_2\in U_\delta(p_0)}\, \|f(p_1) - f(p_2)\| \ge C\|p_1 - p_2\|. \tag{320}$$

[Zu (320): Wir definieren $F := (A^{-1}\circ f - \mathrm{id}_V)|_{U_\delta(p_0)}$. Dann folgt aus (318), daß F differenzierbar ist mit

$$\forall_{p\in U_\delta(p_0)}\, \|\mathrm{d}_pF\| = \|A^{-1}\circ \mathrm{d}_pf - \mathrm{id}_V\| = \|A^{-1}\circ(\mathrm{d}_pf - A)\| \overset{(319)}{\le} \frac{1}{2}.$$

$U_\delta(p_0)$ ist *konvex*[81], also folgt aus dem Mittelwertabschätzungssatz 10.10 für alle $p_1, p_2\in U_\delta(p_0)$

$$\|F(p_1) - F(p_2)\| \le \frac{1}{2}\|p_1 - p_2\|,$$

und d.h. nach Definition von F

$$\|\underbrace{A^{-1}\circ f(p_1) - A^{-1}\circ f(p_2)}_{=:v} - (\underbrace{p_1 - p_2}_{=:w})\| \le \frac{1}{2}\|\underbrace{p_1 - p_2}_{=w}\|.$$

Wegen 9.35 folgt aus der letzten Ungleichung $\|v\| \ge \|w\| \underbrace{-\|w - v\|}_{\ge -\frac{1}{2}\|w\|} \ge \frac{1}{2}\|w\|$ und

$$\|A^{-1}\|\|f(p_1) - f(p_2)\| \ge \|A^{-1}\left(f(p_1) - f(p_2)\right)\| \ge \frac{1}{2}\|p_1 - p_2.\|$$

[81] d.h. per definitionem, daß mit p_1 und p_2 auch alle Elemente von

$$]p_1, p_2[\; = \{t\,p_1 + (1-t)\,p_2 \,|\, t\in\,]0,1[\}$$

in $U_\delta(p_0)$ liegen. Dies sieht man leicht mittels der Dreiecksungleichung ein:

$$\|(t\,p_1 + (1-t)\,p_2) - \underbrace{p_0}_{=t\,p_0+(1-t)p_0}\| = \|t\,(p_1 - p_0) + (1-t)\,(p_2 - p_0)\| \le t\underbrace{\|p_1 - p_0\|}_{<\delta} + (1-t)\underbrace{\|p_2 - p_0\|}_{<\delta} < \delta.$$

Somit gilt

$$\|f(p_1) - f(p_2)\| \geq \frac{1}{2\|A^{-1}\|}\|\|p_1 - p_2\| \overset{(317)}{=} C\|p_1 - p_2\|.$$

Damit ist (320) bewiesen.]

Wir setzen $\varepsilon := \frac{1}{2}C\delta \in \mathbb{R}_+$ und behaupten

$$U_\varepsilon(f(p_0)) \subset f(U_\delta(p_0)). \tag{321}$$

[Hierzu sei $q \in U_\varepsilon(f(p_0))$ fest gewählt. Wir definieren dan $h\colon U_\delta(p_0) \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall_{p \in U_\delta(p_0)}\, h(p) := \langle f(p) - q, f(p) - q\rangle = \|f(p) - q\|^2.$$

Nach der verallgemeinerten Leibnizschen Produktregel 10.15 ist h differenzierbar, und es gilt

$$\forall_{p \in U_\delta(p_0)} \forall_{v \in V}\, \mathrm{d}_p h(v) = 2\,\langle \mathrm{d}_p f(v), f(p) - q\rangle. \tag{322}$$

Wir haben zu zeigen, daß 0 als Funktionswert von h auftritt.

Beweis hiervon: Sei $r := \frac{2}{C}\|f(p_0) - q\| < \frac{2\varepsilon}{C} \overset{\text{Def. } \varepsilon}{=} \delta$, also $0 \leq r < \delta$. Dann folgt

$$\forall_{p \in U_\delta(p_0) \smallsetminus U_r(p_0)}\, h(p) \geq h(p_0), \tag{323}$$

denn für $p \in U_\delta(p_0) \smallsetminus U_r(p_0)$ gilt

$$\begin{aligned} \|f(p) - q\| &\overset{9.35}{\geq} \|f(p_0) - f(p)\| - \|f(p_0) - q\| \\ &\overset{(320)}{\geq} C \underbrace{\|p_0 - p\|}_{\geq C\, r \overset{\text{Def. } r}{\geq} 2\|f(p_0) - q\|} - \|f(p_0) - q\| \geq \|f(p_0) - q\|. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von h und der Kompaktheit von

$$\overline{U_r(p_0)} = \{p \in V \mid \|p - p_0\| \leq r\}$$

besitzt die kompakte Teilmenge $h(\overline{U_r(p_0)})$ von $\mathbb{R}$ ein Minimum, also existiert $p_1 \in \overline{U_r(p_0)} \subset U_\delta(p_0)$ mit $\forall_{p \in \overline{U_r(p_0)}}\, h(p) \geq h(p_1)$. Insbes. gilt $h(p_0) \geq h(p_1)$. Nach (323) gilt dann sogar

$$\forall_{p \in U_\delta(p_0)}\, h(p) \geq h(p_1),$$

d.h. h nimmt in $p_1 \in U_\delta(p_0)$ ein globales Minimum an. Aus 10.42 Hauptsatz 1 folgt nun $\mathrm{d}_{p_1} h = 0$, also nach (322)

$$\forall_{v \in V}\, \langle \mathrm{d}_{p_1} f(v), f(p_1) - q\rangle = 0. \tag{324}$$

Nach (319) ist $\mathrm{d}_{p_1} f \in \mathcal{L}(V, W)$ surjektiv, also existiert $v_1 \in V$ mit

$$\mathrm{d}_{p_1} f(v_1) = f(p_1) - q,$$

d.h. nach (324)

$$h(p_1) = \langle f(p_1) - q, f(p_1) - q\rangle = 0,$$

und somit gilt $f(p_1) = q$. Damit ist (321) gezeigt.]

Es gilt $U_\varepsilon(f(p_0)) \in \mathcal{U}^\circ(f(p_0), W)$. Wegen (318) ist $f|_{U_\delta(p_0)}: U_\delta(p_0) \to W$ stetig, also folgt $U := \underbrace{\overline{f|_{U_\delta(p_0)}}^{1}\big(U_\varepsilon(f(p_0))\big)}_{\overset{(318)}{\subset} M} \in \mathcal{U}^\circ(p_0, U_\delta(p_0)) \subset \mathcal{U}^\circ(p_0, V)$. Wir behaupten

$$f|_U : U \longrightarrow U_\varepsilon(f(p_0)) \text{ ist ein Homöomorphismus.} \tag{325}$$

[Daß $f|_U: U \to U_\varepsilon(f(p_0))$ stetig ist, haben wir gerade mitbegründet. Die Injektivität ergibt sich aus (320) und die Surjektivität aus (321).

Zur Stetigkeit von $(f|_U)^{-1}: U_\varepsilon(f(p_0)) \to U$: Für alle $q_1, q_2 \in U_\varepsilon(f(p_0))$ gilt $(f|_U)^{-1}(q_1), (f|_U)^{-1}(q_2) \in U \subset U_\delta(p_0)$, also nach (320)

$$\|(f|_U)^{-1}(q_1) - (f|_U)^{-1}(q_2)\| \le \frac{1}{C}\|f\big((f|_U)^{-1}(q_1)\big) - f\big((f|_U)^{-1}(q_2)\big)\| = \|q_1 - q_2\|,$$

also ist $(f|_U)^{-1}$ stetig (sogar gleichmäßig stetig).]

Wir zeigen nun

$$\forall_{q \in U_\varepsilon(f(p_0))}\, (f|_U)^{-1} \text{ differenzierbar in } q \text{ und } \mathrm{d}_q\big((f|_U)^{-1}\big) = \big(\mathrm{d}_q(f|_U)\big)^{-1}. \tag{326}$$

[Sei hierzu $q \in U_\varepsilon(f(p_0))$ fest gewählt, d.h. $p := (f|_U)^{-1}(q) \in U \subset U_\delta(p_0)$. Dann existiert nach (319) $(\mathrm{d}_p f)^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$. Sei nun $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $U_\varepsilon(f(p_0))$ mit $q_n \ne q$ für alle $q \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} q_n = q$. Wir setzen für jedes $n \in \mathbb{N}: p_n := (f|_U)^{-1}(q_n)$. Dann ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $U \subset U_\delta(p_0)$, und nach (325) gilt $p_n \ne p = q$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Hieraus folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
0 &\le \frac{\|(f|_U)^{-1}(q_n) - (f|_U)^{-1}(q) - (\mathrm{d}_{(f|_U)^{-1}(q)} f)^{-1}(q_n - q)\|}{\|q_n - q\|} \\
&= \frac{\|(\mathrm{d}_p f)^{-1}\Bigg(\mathrm{d}_p f(p_n - p) - (\overbrace{q_n - q}^{=f(p_n)-f(p)})\Bigg)\|}{\|q_n - q\|} \\
&\le \frac{\|(\mathrm{d}_p f)^{-1}\|\,\|\mathrm{d}_p f(p_n - p) - \big(f(p_n) - f(p)\big)\|}{\|q_n - q\|} \\
&= \frac{\|(\mathrm{d}_p f)^{-1}\|\,\|f(p_n) - f(p) - \mathrm{d}_p f(p_n - p)\|}{\|q_n - q\|} \\
&= \|(\mathrm{d}_p f)^{-1}\| \underbrace{\frac{\|f(p_n) - f(p) - \mathrm{d}_p f(p_n - p)\|}{\|p_n - p\|}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ da } f \text{ in } p \text{ differenzierbar}} \underbrace{\frac{\|p_n - p\|}{\|\underbrace{q_n - q}_{=f(p_n)-f(p)}\|}}_{\overset{(320)}{\le} \frac{1}{C}}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt (326).]

Damit haben wir den Hauptsatz (ohne Zusatz) bewiesen.

Zum Zusatz: Der Hauptsatz besagt u.a.

$$\forall_{q\in f(U)}\, \mathrm{d}_q(f|_U)^{-1} = \mathrm{d}_{(f|_U)^{-1}(q)} f = \mathrm{inv} \circ \mathrm{d}f \circ (f|_U)^{-1}(q),$$

also gilt

$$\mathrm{d}(f|_U)^{-1} = \mathrm{inv} \circ \mathrm{d}f \circ (f|_U)^{-1}. \tag{327}$$

Wir zeigen induktiv für jedes $k \in \mathbb{N}_+$

$$f \left\{ \begin{array}{c} k\text{-mal differenzierbar} \\ k\text{-mal stetig differenzierbar} \end{array} \right\} \Longrightarrow (f|_U)^{-1} \left\{ \begin{array}{c} k\text{-mal differenzierbar} \\ k\text{-mal stetig differenzierbar} \end{array} \right\}. \tag{328}$$

[$k = 1$: Der obere Fall ist wegen des Hauptsatzes klar.

Sei f stetig differenzierbar, d.h. $\mathrm{d}f$ ist stetig. Dann ist nach (327) (und Lemma 10.45) auch $\mathrm{d}(f|_U)^{-1}$ stetig, d.h. $(f|_U)^{-1}$ ist stetig differenzierbar.

$k \mapsto k+1$: Sei $k \in \mathbb{N}_+$ und (328) gelte für k.

Ferner sei $f \left\{ \begin{array}{c} (k+1)\text{-mal differenzierbar} \\ (k+1)\text{-mal stetig differenzierbar} \end{array} \right\}$. Dann ist f insbesondere $\left\{ \begin{array}{c} k\text{-mal differenzierbar} \\ k\text{-mal stetig differenzierbar} \end{array} \right\}$, also ist nach Induktionsvoraussetzung auch $(f|_U)^{-1} \left\{ \begin{array}{c} k\text{-mal differenzierbar} \\ k\text{-mal stetig differenzierbar} \end{array} \right\}$.

Andererseits ist $\mathrm{d}f \left\{ \begin{array}{c} k\text{-mal differenzierbar} \\ k\text{-mal stetig differenzierbar} \end{array} \right\}$. Nach (327) ist daher $(\mathrm{d}(f|_U))^{-1}$ die Komposition drei $\left\{ \begin{array}{c} k\text{-mal differenzierbarer} \\ k\text{-mal stetig differenzierbarer} \end{array} \right\}$ Abbildungen und somit nach 10.26 $\left\{ \begin{array}{c} k\text{-mal differenzierbar} \\ k\text{-mal stetig differenzierbar} \end{array} \right\}$, und dies bedeutet, daß $(f|_U)^{-1} \left\{ \begin{array}{c} (k+1)\text{-mal differenzierbar} \\ (k+1)\text{-mal stetig differenzierbar} \end{array} \right\}$ ist. Damit ist dann (328) auch für $k+1$ gezeigt.]

Schließlich haben wir zu zeigen, daß für alle $k \in \mathbb{N}_+$ mit $k \geq 2$ gilt

$$f \ k\text{-mal differenzierbar in } p_0 \Longrightarrow (f|_U)^{-1} \ (k+1)\text{-mal differenzierbar in } f(p_0).$$

Zum Beweis hiervon sei nun f k-mal differenzierbar in p_0. Dann ist f $(k-1)$-mal differenzierbar in einer Umgebung von p_0. Also ist nach (328) auch $(f|_U)^{-1}$ $(k-1)$-mal differenzierbar in einer Umgebung von $f(p_0)$. Daher und da $\mathrm{d}f$ $(k-1)$-mal differenzierbar in $p_0 = (f|_U)^{-1}(f(p_0))$, folgt aus (327) sowie 10.26, daß $\mathrm{d}(f|_U)^{-1}$ $(k-1)$-mals differenzierbar in $f(p_0)$ ist. D.h. genau, daß $(f|_U)^{-1}$ k-mal in $f(p_0)$ differenzierbar ist. □

Bemerkung. Ist $m \in \mathbb{N}_+$, so besagt im Falle $V = W = \mathbb{R}^m$ die Voraussetzung $\mathrm{d}_{p_0}f\colon V \to W$ bijektiv des Umkehrsatzes genau $\det \mathcal{J}_{p_0}f \neq 0$ und die in der Behauptung (ii) genannte Gleichung $\forall_{p \in U}\, \mathrm{d}_{f(p)}\left((f|_U)^{-1}\right) = (\mathrm{d}_p f)^{-1}$ genau $\forall_{p \in U}\, \mathcal{J}_{f(p)}\left((f|_U)^{-1}\right) = (\mathcal{J}_p f)^{-1}$.

Wir betrachten nun ein Gleichungssystem $F(p,q) = 0$, in dem zu jedem p genau eine Lösung q existiert, und wollen Voraussetzungen angeben, unter denen q differenzierbar von p abhängt, wenn wir an p „differenzierbar wackeln".

Definition 10.46 (Implizit definierte Abbildungen). Seien neben W auch V_1, V_2 endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $M_1 \subset V_1$, $M_2 \subset V_2$ und $F\colon M_1 \times M_2 \to W$ eine Abbildung.

Wir definieren: *F definiert implizit eine Abbildung von M_1 in M_2* genau dann, wenn

$$\forall_{p \in M_1} \exists!_{q \in M_2} F(p,q) = 0. \tag{329}$$

Ist (329) erfüllt, so läßt sich zu jedem $p \in M_1$ ein eindeutig bestimmtes Element $f(p) \in M_2$ mit $F(p, f(p)) = 0$ zuordnen, d.h. man hat dann eine eindeutig bestimmte Abbildung $f\colon M_1 \to M_2$. Wir sagen dann auch: *F definiert implizit die Abbildung $f\colon M_1 \to M_2$.*

f ist also charakterisiert durch $\overline{F}^1(\{0\}) = \operatorname{Graph}(f)$.

Beispiel.

1.) Die Abbildung $F := 2x + 3y - 1\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert offenbar implizit die Funktion $f := \frac{-2x+1}{3}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In diesem Fall läßt sich die Gleichung $f(x, f(x)) = 0$ also sehr einfach nach $f(x)$ auflösen, und man erhält eine explizite Formel für $f(x)$.

2.) Wir betrachten $F := x^2 + y + y^2 + y^3\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und behaupten, daß F implizit eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert.

[Beweis hiervon: Für jedes feste $p \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung

$$F(p,q) = p^2 + q + q^2 + q^3 = 0$$

genau eine Lösung $q \in \mathbb{R}$.

Denn $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(t) := F(p,t) = p^2 + t + t^2 + t^3$, ist wegen $g'(t) = 1 + 2t + 3t^2 = (1 + t^2) + 2t^2 > 0$ streng monoton wachsend mit $\lim_{t \to \pm\infty} g(t) = \pm\infty$, also ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv.]

Für die durch F implizit definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt also

$$F(x, f(x)) = x^2 + f(x) + f(x)^2 + f(x)^3 = 0,$$

aber die letzte Gleichung läßt sich nicht ohne weiteres zu einer expliziten Formel der Gestalt $f(x) = \underbrace{\ldots}_{\text{nur abhängig von } x}$ auflösen.

Aus diesem Grunde weiß man a priori auch nicht, ob diese Funktion stetig, differenzierbar oder stetig differenzierbar ist. Wir werden später aus dem Satz über implizit definierte Abbildungen folgern, daß f aus diesem Beispiel sogar eine unendlich-oft differenzierbare Funktion ist.

Hauptsatz 10.47 (Satz über implizit definierte Abbildungen).
Vor.: *Seien neben W auch V_1, V_2 endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume sowie $M \subset V_1 \times V_2$, $p_0 \in V_1, q_0 \in V_2$ und $(p_0, q_0) \in \mathring{M}$. Ferner sei $F\colon M \to W$ stetig differenzierbar in (p_0, q_0) mit $F(p_0, q_0) = 0$.*

Wir setzen für alle $(p,q) \in \mathring{M}$ derart, daß F in (p,q) differenzierbar ist

$$\partial_1 F(p,q) := \mathrm{d}_p\,(F(\ldots, q)) \in \mathcal{L}(V_1, W),$$
$$\partial_2 F(p,q) := \mathrm{d}_q\,(F(p, \ldots)) \in \mathcal{L}(V_2, W)$$

und fordern, daß gilt $\partial_2 F(p_0, q_0) \in \operatorname{Iso}(V_2, W)$, d.h. auch $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = \dim_{\mathbb{R}} W$.

Beh.: *Es existieren $U_1 \in \mathcal{U}^\circ(p_0, V_1)$ und $U_2 \in \mathcal{U}^\circ(q_0, V_2)$ mit $U_1 \times U_2 \subset M$ sowie den folgenden Eigenschaften:*

(i) $F|_{U_1 \times U_2}\colon U_1 \times U_2 \to W$ *ist differenzierbar und definiert implizit eine Abbildung* $f\colon U_1 \to U_2$,

(ii) $f\colon U_1 \to U_2$ *ist differenzierbar und es gilt*

$$\forall_{p \in U_1}\, \mathrm{d}_p f = -\big(\partial_2 F(p, f(p))\big)^{-1} \circ \partial_1 F(p, f(p)). \tag{330}$$

Zusatz. *Darüber hinaus gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_+$*

$$F \left\{ \begin{array}{c} k\text{-mal differenzierbar} \\ k\text{-mal stetig differenzierbar} \\ k\text{-mal differenzierbar in } (p_0, q_0) \end{array} \right\}$$

$$\Longrightarrow f \left\{ \begin{array}{c} k\text{-mal differenzierbar} \\ k\text{-mal stetig differenzierbar} \\ k\text{-mal differenzierbar in } p_0 \end{array} \right\}.$$

Beweisskizze. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei M offen in $V_1 \times V_2$ und F differenzierbar auf ganz M. Wende dann den Umkehrsatz an auf die Abbildung

$$h\colon \underbrace{M}_{\subset V_1 \times V_2} \longrightarrow V_1 \times W, \quad (p,q) \longmapsto (p, F(p,q)).$$

Dann folgt die Existenz von $\widetilde{U}_1 \in \mathcal{U}^\circ(p_0, V_1)$ und $U_2 \in \mathcal{U}^\circ(q_0, V_2)$ derart, daß $h|_{\widetilde{U}_1 \times U_2}\colon U_1 \times U_2 \to h(\widetilde{U}_1 \times U_2)$ die Behauptung des Umkehrsatzes erfüllt (dort $f = h$ und $U = \widetilde{U}_1 \times U_2$).

Seien

$$\iota_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_1 \times W) \quad \text{mit} \quad \forall_{p \in V_1}\, \iota_1(p) := (p, 0)$$

und

$$\pi_2 \in \mathcal{L}(V_1 \times V_2, V_2) \quad \text{mit} \quad \forall_{(p,q) \in V_1 \times V_2}\, \pi_2(p,q) := q$$

die kanonischen Abbildungen sowie

$$U_1 := \overline{\iota_1}^{1}(h(\widetilde{U}_1 \times U_2)) \in \mathcal{U}^\circ(p_0, V_1).$$

Setze dann

$$f := \pi_2 \circ (h|_{\widetilde{U}_1 \times U_2})^{-1} \circ \iota_1\colon U_1 \longrightarrow U_2.$$

Dann gilt für jedes $(p,q) \in U_1 \times U_2$

$$\begin{aligned} F(p,q) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad h(p,q) = (p,0) \in h(\widetilde{U}_1 \times U_2) \\ &\Longleftrightarrow \quad (p,q) = (h|_{\widetilde{U}_1 \times U_2})^{-1} \circ h(p,q) = (h|_{\widetilde{U}_1 \times U_2})^{-1}(p,0) \\ &\overset{\text{klar}}{\Longleftrightarrow} \quad (p,q) = \big(p, \pi_2 \circ (h|_{\widetilde{U}_1 \times U_2})^{-1}(p,0)\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad q = f(p), \end{aligned}$$

also definiert $F|_{U_1 \times U_2}$ implizit die Abbildung $f\colon U_1 \to U_2$.

Zu (330): Es gilt

$$\forall_{(p,q)\in M} \forall_{(v_1,v_2)}\, \mathrm{d}_{(p,q)}F(v_1,v_2) = \partial_1 F(p,q)(v_1) + \partial_2 F(p,q)(v_2),$$

denn $\mathrm{d}_{(p,q)}F(v_1,v_2) = \mathrm{d}_{(p,q)}F(v_1,0) + \mathrm{d}_{(p,q)}F(0,v_2)$ und

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{(p,q)}F(v_1,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{F(p+t\,v_1,q) - F(p,q)}{t} = \mathrm{d}_p\left(F(\ldots,q)\right) = \partial_1 F(p,q)(v_1), \\
\mathrm{d}_{(p,q)}F(0,v_2) &= \ldots = \partial_2 F(p,q)(v_2).
\end{aligned}$$

Daher folgt aus $\forall_{p\in U_1} F\underbrace{(p,f(p))}_{=:\tilde{f}(p)}$, d.h. $0 = F\circ\tilde{f}$, daß für alle $p\in U_1$ und $v_1\in V_1$ gilt

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathrm{d}_{\tilde{f}(p)}F)\circ(\mathrm{d}_{(p,f(p))}\tilde{f})(v_1) = \mathrm{d}_{(p,f(p))}F(v_1,\mathrm{d}_p f(v_1)) \\
&= \partial_1 F(p,f(p))(v_1) + \partial_2 F(p,f(p))\circ \mathrm{d}_p f(v_1).
\end{aligned}$$

Dies ergibt (330). □

Bemerkung. Sind $m,n\in\mathbb{N}_+$, so besagt im Falle $V_1=\mathbb{R}^m$, $V_2=W=\mathbb{R}^n$ und $F=(F_1,\ldots,F_n)\colon M\to\mathbb{R}^n$ die Voraussetzung

$$\partial_2 F(p_0,q_0)\in \mathrm{Iso}(V_2,W)$$

des Satzes über implizit definierte Abbildungen genau

$$\det\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{m+n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_{m+n}} \end{pmatrix}\right|_{(p_0,q_0)} \neq 0$$

und (330) genau

$$\begin{aligned}
\forall_{p\in U_1} &\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}\right|_p \\
= &-\left(\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{m+n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_{m+n}} \end{pmatrix}\right|_{(p,f(p))}\right)^{-1} \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}\right|_{(p,f(p))}.
\end{aligned}$$

Im Falle $m=n=1$ ist ersteres gleichbedeutend mit

$$F_{x_2}(p_0,q_0)\neq 0$$

und letzteres mit

$$\forall_{p\in U_1} f'(p) = -\frac{F_{x_1}(p,f(p))}{F_{x_2}(p,f(p))},$$

wobei $F := F_1\colon M\to\mathbb{R}$ und $M\subset\mathbb{R}^2$.

Satz 10.48.
Vor.: *Seien neben W auch V_1, V_2 endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, U_1 bzw. U_2 eine offene Teilmenge von V_1 bzw. V_2 und sei $F\colon U_1 \times U_2 \to W$ eine k-mal stetig differenzierbar Abbildung, wobei $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$.*

Ferner definiere F implizit eine Abbildung $f\colon U_1 \to U_2$, und es gelte

$$\forall_{p \in U_1}\, \partial_2 F(p, f(p)) \in \mathrm{Iso}(V_2, W).$$

Insbesondere gilt dann $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = \dim_{\mathbb{R}} W$.
Beh.: *$f\colon U_1 \to U_2$ ist k-mal stetig differenzierbar und*

$$\forall_{p \in U_1}\, \mathrm{d}_p f = -\big(\partial_2 F(p, f(p))\big)^{-1} \circ \partial_1 F(p, f(p)). \tag{331}$$

Beweis. Für jedes feste $p \in U_1$ erfüllen F und $(p, f(p))$ alle Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Abbildungen (dort $(p_0, q_0) = (p, f(p))$). Aus diesem (einschließlich Zusatz) folgt daher, daß f lokal eine k-mal stetig differenzierbare Abbildung ist und daß (331) gilt. □

Beispiel. $F := x^2 + y + y^2 + y^3 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert implizit eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vgl. 10.46 Beispiel 2.). Wegen $F_y = 1 + 2y + 3y^2 = (1 + y)^2 + 2y^2 > 0$ sind alle Voraussetzungen des letzten Satzes 10.48 erfüllt (mit $k = \infty$), und es folgt, daß f unendlich-mal differenzierbar ist.

Definition 10.49 (Lokale Extrema unter Nebenbedingungen)**.** Seien M ein topologischer Raum, $p_0 \in M$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $g\colon M \to W$ eine Abbildung. Wir definieren:

$$f \textit{ besitzt in } p_0 \textit{ ein } \left\{\begin{array}{c} \textit{strenges lokales Maximum} \\ \textit{lokales Maximum} \\ \textit{lokales Minimum} \\ \textit{strenges lokales Minimum} \end{array}\right\} \textit{unter der Nebenbedingung}$$
$g = 0$

$$:\Longleftrightarrow p_0 \in \overline{g}^1\{0\} \text{ und } f|_{\overline{g}^1\{0\}} \text{ besitzt in } p_0 \text{ ein } \left\{\begin{array}{c} \text{strenges lokales Maximum} \\ \text{lokales Maximum} \\ \text{lokales Minimum} \\ \text{strenges lokales Minimum} \end{array}\right\}.$$

f besitzt in p_0 ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$ genau dann, wenn $f|_{\overline{g}^1\{0\}}$ in p_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum besitzt.

Hauptsatz 10.50 (Notwendige Bedingungen für Extrema unter Nebenbedingungen)**.**
Vor.: *Seien $M \subset V$, $p_0 \in \mathring{M}$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ in p_0 differenzierbar sowie $g\colon M \to W$ stetig differenzierbar in p_0 mit $g(p_0) = 0$. Ferner sei $\mathrm{d}_{p_0} g \in \mathcal{L}(V, W)$ surjektiv, also gilt insbesondere $\dim_{\mathbb{R}} V \geq \dim_{\mathbb{R}} W$.*
Beh.: *Wenn f ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$ besitzt, so existiert genau ein $\lambda \in W^* = \mathcal{L}(W, \mathbb{R})$ mit*

$$\mathrm{d}_{p_0} f = \lambda \circ \mathrm{d}_{p_0} g. \tag{332}$$

Beweis. f besitze in p_0 ein lokales $\left\{\begin{array}{c}\text{lokales Maximum}\\ \text{lokales Minimum}\end{array}\right\}$ unter der Nebenbedingung $g = 0$. Dann existiert eine Umgebung U von p_0 in V mit $U \subset M$ und

$$\forall_{p \in U} \left(g(p) = 0 \Longrightarrow f(p) \left\{\begin{array}{c}\le\\ \ge\end{array}\right\} f(p_0) \right). \tag{333}$$

Offenbar existiert ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum V_2 von V mit

$$V_1 \oplus V_2 = V, \text{ wobei } V_1 := \operatorname{Kern} \mathrm{d}_{p_0} g.\text{[82]} \tag{334}$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathrm{d}_{p_0} g(V) = W$, also folgt

$$\mathrm{d}_{p_0} g|_{V_2} \in \operatorname{Iso}(V_2, W). \tag{335}$$

Wegen (334) ist

$$\varphi \colon V_1 \times V_2 \longrightarrow V, \quad (v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus, und wir definieren $\widetilde{M} \subset V_1 \times V_2$, $a_0 \in V_1$ und $b_0 \in V_2$ durch

$$\widetilde{M} := \overline{\varphi}^{1}(M), \quad (a_0, b_0) := \varphi^{-1}(p_0),$$

also $\varphi(\widetilde{M}) = M$, $\varphi(a_0, b_0) = a_0 + b_0 = p_0$, und

$$\tilde{f} := f \circ \varphi \colon \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{g} := g \circ \varphi \colon \widetilde{M} \longrightarrow W.$$

Aus den Voraussetzungen an f und g sowie 10.26 folgt nun

$$\begin{array}{c} \tilde{f} \text{ ist differenzierbar in } (a_0, b_0), \\ \tilde{g} \text{ ist stetig differenzierbar in } (a_0, b_0) \text{ und} \\ \tilde{g}(a_0, b_0) = 0. \end{array} \tag{336}$$

Ferner gilt für $i \in \{1, 2\}$

$$\partial_i \tilde{g}(a_0, b_0) = \mathrm{d}_{p_0} g|_{V_i} \in \mathcal{L}(V_i, W) \tag{337}$$

[Zu (337): Wir führen den Beweis nur für den Fall $i = 2$, den Fall $i = 1$ zeigt man analog.

Für alle $v_2 \in V_2$ gilt

$$\begin{aligned} \partial_2 \tilde{g}(a_0, b_0)(v_2) &= \mathrm{d}_{b_0} \left(\tilde{g}(a_0, \ldots) \right)(v_2) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\tilde{g}(a_0, b_0 + t\, v_2) - \tilde{g}(a_0, b_0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{g(\overbrace{p_0}^{=(a_0, b_0)} + t\, v_2) - g(p_0)}{t} = \mathrm{d}_{p_0} g(v_2). \quad] \end{aligned}$$

[82] Die *direkte Summme* $V_1 \oplus V_2 = V$ bedeutet per definitionem, daß zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ mit $v = v_1 + v_2$ existieren.

Nach (337) und (335) gilt

$$\partial_2\tilde{g}(a_0,b_0) \in \operatorname{Iso}(V_2,W),$$

also sind für $\widetilde{M},(a_0,b_0)$ und $\tilde{g}$ (anstelle von $M,(p_0,q_0)$ und F) nach (335) alle Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Abbildungen 10.47 erfüllt. Somit folgt

$$\begin{aligned}
&\exists_{U_1\in\mathcal{U}^\circ(a_0,V_1)}\exists_{U_2\in\mathcal{U}^\circ(b_0,V_2)}\exists_{h\in U_2^{U_1}}\\
&\quad U_1\times U_2\subset \overline{\varphi}^1(M)=\widetilde{M},\quad h \text{ ist differenzierbar},\quad h(a_0)=b_0,\\
&\quad \forall_{a\in U_1}\ \underbrace{\tilde{g}(a,h(a))}_{=g(a+h(a))}=0 \text{ und } \mathrm{d}_{a_0}h=\underbrace{-\left(\partial_2\tilde{g}(a_0,b_0)\right)^{-1}\circ\underbrace{\partial_1\tilde{g}(a_0,b_0)}_{\overset{(337)}{=}\mathrm{d}_{p_0}g|_{V_1}=0}}_{=0}. \qquad (338)
\end{aligned}$$

Wir folgern aus (333)

$$\forall_{(a,b)\in U_1\times U_2}\left(\tilde{g}(a,b)=0\Longrightarrow\tilde{f}(a,b)\left\{\begin{matrix}\le\\ \ge\end{matrix}\right\}\tilde{f}(a_0,b_0)\right). \qquad (339)$$

[Zu (339): Aus $(a,b)\in U_1\times U_2$, $g\circ\varphi(a,b)=\tilde{g}(a,b)=0$ folgt $p:=\varphi(a,b)\in U$ und $g(p)=0$, also nach (333)

$$\underbrace{\tilde{f}}_{=f\circ\varphi}(a,b)=f(p)\left\{\begin{matrix}\le\\ \ge\end{matrix}\right\}f(p_0))\tilde{f}(a_0,b_0).\ \ ]$$

Wir definieren die Funktion $F\colon M\to\mathbb{R}$ durch

$$F(a)=\tilde{f}(a,h(a))=f(a+h(a)),$$

also $F=f\circ(\mathrm{id}_{U_1}+h)$. Nach (338) und (336) ist F in a_0 differenzierbar und besitzt wegen (338) und (339) in a_0 ein globales $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$. Daher folgt aus 10.42 Hauptsatz 1

$$\forall_{v_1\in V_1}\ 0=\mathrm{d}_{a_0}F(v_1)=\mathrm{d}_{\underbrace{a_0+h(a_0)}_{\overset{(338)}{=}a_0+b_0=p_0}}f(v_1+\underbrace{\mathrm{d}_{a_0}h(v_1)}_{\overset{(338)}{=}0})=\mathrm{d}_{p_0}f(v_1). \qquad (340)$$

Wegen (335) ist

$$\lambda:=(\mathrm{d}_{p_0}f|_{V_2})\circ(\mathrm{d}_{p_0}g|_{V_2})^{-1}\in W^*$$

wohldefiniert, und es gilt trivialerweise $\mathrm{d}_{p_0}f|_{V_2}=\lambda\circ(d_{p_0}g)|_{V_2}$, während nach (340)

$$\mathrm{d}_{p_0}f|_{V_1}=0\overset{(334)}{=}\lambda\circ(d_{p_0}g)|_{V_1},$$

also wegen $V_1\oplus V_2\overset{(334)}{=}V$ gilt

$$\mathrm{d}_{p_0}f=\lambda\circ\mathrm{d}_{p_0}g.$$

Damit ist die Existenz von λ wie in der Behauptung bewiesen, und die Eindeutigkeit von $\lambda\in W^*$ mit $\mathrm{d}_{p_0}f=\lambda\circ\mathrm{d}_{p_0}g$ ist wegen $\mathrm{d}_{p_0}g(V)\overset{(335)}{=}W$ klar. □

Bemerkung. Sind $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $m \geq n$, so besagt im Falle $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^n$ und $g = (g_1, \ldots, g_n)\colon M \to \mathbb{R}^n$ die Voraussetzung

$$\mathrm{d}_{p_0} g \in \mathcal{L}(V, W) \text{ surjektiv}$$

genau

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(p_0) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(p_0) & \ldots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(p_0) \end{pmatrix} = n,$$

also genau, daß $\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(p_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(p_0) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(p_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(p_0) \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}$-linear unabhängig im $\mathbb{R}^m$ sind.

Des weiteren bedeutet dann (332) genau, daß eindeutig bestimmte reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(p_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_i}{\partial x_m}(p_0) \end{pmatrix}$$

existieren, denn der Hauptsatz besagt, daß $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0) \right) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(p_0) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(p_0) & \ldots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(p_0) \end{pmatrix}$$

existieren.

Beispiel. Zu gegebenen $m \in \mathbb{N}_+$ und $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}_+$ betrachten wir folgende Aufgabe:

Unter allen achsenparallelen Quadern im $\mathbb{R}^m$, die dem Ellipsoid

$$E := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^{m} \frac{{x_i}^2}{{a_i}^2} - 1 = 0\}$$

einbeschrieben sind, ist der Quader größten Rauminhaltes gesucht.

Zeige, daß genau eine Lösung des Problemes existiert und bestimme die Kantenlängen des Quaders.

Wir definieren

$$f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad f(x_1, \ldots, x_m) := \prod_{i=1}^{m} 2\, x_i = 2^m \prod_{i=1}^{m} x_i \text{ und}$$

$$g\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad g(x_1, \ldots, x_m) := \sum_{i=1}^{m} \frac{{x_i}^2}{{a_i}^2} - 1.$$

Die Lösung der Aufgabe besteht offensichtlich darin, das Maximum von f auf $(\mathbb{R}_+)^m$ unter der Nebenbedingung $g = 0$ zu suchen.

Das Ellipsoid $E = \overline{g}^1(\{0\})$ ist offenbar eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, also kompakt. Daher nimmt $f|_E$ als stetige Funktion auf E an einer Stelle $(t_1, \ldots, t_m) \in E$ ihren maximalen Wert an. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $t_1 > 0, \ldots, t_m > 0$ gilt. Dies liefert

$$\mathrm{d}_{(t_1,\ldots,t_m)} g = \begin{pmatrix} \frac{2\,t_1{}^2}{a_1{}^2} \\ \vdots \\ \frac{2\,t_m{}^2}{a_m{}^2} \end{pmatrix} \neq 0,$$

somit folgt aus dem Hauptsatz (bzw. der zugehörigen Bemerkung) die Existenz einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\mathrm{d}_{(t_1,\ldots,t_m)} f}_{= 2^m \begin{pmatrix} t_2 \cdots t_m \\ t_1 t_3 \cdots t_m \\ \vdots \\ t_1 \cdots t_{m-1} \end{pmatrix}} = \underbrace{\lambda\, \mathrm{d}_{(t_1,\ldots,t_m)} g}_{= 2\lambda \begin{pmatrix} \frac{t_1}{a_1{}^2} \\ \vdots \\ \frac{t_m}{a_m{}^2} \end{pmatrix}} .$$

Hieraus ergibt sich zunächst $\lambda \neq 0$ und sodann

$$\frac{t_1{}^2}{a_1{}^2} = \ldots = \frac{t_m{}^2}{a_m{}^2} \quad \left(= \frac{2^{m-1}}{\lambda} \prod_{i=1}^m t_i \right),$$

also wegen $\displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{t_i{}^2}{a_i{}^2} = 1$

$$\frac{t_1{}^2}{a_1{}^2} = \ldots = \frac{t_m{}^2}{a_m{}^2} \text{ und } (t_1, \ldots, t_m) = \left(\frac{a_1}{\sqrt{m}}, \ldots, \frac{a_m}{\sqrt{m}} \right).$$

Damit haben wir gezeigt, daß der gesuchte Quader eindeutig bestimmt ist, die halben Kantenlängen $\dfrac{a_1}{\sqrt{m}}, \ldots, \dfrac{a_m}{\sqrt{m}}$, also den Rauminhalt $\dfrac{2^m}{\sqrt{m}^m} a_1 \cdots a_m$ hat.

11 Länge und Riemannsche Integration von Wegen in endlich-dimensionalen Räumen

Wir haben im vorangegangenen Kapitel bereits den Begriff des Weges eingeführt, vgl 10.6. Wir führen nun zunächst für eine gewisse Klasse von Wegen einen offensichtlich erscheinenden Begriff der *Weglänge* ein und leiten für sog. *stückweise stetig differenzierbare Wege* (s.u.) eine einfache Berechnung für deren Länge her.

Generalvoraussetzung. Seien in diesem Kapitel stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist also $[a, b]$ insbesondere ein kompaktes Intervall von $\mathbb{R}$.

Weglänge

Definition 11.1 (Rektifizierbarkeit und Länge von Wegen). Seien V ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum und $c\colon [a, b] \to V$ ein Weg in V.

(i) Für jede *Zerlegung* $\mathfrak{Z}\colon a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ von $[a, b]$ definieren wir

$$\boxed{L(c, \mathfrak{Z})} := \sum_{j=1}^{k} \|c(a_j) - c(a_{j-1})\| \in [0, \infty[.$$

Dann ist also $L(c, \mathfrak{Z})$ die Länge des dem Weg eibeschriebenen Streckenzuges durch die Punkte $c(a) = c(a_0), \ldots, c(a_k) = c(b)$.

Für zwei Zerlegungen $\mathfrak{Z}, \widetilde{\mathfrak{Z}}$ von $[a, b]$ gilt dann offenbar wegen der Dreiecksungleichung

$$\widetilde{\mathfrak{Z}} \text{ Verfeinerung von } \mathfrak{Z} \Longrightarrow L(c, \widetilde{\mathfrak{Z}}) \geq L(c, \mathfrak{Z}).$$

(ii) $c\colon [a, b] \to V$ heißt *rektifizierbar* genau dann, wenn

$$\{L(c, \mathfrak{Z}) \,|\, \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \subset \mathbb{R}$$

nach oben beschränkt ist. In diesem Fall heißt

$$\boxed{L(c)} := \sup\{L(c, \mathfrak{Z}) \,|\, \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

die *Länge von c*.

Bemerkung. Da je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum äquivalent sind, hängt die Rektifizierbarkeit oder Nicht-Rektifizierbarkeit von c nur von dem V zugrunde liegenden Vektorraum ab und nicht von der speziellen Wahl der Norm auf V.

Im Falle der Rektifizierbarkeit von c hängt die Länge von c aber natürlich von der speziellen Wahl der Norm auf V ab.

Beispiel. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die kanonische euklidischen Norm $\|\ldots\|_2$ und definieren $c\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$c(t) := (c_1(t), c_2(t)) := \begin{cases} (0, 0), & \text{falls } t = 0, \\ \left(t, t \cos(\frac{\pi}{t})\right), & \text{falls } t \in]0, 1]. \end{cases}$$

c ist stetig aber nicht rektifizierbar.

[Die Stetigkeitsaussage ist klar. Die Nicht-Rektifizierbarkeit sieht man folgendermaßen ein:

Für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ bezeichne $\mathfrak{Z}_k$ die Zerlegung $0 < \frac{1}{k+1} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$ von $[0,1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L(c, \mathfrak{Z}_k) &\geq \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\left\| c\left(\frac{1}{j+1}\right) - c\left(\frac{1}{j}\right)\right\|_2}_{\geq \left|c_2\left(\frac{1}{j+1}\right) - c_2\left(\frac{1}{j}\right)\right| = \left|\frac{(-1)^{j+1}}{j+1} - \frac{(-1)^j}{j}\right| = \frac{1}{j} + \frac{1}{j+1}} \\ &\geq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \xrightarrow{k\to\infty} +\infty. \quad] \end{aligned}$$

Definition 11.2 (Stückweise stetig differenzierbare Wege)**.** Seien V ein normierter Vektorraum endlicher Dimension und $c\colon [a,b] \to V$ ein Weg in V.

c heißt *stückweise stetig differenzierbar* genau dann, wenn eine Zerlegung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ von $[a,b]$ mit $c|_{[a_{i-1},a_i]}$ stetig differenzierbar für alle $i \in \{1,\ldots,k\}$ existiert. Dies bedeutet, daß $c|_{[a_{i-1},a_i]}$ für alle $i \in \{1,\ldots,k\}$ zu einem stetig differenzierbaren Weg $J_i \to V$ erweitert werden kann, wobei J_i ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$ mit $J_i \supset [a_i, a_{i+1}]$ ist – c braucht aber nicht stetig zu sein.

Hauptsatz 11.3.
Vor.: *Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Ferner sei $c\colon [a,b] \to V$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in V.*
Beh.:

(i) c ist rektifizierbar und $L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|\,\mathrm{d}t$, d.h. die Weglänge ist das Zeitintegral über die Geschwindigkeit von c[83].

Hierbei sei $\int_a^b \|c'(t)\|\,\mathrm{d}t := \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} \|c'(t)\|\,\mathrm{d}t$, wobei $c|_{[a_{i-1},a_i]}$ stetig differenzierbar für alle $i \in \{1,\ldots,k\}$.

(ii) Ist $\mathfrak{Z}_\nu$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von $[a,b]$, vgl. 8.12, so gilt

$$\lim_{\nu\to\infty} L(c, \mathfrak{Z}_\nu) = L(c).$$

Beweis. Wir beweisen den Hauptsatz nur im Falle, daß c auf ganz $[a,b]$ stetig differenzierbar ist. Den allgemeinen Fall führt man dann leicht auf den speziellen zurück, indem man den bereits bewiesenen Teil auf jedes stetig differenzierbare Teilstück des Weges anwendet.

Wir zeigen zunächst

$$\forall_{\mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]} \; L(c, \mathfrak{Z}) \leq \int_a^b \|c'(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{341}$$

[83]Für $c\colon [a,b] \to V$ wie im Hauptsatz heißt $\|c'(t)\|$ die *Geschwindigkeit von c zur Zeit t*, wobei $t \in [a,b]$.

[Zu (341): Sei $\mathfrak{Z}$: $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Wegen

$$L(c,\mathfrak{Z}) = \sum_{j=1}^{k} \|c(a_j) - c(a_{j-1})\|$$

und

$$\int_a^b \|c'(t)\| \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{k} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|c'(t)\| \mathrm{d}t$$

genügt es zum Nachweis von (341) zu zeigen, daß gilt

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,k\}} \|c(a_j) - c(a_{j-1})\| \leq \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

Zum Beweis hiervon sei $j \in \{1,\ldots,k\}$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $c(a_j) \neq c(a_{j-1})$, denn sonst ist die Aussage trivial. Es folgt

$$\begin{aligned} \|c(a_j) - c(a_{j-1})\| &= \left[\left\langle c(t), \frac{c(a_j) - c(a_{j-1})}{\|c(a_j) - c(a_{j-1})\|}\right\rangle\right]_{a_{j-1}}^{a_j} \\ &\overset{8.29}{=} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \underbrace{\left\langle c'(t), \frac{c(a_j) - c(a_{j-1})}{\|c(a_j) - c(a_{j-1})\|}\right\rangle}_{\overset{(\mathrm{CS})}{\leq} \|c'(t)\| \cdot 1} \mathrm{d}t \leq \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Damit ist (341) gezeigt.]

Wir zeigen als nächstes

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} \exists_{\delta\in\mathbb{R}_+} \forall_{\mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]} \left(d(\mathfrak{Z}) < \delta \Longrightarrow \int_a^b \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t < L(c,\mathfrak{Z}) + \varepsilon\right). \tag{342}$$

[Zum Beweis hiervon seien $n := \dim_{\mathbb{R}} V$ und $v_1,\ldots,v_n$ eine Orthonormalbasis von V. Für jedes $i \in \{1,\ldots,n\}$ sei c_i: $[a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall_{t\in[a,b]} c_i(t) = \langle c(t), v_i \rangle.$$

Mit c ist dann auch jedes c_i stetig differenzierbar, und es gilt

$$\forall_{t\in[a,b]} c(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, v_i \text{ und } c'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, v_i.$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Die stetigen Funktionen c_i: $[a,b] \to \mathbb{R}$ sind nach 5.20 auch gleichmäßig stetig, also existiert zu $\frac{\varepsilon}{b-a} \in \mathbb{R}_+$ jeweils ein $\delta_i \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{t,s\in[a,b]} \left(|t-s| < \delta_i \Longrightarrow |c_i'(t) - c_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right).$$

Dann gilt mit $\delta := \min\{\delta_1,\ldots,\delta_n\} \in \mathbb{R}_+$

$$\forall_{t,s\in[a,b]} \left(|t-s| < \delta \Longrightarrow \forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} |c_i'(t) - c_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right). \tag{343}$$

Sei nun $\mathfrak{Z}$: $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ mit $d(\mathfrak{Z}) < \delta$, d.h. mit

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,k\}}\, a_j - a_{j-1} < \delta. \tag{344}$$

Dann folgt für alle $j \in \{1,\ldots,k\}$ und $t \in [a_{j-1}, a_j]$

$$\begin{aligned}
&\|c'(t)\| - \left\|\frac{c(a_j) - c(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}}\right\| \\
&\overset{9.35}{\leq} \left\|c'(t) - \frac{c(a_j) - c(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}}\right\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n}\Bigg(c_i'(t) - \underbrace{\frac{c_i(a_j) - c_i(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}}}_{\overset{6.10}{=} c_i'(\xi_{ij}) \text{ mit } \xi_{ij} \in [a_{j-1}, a_j]}\Bigg) v_i\right\| \\
&\overset{9.35, \|v_i\|=1}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |c_i'(t) - c_i'(\xi_{ij})| \\
&\overset{(343)}{<} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ da } t, \xi_{ij} \in [a_{j-1}, a_j] \text{ und } |t - \xi_{ij}| \leq a_j - a_{j-1} \overset{(344)}{<} \delta,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \|c'(t)\|\, \mathrm{d}t - L(c, \mathfrak{Z}) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|c'(t)\|\, \mathrm{d}t - \underbrace{\|c(a_j) - c(a_{j-1})\|}_{= \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\|c(a_j) - c(a_{j-1})\|}{a_j - a_{j-1}}\, \mathrm{d}t} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \Big(\int_{a_{j-1}}^{a_j} \|c'(t)\| - \underbrace{\frac{\|c(a_j) - c(a_{j-1})\|}{a_j - a_{j-1}}}_{= \left\|\frac{c(a_j) - c(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}}\right\|} \Big)\, \mathrm{d}t \\
&< \sum_{j=1}^{k} (a_j - a_{j-1}) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

womit (342) bewiesen ist.]

Zu (ii): Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Wähle hierzu $\delta \in \mathbb{R}_+$ gemäß (342). Nach Voraussetzung von (ii) existiert $\nu_0 \in \mathbb{N}_+$ mit

$$\forall_{\nu\in\mathbb{N}_+} \left(\nu \geq \nu_0 \Longrightarrow d(\mathfrak{Z}_\nu) < \delta\right).$$

Dann folgt für jedes $\nu \in \mathbb{N}_+$ mit $\nu \geq \nu_0$

$$L(c, \mathfrak{Z}_\nu) \overset{(341)}{\leq} \int_a^b \|c'(t)\|\, \mathrm{d}t \overset{(342)}{<} L(c, \mathfrak{Z}_\nu) + \varepsilon,$$

und hieraus ergibt sich (ii).

Zu (i): Aus (341) folgt sofort, daß c rektifizierbar ist sowie

$$L(c) \leq \int_a^b \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Angenommen es gilt $L(c) < \int_a^b \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t$. Dann existiert eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit

$$L(c) + \varepsilon \leq \int_a^b \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t. \tag{345}$$

Wähle zu ε zunächst ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ gemäß (342) und sodann eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a,b]$ mit $d(\mathfrak{Z}) < \delta$. Dann folgt

$$L(c,\mathfrak{Z}) \overset{\text{Def. von } L(c)}{\leq} L(c) \overset{(345)}{\leq} \int_a^b \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon \overset{(342)}{<} L(c,\mathfrak{Z}),$$

Widerspruch! Damit ist auch (i) bewiesen. □

Beispiel. Wir betrachten den Weg $c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ im euklidischen $\mathbb{R}^2$, der durch

$$\forall_{t \in [0,2\pi]} \, c(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

gegeben ist.

Man rechnet mühelos nach, daß $L(c) = 2\pi$ gilt.

Riemannsche Integration von Wegen

Im zweiten Teil dieses Kapitels wollen wir Wege, die in endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen verlaufen, Riemannsch integrieren.

Definition 11.4 (Riemann-Integrierbarkeit)**.** Seien V ein endlich-dimesnionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $c\colon [a,b] \to V$ ein Weg in V.

c heißt *Riemann-integrierbar über* $[a,b]$ genau dann, wenn gilt

$$\forall_{l \in V^*} \; l \circ c\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ist beschränkt und Riemann-integrierbar gemäß 8.6.}$$

Ist dies der Fall, so existiert genau ein $\boxed{\int_a^b c(t) \, \mathrm{d}t} \in V$, das sog. *Riemann-Integral von c über* $[a,b]$, mit

$$\forall_{l \in V^*} \; l\left(\int_a^b c(t) \, \mathrm{d}t\right) = \int_a^b (l \circ c)(t) \, \mathrm{d}t. \tag{346}$$

[Denn die Funktion

$$\Lambda\colon V^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l \longmapsto \int_a^b (l \circ c)(t) \, \mathrm{d}t,$$

ist offenbar $\mathbb{R}$-linear, also gilt $\Lambda \in (V^*)^*$. Nach linearer Algebra ist

$$V \longrightarrow (V^*)^*, \quad v \longmapsto \begin{pmatrix} V^* & \to & \mathbb{R} \\ l & \mapsto & l(v) \end{pmatrix}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Isomorphismus, also existiert genau ein $v = \int_a^b c(t) \, \mathrm{d}t \in V$ wie in (346).]

Warnung. Die Bezeichnung *Wegintegral längs eines Weges c* hat eine andere Bedeutung also *Integral von c*. Wir werden jenes in dieser Vorlesung allerdings auch nicht diskutieren.

Bemerkung. Im Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ ist (346) äquivalent zu

$$\int_a^b c(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b c_1(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, \int_a^b c_n(t)\,\mathrm{d}t\right). \tag{347}$$

[Die Richtung (346) $\Rightarrow$ (347) ist trivial, und (347) $\Rightarrow$ (346) folgt daraus, daß die zur Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ duale Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist.]

Beispiel 11.5. Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $v \in V$ und $c\colon [a,b] \to V$ der konstante Weg vom Wert v. Dann ist c Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b c(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\,v.$$

Beweis. Für jedes $l \in V^*$ ist $l \circ c\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konstant, also nach 8.8 Riemann-integrierbar. Ferner gilt

$$\begin{aligned} l\left(\int_a^b c(t)\,\mathrm{d}t\right) &\overset{(346)}{=} \int_a^b \underbrace{(l \circ c)(t)}_{=l(v)}\,\mathrm{d}t \overset{8.8}{=} (b-a)\,l(v) \\ &\overset{l \text{ linear}}{=} l\left((b-a)\,v\right), \end{aligned}$$

daher folgt die Behauptung. □

Satz 11.6. *Jeder stetige Weg $c\colon [a,b] \to V$ in einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Jede lineare Abbildung $l\colon V \to \mathbb{R}$ ist stetig, also auch $l \circ c\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Der Satz folgt nun aus Satz 8.10. □

Definition 11.7 (Riemannsche Summen)**.** Es seien $c\colon [a,b] \to V$ ein Weg in einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V,

$$\mathfrak{Z}\colon a = a_0 < \ldots < a_k = b \text{ eine Zerlegung von } [a,b]$$

und $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ ein *Zwischenpunktsystem von* $\mathfrak{Z}$, vgl. 8.13 (i).
Wir definieren die *Riemannsche Summe von c bzgl. $\mathfrak{Z}$ und* Ξ als

$$\boxed{\mathfrak{R}(c, \mathfrak{Z}, \Xi)} := \sum_{i=1}^k (a_i - a_{i-1})\,c(\xi_i) \in V.$$

Satz 11.8. *Es seien $c\colon [a,b] \to V$ ein Riemann-integrierbarer Weg in einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V, $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ (vgl. 8.12) und Ξ_ν für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ein Zwischenpunktsystem von $\mathfrak{Z}_\nu$. Dann gilt*

$$\int_a^b c(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{R}(c, \mathfrak{Z}_\nu, \Xi_\nu).$$

Beweis. Für jedes $l \in V^*$ gilt

$$\begin{aligned} l\left(\int_a^b c(t)\,\mathrm{d}t\right) &\overset{(346)}{=} \int_a^b (l \circ c)(t)\,\mathrm{d}t \overset{8.14}{=} \lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{R}(l \circ c, \mathfrak{Z}_\nu, \Xi_\nu) \\ &\overset{11.7,\, l \text{ linear}}{=} \lim_{\nu \to \infty} l\left(\mathfrak{R}(c, \mathfrak{Z}_\nu, \Xi_\nu)\right), \end{aligned}$$

und dies ist gleichbedeutend mit der Behauptung des Satzes. □

Hauptsatz 11.9 (Die $\mathbb{R}$-Linearität des Riemann-Integrales)**.** *Es seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $c_1, c_2\colon [a,b] \to V$ zwei Riemann-integrierbare Wege in V und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist der Weg*

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2\colon [a,b] \longrightarrow V, \quad t \longmapsto \lambda_1 c_1(t) + \lambda_2 c_2(t)$$

Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda_1 \int_a^b c_1(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b c_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Für alle $l \in V^*$ sind $l \circ c_1, l \circ c_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nach Voraussetzung Riemann-integrierbar, also nach 8.17 auch $\lambda_1(l \circ c_1) + \lambda_2(l \circ c_2)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Hieraus folgt die Riemann-Integrierbarkeit von $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2\colon [a,b] \to V$, denn die Linearität von l liefert $\lambda_1(l \circ c_1) + \lambda_2(l \circ c_2) = l \circ (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)$.

Des weiteren gilt für jedes $l \in V^*$

$$\begin{aligned}
l\left(\int_a^b (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)(t)\,\mathrm{d}t\right) &\overset{(346)}{=} \int_a^b \left(\lambda_1(l \circ c_1) + \lambda_2(l \circ c_2)\right)(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{8.17}{=} \lambda_1 \int_a^b (l \circ c_1)(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b (l \circ c_2)(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(346)}{=} \lambda_1 l\left(\int_a^b c_1(t)\,\mathrm{d}t\right) + \lambda_2 l\left(\int_a^b c_2(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&\overset{l\text{ linear}}{=} l\left(\lambda_1 \int_a^b c_1(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b c_2(t)\,\mathrm{d}t\right),
\end{aligned}$$

und hieraus folgt der Hauptsatz. □

Satz 11.10. *Es seien V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $c\colon [a,b] \to V$ ein stetiger Weg in V, also ist auch $\|c\|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und somit Riemann-integrierbar.*

Dann gilt

$$\left\|\int_a^b c(t)\,\mathrm{d}t\right\| \le \int_a^b \|c(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Seien $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge ausgezeichneter Zerlegungen von $[a,b]$ und Ξ_ν für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ein Zwischenpunktsystem von $\mathfrak{Z}_\nu$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left\|\int_a^b c(t)\,\mathrm{d}t\right\| &\overset{11.8}{=} \lim_{\nu\to\infty} \underbrace{\|\mathfrak{R}(c, \mathfrak{Z}_\nu, \Xi_\nu)\|}_{\overset{11.6}{\le} \mathfrak{R}(\|c\|, \mathfrak{Z}_\nu, \Xi_\nu)} \\
&\overset{8.14}{\le} \int_a^b \|c(t)\|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz gezeigt. □

Definition 11.11. Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, J ein Intervall von $\mathbb{R}$, $c\colon J \to V$ ein Weg in V sowie $\tilde{a}, \tilde{b} \in J$ mit $\tilde{b} \le \tilde{a}$. Wir definieren

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} c(t)\,\mathrm{d}t := -\int_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} c(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \int_{\tilde{a}}^{\tilde{a}} c(t)\,\mathrm{d}t := 0.$$

Hauptsatz 11.12 (der Differential- und Integralrechnung).
Vor.: *Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $J \supset [a,b]$ ein Intervall von $\mathbb{R}$ sowie $c\colon J \to V$ ein stetiger Weg in V.*
Beh.:

(i) *(Leistung der Intergralrechnung für die Differentialrechnung)*
Ist $\tilde{a} \in J$, so existiert genau eine stetig differenzierbare Abbildung $C\colon J \to \mathbb{R}$ mit $C' = c$ und $C(\tilde{a}) = 0$, nämlich

$$\forall_{t \in J}\, C(t) := \int_{\tilde{a}}^{t} c(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

(ii) *(Leistung der Differentialrechnung für die Integralrechnung)*
Ist $c|_{[a,b]}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sogar stetig differenzierbar, so folgt

$$\int_a^b c'(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{c(t)\big|_a^b} := \boxed{[c(t)]_a^b} := c(b) - c(a).$$

Beweis. Zu (i): Seien $t \in J$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $J \setminus \{t\}$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Dann folgt für alle $l \in V^*$

$$\begin{aligned} l(C(t_n)) - l(C(t)) &\overset{\text{Def.}}{=} l\left(\int_{\tilde{a}}^{t_n} c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) - l\left(\int_{\tilde{a}}^{t} c(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \\ &\overset{11.11,(346),8.22(ii)}{=} \int_{\tilde{a}}^{t_n} (l\circ c)(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_{\tilde{a}}^{t} (l\circ c)(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

also

$$l\left(\frac{l(C(t_n)) - l(C(t))}{t_n - t}\right) = \frac{1}{t_n - t}\left(\int_{\tilde{a}}^{t_n} (l\circ c)(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_{\tilde{a}}^{t} (l\circ c)(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right),$$

und nach 8.29 (i) konvergiert die r. S. für $n \to \infty$ gegen $(l\circ c)(t) = l(c(t))$. Hieraus folgt, daß C differenzierbar ist und die stetige Abbildung c als Ableitung besitzt.

Zum Nachweis von (i) bleibt zu zeigen, daß C mit $C' = c$ und $C(\tilde{a}) = 0$ eindeutig ist, und dies folgt leicht aus Satz 10.11.

Zu (ii): c' ist nach Voraussetzung stetig, also nach 11.6 Riemann-integrierbar. Des weiteren gilt für jedes $l \in V^*$ und $t \in [a,b]$

$$(l\circ c)'(t) = \mathrm{d}_{c(t)} l \circ \mathrm{d}_t c(1) \overset{l\,\text{linear}}{=} l \circ \mathrm{d}_t c(1) = l \circ c'(t), \tag{348}$$

also für alle $l \in V^*$

$$\begin{aligned} l\left(\int_a^b c'(t)\,\mathrm{d}t\right) &\overset{(346)}{=} \int_a^b (l\circ c')(t)\,\mathrm{d}t \overset{(348)}{=} \int_a^b (l\circ c)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{8.29(i)}{=} (l\circ c)(b) - (l\circ c)(a) \overset{l\,\text{linear}}{=} l(c(b) - c(a)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt (ii). □

12 Riemannsche Integration im $\mathbb{R}^n$

Analog zur eindimensionalen Theorie ist mehrdimensionale Integrationstheorie dadurch motiviert, daß man zu einer gegebenen nicht-negativen Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ aus $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ nach $\mathbb{R}$ das $(n+1)$-dimensionale Volumen der *Ordinatenmenge* $\{(p,t) \in M \times \mathbb{R} \,|\, 0 \le t \le f(p)\}$ *von* f bestimmen möchte. Wir verallgemeinern hier den Ansatz des in Kapitel 8 diskutierten *Riemannnschen Integrales* und bemerken an dieser Stelle nur, daß man auch das sog. *Regelintegral* oder die *Lebesguesche*[84] *Integrationstheorie* studieren kann.

Für „schöne“ (z.B. stetige) Funktionen unterscheiden sich die drei Integrale nicht, und auch der Aufbau der Integrationstheorien verläuft gleich: Zunächst definiert man das Integral für Treppenfunktionen[85] auf die offensichtliche Weise und erweitert dann den Integralbegriff auf Funktionen, die sich durch Treppenfunktionen approximieren lassen, indem man das Integral dann als Grenzwert der approximierenden Treppenfunktionen definiert.

Die o.g. Integrale unterscheiden sich im Hinblick auf den Begriff der Approximation. Beim Regelintegral wird im Sinne gleichmäßiger Konvergenz approximiert, beim Lebesgueschen betrachtet man Grenzwerte monotoner Folgen von Treppenfunktionen und in der Riemannschen Theorie werden Funktionen untersucht, deren Werte zwischen zwei Treppenfunktionen mit beliebig kleiner Integraldifferenz liegen.

Die Menge der integrierbaren Funktionen nach Riemann ist dann größer als diejenige, die das Regelintegral zur Verfügung stellt. Lebesgue-integrierbare Funktionen wiederum sind stets Riemann-integrierbar.

Generalvoraussetzung. In diesem Kapitel sei stets $n \in \mathbb{N}_+$.

Definition 12.1.

(i) Eine Teilmenge Q von $\mathbb{R}^n$ heißt ein *kompakter Quader* genau dann, wenn gilt

$$Q = J_1 \times \ldots \times J_n,$$

wobei $J_i := [a_i, b_i]$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $a_i \le b_i$.

(ii) Ist $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, so heißt

$$\boxed{\mathrm{Vol}_n(Q)} := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

das *n-dimensionale Volumen von Q* und

$$\boxed{\mathrm{Diam}(Q)} := \sup\{\|p - q\|_2 \,|\, p, q \in Q\}$$

der *Durchmesser von Q*.

[84] nach Henri Lebesgue (1875–1941)

[85] Eine *Treppenfunktion* ist eine Funktion, die auf endlich vielen paarweise disjunkten Quadern konstant und ansonsten null ist.

(iii) Sind $k \in \mathbb{N}_+$ und $Q, Q_1, \ldots, Q_k \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Quader, so heißt

$$\mathfrak{Z} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$$

eine *Zerlegung von* Q genau dann, wenn gilt

$$\forall_{i,j \in \{1,\ldots,k\}} \mathring{Q}_i \cap \mathring{Q}_j = \emptyset \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{k} Q_i = Q.$$

$Q_1, \ldots, Q_k$ heißen *Teilquader von* $\mathfrak{Z}$.

(iv) Sind $k \in \mathbb{N}_+$ und $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ eine Zerlegung eines kompakten Quaders (in $\mathbb{R}^n$), so heißt

$$\boxed{d(\mathfrak{Z})} := \max\{\operatorname{Diam}(Q_i) \,|\, i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

die *Feinheit der Zerlegung* $\mathfrak{Z}$.

(v) Sind $\mathfrak{Z}, \widetilde{\mathfrak{Z}}$ zwei Zerlegungen eines kompakten Quaders (in $\mathbb{R}^n$), so heißt $\mathfrak{Z}$ eine *Verfeinerung von* $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ genau dann, wenn jeder Teilquader von $\mathfrak{Z}$ in einem Teilquader von $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ enthalten ist.

In diesem Fall gilt offenbar

$$d(\mathfrak{Z}) \le d(\widetilde{\mathfrak{Z}}). \tag{349}$$

(vi) Seien Q ein kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$), $k, \tilde{k} \in \mathbb{N}_+$ und $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ sowie $\widetilde{\mathfrak{Z}} = \{\widetilde{Q}_1, \ldots, \widetilde{Q}_{\tilde{k}}\}$ zwei Zerlegungen von Q. Dann sind die nicht-leeren Schnitte $Q_i \cap \widetilde{Q}_j$, $i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, \tilde{k}\}$, Quader, und diese bilden wieder eine Zerlegung von Q, die man die *Superposition von* $\mathfrak{Z}$ *und* $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ nennt und mit $\boxed{\mathfrak{Z} \vee \widetilde{\mathfrak{Z}}}$ notiert.

Offenbar ist $\mathfrak{Z} \vee \widetilde{\mathfrak{Z}}$ sowohl eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}$ als auch von $\widetilde{\mathfrak{Z}}$.

Lemma 12.2. *Es seien* $k \in \mathbb{N}_+$ *und* $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ *eine Zerlegung eines kompakten Quaders* $Q \subset \mathbb{R}^n$. *Dann gilt* $\operatorname{Vol}_n(Q) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Vol}_n(Q_i)$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_+$. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Sei daher $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ und gelte das Lemma für $n - 1$.

Seien $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, sowie $a_j^i, b_j^i \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ derart, daß gilt $Q = \times_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$ und $Q_i = \times_{j=1}^{n} [a_j^i, b_j^i]$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $a_n < b_n$ und $\forall_{i \in \{1,\ldots,n\}} a_n^i < b_n^i$. Dann existieren $k_0 \in \mathbb{N}$ und $c_1, \ldots, c_{k_0+1} \in \mathbb{R}$ mit $\{a_n^i, b_n^i \,|\, i \in \{1, \ldots, k\}\} = \{c_1, \ldots, c_{k_0+1}\}$ und

$$a_n = c_1 < \ldots < c_{k_0} < c_{k_0+1} = b_n. \tag{350}$$

Indem wir $Q_1, \ldots, Q_k$ jeweils mit den $\mathbb{R}^{n-1} \times [c_\kappa, c_{\kappa+1}], \kappa \in \{1, \ldots, k_0\}$, schneiden, erhalten wir aus $\mathfrak{Z}$ eine Verfeinerung $\widetilde{\mathfrak{Z}} = \{\widetilde{Q}_1, \ldots, \widetilde{Q}_{\tilde{k}}\}$ von $\mathfrak{Z}$, d.h. zu jedem $\iota \in \{1, \ldots, \tilde{k}\}$ existieren $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $\kappa \in \{1, \ldots, k_0\}$ mit

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Q}_\iota &= Q_i \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times [c_\kappa, c_{\kappa+1}]\right) = \left(\bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_l^i, b_l^i]\right) \times \left([a_n^i, b_n^i] \cap [c_\kappa, c_{\kappa+1}]\right) \\
&= \left(\bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_l^i, b_l^i]\right) \times [c_\kappa, c_{\kappa+1}].
\end{aligned}
$$

Zu $i \in \{1, \ldots, k\}$ existieren eindeutige $k_i, i_1, \ldots, i_{k_i} \in \mathbb{N}_+$ und $\widetilde{Q}_{i_1}, \ldots, \widetilde{Q}_{i_{k_i}} \in \widetilde{\mathfrak{Z}}$ mit

$$
Q_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} \widetilde{Q}_{i_j} \quad \text{sowie} \quad \forall_{j,l \in \{1,\ldots,k_i\}}\, \mathring{\widetilde{Q}}_{i_j} \cap \mathring{\widetilde{Q}}_{i_l} = \varnothing,
$$

und nach eventueller Umnumerierung der $\widetilde{Q}_{i_j}, j \in \{1, \ldots, k_i\}$, können wir Zahlen $\kappa(i_1), \ldots, \kappa(i_{k_i}), \kappa(i_{k_i+1}) \in \{1, \ldots, k_0\}$ mit

$$
a_n^i = c_{\kappa(i_1)} < \ldots < c_{\kappa(i_{k_i})} < c_{\kappa(i_{k_i+1})} = b_n^i \tag{351}
$$

und

$$
\forall_{j \in \{1,\ldots,k_i\}}\, \widetilde{Q}_{i_j} = \left(\bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_l^i, b_l^i]\right) \times [c_{\kappa(i_j)}, c_{\kappa(i_{j+1})}]
$$

wählen. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k_i} \mathrm{Vol}_n(\widetilde{Q}_{i_j}) &= \sum_{j=1}^{k_i} \left(\prod_{l=1}^{n-1} (b_l^i - a_l^i)\right) \cdot (c_{\kappa(i_{j+1})} - c_{\kappa(i_j)}) \\
&= \left(\prod_{l=1}^{n-1} (b_l^i - a_l^i)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k_i} (c_{\kappa(i_{j+1})} - c_{\kappa(i_j)})\right) \\
&\overset{(351)}{=} \left(\prod_{l=1}^{n-1} (b_l^i - a_l^i)\right) \cdot (b_n^i - a_n^i) = \mathrm{Vol}_n(Q_i),
\end{aligned}
$$

also auch

$$
\sum_{\iota=1}^{\tilde{k}} \mathrm{Vol}_n(\widetilde{Q}_\iota) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(Q_i). \tag{352}
$$

Für $\kappa \in \{1, \ldots, k_0\}$ sei nun

$$
\widehat{Q}_\kappa := \left(\bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_l, b_l]\right) \times [c_\kappa, c_{\kappa+1}]
$$

der Teil von Q, der „zwischen" den Hyperebenen $\mathbb{R}^{n-1} \times \{c_\kappa\}$ und $\mathbb{R}^{n-1} \times \{c_{\kappa+1}\}$ liegt. Es existieren dann wieder eindeutig bestimmte $k_\kappa^*, \kappa_1, \ldots, \kappa_{k_\kappa^*} \in \mathbb{N}_+$ und $\widetilde{Q}_{\kappa_1}, \ldots, \widetilde{Q}_{\kappa_{k_\kappa^*}} \in \widetilde{\mathfrak{Z}}$ mit

$$
\widehat{Q}_\kappa = \bigcup_{j=1}^{k_\kappa^*} \widetilde{Q}_{\kappa_j} \quad \text{sowie} \quad \forall_{j,m \in \{1,\ldots,k_i^*\}}\, \mathring{\widetilde{Q}}_{\kappa_j} \cap \mathring{\widetilde{Q}}_{\kappa_m} = \varnothing, \tag{353}
$$

und wir zeigen nun

$$\sum_{\kappa=1}^{k_0} \mathrm{Vol}_n(\widehat{Q}_\kappa) = \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \mathrm{Vol}_n(\widetilde{Q}_i), \tag{354}$$

$$\mathrm{Vol}_n(Q) = \sum_{\kappa=1}^{k_0} \mathrm{Vol}_n(\widehat{Q}_\kappa), \tag{355}$$

woraus mit (352) für n folgt.

Zu (354), (355): Sei $\kappa \in \{1, \dots, k_0\}$. Da die $\widetilde{Q}_{\kappa_j}$, $j \in \{1, \dots, k_\kappa^*\}$, Elemente von $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ sind, existieren $a_{\kappa_j,l}, b_{\kappa_j,l} \in \mathbb{R}$, $l \in \{1, \dots, n-1\}$, mit

$$\widetilde{Q}_{\kappa_j} = \left(\bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_{\kappa_j,l}, b_{\kappa_j,l}] \right) \times [c_i, c_{i+1}],$$

und wegen (353) gilt

$$\forall_{j,m \in \{1,\dots,k_\kappa^*\}} \left(\bigtimes_{l=1}^{n-1}]a_{\kappa_j,l}, b_{\kappa_j,l}[\right) \cap \left(\bigtimes_{l=1}^{n-1}]a^*_{i_m,l}, b^*_{i_m,l}[\right) = \varnothing,$$

$$\bigcup_{j=1}^{k_\kappa^*} \left(\bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_{\kappa_j,l}, b_{\kappa_j,l}] \right) = \bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_l, b_l],$$

d.h. $\left\{ \bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_{\kappa_j,l}, b_{\kappa_j,l}] \,|\, j \in \{1, \dots, k_\kappa^*\} \right\}$ ist eine Zerlegung von $\bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_l, b_l]$. Daher folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß gilt

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^{n-1} (b_l - a_l) &= \mathrm{Vol}_{n-1} \left(\bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_l, b_l] \right) = \mathrm{Vol}_{n-1} \left(\bigcup_{j=1}^{k_\kappa^*} \left(\bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_{\kappa_j,l}, b_{\kappa_j,l}] \right) \right) \\ &\overset{\mathrm{IV}}{=} \sum_{j=1}^{k_\kappa^*} \mathrm{Vol}_{n-1} \left(\bigtimes_{l=1}^{n-1} [a_{\kappa_j,l}, b_{\kappa_j,l}] \right) = \sum_{j=1}^{k_\kappa^*} \prod_{l=1}^{n-1} (b_{\kappa_j,l} - a_{\kappa_j,l}), \end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_n(\widehat{Q}_\kappa) &= \left(\prod_{l=1}^{n-1} (b_l - a_l) \right) \cdot (c_{\kappa+1} - c_\kappa) \\ &= \sum_{j=1}^{k_\kappa^*} \left(\left(\prod_{l=1}^{n-1} (b_{\kappa_j,l} - a_{\kappa_j,l}) \right) (c_{\kappa+1} - c_\kappa) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k_\kappa^*} \mathrm{Vol}_n(\widetilde{Q}_{i_j^*}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt (354), und wegen

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_n(Q) &= \left(\prod_{l=1}^{n-1} (b_l - a_l) \right) \cdot (b_n - a_n) \\ &\overset{(350)}{=} \left(\prod_{l=1}^{n-1} (b_l - a_l) \right) \cdot \left(\sum_{\kappa=1}^{k_0} (c_{\kappa+1} - c_\kappa) \right) \\ &= \sum_{\kappa=1}^{k_0} \left(\prod_{l=1}^{n-1} (b_l - a_l) \right) \cdot (c_{\kappa+1} - c_\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{k_0} \mathrm{Vol}_n(\widehat{Q}_\kappa) \end{aligned}$$

ist auch (355) gezeigt. $\square$

Definition 12.3 (Ober- und Untersumme)**.** Es seien Q ein kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$), $k \in \mathbb{N}_+$ sowie $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ eine Zerlegung von Q und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir definieren dann die *Obersumme von f bzgl. $\mathfrak{Z}$* als

$$\boxed{\overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z})} := \sum_{i=1}^{k} M_i \operatorname{Vol}_n(Q_i), \quad \text{wobei } M_i := \sup f(Q_i) \in \mathbb{R},$$

und die *Untersumme von f bzgl. $\mathfrak{Z}$* als

$$\boxed{\underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z})} := \sum_{i=1}^{k} m_i \operatorname{Vol}_n(Q_i), \quad \text{wobei } m_i := \inf f(Q_i) \in \mathbb{R}.$$

(Daß gilt $M_i, m_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \dots, k\}$, folgt aus der Beschränktheit von f.)

Trivialerweise gilt stets

$$\overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}) \geq \underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}).$$

Lemma 12.4. *Seien Q ein kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$) sowie $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ zwei Zerlegungen von Q.*

(i) $\underline{\mathfrak{Z}_2 \text{ Verfeinerung von } \mathfrak{Z}_1}$
$\Longrightarrow \overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_2) \leq \overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_1) \wedge \underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_1) \leq \underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_2)$,

d.h. beim Übergang zu einer Verfeinerung wird die Obersumme höchstens kleiner und die Untersumme höchstens größer.

(ii) $\underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_1) \leq \overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_2)$,

d.h. jede Untersumme ist untere Schranke für alle Obersummen, und jede Obersumme ist obere Schranke für alle Untersummen.

Beweis. Zu (i): Seien $Q_1, \dots, Q_k$ (mit $k \in \mathbb{N}_+$) die in $\mathfrak{Z}_1$ enthaltenen kompakten Quader (in $\mathbb{R}^n$). Da $\mathfrak{Z}_2$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_1$ ist, existieren dann zu jedem $i \in \{1, \dots, k\}$ eindeutig bestimmte $k_i, i_1, \dots i_{k_i} \in \mathbb{N}_+$, $Q_{i_1}, \dots, Q_{i_{k_i}} \in \mathfrak{Z}_2$, derart, daß $\{Q_{i_1}, \dots, Q_{i_{k_i}}\}$ eine Zerlegung von Q_i ist. Lemma 12.2 ergibt

$$\forall_{i \in \{1,\dots,k\}} \operatorname{Vol}_n(Q_i) = \sum_{j=1}^{k_i} \operatorname{Vol}_n(Q_{i_j}). \tag{356}$$

Des weiteren gilt für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ und jedes $j \in \{i_1, \dots, k_i\}$

$$M_{i_j} := \sup f(Q_{i_j}) \leq M_i = \sup f(Q_i), \tag{357}$$

$$M_i \operatorname{Vol}_n(Q_i) - \sum_{j=1}^{k_i} M_{i_j} \operatorname{Vol}_n(Q_{i_j}) \overset{(356)}{=} \sum_{j=1}^{k_i} (M_i - M_{i_j}) \operatorname{Vol}_n(Q_{i_j}) \overset{(357)}{\geq} 0, \tag{358}$$

$$m_{i_j} := \inf f(Q_{i_j}) \geq m_i = \inf f(Q_i), \tag{359}$$

$$m_i \operatorname{Vol}_n(Q_i) - \sum_{j=1}^{k_i} m_{i_j} \operatorname{Vol}_n(Q_{i_j}) \overset{(356)}{=} \sum_{j=1}^{k_i} (m_i - m_{i_j}) \operatorname{Vol}_n(Q_{i_j}) \overset{(359)}{\leq} 0, \tag{360}$$

also auch

$$\overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_1) = \sum_{i=1}^{k} M_i \operatorname{Vol}_n(Q_i) \overset{(358)}{\geq} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} M_{i_j} \operatorname{Vol}_n(Q_{i_j}) = \overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_2),$$

$$\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_1) = \sum_{i=1}^{k} m_i \operatorname{Vol}_n(Q_i) \overset{(360)}{\leq} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k_i} m_{i_j} \operatorname{Vol}_n(Q_{i_j}) = \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_2),$$

womit (i) gezeigt ist.

Der Beweis von (ii) kann von dem von Lemma 8.3 (ii) übernommen werden, indem man $\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2$ durch $\mathfrak{Z}_1 \vee \mathfrak{Z}_2$ ersetzt. □

Definition 12.5 (Ober- und Unterintegral auf Quadern)**.** Seien Q ein kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$) und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir definieren dann das *Oberintegral von f* als

$$\boxed{\overline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)} := \inf\left\{\overline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } Q\right\} \in \mathbb{R}$$

und das *Unterintegral von f* als

$$\boxed{\underline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)} := \sup\{\underline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } Q\} \in \mathbb{R}.$$

Beachte, daß $\left\{\overline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } Q\right\}$ nach 12.5 (ii) nach unten und $\{\underline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } Q\}$ nach oben beschränkt ist.

Es gilt also für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q

$$\overline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \leq \overline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z})\,,$$
$$\underline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \geq \underline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z})\,.$$

Völlig analog zu Lemma 8.5 folgt:

Lemma 12.6. *Seien Q ein kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$) und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt*

$$\underline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \leq \overline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n).$$

□

Satz 12.7. *Seien $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.*

Dann existiert zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ von Q gilt:

$$d(\mathfrak{Z}) < \delta \Longrightarrow 0 \leq \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) - \overline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) < \varepsilon$$
$$\textit{und} \quad 0 \leq \underline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) - \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon$$

Beweisskizze. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\mathrm{Vol}_n(Q) \neq 0$ gilt, da die Behauptung sonst trivial ist.

Per definitionem existieren Zerlegungen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ von Q mit

$$0 \le \overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_1) - \overline{\int_Q} f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{361}$$

$$0 \le \underline{\int_Q} f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) - \underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}_2) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{362}$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Z}_0 = \{Q_1^0, \dots, Q_{k_0}^0\}$ diejenige Zerlegung von Q, die aus $\mathfrak{Z}_1 \vee \mathfrak{Z}_2$ entsteht, indem man sämtliche Teilquader, deren Volumen gleich null ist, entfernt.

Für jedes $i \in \{1, \dots, k_0\}$ sei $\rho_i \in \mathbb{R}_+$ das Minimum der halben Kantenlängen[86] von Q_i^0, und wir setzen $\rho := \min\{\rho_1, \dots, \rho_{k_0}\} \in \mathbb{R}_+$. Zu $r \in]0, \rho[$ sei dann $Q_i^0(r)$ der in Q_i^0 enthaltene Quader, der denselben Mittelpunkt[87] wie Q_i^0 und Randabstand r zu Q_i^0 hat[88].

Sei ferner $C := \sup f(Q) \overset{\mathrm{Vor.}}{\in} \mathbb{R}$. Wir wählen $\delta \in]0, \rho[$ mit

$$2\,C \sum_{i=1}^{k_0} \left(\mathrm{Vol}_n(Q_i^0) - \mathrm{Vol}_n\left(Q_i^0(\delta)\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{363}$$

und zeigen, daß dieses δ die Behauptung erfüllt.

Sei $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ eine beliebige Zerlegung von Q mit $d(\mathfrak{Z}) < \delta$. Dann ist $\widetilde{\mathfrak{Z}} := \mathfrak{Z} \vee \mathfrak{Z}_0$ ebenfalls eine Zerlegung von Q mit $d(\mathfrak{Z}) < \delta$, und es gilt

$$\begin{aligned} 0 \le \overline{\mathfrak{S}}\,(f, \mathfrak{Z}) &- \overline{\int_Q} f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \left(\overline{\mathfrak{S}}\left(f, \widetilde{\mathfrak{Z}}\right) - \overline{\int_Q} f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)\right) + \left(\overline{\mathfrak{S}}\,(f, \mathfrak{Z}) - \overline{\mathfrak{S}}\left(f, \widetilde{\mathfrak{Z}}\right)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \le \underline{\int_Q} &f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) - \underline{\mathfrak{S}}\,(f, \mathfrak{Z}) \\ &= \left(\underline{\int_Q} f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) - \underline{\mathfrak{S}}\left(f, \widetilde{\mathfrak{Z}}\right)\right) + \left(\underline{\mathfrak{S}}\left(f, \widetilde{\mathfrak{Z}}\right) - \underline{\mathfrak{S}}\,(f, \mathfrak{Z})\right). \end{aligned}$$

Zum Nachweis der Behauptung genügt es zu zeigen, daß die beiden Summanden auf den rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen jeweils kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ sind.

[86] Die *Kantenlängen eines Quaders* $\times_{\iota=1}^n [a_\iota, b_\iota]$ sind die reellen Zahlen $b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n$.

[87] Der *Mittelpunkt eines Quaders* $\times_{\iota=1}^n [a_\iota, b_\iota]$ ist $(a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, \dots, a_n + \frac{b_n - a_n}{2})$.

[88] Der *Randabstand von* $\times_{\iota=1}^n [a_\iota, b_\iota]$ *zu einem darin enthaltenen Quader* Q^0 beträgt r (mit $r \in \mathbb{R}_+$ hinreichend klein) genau dann, wenn gilt $Q^0 = \times_{\iota=1}^n [a_\iota + r, b_\iota - r] (\subset \times_{\iota=1}^n [a_\iota, b_\iota])$.

$\widetilde{\mathfrak{Z}}$ ist eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_0$, und diese ist eine Verfeinerung sowohl von $\mathfrak{Z}_1$ als auch von $\mathfrak{Z}_2$. Daher folgt aus Lemma 12.4 (i)

$$\begin{aligned}
0 &\le \overline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) - \overline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \\
&\le \overline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}_0) - \overline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \\
&\le \overline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}_1) - \overline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \overset{(361)}{<} \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 &\le \underline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) - \underline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) \\
&\le \underline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) - \underline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}_0) \\
&\le \underline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) - \underline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}_2) \overset{(362)}{<} \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt daher

$$0 \le \overline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}) - \overline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad 0 \le \underline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) - \underline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Beweis hiervon: $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ ist Verfeinerung von $\mathfrak{Z} = \{Q_1,\dots,Q_k\}$, also induziert jene für $i \in \{1,\dots,k\}$ eine Zerlegung $\widetilde{\mathfrak{Z}}_i = \{\widetilde{Q}_{i_1},\dots,\widetilde{Q}_{i_{k_i}}\}$ von Q_i. Mit Lemma 12.4 folgt

$$\begin{aligned}
0 \le \overline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}) - \overline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) &= \sum_{i=1}^{k} M_i \operatorname{Vol}_n(Q_i) - \overline{\mathfrak{S}}\big(f|_{Q_i},\widetilde{\mathfrak{Z}}_i\big) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k_i} \big(M_i - \sup f(\widetilde{Q}_{i_j})\big) \operatorname{Vol}_n(\widetilde{Q}_{i_j}), \qquad (364) \\
0 \le \underline{\mathfrak{S}}\big(f,\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) - \underline{\mathfrak{S}}\,(f,\mathfrak{Z}) &= \sum_{i=1}^{k} \underline{\mathfrak{S}}\big(f|_{Q_i},\widetilde{\mathfrak{Z}}_i\big) - m_i \operatorname{Vol}_n(Q_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k_i} \big(\inf f(\widetilde{Q}_{i_j}) - m_i\big) \operatorname{Vol}_n(\widetilde{Q}_{i_j}). \qquad (365)
\end{aligned}$$

Die Summanden zu $i \in \{1,\dots,k\}$, $j \in \{1,\dots,k_i\}$ in (364) und (365) sind null, falls $\forall_{l\in\{1,\dots,k_0\}}\, \widetilde{Q}_{i_j} \cap \partial Q_l^0 = \varnothing$.De facto wird daher nur über diejenigen i,j mit $\exists_{l\in\{1,\dots,k_0\}}\, \widetilde{Q}_{i_j} \cap \partial Q_l^0 \ne \varnothing$ summiert, und wegen $C = \sup f(Q)$ sind die Zahlen in (364) und (365) dann (betraglich) kleiner oder gleich

$$2C \sum \operatorname{Vol}_n(\widetilde{Q}_{i_j}),$$

wobei die letzte Summe über alle i_j mit $\exists_{l\in\{1,\dots,k_0\}}\, \widetilde{Q}_{i_j} \cap \partial Q_l^0 \ne \varnothing$ zu nehmen ist.

Nun gilt $d(\mathfrak{Z}) < \delta$, also liegen alle Q_{i_j} mit $\exists_{l \in \{1,\ldots,k_0\}}\, \widetilde{Q}_{i_j} \cap \partial Q_l^0 \neq \varnothing$ in der Menge $\bigcup_{\iota=1}^{k_0} Q_\iota^0 \setminus Q_\iota^0(\delta)$, und diese hat (verwende Lemma 12.2) Volumen kleiner (oder gleich) $\sum_{\iota=1}^{k_0} \mathrm{Vol}_n(Q_\iota^0) - \mathrm{Vol}_n\big(Q_\iota^0(\delta)\big)$. Daher folgt, daß (364) und (365) kleiner (oder gleich) $2\,C \sum_{\iota=1}^{k_0} \mathrm{Vol}_n(Q_\iota^0) - \mathrm{Vol}_n\big(Q_\iota^0(\delta)\big) \overset{(363)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$ sind. □

Definition 12.8 (Ober- und Unterintegral auf beschränkten Mengen)**.** Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

(i) Ist $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, so definieren wir $\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\hat{f}(p) := \begin{cases} f(p), & p \in M, \\ 0, & p \notin M. \end{cases}$$

(ii) Sind sogar $M \neq \varnothing$ eine beschränkte[89] Teilmenge (von $\mathbb{R}^n$) und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so definieren wir das *Ober-* bzw. *Unterintegral von f* durch

$$\boxed{\overline{\int_M} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)} := \overline{\int_Q} \hat{f}|_Q(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$\boxed{\underline{\int_M} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)} := \underline{\int_Q} \hat{f}|_Q(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R},$$

wobei Q ein beliebiger kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$) mit $M \subset Q$ sei.

[Wir müssen zeigen, daß dies wohldefiniert ist:

Seien $\mathfrak{Q} := \{Q \subset \mathbb{R}^n \,|\, Q \text{ kompakter Quader mit } M \subset Q\}$ und $Q^* := \bigcap_{Q \in \mathfrak{Q}} Q$. Dann ist Q^* offenbar der kleinste kompakte Quader (in $\mathbb{R}^n$), der M umfaßt, d.h. $\forall_{Q \in \mathfrak{Q}}\, M \subset Q^* \subset Q$.

Es genügt nun zu zeigen, daß für jeden kompakten Quader Q mit $Q^* \subsetneqq Q$ gilt

$$\overline{\int_{Q^*}} \hat{f}|_{Q^*}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) = \overline{\int_Q} \hat{f}|_Q(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n), \tag{366}$$

$$\underline{\int_{Q^*}} \hat{f}|_{Q^*}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) = \underline{\int_Q} \hat{f}|_Q(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n). \tag{367}$$

[89] Da je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum äquivalent sind, hängt die Beschränktheit nicht von der speziellen Wahl der Norm auf $\mathbb{R}^n$ ab.

Beweis hiervon: Da f beschränkt ist, existiert eine Zahl $C \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{p \in Q} |\hat{f}(p)| \leq C. \tag{368}$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Wir konstruieren einen Quader Q_ε^*, indem wir jede Seite[90] von Q^*, die keine Seite von Q ist, „leicht nach außen verschieben", so daß gilt

$$Q^* \subsetneqq Q_\varepsilon^* \subset Q \quad \text{und} \quad \mathrm{Vol}_n(Q_\varepsilon^*) - \mathrm{Vol}_n(Q^*) < \frac{\varepsilon}{3C}. \tag{369}$$

(Dies ist möglich, da für $j \in \{1, \dots, n\}$ die Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \longmapsto \mathrm{Vol}_n\left(\bigtimes_{i=1}^{j-1}[a_i, b_i] \times [a_j - t, b_j] \times \bigtimes_{i=j+1}^{n}[a_i, b_i]\right),$$
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \longmapsto \mathrm{Vol}_n\left(\bigtimes_{i=1}^{j-1}[a_i, b_i] \times [a_j, b_j + t] \times \bigtimes_{i=j+1}^{n}[a_i, b_i]\right)$$

stetig sind.)

Jede Zerlegung $\mathfrak{Z}_1$ von Q_ε^* läßt sich (durch „Verlängerung der Seiten von Q_ε^*") zu einer Zerlegung $\mathfrak{Z}_2$ von Q erweitern (d.h. per definitionem $\mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2$) derart, daß gilt $\overline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q_\varepsilon^*}, \mathfrak{Z}_1) = \overline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}_2)$ und $\underline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q_\varepsilon^*}, \mathfrak{Z}_1) = \underline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}_2)$; beachte, daß die Teilquader von $\mathfrak{Z}_2$, die nicht in $\mathfrak{Z}_1$ liegen, nach Konstruktion von Q_ε^* keinen Punkt von M enthalten.

Umgekehrt existiert auch zu jeder Zerlegung $\mathfrak{Z}_2$ von Q eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_1$ von Q_ε^* mit $\overline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q_\varepsilon^*}, \mathfrak{Z}_1) = \overline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}_2)$ und $\underline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q_\varepsilon^*}, \mathfrak{Z}_1) = \underline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}_2)$; erweitere nämlich die Zerlegung $\{Q_\varepsilon^*\}$ zu einer Zerlegung $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ von Q und setze $\mathfrak{Z}_1 := \{\widetilde{Q} \in \mathfrak{Z}_2 \vee \widetilde{\mathfrak{Z}} \,|\, \mathring{\widetilde{Q}} \cap \mathring{Q}_\varepsilon^* \neq \varnothing\}$.

Daher gilt

$$\overline{\int_{Q_\varepsilon^*}} \hat{f}|_{Q^*}(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) = \overline{\int_Q} \hat{f}|_Q(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n),$$
$$\underline{\int_{Q_\varepsilon^*}} \hat{f}|_{Q^*}(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) = \underline{\int_Q} \hat{f}|_Q(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n),$$

d.h. wir haben (366) für Q_ε^* anstelle von Q zu zeigen.

Gemäß Satz 12.7 wählen zu $\frac{\varepsilon}{3}$ ein $\delta_1 \in \mathbb{R}_+$ derart, daß für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q_* gilt

$$d(\mathfrak{Z}) < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &0 \leq \overline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q^*}, \mathfrak{Z}) - \overline{\int_{Q^*}} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) < \tfrac{\varepsilon}{3}, \\ &0 \leq \underline{\int_{Q^*}} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) - \underline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q^*}, \mathfrak{Z}) < \tfrac{\varepsilon}{3} \end{aligned} \tag{370}$$

[90] Unter einer *Seite eines n-dimensionalen Quaders* $\bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ wollen wir im folgenden die Teilmengen $\bigtimes_{i=1}^{j-1}[a_i, b_i] \times \{a_j\} \times \bigtimes_{i=j+1}^n [a_i, b_i]$ bzw. $\bigtimes_{i=1}^{j-1}[a_i, b_i] \times \{b_j\} \times \bigtimes_{i=j+1}^n [a_i, b_i]$, wobei $j \in \{1, \dots, n\}$, von $\partial \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ verstehen.

und ein $\delta_2 \in \mathbb{R}_+$ derart, daß für alle Zerlegungen $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ von Q_ε^* gilt

$$\begin{aligned} d\big(\widetilde{\mathfrak{Z}}\big) < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad & 0 \le \overline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q_\varepsilon^*}, \widetilde{\mathfrak{Z}}) - \overline{\int\limits_{Q_\varepsilon^*}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) < \tfrac{\varepsilon}{3}, \\ & 0 \le \underline{\int\limits_{Q_\varepsilon^*}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) - \underline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q_\varepsilon^*}, \widetilde{\mathfrak{Z}}) < \tfrac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{371}$$

Sei nun $\mathfrak{Z}^*$ eine beliebige Zerlegung von Q^* mit $d(\mathfrak{Z}^*) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $\mathfrak{Z}^*$ läßt sich wie oben beschrieben zu einer Zerlegung $\mathfrak{Z}_\varepsilon^*$ von Q_ε^* erweitern, und wegen (368), (369) gilt

$$\overline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q^*}, \mathfrak{Z}^*) - \frac{\varepsilon}{3} < \overline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q_\varepsilon^*}, \mathfrak{Z}_\varepsilon^*) < \overline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q^*}, \mathfrak{Z}^*) + \frac{\varepsilon}{3}, \tag{372}$$

$$\underline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q^*}, \mathfrak{Z}^*) - \frac{\varepsilon}{3} < \underline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q_\varepsilon^*}, \mathfrak{Z}_\varepsilon^*) < \underline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_{Q^*}, \mathfrak{Z}^*) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{373}$$

Durch eventuelle Verkleinerung der Teilquader von $\mathfrak{Z}_\varepsilon^*$, die mit dem Inneren von Q^* leeren Schnitt haben, läßt sich erreichen, daß $d(\mathfrak{Z}_\varepsilon^*) = d(\mathfrak{Z}^*)$ gilt. Dann folgt aus (370), (371), (372), (373) und der Dreiecksungleichung

$$\left| \overline{\int\limits_{Q_\varepsilon^*}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) - \overline{\int\limits_{Q^*}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \underline{\int\limits_{Q_\varepsilon^*}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) - \underline{\int\limits_{Q^*}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \right| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig, folgen (366) sowie (366) für Q_ε^* anstelle von Q, und hierauf hatten wir den Nachweis der Wohldefiniertheit zurückgeführt.]

Sinnvollerweise setzen wir ferner

$$\overline{\int\limits_{\varnothing}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) := \underline{\int\limits_{\varnothing}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) := 0.$$

Aus 12.6 und 12.8 folgt sofort:

Lemma 12.9. *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt*

$$\underline{\int\limits_{M}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \le \overline{\int\limits_{M}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n).$$

□

Wie im Eindimensionalen heißt nun eine Funktion Riemann-integrierbar, wenn in der Gleichung des letzten Lemmas Gleichheit gilt:

Definition 12.10 (Riemann-Integrierbarkeit)**.** Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

f heißt *Riemann-integrierbar über M* genau dann, wenn gilt

$$\overline{\int\limits_M} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) = \underline{\int\limits_M} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n).$$

Ist f Riemann-integrierbar über M, so heißt die reelle Zahl

$$\begin{aligned} \boxed{\int\limits_M f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)} \quad &:= \quad \overline{\int\limits_M} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \quad \underline{\int\limits_M} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

das *Riemann-Integral von f über M.*

Bemerkung. Der hier gegebene Integralbegriff (nach Riemann) stellt auch für $n = 1$ eine Verallgemeinerung des in der eindimensionalen Analysis behandelten Riemann-Integrales dar, insofern nämlch, als die Integrationsbereiche keine Intervalle zu sein brauchen.

Für Intervalle verwenden wir im folgenden auch die in Kapitel 8 eingeführten Notationen.

Satz 12.11 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)**.**
Vor.: *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $Q \supset M$ ein M umfassender kompakter Quader in ($\mathbb{R}^n$).*

Beh.: *f ist Riemann-integrierbar über M*
$\iff$ *Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q derart, daß*
$\overline{\mathfrak{S}}\left(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}\right) - \underline{\mathfrak{S}}\left(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}\right) < \varepsilon.$

Beweis analog zum eindimensionalen Fall in 8.7 (beachte 12.8), schreibe aber $\mathfrak{Z}_1 \vee \mathfrak{Z}_2$ anstelle von $\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2$. □

Auch der Beweis des nächsten Satzes verallgemeinert – wie wir nun sehen werden – unsere frühere Argumentation.

Hauptsatz 12.12. *Seien Q ein kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$) und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig.*
Dann ist f Riemann-integrierbar über Q.

Bemerkung. Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum ist beschränkt.

Beweis. Wir wählen auf $\mathbb{R}^n$ speziell die euklidische Norm $\|\dots\|_2$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach Satz 9.33 ist f gleichmäßig stetig, also existiert eine Zahl $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\forall_{p,q \in Q} \left(\|p - q\|_2 < \delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{Vol}_n(Q)} \right).$$

Ferner seien $k \in \mathbb{N}_+$ und $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ eine Zerlegung von Q mit $d(\mathfrak{Z}) < \delta$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist Q_i kompakt und $f|_{Q_i}$ stetig, also existieren nach Satz 9.28 $v_i, w_i \in Q_i$ mit

$$f(v_i) = \max f(Q_i) = M_i \quad \text{und} \quad f(w_i) = \min f(Q_i) = m_i.$$

Wegen $v_i, w_i \in Q_i$ folgt $\|v_i - w_i\|_2 \leq \mathrm{Diam}(Q_i) \leq d(\mathfrak{Z}) < \delta$, also

$$|f(v_i) - f(w_i)| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{Vol}_n(Q)}. \tag{374}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}) - \underline{\mathfrak{S}}(f, \mathfrak{Z}) &= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(f(v_i) - f(w_i))}_{\geq 0} \mathrm{Vol}_n(Q_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} |f(v_i) - f(w_i)| \, \mathrm{Vol}_n(Q_i) \\
&\overset{(374)}{<} \frac{\varepsilon}{\mathrm{Vol}_n(Q)} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(Q_i) \overset{12.2}{=} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ folgt nach 12.11 die Riemann-Integrierbarkeit von f über Q. □

Bemerkung. Der letzte Satz ist i.a. falsch, wenn man Q durch eine beliebige kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ersetzt: Die *Smith*[91]*-Volterra*[92]*-Cantor-Menge* M_{SVC} entsteht aus $[0,1]$, indem man im ersten Schritt das in der Mitte liegende offene Intervall $]\frac{3}{8}, \frac{5}{8}[$ der Länge $\frac{1}{4}$ entfernt, im zweiten Schritt aus jedem verbleibenden Intervall das in der Mitte liegende offene Intervall der Länge $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$ entfernt, im k-ten Schritt ($k \in \mathbb{N}_+$) aus jedem verbliebenen Intervall das in der Mitte liegende offene Intervall der Länge $\left(\frac{1}{4}\right)^k$ entfernt usw. M_{SVC} ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$. (Die Abgeschlossenheit ergibt sich, da M_{SVC} als Schnitt aller „verbleibenden" Intervalle – und die sind abgeschlossen – dargestellt werden kann.) Wir werden in 12.38 aber zeigen, daß die stetige Funktion $1|_{M_{SVC}}\colon M_{SVC} \to \mathbb{R}$ nicht Riemann-integrierbar über M_{SVC} ist.

Der nächste Satz ergibt sich sofort aus Definition 12.8 und Satz 12.7.

Satz 12.13. *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Q ein M umfassender kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$).*

Dann existiert zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß für alle Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ von Q gilt:

$$\begin{aligned}
d(\mathfrak{Z}) < \delta \Longrightarrow &\left(0 \leq \overline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}) - \overline{\int_M} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) < \varepsilon\right) \\
&\textit{und} \left(0 \leq \underline{\int_M} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) - \underline{\mathfrak{S}}(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}) < \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

□

[91] nach Henry John Stephen Smith (1826–1883)
[92] nach Vito Volterra (1860–1940)

12.14 (ausgezeichnete Folgen von Zerlegungen).

(i) Es sei Q ein kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$).

Definiton. Sei $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von Q.

$(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ heißt *ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von* Q genau dann, wenn gilt $\lim_{n\to\infty} d(\mathfrak{Z}_\nu) = 0$.

Satz. *Ist $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von Q, so gilt*

$$\overline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \lim_{\nu\to\infty} \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_\nu)\,,$$

$$\underline{\int_Q} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \lim_{\nu\to\infty} \underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}_\nu)\,.$$

Beweis wie im eindimensionalen Fall, vgl. 8.12. □

(ii) Aus (i) und Definition 12.8 folgt:

Korollar. *Sind M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen eines M umfassenden kompakten Quaders $Q \subset \mathbb{R}^n$, so gilt*

$$\overline{\int_M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \lim_{\nu\to\infty} \overline{\mathfrak{S}}\left(\hat{f}|_Q,\mathfrak{Z}_\nu\right),$$

$$\underline{\int_M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \lim_{\nu\to\infty} \underline{\mathfrak{S}}\left(\hat{f}|_Q,\mathfrak{Z}_\nu\right).$$

□

Definition 12.15 (Riemannsche Summen). Seien $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(i) Seien $k \in \mathbb{N}_+$ und $\mathfrak{Z} = \{Q_1,\dots,Q_k\}$ eine Zerlegung von Q.

Dann heißt $\mathfrak{B} = \{b_1,\dots,b_k\}$ eine *Besetzung von* $\mathfrak{Z}$ genau dann, wenn $\forall_{i\in\{1,\dots,k\}}\, b_i \in Q_i$ gilt. Im Fall $n = 1$ haben die Begriffe *Besetzung von* $\mathfrak{Z}$ und *Zwischenpunktsystem von* $\mathfrak{Z}$ dieselbe Bedeutung, vgl. 8.13.

(ii) Sind $\mathfrak{Z},\mathfrak{B}$ wie in (i), so definieren wir die *Riemannsche Summe von f bzgl. $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{B}$* als

$$\boxed{\mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z},\mathfrak{B})} := \sum_{i=1}^{k} f(b_i)\,\mathrm{Vol}_n(Q_i).$$

Dann gilt offenbar (wegen $m_i \le f(b_i) \le M_i$)

$$\underline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z}) \le \mathfrak{R}(f,\mathfrak{Z},\mathfrak{B}) \le \overline{\mathfrak{S}}(f,\mathfrak{Z})\,. \tag{375}$$

Die folgenden Sätze 12.16 bis 12.21 beweist man analog zu den entsprechenden eindimensionalen Resultaten in 8.14 bis 8.19.

Hauptsatz 12.16. *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und über M Riemann-integrierbare Funktion und $Q \supset M$ ein kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$).*

Sind weiter $(\mathfrak{Z}_\nu)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von Q und $\mathfrak{B}_\nu$ eine Besetzung bzgl. $\mathfrak{Z}_\nu$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\int\limits_M f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{R}\left(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}_\nu, \mathfrak{B}_\nu\right).$$

□

Satz 12.17.
Vor.: *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt sowie $f\colon M \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über M. Ferner sei $h\colon f(M) \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion.*
Beh.: *Dann ist auch $h \circ f\colon M \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über M.* □

Satz 12.18.
Vor.: *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ beschränkte und über M Riemann-integrierbare Funktionen.*
Beh.: *Dann sind auch $f + g$, $|f|$, $f \cdot g\colon M \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über M.* □

Hauptsatz 12.19 (Die $\mathbb{R}$-Linearität des Riemann-Integrales)**.**
Vor.: *Seien M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über M sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
Beh.: *$\lambda f + \mu g\colon M \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und Riemann-integrierbar über M, und es gilt*

$$\begin{aligned}&\int\limits_M \lambda f(x_1,\dots,x_n) + \mu g(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)\\ &\quad= \lambda \int\limits_M f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) + \mu \int\limits_M g(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n).\end{aligned}$$ [93]

□

Hauptsatz 12.20 (Die Monotonie des Riemann-Integrales)**.**
Vor.: *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über M. Ferner gelte $f \le g$, d.h. per definitionem $\forall_{p\in M}\, f(p) \le g(p)$.*
Beh.:

$$\int\limits_M f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \le \int\limits_M g(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n).$$

□

[93] Die linke Seite definieren wir als $\int\limits_M (\lambda f + \mu g)(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)$.

Satz 12.21.
Vor.: *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt sowie $f\colon M \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über M.*
Beh.: *$|f|\colon M \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und Riemann-integrierbar über M, und es gilt*

$$\left|\int_M f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)\right| \le \int_M |f(x_1,\dots,x_n)|\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n).^{94}$$

□

Definition 12.22. Seien $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^n$, M eine beschränkte Teilmenge von $\widetilde{M}$ und $f\colon \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, daß $f|_M$ beschränkt ist. Wir definieren dann:

(i)

$$\bar{\int_M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \bar{\int_M} f|_M(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n),$$
$$\int_{\bar{M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) := \int_{\bar{M}} f|_M(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n).$$

(ii) f heißt *Riemann-integrierbar über M*, wenn die Einschränkung $f|_M$ Riemann-integrierbar über M ist, d.h.

$$\bar{\int_M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \int_{\bar{M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n).$$

In diesem Fall setzen wir

$$\int_M f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) := \int_M f|_M(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)$$
$$= \bar{\int_M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \int_{\bar{M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n).$$

Beispiel. Die konstante Funktion 1 ist nach Satz 12.12 Riemann-integrierbar über $[0,1]$ und nach ebendiesem Satz auch über jedem in $[0,1]$ enthaltenen kompakten Intervall. 1 ist aber nicht über der kompakten Teilmenge M_{SVC} von $[0,1]$ integrierbar, vgl. die Bemerkung auf Seite 251.

Wir werden unten sehen, daß eine über ihrem Definitionsbereich integrierbare Funktion über jeder *Jordan-meßbaren* Teilmenge des Definitionsbereiches integrierbar ist.

[94]Die rechte Seite definieren wir als $\int_M |f|(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)$.

Lemma 12.23.
Vor.: *Es seien N_1, N_2 beschränkte sowie disjunkte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und $f\colon N_1 \cup N_2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.*
Beh.:

$$\begin{aligned}
&\underline{\int}_{N_1} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) + \underline{\int}_{N_2} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)\\
&\qquad \le \underline{\int}_{N_1 \cup N_2} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)\\
&\qquad \le \underline{\int}_{N_1} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) + \overline{\int}_{N_2} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)\\
&\qquad \le \overline{\int}_{N_1 \cup N_2} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)\\
&\qquad \le \overline{\int}_{N_1} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) + \overline{\int}_{N_2} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n).
\end{aligned}$$

Beweisskizze. Setze $M := N_1 \cup N_2$. Seien $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader mit $Q \supset M$ und $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von Q und $f_1, f_2\colon Q \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen. Zeige dann für jedes $\nu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\underline{\mathfrak{S}}(f_1,\mathfrak{Z}_\nu) + \underline{\mathfrak{S}}(f_2,\mathfrak{Z}_\nu) \quad &\le \quad \underline{\mathfrak{S}}(f_1+f_2,\mathfrak{Z}_\nu) \le \underline{\mathfrak{S}}(f_1,\mathfrak{Z}_\nu) + \overline{\mathfrak{S}}(f_2,\mathfrak{Z}_\nu)\\
&\le \quad \overline{\mathfrak{S}}(f_1+f_2,\mathfrak{Z}_\nu) \le \overline{\mathfrak{S}}(f_1,\mathfrak{Z}_\nu) + \overline{\mathfrak{S}}(f_2,\mathfrak{Z}_\nu).
\end{aligned}$$

[Die zweite Ungleichung folgt daraus, daß für alle Funktionen $g_1, g_2\colon N \to \mathbb{R}$ auf einer Menge N gilt

$$\inf(g_1(N)) = \inf((g_1+g_2-g_2)(N)) \ge \inf((g_1+g_2)(N)) + \underbrace{\inf(-g_2(N))}_{=-\sup(g_2(M))},$$

und die dritte sieht man analog ein.]

Die Behauptung des Lemmas ergibt sich nun durch Grenzwertbildung für $\nu \to \infty$ mit $f_1 := (\widehat{f|_{N_1}})|_Q$ und $f_2 := (\widehat{f|_{N_2}})|_Q$. □

Hauptsatz 12.24.
Vor.: *Seien $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, $M \subset \widetilde{M}$ und $f\colon \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ beschränkt.*
Beh.:

(i) f Riemann-integrierbar über M und f Riemann-integrierbar über $\widetilde{M} \setminus M$ $\Longrightarrow$ f Riemann-integrierbar über $\widetilde{M}$ und

$$\begin{aligned}
&\int_{\widetilde{M}} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)\\
&\qquad = \int_M f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) + \int_{\widetilde{M}\setminus M} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n).
\end{aligned}$$

(ii) f Riemann-integrierbar über $\widetilde{M}$ und f Riemann-integrierbar über M
$\Longrightarrow$ *f Riemann-integrierbar über $\widetilde{M} \setminus M$ und*

$$
\begin{aligned}
&\int_{\widetilde{M}\setminus M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \\
&\qquad = \int_{\widetilde{M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) - \int_{M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n).
\end{aligned}
$$

Beweis. Zu (i): Aus Lemma 12.23 folgt

$$
\begin{aligned}
0 &\le \overline{\int_{\widetilde{M}}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) - \underline{\int}_{\widetilde{M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \\
&= \overline{\int_{M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) - \underline{\int}_{M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \\
&\quad + \overline{\int_{\widetilde{M}\setminus M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) - \underline{\int}_{\widetilde{M}\setminus M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n),
\end{aligned}
$$

und die letzten beiden Zeilen sind nach Voraussetzung jeweils gleich null, also auch die erste. Daher ist f über $\widetilde{M}$ Riemann-integrierbar.

Erneute Anwendung von Lemma 12.23 liefert nun

$$
\begin{aligned}
\int_{\widetilde{M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) &= \underline{\int}_{\widetilde{M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \\
&\le \underbrace{\underline{\int}_{M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)}_{\overset{\text{Vor.}}{=} \int_M f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)} + \underbrace{\overline{\int_{\widetilde{M}\setminus M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)}_{\overset{\text{Vor.}}{=} \int_{\widetilde{M}\setminus M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)} \\
&\le \overline{\int_{\widetilde{M}}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \int_{\widetilde{M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}
$$

und damit die Gültigkeit der Gleichung in (i).

Zu (ii): Aus der zweiten und dritten Ungleichung in Lemma 12.23 folgt

$$
\begin{aligned}
&\underline{\int}_{\widetilde{M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) - \overline{\int_{M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \\
&\qquad \overset{12.23}{\le} \underline{\int}_{\widetilde{M}\setminus M} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) \le \overline{\int_{\widetilde{M}\setminus M}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}
$$

$$\overset{12.23}{\leq} \overline{\int_{\widetilde{M}}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) - \underline{\int_{\bar{M}}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n),$$

und sowohl die rechte als auch die linke Seite dieser Ungleichungskette ist nach Voraussetzung gleich der rechten Seite der Gleichung in der Behauptung von (ii). Hieraus folgt offenbar (ii). □

Korollar 12.25. *Seien $N_1, N_2 \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt sowie $f\colon N_1 \cup N_2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die über N_1, N_2 und $N_1 \cap N_2$ Riemann-integrierbar ist.*

Dann ist f über $N_1 \cup N_2$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{N_1\cup N_2} & f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)\\ &= \int_{N_1} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) + \int_{N_2} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)\\ &\quad - \int_{N_1\cap N_2} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n).\end{aligned}$$

Beweis. Wende den Hauptsatz auf $N_1 \cup N_2 = N_1 \uplus (N_2 \setminus (N_1 \cap N_2))$ an! □

Definition 12.26 (Charakteristerische Funktion, Jordan-meßbare Mengen und ihr Volumen)**.** Es sei M eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

(i) Die Funktion $\boxed{1_M}$, die gegeben ist durch

$$1_M(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in M,\\ 0, & \text{falls } x \notin M,\end{cases}$$

heißt *charakteristische Funktion von M* .

(ii) Sei M beschränkt.

a) Wir nennen

$$\boxed{\overline{\mathrm{Vol}}_n(M)} := \underline{\int_{\bar{M}}} \mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)$$

äußeres Jordan[95]*-Maß von M* und

$$\boxed{\underline{\mathrm{Vol}}_n(M)} := \overline{\int_{M}} \mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)$$

inneres Jordan-Maß von M.

Beispiel. Für $M = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ gilt $\overline{\mathrm{Vol}}_n(M) = 1$ und $\underline{\mathrm{Vol}}_n(M) = 0$.

[95]nach Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922)

b) M heißt *Jordan-meßbar* genau dann, wenn 1_M Riemann-integrierbar ist, d.h. genau $\overline{\mathrm{Vol}}_n(M) = \underline{\mathrm{Vol}}_n(M)$.
Ist M Jordan-meßbar, so heißt

$$\boxed{\mathrm{Vol}_n(M)} := \int\limits_M \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) = \overline{\mathrm{Vol}}_n(M) = \underline{\mathrm{Vol}}_n(M)$$

das *n-dimensionale Volumen von M.*
Ist M ein kompakter Quader, so ist M offenbar Jordan-meßbar, und obige Definition des Volumens stimmt mit der aus Definition 12.1 überein.

Satz 12.27. *Seien $M, \widetilde{M}, N_1$ und N_2 beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann gelten:*

(i) $0 \le \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) \le \overline{\mathrm{Vol}}_n(M)$

(ii) N_1, N_2 *disjunkt*

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \underline{\mathrm{Vol}}_n(N_1) + \underline{\mathrm{Vol}}_n(N_2) &\le \underline{\mathrm{Vol}}_n(N_1 \uplus N_2) \\ &\le \underline{\mathrm{Vol}}_n(N_1) + \overline{\mathrm{Vol}}_n(N_2) \\ &\le \overline{\mathrm{Vol}}_n(N_1 \uplus N_2) \\ &\le \overline{\mathrm{Vol}}_n(N_1) + \overline{\mathrm{Vol}}_n(N_2) \end{aligned}$$

(iii) $M \subset \widetilde{M} \Longrightarrow \overline{\mathrm{Vol}}_n(M) \le \overline{\mathrm{Vol}}_n(\widetilde{M}) \wedge \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) \le \underline{\mathrm{Vol}}_n(\widetilde{M})$

(iv) $\overline{\mathrm{Vol}}_n(N_1 \cup N_2) \le \overline{\mathrm{Vol}}_n(N_1) + \overline{\mathrm{Vol}}_n(N_2)$

(v) $\widetilde{M}$ *Jordan-meßbar und* $M \subset \widetilde{M} \Longrightarrow \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) + \overline{\mathrm{Vol}}_n(\widetilde{M} \setminus M) = \mathrm{Vol}_n(\widetilde{M})$

(vi) M *Jordan-meßbar und* $M \subset \widetilde{M}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \mathrm{Vol}_n(M) + \overline{\mathrm{Vol}}_n(\widetilde{M} \setminus M) = \overline{\mathrm{Vol}}_n(\widetilde{M}) \text{ und} \\ & \mathrm{Vol}_n(M) + \underline{\mathrm{Vol}}_n(\widetilde{M} \setminus M) = \underline{\mathrm{Vol}}_n(\widetilde{M}) \end{aligned}$$

Beweis. (i) folgt aus Lemma 12.9, (ii) aus Lemma 12.23 und (v) sowie (vi) aus (ii).
(iii) folgt durch Anwendung von (ii) auf $N_1 = \widetilde{M} \setminus M$ und $N_2 = M$.
(iv) folgt aus (ii) und (iii) wegen $N_1 \cup N_2 = N_1 \uplus (N_2 \setminus (N_1 \cap N_2))$. □

Satz 12.28. *Seien $N_1, N_2 \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, Jordan-meßbar und disjunkt.*
Dann ist auch $N_1 \uplus N_2$ Jordan-meßbar, und es gilt

$$\mathrm{Vol}_n(N_1 \uplus N_2) = \mathrm{Vol}_n(N_1) + \mathrm{Vol}_n(N_2).$$

Beweis. Der Satz folgt sofort aus Teil (ii) des vorherigen. □

Satz 12.29. *Seien $\widetilde{M}$ eine beschränkte Jordan-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und M eine Jordan-meßbare Teilmenge von $\widetilde{M}$.*
Dann ist auch $\widetilde{M} \setminus M$ Jordan-meßbar, und es gilt

$$\mathrm{Vol}_n(\widetilde{M} \setminus M) = \mathrm{Vol}_n(\widetilde{M}) - \mathrm{Vol}_n(M).$$

Beweis. Der Satz folgt sofort aus Hauptsatz 12.24 (ii). □

Korollar 12.30.

(i) *Ist Q ein kompakter Quader in ($\mathbb{R}^n$), so ist $\mathring{Q}$ Jordan-meßbar, und es gilt*

$$\mathrm{Vol}_n(\mathring{Q}) = \mathrm{Vol}_n(Q).$$

(ii) *Die Vereinigung endlich vieler kompakter oder beschränkter offener Quader*[96] *$Q_1, \ldots, Q_k$ (in $\mathbb{R}^n$), die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben, ist Jordan-meßbar, und es gilt*

$$\mathrm{Vol}_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} Q_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}_n(Q_i).$$

Beweis. Zu (i): Q ist meßbar. Der Rand von Q ist Vereinigung endlich vieler kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$) mit Volumen null, hat also gemäß Satz 12.27 (iv) selbst das Volumen null, und nun zeigt Satz 12.29, daß $\mathring{Q}$ Jordan-meßbar mit Volumen $\mathrm{Vol}_n(Q)$ ist.

(ii) folgt aus (i) mittels Satz 12.28. □

Satz 12.31. *Sei M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Vol}}_n(M) &= \inf\{\mathrm{Vol}_n(N^*) \,|\, N^* \textit{ kompakt und Jordan-meßbar} \wedge M \subset N^*\}, \\ \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) &= \sup\{\mathrm{Vol}_n(N_*) \,|\, N_* \textit{ offen und Jordan-meßbar} \wedge N_* \subset M\}. \end{aligned}$$

Beweis. 1.) Sind N_*, N^* wie in den Mengen auf den rechten Seiten, so ergibt Satz 12.27 (iii) wegen $N_* \subset M \subset N^*$

$$\overline{\mathrm{Vol}}_n(M) \leq \mathrm{Vol}_n(N^*) \quad \text{und} \quad \mathrm{Vol}_n(N_*) \leq \underline{\mathrm{Vol}}_n(M),$$

also folgt

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Vol}}_n(M) &\leq \inf\{\mathrm{Vol}_n(N^*) \,|\, N^* \text{ kompakt und Jordan-meßbar} \wedge M \subset N^*\}, \\ \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) &\geq \sup\{\mathrm{Vol}_n(N_*) \,|\, N_* \text{ offen und Jordan-meßbar} \wedge N_* \subset M\}. \end{aligned}$$

2.) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Es existieren kompakte Jordan-meßbare Mengen N'_*, N^* derart, daß gilt $N'_* \subset M \subset N^*$ und

$$0 \leq \mathrm{Vol}_n(N^*) - \overline{\mathrm{Vol}}_n(M) < \varepsilon \quad \text{und} \quad 0 \leq \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) - \mathrm{Vol}_n(N'_*) < \varepsilon. \tag{376}$$

[Zu (376): Sei Q ein M umfassender kommpakter Quader (in $\mathbb{R}^n$). Nach Satz 12.13 existiert eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ von Q mit

$$0 \leq \overline{\mathfrak{S}}((1_M)|_Q, \mathfrak{Z}) - \overline{\mathrm{Vol}}_n(M) < \varepsilon \;\text{ und }\; 0 \leq \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) - \underline{\mathfrak{S}}((1_M)|_Q, \mathfrak{Z}) < \varepsilon. \tag{377}$$

Setze dann

$$I^* := \{i \in \{1, \ldots, k\} \,|\, Q_i \cap M \neq \varnothing\} \quad \text{und} \quad N^* := Q = \bigcup_{i \in I^*} Q_i,$$

[96] $Q = \times_{i=1}^{n} J_i \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein *offener Quader* genau dann, wenn $J_1, \ldots, J_n$ offene Intervalle von $\mathbb{R}$ sind.

$$I_* := \{i \in \{1,\dots,k\} \,|\, Q_i \subset M\} \quad \text{und} \quad N'_* := \bigcup_{i \in I_*} Q_i.$$

Wir erhalten also sowohl N'_* als auch N^* als Vereinigung kompakter Quader, die keine inneren Punkte gemeinsam haben. (Falls $N'_* = \emptyset$, so ist die Vereinigung leer.) Wegen (377) und Korollar 12.30 (ii) erfüllen N'_*, N^* die Aussage (376).]

Schließlich sei $N_* := \mathring{N}'_*$. Dann ergeben Korollar 12.30 und (376)

$$0 \le \mathrm{Vol}_n(N^*) - \overline{\mathrm{Vol}}_n(M) < \varepsilon \quad \text{und} \quad 0 \le \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) - \mathrm{Vol}_n(N_*) < \varepsilon,$$

und aus der Beliebigkeit von $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ folgt auch

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Vol}}_n(M) &\ge \inf\{\mathrm{Vol}_n(N^*) \,|\, N^* \text{ kompakt und Jordan-meßbar} \wedge M \subset N^*\}, \\ \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) &\le \sup\{\mathrm{Vol}_n(N_*) \,|\, N_* \text{ offen und Jordan-meßbar} \wedge N_* \subset M\}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Der Beweis zeigt, daß wir in Satz 12.31 „N_* offen“ durch „N_* kompakt“ ersetzen dürfen.

Korollar 12.32. *Ist M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so gilt*

$$\overline{\mathrm{Vol}}_n(M) = \overline{\mathrm{Vol}}_n(\overline{M}) \quad \text{und} \quad \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) = \underline{\mathrm{Vol}}_n(\overline{M}).$$

Beweis. Für jede Jordan-meßbare kompakte Menge $N^* \supset M$ gilt nach (251) $\overline{M} \subset N^*$, also $\overline{\mathrm{Vol}}_n(\overline{M}) \le \mathrm{Vol}_n(N^*)$. Aus Satz 12.31 folgt $\overline{\mathrm{Vol}}_n(\overline{M}) \le \overline{\mathrm{Vol}}(M)$. Andererseits ergibt $M \subset \overline{M}$, daß $\overline{\mathrm{Vol}}(M) \le \overline{\mathrm{Vol}}_n(\overline{M})$, also folgt die erste Gleichung.

Die zweite Gleichung zeigt man analog. □

Satz 12.33. *Es seien M eine beschränkte sowie Jordan-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $f := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} + a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Translation um $a \in \mathbb{R}^n$ und $g := \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Dilatation mit Faktor $\lambda \in \mathbb{R}_+$.*

Dann sind auch $f(M)$ und $g(M)$ Jordan-meßbar, und für die Volumina gilt $\mathrm{Vol}_n(f(M)) = \mathrm{Vol}_n(M)$ sowie $\mathrm{Vol}_n(g(M)) = \lambda^n\,\mathrm{Vol}_n(M)$.

Beweis. Die Behauptung ist für kompakte Quader M (dann sind auch $f(M)$ und $g(M)$ kompakte Quader) trivial und liegt dann auch allgemein bei Rückgriff auf Ober- und Untersummen auf der Hand. □

Definition 12.34 (Jordan-Nullmenge)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge.

M heißt *Jordan-Nullmenge* genau dann, wenn gilt $\overline{\mathrm{Vol}}_n = 0$.

Äquivalent kann man offenbar auch fordern, daß M Jordan-meßbar ist und $\mathrm{Vol}_n(M) = 0$ gilt.

Beispiel.

1.) Jede Teilmenge einer Jordan-Nullmenge ist eine Jordan-Nullmenge, insbesondere ist der Schnitt von Jordan-Nullmengen wieder eine solche.

2.) Die endliche Vereinigung von Jordan-Nullmengen ist ebenfalls eine solche.

3.) Eine beschränkte Teilmenge einer Hyperebene $\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,|\, x_i = c\}$ (mit $i\in\{1,\dots,n\}$ und $c\in\mathbb{R}$) ist eine Jordan-Nullmenge.

4.) Seien $m\in\{1,\dots,n-1\}$, $K\subset\mathbb{R}^m$ kompakt und $f\colon K\to\mathbb{R}^{n-m}$ eine stetige Funktion. Dann ist

$$\{(x_1,\dots,x_m,f(x_1,\dots,x_m))\in\mathbb{R}^n \,|\, (x_1,\dots,x_m)\in K\}$$

beschränkt und eine Jordan-Nullmenge.

Sei nämlich Q ein K umfassender kompakter Quader in $\mathbb{R}^m$. Zu vorgegebenem $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf K (vgl. Satz 9.33) eine (hinreichend feine) Zerlegung $\mathfrak{Z}=\{Q_1,\dots,Q_k\}$ von Q, so daß für alle $j\in\{1,\dots,k\}$ gilt

$$\forall_{p,q\in\mathbb{Q}_j\cap K}\, \|f(p)-f(q)\|_\infty < \varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{(2\,\varepsilon)^{n-m}\operatorname{Vol}_m(Q)},$$

also erst recht

$$\forall_{i\in\{1,\dots,n-m\}}\forall_{p,q\in\mathbb{Q}_j\cap K}\, |f_i(p)-f_i(q)| < \varepsilon_0.$$

Die Menge $\{(x_1,\dots,x_m,f(x_1,\dots,x_m)) \,|\, (x_1,\dots,x_m)\in Q_j\cap K\}$ ist also in einem n-dimensionalen kompakten Quader mit Volumen gleich

$$(2\,\varepsilon_0)^{n-m}\operatorname{Vol}_m(Q_j)$$

enthalten. Das äußere Maß unserer fraglichen Menge ist also kleiner oder gleich

$$(2\,\varepsilon_0)^{n-m}\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Vol}_m(Q_j) = (2\,\varepsilon_0)^{n-m}\operatorname{Vol}_m(Q) < \varepsilon,$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

5.) Die $(n-1)$-*Sphäre* $S_r^{n-1} := \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,|\, \sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2\}$ *von Radius* $r\in\mathbb{R}_+$ *in* $\mathbb{R}^n$ ist beschränkt und eine Jordan-Nullmenge. Sie ist nämlich die Vereinigung der beiden „Halbsphären“

$$\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, x_n = \sqrt{r^2-\sum_{i=1}^{n-1}{x_i}^2}\right\}$$

und

$$\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, x_n = -\sqrt{r^2-\sum_{i=1}^{n-1}{x_i}^2}\right\},$$

welche nach 4.) – dort $K := \left\{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1} \,|\, \sum_{i=1}^{n-1}{x_i}^2\le r^2\right\}$ – Jordan-Nullmengen sind, also nach 2.) auch eine Nullmenge.

Satz 12.35. *Sei M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

Dann ist M genau dann eine Jordan-Nullmenge, wenn zu jedem $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ endlich viele kompakte Quader $Q_1,\dots,Q_k$ (in $\mathbb{R}^n$) existieren derart, daß gilt $M\subset\bigcup_{i=1}^k Q_i$ und $\sum_{i=1}^k\operatorname{Vol}_n(Q_i)<\varepsilon$.

Beweis. „⇒" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und gelte $0 = \mathrm{Vol}_n(M) = \int\limits_M \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)$.

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiger M umfassender Quader kompakter Quader. Per definitionem gilt $\int\limits_Q 1_M \,\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) = \int\limits_M \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Nach Satz 12.13 existiert eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ von Q – d.h. insbesondere $M \subset \bigcup_{i=1}^k Q_i$ – mit $0 \le \overline{\mathfrak{S}}(\widehat{1_M}|_Q, \mathfrak{Z}) < \varepsilon$.

Ist $I := \{i \in \{1, \dots, k\} \,|\, Q_i \cap M \neq \varnothing\}$, so gilt $\overline{\mathfrak{S}}(\widehat{1_M}|_Q, \mathfrak{Z}) = \sum_{i \in I} \mathrm{Vol}_n(Q_i)$, also leisten die Q_i, $i \in I$, das Gewünschte.

„⇐" Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach Voraussetzung existieren kompakte Quader $Q_1, \dots, Q_k$ (in $\mathbb{R}^n$) mit $M \subset \bigcup_{i=1}^k Q_i$ und $\sum_{i=1}^k \mathrm{Vol}_n(Q_i) < \varepsilon$. Dann gilt

$$\overline{\mathrm{Vol}}_n(M) \overset{12.27(iii)}{\le} \mathrm{Vol}_\mathrm{n}\left(\bigcup_{i=1}^k Q_i\right) \overset{12.27(iv)}{\le} \sum_{i=1}^k \mathrm{Vol}_n(Q_i) < \varepsilon,$$

und aus der Beliebigkeit von $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ folgt $\overline{\mathrm{Vol}}_n(M) = 0$. □

Die Richtung „⇒" des gerade geführten Beweises zeigt auch die Gültigkeit des folgenden Korollares.

Korollar 12.36. *Sei M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

Ist M eine Jordan-Nullmenge und Q ein beliebiger M umfassender Quader, so existiert zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine Zerlegung von Q derart, daß die Summe der Volumina der Teilquader, die einen Punkt von M enthalten, kleiner als ε ist. □

Beispiel.

1.) $\{\frac{1}{k+1} \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ ist eine abzählbare Jordan-Nullmenge, da zu vorgegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine Überdeckung $\big\{[0, \frac{\varepsilon}{2}], \text{endlich viele Punkte}\big\}$ durch (teilweise entartete) Teilintervalle von $[0, 1]$, deren Summe der Intervallängen kleiner als ε ist, existiert.

2.) (Eine überabzählbare Jordan-Nullmenge). Die *Cantormenge C* entsteht aus dem Intervall $[0, 1]$, indem man im ersten Schritt das offene mittlere Drittel $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ entfernt, aus jedem verbleibenden Intervall im zweiten Schritt wieder das offene mittlere Drittel entfernt usw. Nach $k \in \mathbb{N}_+$ Schritten erhält man somit eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen, deren Summe der Intervallängen gleich $\left(\frac{2}{3}\right)^k$ ist.

   Da zu vorgegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $k_0 \in \mathbb{N}_+$ mit $\left(\frac{2}{3}\right)^{k_0} < \varepsilon$ existiert, folgt aus Satz 12.35, daß C eine Jordan-Nullmenge ist.

   Stellt man nun die in C enthaltenen Zahlen 3-adisch dar, so erhält man genau die Zahlen $(0, a_{-1}a_{-2}\dots)_3$ mit $\forall_{i \in \mathbb{N}_+}\, a_{-i} \in \{0, 2\}$, und die Menge dieser Zahlen ist offenbar gleichmächtig zur Menge $[0, 1]$ (dargestellt im Dualsystem), also überabzählbar.

Satz 12.37. *Sei M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

Dann ist ∂M beschränkt und M ist genau dann Jordan-meßbar, wenn der Rand ∂M von M in $\mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge ist.

Beweis. Sei also $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Wegen Definition 9.6 (251) ist dann $\overline{M}$ beschränkt und folglich auch $\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$.

Wir beweisen nun die Äquivalenzaussage des obigen Satzes: „$\Rightarrow$" Sei M Jordan-meßbar. Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Vol}}_n(\partial M) &= \overline{\mathrm{Vol}}_n(\overline{M} \setminus \mathring{M}) \overset{12.27(vi)}{\leq} \overline{\mathrm{Vol}}_n(\overline{M}) - \underline{\mathrm{Vol}}_n(\mathring{M}) \\ &\overset{12.32}{=} \overline{\mathrm{Vol}}_n(M) - \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) \overset{M\text{meßbar}}{=} 0,\end{aligned}$$

d.h. ∂M ist eine Jordan-Nullmenge.

„$\Leftarrow$" Seien umgekehrt ∂M eine Jordan-Nullmenge und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach Satz 12.31 existieren Jordan-meßbare Teilmengen N_*, N^* von $\mathbb{R}^n$ mit $N_* \subset M \subset N^*$ und $\mathrm{Vol}_n(N^*) - \mathrm{Vol}_n(N_*) < \varepsilon$. Hieraus folgt mit Satz 12.27 (iii)

$$\overline{\mathrm{Vol}}_n(M) \leq \mathrm{Vol}_n(N^*) < \mathrm{Vol}_n(N_*) + \varepsilon \leq \underline{\mathrm{Vol}}_n(M) + \varepsilon,$$

womit wegen Satz 12.27 (i) und der Beliebigkeit von $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ die Jordan-Meßbarkeit von M bewiesen ist. □

Beispiel 12.38 (Die Smith-Volterra-Cantor-Menge ist eine kompakte Menge, die nicht Jordan-meßbar ist)**.** Man betrachte erneut die Konstruktion der kompakten Menge M_{SVC} in der Bemerkung auf Seite 251. M_{SVC} ist abgeschlossen, und es ist leicht einzusehen, daß gilt $\mathring{M}_{SVC} = \varnothing$. (Dann gilt wegen Satz 12.31 auch $\underline{\mathrm{Vol}}_n(M_{SVC}) = 0$.) Um zu zeigen, daß M_{SVC} nicht Jordan-meßbar ist, genügt es also zu zeigen, daß $\partial M_{SVC} = M_{SVC}$ keine Jordan-Nullmenge ist.

Nach $k \in \mathbb{N}_+$ Schritten der Konstruktion von M_{SVC} erhalten wir eine disjunkte Vereinigung von Teilintervallen $J_1^k, \ldots, J_{2^k}^k$ von $[0,1]$, deren Summe der Intervallängen gleich $1 - \sum_{i=1}^k \frac{2^{i-1}}{4^i} = 1 - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ ist, also folgt für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ mit $\forall_{k\in\mathbb{N}}\, J_1^k, \ldots J_{2^k}^k \in \mathfrak{Z}_k$, daß gilt

$$\overline{\mathrm{Vol}}_n(M_{SVC}) = \lim_{\nu\to\infty} \overline{\mathfrak{S}}(\hat{f}, \mathfrak{Z}_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} 1 - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\nu-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 - \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Insbesondere ist nun M_{SVC} keine Nullmenge und $1_{M_{SVC}}$ nicht Riemann-integrierbar über M_{SVC}.

Korollar 12.39. *Seien M eine beschränkte und Jordan-meßbare Menge und M_0 eine (beschränkte Jordan-meßbare) Teilmenge von ∂M.*

Dann ist $M \cup M_0$ Jordan-meßbar, und es gilt $\mathrm{Vol}_n(M \cup M_0) = \mathrm{Vol}_n(M)$.

Insbesondere sind $\overline{M}$ und $\mathring{M}$ Jordan-meßbar und haben dasselbe Volumen $\mathrm{Vol}_n(\overline{M}) = \mathrm{Vol}_n(\mathring{M}) = \mathrm{Vol}_n(M)$.

Beweis. Wenn man eine beschränkte Jordan-meßbare Menge dahingehend abändert, daß man eine Teilmenge einer beschränkten Jordan-Nullmenge, die dann selbst eine ebensolche ist, hinzufügt oder entnimmt, so ist das nach den Sätzen 12.28 und 12.29 ohne Einfluß auf Jordan-Meßbarkeit oder Volumen. Das Korollar folgt daher aus dem letzten Satz. □

Korollar 12.40. *Sind N_1, N_2 zwei beschränkte meßbare Teilmengen, so ist auch ihr Durchschnitt und ihre Vereinigung beschränkt sowie meßbar, und es gilt*

$$\mathrm{Vol}_n(N_1 \cup N_2) = \mathrm{Vol}_n(N_1) + \mathrm{Vol}_n(N_2) - \mathrm{Vol}_n(N_1 \cap N_2).$$

Beweis. Anhand von 9.6 (248) und (251) sieht man unmittelbar ein, daß $\overline{N_1 \cap N_2} \subset \overline{N_1} \cap \overline{N_2}$ und $\overset{\circ}{N}_1 \cap \overset{\circ}{N}_2 \subset \overset{\circ}{\widehat{N_1 \cap N_2}}$ gelten, also folgt

$$\begin{aligned}
\partial(N_1 \cap N_2) &\subset (\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) \setminus (\overset{\circ}{N}_1 \cap \overset{\circ}{N}_2) \\
&= \Big((\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) \setminus \overset{\circ}{N}_1 \Big) \cup \Big((\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) \setminus \overset{\circ}{N}_2 \Big) \\
&\subset (\overline{N_1} \setminus \overset{\circ}{N}_1) \cup (\overline{N_2}) \setminus \overset{\circ}{N}_2) = \partial(N_1) \cup \partial(N_2)
\end{aligned}$$

und somit aus den Beispielen 1.), 2.) in 12.34 sowie Satz 12.37 die Jordan-Meßbarkeit von $N_1 \cap N_2$. Wegen $N_1 \cup N_2 = N_1 \uplus (N_2 \setminus (N_1 \cap N_2))$ und den Sätzen 12.28, 12.29 ergibt sich dann die Jordan-Meßbarkeit von $N_1 \cup N_2$ und die behauptete Gleichung für die Volumina. □

Lemma 12.41. *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Jordan-meßbare Menge und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\inf f(M) \cdot \operatorname{Vol}_n(M) &\leq \underline{\int_M} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \\
&\leq \overline{\int_M} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \leq \sup f(M) \cdot \operatorname{Vol}_n(M).
\end{aligned}$$

Beweis. Z.B. mittels Rückgriff auf Ober- und Untersummen zeigt man, daß die zu den Hauptsätzen 12.19, 12.20 analogen Resultate auch für Ober- bzw. Unterintegrale gelten. Das Lemma folgt dann aus $\inf f(M) \leq f \leq \sup f(M)$. □

Bemerkung. Ist f Riemann-integrierbar und $f(M) = [\inf f(M), \sup f(M)]$, so folgt die Existenz von $\xi \in M$ mit $\int_M f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) = f(\xi) \operatorname{Vol}_n(M)$. In etwas anderer Formulierung wird dieses Resultat in der Literatur als *Mittelwertsatz der Integralrechnung* bezeichnet.

Der nächste Satz, der unmittelbare Folge von Lemma 12.41 ist, hat zur Folge, daß beliebige Abänderung einer Funktion auf einer Jordan-Nullmenge ohne Einfluß auf Riemann-Integrierbarkeit und -Integral ist.

Satz 12.42. *Jede auf einer beschränkten Jordan-Nullmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ definierte beschränkte Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ ist über M Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_M f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

□

Satz 12.43. *Seien $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f\colon \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Riemann-integrierbare Funktion und M eine Jordan-meßbare Teilmenge von $\widetilde{M}$.*

Dann ist f über M Riemann-integrierbar.

Beweis. Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiger $\widetilde{M}$ umfassender kompakter Quader. Nach Satz 12.11 existiert eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ von Q mit

$$\overline{\mathfrak{S}}\left(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}\right) - \underline{\mathfrak{S}}\left(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

und dies gilt nach Lemma 12.4 auch für jede Verfeinerung von $\mathfrak{Z}$. Da M Jordan-meßbar ist, können wir wegen Satz 12.37 und Korollar 12.36 folglich annehmen, daß die Summe $V_\partial \in \mathbb{R}$ der Volumina der Teilquader von $\mathfrak{Z}$, die einen Punkt von ∂M enthalten, kleiner als $\frac{\varepsilon}{4C}$ ist, wobei $C \in \mathbb{R}_+$ eine (nach Voraussetzung existierende) betragliche Schranke von $f(\widetilde{M})$ sei. Wir definieren nun für jedes $i \in I := \{j \in \{1, \dots, k\} \mid Q_i \cap \partial M \neq \varnothing\}$ reelle Zahlen $M_i^\partial := \sup f(Q_i \cap M)$ und $m_i^\partial := \inf f(Q_i \cap M)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathfrak{S}}\left((\widehat{f|_M})|_Q, \mathfrak{Z}\right) - \underline{\mathfrak{S}}\left((\widehat{f|_M})|_Q, \mathfrak{Z}\right) \\
&\quad \leq \overline{\mathfrak{S}}\left(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}\right) - \underline{\mathfrak{S}}\left(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}\right) + \sum_{i \in I} (M_i^\partial - m_i^\partial) \mathrm{Vol_n}(Q_i) \\
&\quad \leq \overline{\mathfrak{S}}\left(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}\right) - \underline{\mathfrak{S}}\left(\hat{f}|_Q, \mathfrak{Z}\right) + 2C\, V_\partial < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

und somit die Riemann-Integrierbarkeit von $f|_M$. □

Satz 12.44. *Seien N_1, N_2 beschränkte Jordan-meßbare Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und $f\colon N_1 \cup N_2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die sowohl über N_1, als auch über N_2 Riemann-integrierbar ist.*

Dann ist f auch über $N_1 \cap N_2$ und $N_1 \cup N_2$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{N_1 \cup N_2} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \\
&\quad = \int\limits_{N_1} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) + \int\limits_{N_2} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \qquad (378) \\
&\quad - \int\limits_{N_1 \cap N_2} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Beweis. Die Riemann-Integrierbarkeit von $N_1 \cap N_2$ folgt aus Satz 12.43 und Korollar 12.40, die über $N_1 \cup N_2$ und (378) dann aus Korollar 12.25. □

Hauptsatz 12.45. *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte und Jordan-meßbare Menge sowie $f\colon \overline{M} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*

Dann ist f Riemann-integrierbar über M.

Beweis. Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiger $\overline{M}$ umfassender kompakter Quader.

M ist beschränkt, also ist $\overline{M}$ kompakt. Daher nimmt f als stetige Funktion auf dem Kompaktum $\overline{M}$ ihr betragliches Maximum $C := \max |f|(\overline{M}) \in \mathbb{R}$ an.

Ferner ist M Jordan-meßbar, also folgt aus Satz 12.37 und Korollar 12.36 die Existenz einer Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ von Q derart, daß die Summe $V_\partial \in \mathbb{R}$ der Volumina der Teilquader von $\mathfrak{Z}$, die einen Punkt von ∂M enthalten, kleiner als $\frac{\varepsilon}{4C}$ ist. Dies gilt dann offenbar auch für jede Verfeinerung von $\mathfrak{Z}$.

Sei $i \in I := \left\{ j \in \{1, \dots, k\} \,|\, Q_j \subset \overline{M} \right\}$. Dann ist $f|_{Q_i}$ stetig, und nach Satz 12.12 ist $f|_{Q_i}$ Riemann-integrierbar. Daher folgt aus Satz 12.11 die Existenz einer Zerlegung $\mathfrak{Z}_i$ von Q_i mit $\overline{\mathfrak{S}}\,(f|_{Q_i}, \mathfrak{Z}_i) - \underline{\mathfrak{S}}\,(f|_{Q_i}, \mathfrak{Z}_i) < \frac{\varepsilon}{2\#I}$.

Wir ersetzen jetzt in $\mathfrak{Z}$ jedes Q_i mit $Q_i \subset \overline{M}$ durch die in $\mathfrak{Z}_i$ enthaltenen Quader und erhalten somit eine Verfeinerung $\widetilde{\mathfrak{Z}}$ von $\mathfrak{Z}$ mit

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{S}}\left((\widehat{f|_M})|_Q, \widetilde{\mathfrak{Z}} \right) - \underline{\mathfrak{S}}\left((\widehat{f|_M})|_Q, \widetilde{\mathfrak{Z}} \right) &\le \sum_{i \in I} \left(\overline{\mathfrak{S}}\,(f|_{Q_i}, \mathfrak{Z}_i) - \underline{\mathfrak{S}}\,(f|_{Q_i}, \mathfrak{Z}_i) \right) + 2\,C\,V_\partial \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Aus Satz 12.11 folgt die Riemann-Integrierbarkeit von f über M. □

Der Hauptsatz gibt uns eine reichhaltige Menge integrierbarer Funktionen. Wir wollen nun konkrete Mittel zur Berechnung von Integralen herausarbeiten. Hierzu führen wir zunächst eine Schreibweise ein.

Definition 12.46. Sind $n \ge 2$, $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ und $j_1, \dots, j_{n-k} \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k}$, so definieren wir

$$\begin{aligned} &M(i_1, \dots, i_k) \\ &\quad := \{(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_{i_k-1}, x_{i_k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k} \,|\, (x_1, \dots, x_n) \in M\} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\overline{\iint_M} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})\, \mathrm{d}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) \\ &\quad := \overline{\int}_{M(j_1, \dots, j_{n-k})} \left(\overline{\int}_{M(i_1, \dots, i_k)} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \right) \mathrm{d}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\underline{\iint_M} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})\, \mathrm{d}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) \\ &\quad := \underline{\int}_{M(j_1, \dots, j_{n-k})} \left(\underline{\int}_{M(i_1, \dots, i_k)} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \right) \mathrm{d}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\iint_M f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})\, \mathrm{d}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) \\ &\quad := \int_{M(j_1, \dots, j_{n-k})} \left(\int_{M(i_1, \dots, i_k)} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \right) \mathrm{d}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}), \end{aligned}$$

falls die rechte Seite existiert.

Hauptsatz 12.47 (von Fubini[97]).
Vor.: *Seien $n \geq 2$, $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f\colon M \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über M, $k \in \{1,\dots,n-1\}$, $i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ und $j_1,\dots,j_{n-k} \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i_1,\dots,i_k\}$ mit $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k}$.*

Des weiteren möge für jedes $(x_{j_1},\dots,x_{j_{n-k}}) \in M(j_1,\dots,j_{n-k})$ das Integral $\int\limits_{M(i_1,\dots,i_k)} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$ existieren.

Beh.: *$\iint\limits_M f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_{i_1},\dots,x_{i_k})\,\mathrm{d}(x_{j_1},\dots,x_{j_{n-k}})$ existiert, und es gilt*

$$\int\limits_M f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \iint\limits_M f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_{i_1},\dots,x_{i_k})\,\mathrm{d}(x_{j_1},\dots,x_{j_{n-k}}).$$

Beweis. Gemäß der Definitionen 12.8 und 12.10 können wir M ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch einen beliebigen kompakten Quader Q (in $\mathbb{R}^n$) ersetzen. Der Einfachheit halber wählen wir $Q = [a,b]^n$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, so daß gilt $M(x_{i_1},\dots,x_{i_k}) = [a,b]^k$ und $M(x_{j_1},\dots,x_{j_{n-k}}) = [a,b]^{n-k}$.

Da das Volumen eines Quaders $\times_{l=1}^{k}[a_{i_l},b_{i_l}] \times \times_{l=1}^{n-k}[a_{j_l},b_{j_l}]$ mit dem des Quaders $\times_{l=1}^{n}[a_l,b_l]$ übereinstimmt, erkennen wir durch Rückgriff auf Ober- bzw. Untersummen, daß wir weiterhin $\forall_{l\in\{1,\dots,k\}}\, i_l = l$ annehmen können, und dann gilt auch $\forall_{l\in\{1,\dots,n-k\}}\, j_{k+l} = k+l$.

Wir betrachten für $\nu \in \mathbb{N}_+$ die Zerlegung $\mathfrak{Z}_\nu := \left\{J_l^k \times J_m^{n-k} \,|\, l,m \in \{1,\dots,\nu\}\right\}$ von $[a,b]^n$, wobei

$$\forall_{l\in\{1,\dots,\nu\}}\, J_l := [a + \frac{l-1}{\nu}(b-a), a + \frac{l}{\nu}(b-a)],$$

und setzen für jedes $l,m \in \{1,\dots,\nu\}$

$$\forall_{q\in[a,b]^{n-k}}\, \overline{M}_l(q) := \sup\{f(p,q)\,|\,p \in J_l^k\}, \quad \overline{M}_{lm} := \sup f(J_l^k \times J_m^{n-k}).$$

Nun ist für jedes $q \in [a,b]^{n-k}$ die reelle Zahl $\left(\frac{b-a}{\nu}\right)^k \sum_{l=1}^{\nu} \overline{M}_l(q)$ die Obersumme von $f(\dots,q)\colon [a,b]^k \to \mathbb{R}$ bzgl. $\left\{J_l^k \,|\, l \in \{1,\dots,\nu\}\right\}$, also gilt

$$\overline{\int\limits_{[a,b]^k}} f(x_1,\dots,x_k,q)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_k) \leq \left(\frac{b-a}{\nu}\right)^k \sum_{l=1}^{\nu} \overline{M}_l(q)$$

und somit für alle $\tilde{q} \in J_m^{n-k}$, $m \in \{1,\dots,\nu\}$ (da $\forall_{l\in\{1,\dots,\nu\}}\, \overline{M}_l(\tilde{q}) \leq M_{lm}$)

$$\overline{\int\limits_{[a,b]^k}} f(x_1,\dots,x_k,\tilde{q})\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_k) \leq \left(\frac{b-a}{\nu}\right)^k \sum_{l=1}^{\nu} \overline{M}_{lm},$$

d.h. die Funktion $\mathfrak{x} \mapsto \overline{\int\limits_{[a,b]^k}} f(x_1,\dots,x_k,\mathfrak{x})\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_k)\colon [a,b]^{n-k} \to \mathbb{R}$ ist auf J_m^{n-k} durch $\left(\left(\frac{b-a}{\nu}\right)^k \sum_{l=1}^{\nu} \overline{M}_{lm}\right) 1_{J_m^{n-k}}$ nach oben beschränkt.

[97] nach Guido Fubini (1879–1943)

Hieraus folgt nach Definition des Oberintegrales

$$\overline{\int\limits_{[a,b]^{n-k}}} \left(\overline{\int\limits_{[a,b]^k}} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_k) \right) \mathrm{d}(x_{k+1},\ldots,x_n)$$

$$\leq \left(\sum_{m=1}^{\nu} \left(\left(\frac{b-a}{\nu} \right)^k \sum_{l=1}^{\nu} \overline{M}_{lm} \right) \mathrm{Vol}_{n-k}(J_m^{n-k}) \right) = \left(\frac{b-a}{\nu} \right)^n \sum_{l,m=1}^{\nu} \overline{M}_{lm}$$

und $\left(\frac{b-a}{\nu}\right)^n \sum_{l,m=1}^{\nu} \overline{M}_{lm}$ ist die Obersumme von f bzgl. $\mathfrak{Z}_\nu$. Da $(\mathfrak{Z}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von $[a,b]^n$ ist, ergibt Grenzwertbildung für $\nu \to \infty$

$$\overline{\int\limits_{[a,b]^{n-k}}} \left(\overline{\int\limits_{[a,b]^k}} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_k) \right) \mathrm{d}(x_{k+1},\ldots,x_n)$$

$$\leq \int\limits_M f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n),$$

beachte hierbei, daß die rechte Seite nach Voraussetzung existiert.

Analog sieht man ein, daß gilt

$$\underline{\int\limits_{[a,b]^{n-k}}} \left(\underline{\int\limits_{[a,b]^k}} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_k) \right) \mathrm{d}(x_{k+1},\ldots,x_n)$$

$$\geq \int\limits_M f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n),$$

und da nach Voraussetzung „alle“ $\int\limits_{[a,b]^k} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_k)$ existieren, folgt aus den letzten beiden Ungleichungen

$$\int\limits_M f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\leq \underline{\int\limits_{[a,b]^{n-k}}} \left(\int\limits_{[a,b]^k} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_k) \right) \mathrm{d}(x_{k+1},\ldots,x_n)$$

$$\leq \overline{\int\limits_{[a,b]^{n-k}}} \left(\int\limits_{[a,b]^k} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_k) \right) \mathrm{d}(x_{k+1},\ldots,x_n)$$

$$\leq \int\limits_M f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n),$$

woraus sich die Behauptung ergibt. □

Bemerkung. Mehrfachhe Anwendung des Satzes von Fubini ermöglicht uns die Rückführung der Integration einer Funktion aus $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ auf die Bestimmung eindimensionaler Integrale.

Beispiel.

1.) Sei Δ das Volldreieck im $\mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten $(0,0),(1,0)$ und $(0,1)$, d.h. $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, y \le 1-x\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Delta} xy \,\mathrm{d}(x,y) &= \iint\limits_{\Delta} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

2.) (Das Fläche der Kreisscheibe). Es seien $r \in \mathbb{R}_+$ und

$$B_r^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le r^2\}.$$

Dann ist B_r^2 Jordan-meßbar (da ∂B_r^2 eine Jordan-Nullmenge ist) und

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_r^2} \mathrm{d}(x,y) &= \int\limits_{-r}^{r} \int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2 \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - (r\sin(y))^2}\, r\cos(y)\,\mathrm{d}y \\ &= 2r^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(y)\,\mathrm{d}y = r^2 \left[\sin(y)\cos(y) + y\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2.\end{aligned}$$

Satz 12.48 (Cavalierisches[98] Prinzip). *Es seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und M eine beschränkte Jordan-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times [a,b]$ derart, daß für jedes $t \in [a,b]$ die Menge*

$$M_t := \{p \in \mathbb{R}^n \,|\, (p,t) \in M\}$$

Jordan-meßbar ist.

Dann ist die Funktion $t \mapsto \mathrm{Vol}_n(M_t)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über $[a,b]$, und es gilt

$$\mathrm{Vol}_{n+1}(M) = \int_a^b \mathrm{Vol}_n(M_t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist 1_M Riemann-integrierbar über M und für jedes $t \in [a,b]$ existiert $\mathrm{Vol}_n(M_t) = \int\limits_{M_t} \mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)$. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Fubini angewandt auf $n+1$ anstelle von n und $f := 1_M$. □

Beispiel (Das Volumen der n-dimensionalen Vollkugel). Es sei $r \in \mathbb{R}_+$. Wir wollen das Volumen von

$$B_r^n := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, {x_1}^2 + \dots + {x_n}^2 \le r^2\}$$

berechnen. Wir hatten gezeigt, daß $\partial B_r^n = S_r^{n-1}$ das n-dimensionale Volumen null hat, so daß B_r^n nach Satz 12.37 tatsächlich Jordan-meßbar ist.

[98] nach Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647)

Wir schreiben zur Abkürzung $\omega_n(r) := \mathrm{Vol}_n\left(B_r^n\right)$ sowie $\omega_n := \omega_n(1)$. Wir vereinbaren $\omega_0 := 1$ und wissen bereits

$$\omega_1(r) = 2r \qquad \text{sowie} \qquad \omega_2(r) = \pi r^2. \tag{379}$$

Nach Satz 12.33 gilt

$$\omega_n(r) = r^n\,\omega_n, \tag{380}$$

d.h. wir haben unsere Aufgabe vollständig gelöst, wenn wir ω_n berechnet haben.

Für jedes $t \in [-1,1]$ gilt

$$\begin{aligned} (B_1^n)_t &:= \{p \in \mathbb{R}^{n-1} \,|\, (p,t) \in B_1^n\} \\ &= \{(p_1,\ldots,p_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \,|\, {p_1}^2 + \ldots + {p_{n-1}}^2 \le 1 - t^2\} = B^{n-1}_{\sqrt{1-t^2}}, \end{aligned}$$

also folgt (für $n \ge 2$ aus dem Cavalierischen Prinzip, für $n = 1$ trivial)

$$\omega_n = \int_{-1}^{1} \omega_{n-1}(\sqrt{1-t^2})\,\mathrm{d}t \overset{(380)}{=} \omega_{n-1}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \omega_{n-1}\,I_n, \tag{381}$$

wobei wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ setzen

$$I_k := \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(t)\,\mathrm{d}t. \tag{382}$$

Es ist klar, daß gilt

$$I_0 = \pi \qquad \text{sowie} \qquad I_1 = 2, \tag{383}$$

und partielle Integration lehrt uns für $k \ge 2$

$$I_k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\cos^{k-1}(t)\,t\sin(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{k-1}{k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k-2}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{k-1}{k}\,I_{k-2}, \tag{384}$$

also, falls $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}$,

$$I_k = I_{2l} \overset{(384)}{=} \frac{2l-1}{2l}\,\frac{2l-3}{2l-2}\ldots\frac{1}{2}\,I_0, \tag{385}$$

und des weiteren, falls $k = 2l+1$, $l \in \mathbb{N}$,

$$I_k = I_{2l+1} \overset{(384)}{=} \frac{2l}{2l+1}\,\frac{2l-2}{2l-1}\ldots\frac{2}{3}\,I_1. \tag{386}$$

Aus (385), (386) und (383) folgt

$$I_{n-1}\cdot I_n = \frac{1}{n}\,I_0\,I_1 = \frac{2\pi}{n} \tag{387}$$

und somit für $n \ge 2$

$$\omega_n \overset{(381)}{=} \omega_{n-1}\,I_n \overset{(381)}{=} \omega_{n-2}\,I_{n-1}\,I_n \overset{(387)}{=} \frac{2\pi}{n}\,\omega_{n-2}. \tag{388}$$

Hieraus ergibt sich schließlich für $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}_+$,

$$\omega_n = \omega_{2m} \overset{(388)}{=} \frac{2\pi}{2m}\,\omega_{2m-2} = \ldots = \frac{(2\pi)^{m-1}}{2^{m-1}m!}\,\omega_2 \overset{(379)}{=} \frac{\pi^m}{m!} \tag{389}$$

und für $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\omega_n &= \omega_{2m+1} \overset{(388)}{=} \frac{2\pi}{2m+1}\,\omega_{2m-1} = \ldots = \frac{(2\pi)^m}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3}\,\omega_1 \\ &\overset{(379)}{=} \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3}.\end{aligned} \tag{390}$$

Aus (389), (390) folgt übrigens das überraschende Resultat $\lim_{n\to\infty}\omega_n = 0$. (Beweise dies!)

Beispiel. Wir wollen das dreidimensionale Volumen des Schnittes $M := Z_1 \cap Z_2$ der beiden Vollzylinder

$$Z_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\} \quad \text{und} \quad Z_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + z^2 \le 1\}$$

berechnen.[99] M ist Jordan-meßbar, da ∂M eine Jordan-Nullmenge ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + z^2 \le 1 \wedge y^2 + z^2 \le 1\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| \le 1 \wedge |y| \le \sqrt{1-z^2} \wedge |z| \le \sqrt{1-z^2}\}, \end{aligned}$$

und für jedes $x \in [-1,1]$ gilt

$$M_x := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y,z) \in M\} = [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]^2$$

ein Quadrat (d.i. Jordan-meßbar) mit zweidimensionalem Volumen $4(1-x^2)$.

Wir haben das Cavalierische Prinzip zwar nur für die letzte Koordinatenachse formuliert, aber es gilt natürlich ebenso für jede andere auch. Es folgt

$$\mathrm{Vol}_3(M) = 4\int_{-1}^{1} 1 - x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{16}{3}.$$

Beispiel 12.49. Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt sowie Jordan-meßbar und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte über M Riemann-integrierbare Funktion. Ferner gelte $f \ge 0$.

1.) (Volumina von Ordinatenmengen). Die *Ordinatenmenge von f*

$$M_f := \{(p,q) \in M \times \mathbb{R} \,|\, 0 \le q \le f(p)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

ist Jordan-meßbar, und es gilt

$$\mathrm{Vol}_{n+1}(M_f) = \int_M f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n).$$

[99] Der Rand von $([-1,1]^2 \times [0,1]) \cap M$ ist ein *Kreuzgewölbe.*

[Zu gegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ eines M umfassenden kompakten Quaders (in $\mathbb{R}^n$), so daß die Differenz der zugehörigen Ober- und Untersumme von $\hat{f}$ kleiner ε ist. Die Obersumme ist das Volumen einer Jordan-meßbaren Menge $N^* \supset M_f$, die Untersumme das Volumen einer Jordan-meßbaren Menge $N_* \subset M_f$. (Beachte, daß sowohl N_* als auch N^* die Vereinigung $(n+1)$-dimensionaler kompakter Quader ist!) Aus $\mathrm{Vol}_{n+1}(N^*) - \mathrm{Vol}_{n+1}(N_*) < \varepsilon$ und Satz 12.27 (iii) folgt

$$\overline{\mathrm{Vol}}_{n+1}(M_f) - \underline{\mathrm{Vol}}_{n+1}(M_f) \leq \mathrm{Vol}_{n+1}(N^*) - \mathrm{Vol}_{n+1}(N_*) < \varepsilon.$$

Die Beliebigkeit von $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ergibt die Jordan-Meßbarkeit von M_f.

Ferner gilt nach Satz 12.48 (da $Vol_1([0, f(x_1, \ldots, x_n)]) = f(x_1, \ldots, x_n)$)

$$\mathrm{Vol}_{n+1}(M_f) \quad = \quad \int\limits_M f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n),$$

womit die Behauptung gezeigt ist.]

Bemerkung. Umgekehrt folgt für Jordan-meßbares M mit dem Cavalierischen Prinzip aus der Jordan-Meßbarkeit von M_f die Riemann-Integrierbarkeit von f über M.

2.) (Volumina von Rotationskörpern). Seien speziell $n = 2$, $M = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Der *Rotationskörper*

$$R_f := \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\},$$

der entsteht, indem man den Graphen von f in der (x, z)-Ebene um die x-Achse Rotieren läßt, ist Jordan-meßbar, und es gilt

$$\mathrm{Vol}_3(M_f) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

[Der Leser überzeuge sich selbst von der Jordan-Meßbarkeit der Menge R_f, indem er verifiziere, daß ihr Rand eine Jordan-Nullmenge ist. Obige Gleichung folgt dann sofort aus dem Cavalierischen Prinzip.]

Bemerkung. Die Aussage bleibt richtig, wenn man nur fordert, daß f Riemann-integrierbar über $[a, b]$ ist.

Der nächste Satz, den wir hier besprechen wollen, der *Transformationssatz*, verallgemeinert die Substitutionsregel auf den n-dimensionalen Fall. Es handelt sich um das wichtigste Ergebnis dieses Kapitels, entsprechend umfangreich ist sein Beweis. Wir beschreiben daher zunächst heuristisch die Idee des Satzes und fragen uns, wie sich das Integral einer stetigen Funktion $f\colon h(Q) \to \mathbb{R}$ berechnen läßt, wobei $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine auf einer offenen Obermenge U von Q definierte *Koordinatentransformation* sei. Letzteres bedeutet per definitionem, daß h eine stetig differenzierbare Injektion mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung $h^{-1}\colon h(U) \to \mathbb{R}^n$ ist.

Sei nun $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ eine Zerlegung von Q in „infinitesimal kleine" Quader und $\{b_1, \dots, b_k\}$ eine Besetzung von $\mathfrak{Z}$. Dann sollte näherungsweise

$$\int\limits_{h(Q)} f(x_1, \dots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \approx \sum_{i=1}^{k} f(h(b_i)) \operatorname{Vol}_n(h(Q_i))$$

gelten. Jedes Q_i ist ein „kleiner Quader bei b_i", d.h. es gilt ungefähr

$$Q_i \approx b_i + \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j e_j \,\middle|\, \forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \, t_j \in [0, \delta_j] \right\}$$

mit „kleinen" $\delta_j > 0$.

h bildet $\{t_j e_j \,|\, t_j \in [0, \delta_j]\}$ auf die krumme Linie $\{h(t_j e_j) \,|\, t_j \in [0, \delta_j]\}$ ab, welche wegen der Infinitesimalität von δ_j sehr gut durch $\{t_j \, \mathrm{d}_{b_i} h(e_j) \,|\, t_j \in [0, \delta_j]\}$ approximiert wird, also gilt

$$h(Q_i) \approx h(b_i) + \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j \, \mathrm{d}_{b_i} h(e_j) \,\middle|\, \forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \, t_j \in [0, \delta_j] \right\},$$

und diese Menge hat nach Satz 12.33 dasselbe Volumen wie das Parallelotop

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j \, \mathrm{d}_{b_i} h(e_j) \,\middle|\, \forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \, t_j \in [0, \delta_j] \right\},$$

welches nach linearer Algebra[100] das Volumen

$$|\det \mathrm{d}_{b_i} h| \operatorname{Vol}_n \left(\left\{ \sum_{j=1}^{n} t_i \, e_j \,\middle|\, \forall_{j \in \{1,\dots,n\}} \, t_j \in [0, \delta_j] \right\} \right) = |\det \mathrm{d}_{b_i} h| \operatorname{Vol}_n(Q_i)$$

besitzt.

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \int\limits_{h(Q)} f(x_1, \dots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) &\approx \sum_{i=1}^{k} f(h(b_i)) \operatorname{Vol}_n(h(Q_i)) \\ &\approx \sum_{i=1}^{k} (f \circ h)(b_i)) \, |\det \mathrm{d}_{b_i} h| \operatorname{Vol}_n(Q_i) \\ &\approx \int\limits_{Q} (f \circ h)(x_1, \dots, x_n) \cdot \left|\det \mathrm{d}_{(x_1,\dots,x_n)} h\right| \, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Anschaulich kann man sagen, daß die Funktionswerte bei der Koordinatentransformation gleich bleiben und der Betrag der *Funktionaldeterminante* $|\det \mathrm{d}h|$ die Volumenveränderung des Definitionsbereiches beschreibt.

Obige Überlegungen machen die Gültigkeit des folgenden Satzes plausibel.

[100] Hier wird stillschweigend vorausgesetzt, daß das in der linearen Algebra definierte Volumen eines Parallelotopes mit unserer Definition verträglich ist, obwohl wir dies noch gar nicht gezeigt haben. Eigentlich sollte man auf (402) im später folgenden Lemma 12.53 (ii) verweisen.

Hauptsatz 12.50 (Transformationssatz).
Vor.: *Seien M eine beschränkte sowie Jordan-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine auf einer offenen Obermenge U von $\overline{M}$ definierte stetig differenzierbare Abbildung, die M bijektiv auf $h(M)$ abbildet, mit*

$$\forall_{p\in M}\, \mathrm{d}_p h \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n). \tag{391}$$

Beh.: *$\overline{h(M)}$ ist kompakt und Jordan-meßbar. Des weiteren folgt für jede stetige Funktion $f\colon \overline{h(M)} \to \mathbb{R}$, daß f über $h(M)$ und $(f\circ h)\cdot|\det \mathrm{d}h|$ über M Riemann-integrierbar ist sowie*

$$\begin{aligned}\int\limits_{h(M)} & f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)\\ &= \int\limits_{M} (f\circ h)(x_1,\dots,x_n)\cdot \left|\det \mathrm{d}_{(x_1,\dots,x_n)}h\right|\; \mathrm{d}(x_1,\dots,x_n).\end{aligned} \tag{392}$$

Zusatz. *(392) gilt auch dann, wenn eine Jordan-Nullmenge $N \subset M$ existiert derart, daß (mindestens) eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- $\det \mathrm{d}h$ *verschwindet auf N,*
- *h ist nur auf $M \setminus N$ injektiv.*

Bemerkung. In (392) steht der Betrag der Funktionaldeterminante. In der Behauptung der Substitutionsregel 8.32 steht nicht der Betrag der Ableitung der substituierenden Funktion. Der Leser mache sich klar, daß unter der Voraussetzung (391) die beiden Formeln (in (392) für $n = 1$) dennoch übereinstimmen.

Wir bereiten den Beweis des Hauptsatzes durch mehrere Lemmata vor.

Das erste Lemma zeigt, daß mit der Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ auch das Bild $h(M)$ unter einer $\mathcal{C}^1$-Abbildung $h \in \mathcal{C}^1(M,\mathbb{R}^n)$ beschränkt und Jordan-meßbar ist. Beachte, daß $h(\partial M) \subset \partial(h(M))$ gilt (wegen (255)) und verwende Satz 12.37.

Lemma 12.51 (Die Jordan-Nullmengentreue von $\mathcal{C}^1$-Abbildungen). *Es seien $N \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Jordan-Nullmenge und $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine auf einer offenen Obermenge U von $\overline{N}$ definierte stetig differenzierbare Abbildung.*

Dann ist auch $h(N)$ eine beschränkte Jordan-Nullmenge.

Beweis. Da N beschränkt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß dies auch für U gilt. Wir versehen den $\mathbb{R}^n$ im folgenden mit der euklidischen Norm $\|\ldots\|_2$. Es existiert eine beschränkte offene Menge V derart, daß $N \subset \overline{V} \subset U$, nämlich

$$V := \bigcup_{p\in N} U_{\frac{\delta_p}{2}}(p), \text{ wobei } \delta_p \in \mathbb{R}_+ \text{ mit } U_{\delta_p}(p) \subset U.$$

$\overline{V}$ ist kompakt und h ist stetig differenzierbar, also existiert

$$C := \max\{\|\mathrm{d}_a h\| \mid a \in \overline{V}\} \in \mathbb{R},$$

wobei $\|\ldots\|$ die Operatornorm von $\mathcal{L}\left((\mathbb{R}^n,\|\ldots\|_2),(\mathbb{R}^n,\|\ldots\|_2)\right)$ bezeichne.

Seien nun $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $W = \bigtimes_{i=1}^n J_i \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Würfel[101] mit $N \subset W$. Durch Zerlegung der J_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, in hinreichend kleine und gleich große Intervalle, erhalten wir mittels Satz 12.13 eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{W_1, \ldots, W_k\}$ von W bestehend aus Würfeln, so daß gilt

$$N \subset \bigcup_{i=1}^k W_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \mathrm{Vol}_n(W_i) < \frac{\varepsilon}{2^n C^n n}. \tag{393}$$

Nach eventueller Verkleinerung von ε und Entfernung der Teilquader, die nicht in V liegen, können wir annehmen, daß für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt $Q_i \subset V$. (Beachte, daß alle Kantenlängen von W_i gleich $\sqrt[n]{\mathrm{Vol}_n(W_i)}$ sind. Beispielsweise durch eine elementargeometrische Überlegung sieht man ein, daß deswegen $\mathrm{Diam}(Q_i) = \sqrt{n}\sqrt[n]{\mathrm{Vol}_n(W_i)} < \frac{\sqrt{n}}{2C}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{n}}$ gilt.) Da Q_i konvex ist, folgt dann aus dem Mittelwertabschätzungssatz 10.10 für $p, q \in Q_i$

$$\|h(p) - h(q)\|_2 \le C\|p - q\|_2 \le C\,\mathrm{Diam}(Q_i) = C\sqrt{n}\sqrt[n]{\mathrm{Vol}_n(W_i)}.$$

Das durch h vermittelte Bild von W_i gehört also einem Quader mit Volumen $(2C\sqrt{n})^n \mathrm{Vol}_n(W_i)$ an. Wegen (393) ist demnach $h(N) = \bigcup_{i=1}^k h(N \cap W_i)$ beschränkt und

$$\overline{\mathrm{Vol}}_n(h(N)) = \overline{\mathrm{Vol}}_n\left(\bigcup_{i=1}^k h(N \cap W_i)\right) \le (2C\sqrt{n})^n \sum_{i=1}^k \mathrm{Vol}_n(W_i) < \varepsilon.$$

Da dies für alle hinreichend kleinen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gezeigt ist, ist $h(N)$ eine Jordan-Nullmenge. □

Bemerkung. Der Beweis zeigt auch, daß das Bild einer auf einer Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ definierten Lipschitz-stetigen Abbildung $N \to \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist. Es gibt jedoch stetige surjektive Abbildung der Nullmenge $[0,1] \times \{0\}$ von $\mathbb{R}^2$ auf $[0,1]^2$, die also als Abbildungen $[0,1] \times \{0\} \to \mathbb{R}^2$ nicht nullmengentreu sind. Das erste solche Beispiel wurde 1890 von Giuseppe Peano (1858–1932) konstruiert.

Wie oben erwähnt, folgen die Meßbarkeitsaussagen des Transformationssatzes aus dem letzten Lemma, die Integrierbarkeitsaussagen ergeben sich dann aus Hauptsatz 12.45. Die Beschränktheit – und damit die Kompaktheit – von $\overline{h(M)}$ folgt übrigens aus $h(M) \subset h(\overline{M})$, da $h(\overline{M})$ als Bild eines Kompaktums unter einer stetigen Abbildung insbesondere beschränkt ist.

Als nächstes reduzieren wir den Beweis des Transformationssatzes auf die entsprechende Aussage für Quader.

Lemma 12.52. *Es seien M, $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ und $f\colon \overline{h(M)} \to \mathbb{R}$ wie im Transformationssatz 12.50.*

Wenn für jeden kompakten Quader $Q \subset \mathring{M}$

$$\begin{aligned}\int_{h(Q)} & f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \int_Q (f \circ h)(x_1, \ldots, x_n) \cdot \left|\det \mathrm{d}_{(x_1,\ldots,x_n)} h\right| \,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned} \tag{394}$$

gilt, so folgt (391).

[101] Eine kompakter Quader $\bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i]$ (in $\mathbb{R}^n$) heißt ein *kompakter Würfel*, wenn die *Kantenlängen* $b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n$ sämtlich gleich groß sind.

Beweis. Da Jordan-Nullmengen für die Integration keine Rolle spielen, genügt es (391) für $\mathring{M}$ anstelle von M zu zeigen. Wir können weiter ohne Einschränkung annehmen, daß gilt $\mathring{M} \neq \varnothing$.

f bzw. $(f \circ h) \cdot |\det dh|$ ist auf dem Kompaktum $\overline{h(M)}$ bzw. $\overline{M}$ stetig und somit beschränkt. Daher existiert eine gemeinsame betragliche Schranke $C \in \mathbb{R}_+$ von f auf $\overline{h(M)}$ und $(f \circ h) \cdot |\det dh|$ auf $\overline{M}$, d.h.

$$\left| \, ((f \circ h) \cdot |\det dh|)|_{\overline{M}} \, \right| \leq C \quad \text{und} \quad \left| \, f|_{\overline{h(M)}} \, \right| \leq C. \tag{395}$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Es gibt eine meßbare kompakte Menge $K_* \subset h(\mathring{M})$ mit

$$\mathrm{Vol}_n(h(\mathring{M})) - \mathrm{Vol}_n(K_*) < \frac{\varepsilon}{2C}, \tag{396}$$

vgl. die Bemerkung im Anschluß an den Beweis von Satz 12.31.

Da h stetig ist, ist mit K_* auch $K := \overset{-1}{h}(K_*)$ abgeschlossen und somit (als Teilmenge der beschränkten Menge $\overline{M}$) kompakt. Hieraus, der Abgeschlossenheit von $\mathbb{R}^n \setminus \mathring{M}$ und $K \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathring{M}) = \varnothing$ folgt

$$\delta := \inf\{\|p-q\|_2 \,|\, p \in K \wedge q \in \mathbb{R}^n \setminus \mathring{M}\} > 0. \tag{397}$$

[Beweis von (397): Angenommen $\delta = 0$. Dann existieren Folgen $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in K bzw. $\mathbb{R}^n \setminus \mathring{M}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|p_k - q_k\|_2 = 0$. Wegen der Folgenkompaktheit von K (vgl. Satz 9.20) können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $p \in K$ konvergiert. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\|q_k - p\|_2 \leq \|q_k - p_k\|_2 + \|p_k - p\|_2 \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also konvergiert auch $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen p. Da $\mathbb{R}^n \setminus \mathring{M}$ abgeschlossen ist, folgt weiter $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathring{M}$, d.h. $p \in K \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathring{M})$, Widerspruch!]

Wir wählen nun einen $\mathring{M}$ umfassenden kompakten Quader $\widetilde{Q}$ (in $\mathbb{R}^n$) sowie eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ von $\widetilde{Q}Q$ mit

$$d(\mathfrak{Z}) < \delta \quad \text{und} \quad \sum_{i\in I_\partial} \mathrm{Vol}_n(Q_i) < \frac{\varepsilon}{2C}, \tag{398}$$

wobei $I_\partial := \{i \in \{1,\ldots,k\} \,|\, Q_i \cap \partial M \neq \varnothing\}$. (Letzteres ist möglich, da M meßbar ist, der Rand also eine Jordan-Nullmenge ist.) Dann ist $K_0 := \bigcup_{i\in I} Q_i$, wobei $I := \{i \in \{1,\ldots,k\} \,|\, Q_i \subset \mathring{M}\}$, eine meßbare (!) kompakte Menge, für die gilt

$$\overset{-1}{h}(K_*) = K \subset K_0 \subset \mathring{M}. \tag{399}$$

[Nachhweis hiervon: Die zweite Inklusion ist trivial nach Definition von K_0.

Sei $p \in K \subset \widetilde{Q}$. Dann existiert $i_0 \in I$ mit $p \in Q_{i_0}$, und es genügt $Q_{i_0} \subset \mathring{M}$ zu zeigen. Dies ist aber klar, da für jedes $q \in Q_{i_0}$ wegen $d(\mathfrak{Z}) \overset{(398)}{<} \delta$ gilt $\|p-q\|_2 < \delta$, d.h. nach (397) $q \in \mathring{M}$.]

Nun wird $\overline{M}$ von $\{Q_i \,|\, Q_i \cap \overline{M} \neq \varnothing\}$ überdeckt, und für jedes $i \in I$ gilt per definitionem $Q_i \subset \mathring{M}$, also $Q_i \cap (\overline{M} \setminus \mathring{M}) = \varnothing$, d.h. $(\mathring{M} \setminus K_0) \subset \bigcup_{i \in I_\partial} Q_i$ und

$$\mathrm{Vol}_n(\mathring{M} \setminus K_0) \leq \sum_{i \in I_\partial} \mathrm{Vol}_n(Q_i) \overset{(398)}{<} \frac{\varepsilon}{2C}. \tag{400}$$

Wegen (399) gilt außerdem $K_* \subset h(K_0)$, $(h(\mathring{M}) \setminus h(K_0)) \subset (h(\mathring{M}) \setminus K_*)$, also nach (396)

$$\mathrm{Vol}_n(h(\mathring{M}) \setminus h(K_0)) < \frac{\varepsilon}{2C}. \tag{401}$$

Wegen Hauptsatz 12.24 (ii), Lemma 12.41 und (395) erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned}
&\Bigg| \int_{\mathring{M}} (f \circ h)(x_1, \ldots, x_n) \cdot \left|\det \mathrm{d}_{(x_1,\ldots,x_n)} h\right| \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \\
&\qquad - \int_{K_0} (f \circ h)(x_1, \ldots, x_n) \cdot \left|\det \mathrm{d}_{(x_1,\ldots,x_n)} h\right| \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \Bigg| \\
&\qquad = \left| \int_{\mathring{M} \setminus K_0} (f \circ h)(x_1, \ldots, x_n) \cdot \left|\det \mathrm{d}_{(x_1,\ldots,x_n)} h\right| \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \right| \\
&\qquad \leq C \, \mathrm{Vol}_n(\mathring{M} \setminus K_0) \overset{(400)}{<} \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{h(\mathring{M})} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) - \int_{h(K_0)} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \right| \\
&\qquad = \left| \int_{h(\mathring{M}) \setminus h(K_0)} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \right| \\
&\qquad \leq C \, \mathrm{Vol}_n(h(\mathring{M}) \setminus h(K_0)) \overset{(401)}{<} \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt für jedes $i \in I$

$$\begin{aligned}
&\int_{h(Q_i)} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \\
&\qquad = \int_{Q_i} (f \circ h)(x_1, \ldots, x_n) \cdot \left|\det \mathrm{d}_{(x_1,\ldots,x_n)} h\right| \, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

woraus sich durch Summation

$$\int\limits_{h(K_0)} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)$$
$$= \int\limits_{K_0} (f\circ h)(x_1,\dots,x_n)\cdot\left|\det \mathrm{d}_{(x_1,\dots,x_n)}h\right|\;\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)$$

ergibt. (Beachte, daß die Q_i und ebenso die $h(Q_i)$ nur Nullmengen gemeinsam haben.) Daher folgt aus den letzten beiden Ungleichungen und der Dreiecksungleichung

$$\left|\int\limits_{\overset{\circ}{M}} (f\circ h)(x_1,\dots,x_n)\cdot\left|\det \mathrm{d}_{(x_1,\dots,x_n)}h\right|\;\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) - \int\limits_{h(K_0)} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)\right| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig gewählt war, folgt (391). □

Wir beweisen nun die folgenden Spezialfälle des Transformationssatzes. Auf (ii) haben wir übrigens bei seiner heuristischen Herleitung verwiesen.

Lemma 12.53. *Sei M eine beschränkte und Jordan-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

(i) Der Transformationssatz 12.50 gilt für $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ gegeben durch

$$\forall_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\; h(x_1,\dots,x_n) = (h_1(x_1,\dots,x_n), x_2,\dots,x_n),$$

wobei die Voraussetzung (391) natürlich weiterhin gelte.

(ii) Sei $\varphi \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\varphi(M)$ meßbar, und es gilt (392) für φ anstelle von h, insbesondere also auch

$$\mathrm{Vol}_n(\varphi(M)) = |\det\varphi|\cdot \mathrm{Vol}_n(M). \tag{402}$$

Beweis. Wegen des letzten Lemmas können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß M ein kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$) ist. Wir schreiben daher im folgenden Q anstelle von M.

Zu (i): Für $i \in \{1,\dots,n\}$ seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i \le b_i$ gewählt derart, daß gilt $Q = \times_{i=1}^n [a_i, b_i]$.

Dann gilt nach dem Satz von Fubini 12.47, den wir anwenden können, weil

$$[a_1,b_1] \longrightarrow \mathbb{R},\; t \longmapsto f(t,x_2,\dots,x_n),$$

stetig ist, und der Substitutionsregel 8.32

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{h(Q)} f(x_1,\dots,x_n)\ \mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)\\
&\quad= \int\limits_{\times_{i=2}^n[a_i,b_i]}\ \int\limits_{h_1(a_1,x_2,\dots,x_n)}^{h_1(b_1,x_2,\dots,x_n)} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\ \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}(x_2,\dots,x_n)\\
&\quad\overset{(391)}{=} \int\limits_{\times_{i=2}^n[a_i,b_i]}\ \int\limits_{a_1}^{b_1} f(h_1(x_1,\dots,x_n),x_2,\dots,x_n)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad |\frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n)|\ \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}(x_2,\dots,x_n)\\
&\quad= \int\limits_Q (f\circ h)(x_1,\dots,x_n)\cdot\left|\det \mathrm{d}_{(x_1,\dots,x_n)}h\right|\ \mathrm{d}(x_1,\dots,x_n).
\end{aligned}
$$

Zu (ii): Nach linearer Algebra läßt sich jedes $\varphi\in\operatorname{Iso}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ als Komposition endlich vieler „elementarer" Abbildungen folgender drei Typen darstellen:

- φ_λ: $\varphi_{i,\lambda}$ multipliziert die 1-te Komponente mit $\lambda\in\mathbb{R}^*$,
- φ^i_j: φ^i_j vertauscht die i-te mit der j-ten Komponente, $i,j\in\{1,\dots,n\}$,
- φ_+: $\forall_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\ \varphi_+(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1+x_2,x_2,\dots,x_n)$.

(Bei dieser Aussage handelt es sich um nichts anderes als um die Vorgehensweise beim Gaußschen[102] Eliminationsverfahren, bei welchem man eine invertierbare Matrix mit endlich vielen der genannten Umformungen in die Einheitsmatrix transformiert.)

Für alle $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ gilt $\det(\psi_1\circ\psi_2)=\det\psi_1\cdot\det\psi_2$. Daher genügt es zum Nachweis der Behauptung zu zeigen, daß die Aussage des Lemmas auf alle der obigen „elementaren" Abbildungen zutrifft. Für φ^i_j ergibt sich dies leicht aus dem Satz von Fubini, beachte $\det\varphi^i_j=-1$. Für φ_λ und φ_+ folgt die Behauptung aus (i). $\square$

Bemerkung. (ii) gilt auch für nicht-invertierbares $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, denn dann sind sowohl die rechte als auch die linke Seite von (402) gleich null. Beachte, daß in diesem Fall $\dim\varphi(M)<n$ gelten muß und $\varphi(M)$ somit beschränkte Teilmenge einer Hyperebene ist, die als Bild einer beschränkten Teilmenge einer achsenparallelen Hyperebene nach Beispiel 3.) in 12.34 und Lemma 12.51 eine Nullmenge ist.

Obwohl beim Beweis des Transformationssatzes nicht benötigt, folgern wir, daß man den Betrag der Funktionaldeterminante einer $\mathcal{C}^1$-Abbildung als infinitesimales Volumenverzerrungsverhältnis von Würfeln unter ihr interpretieren kann.

[102]nach Karl Friedrich Gauß (1777-1855)

Korollar 12.54. *Es seien $U \subset R^n$ offen, $h \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine absteigende*[103] *Folge nicht-entarteter*[104] *kompakter Würfel in U derart, daß gilt $\lim_{k\to\infty} \operatorname{Diam}(W_k) = 0$. Ferner sei $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} W_k$*[105] *mit $\mathrm{d}_a h \in \operatorname{Iso}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Vol}_n(h(W_k))}{\operatorname{Vol}_n(W_k)} = |\det \mathrm{d}_a h| .$$

Beweis. 1. Fall: $\mathrm{d}_a h = \mathrm{id}$. Wegen des Umkehrsatzes 10.44 inkl. Zusatz können wir nach eventueller Verkleinerung von U annehmen, daß $h(U)$ offen ist, h U bijektiv auf $h(U)$ abbildet und $(h|_U)^{-1} : h(U) \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist.

Sei $\varepsilon \in]0,1[$. Ggf. nach zweimaliger weiterer Verkleinerung ist U konvex, und es gilt (verwende den Mittelwertabschätzungssatz 10.10 sowie $\mathrm{d}_a h = \mathrm{id}$)

$$\forall_{p,q\in U}\, \|h(p) - h(q)\|_\infty \le (1+\varepsilon)\|p-q\|_\infty .$$

Mittels analoger Begründung (diesmal angewandt auf $(h|_U)^{-1}$) können wir auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\forall_{p,q\in U}\, \|p-q\|_\infty \le \frac{1}{1-\varepsilon}\|h(p) - h(q)\|_\infty$$

annehmen. Zusammengefaßt erhalten wir somit

$$\forall_{p,q\in U}\, (1-\varepsilon)\|p-q\|_\infty \le \|h(p) - h(q)\|_\infty \le (1+\varepsilon)\|p-q\|_\infty . \tag{403}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist W_k ein Würfel. Ist daher p_k der Mittelpunkt von W_k sowie $r_k := \frac{1}{2}\sqrt[n]{\operatorname{Vol}_n(W_k)}$, so gilt $W_k = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \|p_k - q\|_\infty \le r_k\} = \overline{U^\infty_{r_k}(p_k)}$. Da aus (403) folgt

$$\overline{h}^{1}\left(\overline{U^\infty_{(1-\varepsilon)r_k}(h(p_k))}\right) \subset \overline{U^\infty_{r_k}(p_k)} \subset \overline{h}^{1}\left(\overline{U^\infty_{(1+\varepsilon)r_k}(h(p_k))}\right),$$
$$\overline{U^\infty_{(1-\varepsilon)r_k}(h(p_k))} \subset h\left(\overline{U^\infty_{r_k}(p_k)}\right) \subset \overline{U^\infty_{(1+\varepsilon)r_k}(h(p_k))},$$

bedeutet dies

$$(1-\varepsilon)^n \operatorname{Vol}_n(W_k) \le \operatorname{Vol_n}(h(W_k)) \le (1+\varepsilon)^n \operatorname{Vol}_n(W_k),$$
$$(1-\varepsilon)^n \le \frac{\operatorname{Vol_n}(h(W_k))}{\operatorname{Vol}_n(W_k)} \le (1+\varepsilon)^n .$$

Die Beliebigkeit von $\varepsilon \in]0,1[$, von der die Kleinheit von U abhängt, ergibt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{Vol_n}(h(W_k))}{\operatorname{Vol}_n(W_k)} = 1 = |\det \mathrm{d}_a h| .$$

[103] Eine Folge $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen einer Menge heißt *absteigend* genau dann, wenn gilt $\forall_{k\in\mathbb{N}}\, M_{k+1} \subset M_k$.

[104] Ein Quader (in $\mathbb{R}^n$) heißt genau dann *nicht-entartet*, wenn sein n-dimensionales Volumen größer als null ist.

[105] Es gibt genau ein $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} W_k$. Wähle nämlich zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $a_k \in W_k$. Dann ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wegen $\lim_{k\to\infty} \operatorname{Diam}(W_k) = 0$ eine Cauchy-Folge, die gegen einen Punkt $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} W_k$ konvergiert. Die Eindeutigkeit von a folgt aus $\lim_{k\to\infty} \operatorname{Diam}(W_k) = 0$.

2. Fall: $\mathrm{d}_a h \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ beliebig. Wir setzen $\varphi := (\mathrm{d}_a h)^{-1} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und wenden den ersten Fall auf $\tilde{h} := \varphi \circ h$ an; beachte $\mathrm{d}_a \tilde{h} = \mathrm{id}$. Mittels Lemma 12.53 (ii) (402) – angewandt auf $M = h(W_k)$ – folgt dann für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Vol_n}\left(h(W_k)\right)}{\mathrm{Vol}_n(W_k)} &= \frac{\mathrm{Vol_n}\left(h(W_k)\right)}{\mathrm{Vol}_n\left(\varphi\left(h(W_k)\right)\right)} \frac{\mathrm{Vol_n}\left((\varphi \circ h)\left(W_k\right)\right)}{\mathrm{Vol}_n(W_k)} \\ &= \frac{1}{|\det \varphi|} \frac{\mathrm{Vol_n}\left((\varphi \circ h)\left(W_k\right)\right)}{\mathrm{Vol}_n(W_k)},\end{aligned}$$

also nach 1. Fall

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{Vol_n}\left(h(W_k)\right)}{\mathrm{Vol}_n(W_k)} = \frac{1}{|\det \varphi|} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{Vol_n}\left((\varphi \circ h)\left(W_k\right)\right)}{\mathrm{Vol}_n(W_k)} = \frac{1}{|\det \varphi|} = |\det \mathrm{d}_a h|.$$

□

Beweis des Transformationssatzes. Sei $\widetilde{Q} \subset \mathring{M}$ ein beliebiger kompakter Quader (in $\mathbb{R}^n$). Nach Lemma 12.52 genügt es, den Satz für $\widetilde{Q}$ anstelle von M zu beweisen.

Die Integrierbarkeitsaussagen haben wir bereits oben behandelt. Zu zeigen bleibt daher (392).

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ ist der Beweis bereits (unter schwächeren Voraussetzungen) in 8.32 erbracht worden.

Gelte daher die Behauptung für $n-1$. Wir wählen eine Norm $\|\ldots\|$ auf $\mathbb{R}^n$ und werden zeigen:

> Zu jedem $p \in \widetilde{Q}$ existiert ein $\varepsilon_p \in \mathbb{R}_+$ derart, daß $\overline{U_{\varepsilon_p}(p)} \subset \mathring{M}$ und (392) gilt für jeden n-dimensionalen kompakten Quader Q, der in $U_{\varepsilon_p}(p)$ enthalten ist, anstelle von M. (404)

Hieraus ergibt sich (392) für $\widetilde{Q}$ anstelle von M wie folgt: $\left(U_{\frac{1}{2}\varepsilon_p}(p)\right)_{p\in\widetilde{Q}}$ ist eine Familie offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die die kompakte Menge $\widetilde{Q}$ überdeckt. Daher[106] existieren $p_1, \ldots, p_l \in \widetilde{Q}$ mit $\widetilde{Q} \subset \bigcup_{j=1}^{l} U_{\frac{1}{2}\varepsilon_{p_i}}(p_i)$.

Sei nun $\mathfrak{Z} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ eine Zerlegung von $\widetilde{Q}$ mit $d(\mathfrak{Z}) \le \min\{\varepsilon_{p_1}, \ldots, \varepsilon_{p_l}\}$. Für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und jedes $p \in Q_i$ existiert ein $j \in \{1, \ldots, l\}$ derart, daß

[106] Es gilt folgender Satz, der inhaltlich zu Kapitel 9 gehört, vgl. auch die Warnung in Definition 9.15.

Satz. *Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ (i.S.v. Definition 9.15 (ii)). Dann besitzt jede Überdeckung von K durch offene Teilmengen von V eine endliche Teilüberdeckung von K.*

Beweis. Da K beschränkt ist, existiert $C \in \mathbb{R}_+$ mit $K \subset W := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\|_\infty \le C\}$.

1.) Wir zeigen zunächst, daß der Satz für W anstelle von K gilt und nehmen an, daß eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von W existiert, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Durch Halbierung von $W =: W_0$ entlang der Koordinatenachsen erhalten wir 2^n Teilwürfel von W, von denen mindestens einer, den wir W_1 nennen, keine endliche Teilüberdeckung durch $(U_i)_{i\in I}$ besitzt. Mittels derselben Vorgehensweise erhalten wir einen Würfel $W_2 \subset W_1$, der nicht endlich überdeckt werden kann. Setzt man diesen Prozeß fort, so ergibt sich eine absteigende Folge $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kompakter Würfel, die sämtlich durch $(U_i)_{i\in I}$ nicht endlich überdeckt werden können.

$p \in U_{\frac{1}{2}\varepsilon_{p_j}}(p_j)$, und es gilt für jedes $q \in Q_i$

$$\|q - p_j\| \le \|q - p\| + \|p - p_j\| \le d(\mathfrak{Z}) + \frac{1}{2}\varepsilon_{p_j} \le \varepsilon_{p_j},$$

d.h. $Q_i \subset U_{\varepsilon_{p_j}}(p_j)$, also nach (404): (392) gilt für Q_i anstelle von M.

Summation über $i \in \{1, \dots, k\}$ ergibt dann (392) für $\widetilde{Q}$ anstelle von M, beachte, daß die Q_i und ebenso die $h(Q_i)$ nur Nullmengen gemein haben. Damit ist dann der Hauptsatz gezeigt.

Zu zeigen bleibt daher (404): Sei $p \in \widetilde{Q}$. Wegen (391) hat $\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_p$ den Rang $n-1$ und besitzt daher eine $(n-1)$-reihige quadratische Untermatrix, die man etwa durch Streichen der j-ten Spalte, $j \in \{1, \dots, n-1\}$, erhält, deren Determinante nicht verschwindet. Es bedeutet im folgenden keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, aber einen Gewinn an Übersichtlichkeit und vereinfachter Schreibweise, wenn wir $j = 1$ annehmen. Da h stetig differenzierbar ist, existiert dann eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^\circ(p, \overset{\circ}{M})$ mit

$$\forall_{q \in U} \det \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_q \ne 0. \tag{405}$$

Aus dem Umkehrsatz 10.44 inkl. Zusatz folgt offenbar die Existenz einer Zahl $\varepsilon_p \in \mathbb{R}_+$ mit $U_{\varepsilon_p}(p) \subset U$, $\overline{U_{\varepsilon_p}(p)} \subset \overset{\circ}{M}$ und einer auf $U_{\varepsilon_p}(p)$ definierten Abbildung $\tilde{h}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$\tilde{h} := (x_1, h_2(x_1, \dots, x_n), \dots, h_n(x_1, \dots, x_n))\,|_{U_{\varepsilon_p}(p)}\colon U_{\varepsilon_p}(p) \to \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar und bildet $U_{\varepsilon_p}(p)$ bijektiv auf $V := \tilde{h}(U_{\varepsilon_p}(p))$ ab, $V \in \mathcal{U}^\circ(\tilde{h}(p), \mathbb{R}^n)$ und $g := \left(\tilde{h}|_{U_{\varepsilon_p}(p)}\right)^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar mit $\forall_{v \in V}\ \mathrm{d}_v g = \left(\mathrm{d}_{g(v)}\tilde{h}\right)^{-1} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. (406)

Für $k \in \mathbb{N}$ hat der Würfel W_k die Kantenlänge $\frac{C}{2^{k-1}}$, d.h. es gilt

$$\mathrm{Diam}(W_k) = \sqrt{n}\frac{C}{2^{k-1}} \xrightarrow{k \to \infty} 0,$$

also existiert (vgl. die Fußnoten in Korollar 12.54) genau ein $a \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k \subset W_0 = W \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Wir wählen $i_0 \in I$ mit $a \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ist, existiert dann $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $U_\varepsilon^\infty(a) \subset U_{i_0}$. Des weiteren existiert wegen $\lim_{k\to\infty} \mathrm{Diam}(W_k) = 0$ und der Wahl von a ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $W_{k_0} \subset U_\varepsilon^\infty(a)$, also folgt, daß W_{k_0} von endlich vielen (nämlich von U_{i_0}) der U_i, $i \in I$, überdeckt wird, Widerspruch!

2.) Sei nun $\left(\widetilde{U}_i\right)_{i \in I_K}$ eine offene Überdeckung von K. Wir setzen $\widetilde{U}_{i_*} := \mathbb{R}^n \setminus K$, wobei i_* ein beliebiges Objekt sei, das nicht in I_K liegt, und $I_W := I_K \cup \{i_*\}$. Da K abgeschlossen ist, ist dann $\left(\widetilde{U}_i\right)_{i \in I_W}$ eine offene Überdeckung von W, die nach 1.) eine endliche Teilüberdeckung von W besitzt. Dann besitzt auch $\left(\widetilde{U}_i\right)_{i \in I_K}$ eine endliche Teilüberdeckung von K. □

Weiterhin ist

$$k := \Big(h_1\,\underbrace{\big(x_1, g_2(x_1,\dots,x_n),\dots,g_n(x_1,\dots,x_n)\big)}_{\overset{(406)}{=} g(x_1,\dots,x_n)\colon V \longrightarrow U_{\varepsilon_p}(p)}, x_2,\dots,x_n\Big)\Big|_V \colon V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

stetig differenzierbar, und per constructionem gilt

$$k \circ \tilde{h} = h|_{U_{\varepsilon_p}(p)}. \tag{407}$$

Die Idee zum Nachweis von (404) ist es nun, auf k Lemma 12.53 (i) und auf die letzten $(n-1)$ Komponenten von $\tilde{h}$ die Induktionsvoraussetzung anzuwenden:

Sei $Q = \times_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ein in $U_{\varepsilon_p}(p)$ enthaltener kompakter Quader. Weiter seien $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ die (unendlich oft differenzierbare) Projektion auf die letzten $(n-1)$ Komponenten und für jedes $t \in [a_1, b_1]$

$$\tilde{h}_t := \tilde{h}(t, x_2, \dots, x_n)|_{U_t}\colon U_t \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei $U_t := \big\{(x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sum_{i=2}^n {x_i}^2 < {\varepsilon_p}^2 - t^2\big\}$. $\tilde{h}_t$ als Komposition von $\tilde{h}$ und der Inklusion $U_t \to \mathbb{R}^n$, $(x_2,\dots,x_n) \mapsto (t, x_2,\dots,x_n)$ stetig differenzierbar, und aus (406), (405) folgt offenbar

> $\pi \circ \tilde{h}_t\colon U_t \to \mathbb{R}^{n-1}$ ist stetig differenzierbar und bildet U_t bijektiv auf $(\pi \circ \tilde{h}_t)(U_t)$ ab mit $\forall_{u \in U_t}\, \mathrm{d}_u \tilde{h}_t \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1})$.

Somit ergibt die Induktionsvoraussetzung – der Leser beachte, daß die Menge $\{t\} \times (\pi \circ \tilde{h}_t)(\times_{i=2}^n [a_i, b_i])$ im Definitionsbereich V von k liegt, da $\tilde{h}$ die erste Komponente invariant läßt, vgl. (406) –

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{(\pi\circ\tilde{h}_t)(\times_{i=2}^n[a_i,b_i])} \big((f \circ k)\cdot|\det \mathrm{d}k|\big)(t, x_2,\dots,x_n)\;\mathrm{d}(x_2,\dots,x_n)\\
&= \int\limits_{\times_{i=2}^n[a_i,b_i]} \big((f \circ k)\cdot|\det \mathrm{d}k|\big)\overbrace{\big(t, (\pi\circ\tilde{h}_t)(x_2,\dots,x_n)\big)}^{=(t, h_2(t,x_2,\dots,x_n),\dots,h_2(t,x_2,\dots,x_n))}\\
&\qquad\qquad \cdot|\det \mathrm{d}_{(x_2,\dots,x_n)}(\pi\circ\tilde{h}_t)|\;\mathrm{d}(x_2,\dots,x_n).
\end{aligned}$$

Da nach Definition von $\tilde{h}$ in (406) gilt $\det \mathrm{d}_{(x_2,\dots,x_n)}(\pi\circ\tilde{h}_t) = \det \mathrm{d}_{(t,x_2,\dots,x_n)}\tilde{h}$, bedeutet dies nach dem Determinantenmultiplikationssatz der linearen Algebra und der Kettenregel 10.5

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{(\pi\circ\tilde{h}_t)(\times_{i=2}^n[a_i,b_i])} \big((f \circ k)\cdot|\det \mathrm{d}k|\big)(t, x_2,\dots,x_n)\;\mathrm{d}(x_2,\dots,x_n)\\
&= \int\limits_{\times_{i=2}^n[a_i,b_i]} f\Big(k\,\overbrace{\big(t, h_2(t,x_2,\dots,x_n),\dots,h_2(t,x_2,\dots,x_n)\big)}^{\overset{(406)}{=}\tilde{h}(t,x_2,\dots,x_n)}\Big)\\
&\qquad\qquad \cdot|\det \mathrm{d}_{(t,x_2,\dots,x_n)}(k\circ\tilde{h})|\;\mathrm{d}(x_2,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

$$\overset{(407)}{=} \int\limits_{\times_{i=2}^n [a_i,b_i]} f \circ h(t, x_2, \ldots, x_n) \cdot |\det \mathrm{d}_{(t,x_2,\ldots,x_n)} h| \; \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n).$$

Da dies für alle $t \in [a_1, b_1]$ gezeigt, folgt aus dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{[a_1,b_1]} \int\limits_{(\pi\circ\tilde{h}_t)(\times_{i=2}^n [a_i,b_i])} ((f \circ k) \cdot |\det \mathrm{d}k|)\,(x_1, \ldots, x_n)\; \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \\
&\quad = \int\limits_{[a_1,b_1]} \int\limits_{\times_{i=2}^n [a_i,b_i]} f \circ h(x_1, \ldots, x_n) \cdot |\det \mathrm{d}_{(x_1,\ldots,x_n)} h| \; \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \\
&\quad = \int\limits_{\times_{i=1}^n [a_i,b_i]} f \circ h(x_1, \ldots, x_n) \cdot |\det \mathrm{d}_{(x_1,\ldots,x_n)} h| \; \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

also bleibt zum Nachweis von (404) zu zeigen

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{[a_1,b_1]} \int\limits_{(\pi\circ\tilde{h}_t)(\times_{i=2}^n [a_i,b_i])} ((f \circ k) \cdot |\det \mathrm{d}k|)\,(x_1, \ldots, x_n)\; \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \\
&\qquad\qquad = \int\limits_{h(\times_{i=1}^n [a_i,b_i])} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned} \tag{408}$$

Beweis hiervon: Da für jedes $t \in [a_1, b_1]$ gilt

$$\{t\} \times (\pi \circ \tilde{h}_t) \left(\bigtimes_{i=2}^n [a_i, b_i] \right) \overset{(406)}{=} \tilde{h} \left(\{t\} \times \bigtimes_{i=2}^n [a_i, b_i] \right),$$

ist die linke Seite von (408) wegen des Satzes von Fubini gleich

$$\int\limits_{\tilde{h}(\times_{i=1}^n [a_i,b_i])} ((f \circ k) \cdot |\det \mathrm{d}k|)\,(x_1, \ldots, x_n)\; \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n),$$

und diese Zahl stimmt nach Lemma 12.53 (i) – beachte die Definition von k und $\forall_{v \in V}\ \det \mathrm{d}_v k \overset{(407),(406)}{=} \det \mathrm{d}_{g(v)} h \cdot \det \mathrm{d}_v g \overset{(391),(406)}{\neq} 0$ – mit

$$\int\limits_{\underbrace{(k\circ\tilde{h})(\times_{i=1}^n [a_i,b_i])}_{\overset{(407)}{=} h(\times_{i=1}^n [a_i,b_i])}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)$$

überein, womit der Transformationssatz vollständig bewiesen ist. □

Beweis des Zusatzes. Da mit M auch $M \setminus N$ beschränkt sowie Jordan-meßbar ist und $M \setminus N$ durch h bijektiv auf sein Bild abgebildet wird, folgt die Behauptung des Hauptsatzes für $M \setminus N$ anstelle von M aus ebendiesem. Da aber Abänderungen auf einer Nullmenge keinen Einfluß auf Integrierbarkeit und Integral haben, gilt die Behauptung auch für M. □

Wir stellen nun noch die wichtigsten Anwendungen des Transformationssatzes heraus.

Beispiel 12.55 (Ebene Polarkoordinaten)**.** Die $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung

$$h_2\colon \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\varphi) & \longmapsto & (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \end{array}$$

bildet $\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[$ bijektiv auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ab, und es gilt

$$\forall_{(r,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times[0,2\pi[}\ \det \mathrm{d}_{(r,\varphi)} h_2 = r > 0.$$

Daher folgt aus dem Transformationssatz inkl. Zusatz und dem Satz von Fubini für alle $\rho_1,\rho_2 \in [0,\infty[$, $\phi_1,\phi_2 \in [0,2\pi]$ mit $\rho_1 < \rho_2$, $\phi_1 < \phi_2$ und jede stetige Funktion $f\colon h_2([\rho_1,\rho_2]\times[\phi_1,\phi_2]) \to \mathbb{R}$

$$\int\limits_{h_2([\rho_1,\rho_2]\times[\phi_1,\phi_2])} f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{\phi_1}^{\phi_2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} r\, f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Beispiel. Aus 12.55 erhalten wir erneut, daß die Fläche der Kreisscheibe vom Radius $\rho\in\mathbb{R}_+$ gleich

$$\int\limits_{h_2([0,\rho]\times[0,2\pi])} \mathrm{d}(x_1,x_2) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\rho} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \pi\,\rho^2$$

ist.

Beispiel. Seien $a,b,\rho\in\mathbb{R}_+$. Dann ist die Fläche der Ellipse

$$E := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le \rho^2\right\}$$

gleich $a\,b\,\pi\,\rho^2$. Denn die $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung

$$h\colon \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\varphi) & \longmapsto & (a\,r\cos(\varphi), b\,r\sin(\varphi)) \end{array}$$

bildet $[0,\rho]\times[0,2\pi[$ bijektiv auf E ab, und es gilt

$$\forall_{(r,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times[0,2\pi[}\ \det \mathrm{d}_{(r,\varphi)} h = a\,b\,r > 0.$$

Daher folgt aus dem Transformationssatz inkl. Zusatz und dem Satz von Fubini

$$\mathrm{Vol}_2(E) = \int\limits_{h([0,\rho]\times[0,2\pi[)} \mathrm{d}(x_1,x_2) = a\,b\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\rho} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = a\,b\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi = a\,b\,\pi\,\rho^2.$$

Beispiel 12.56 (Zylinderkoordinaten)**.** Die $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung

$$h\colon \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r,\varphi,z) & \longmapsto & (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \end{array}$$

bildet $\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\times \mathbb{R}$ bijektiv auf $(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ ab, und es gilt

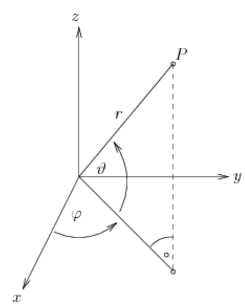
$$\forall_{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\times \mathbb{R}} \det \mathrm{d}_{(r,\varphi,z)} h = r > 0.$$

Daher folgt aus dem Transformationssatz inkl. Zusatz und dem Satz von Fubini für alle $\rho_1, \rho_2 \in [0,\infty[$, $\phi_1, \phi_2 \in [0,2\pi], \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$ mit $\rho_1 < \rho_2$, $\phi_1 < \phi_2$, $\zeta_1 < \zeta_2$ und jede stetige Funktion $f\colon h([\rho_1,\rho_2] \times [\phi_1,\phi_2] \times [\zeta_1,\zeta_2]) \to \mathbb{R}$

$$\int_{h([\rho_1,\rho_2]\times[\phi_1,\phi_2]\times[\zeta_1,\zeta_2])} f(x,y,z)\ \mathrm{d}(x,y,z)$$
$$= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} r\, f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)\ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z.$$

Beispiel 12.57 (Räumliche Polarkoordinaten). Die $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung

$$h_3\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r,\varphi,\vartheta) & \longmapsto & (r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) \end{array}$$



bildet $\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\, \times\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ bijektiv auf $(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ ab, und es gilt

$$\forall_{(r,\varphi,\vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \det \mathrm{d}_{(r,\varphi,\vartheta)} h_3 = r^2\cos(\vartheta) > 0.$$

[Nachweis hiervon: Es gilt $h_3 = g \circ k$, wobei $g, k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben sind durch

$$g(\rho,\varphi,z) = (h_2(\rho,\varphi), z) \quad \text{und} \quad k(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos(\vartheta), \varphi, r\sin(\vartheta)).$$

k bildet $\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\, \times\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\, \times \mathbb{R}$ ab, und letztere Menge wird durch g bijektiv aufauf $(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ abgebildet.

Des weiteren gilt für alle $(r,\varphi,\vartheta) \in \mathbb{R}^3$

$$\det \mathrm{d}_{(r,\varphi,\vartheta)}(g \circ k) = \det \mathrm{d}_{k(r,\varphi,\vartheta)} g \cdot \det \mathrm{d}_{(r,\varphi,\vartheta)} k = r^2 \cos(\vartheta),$$

womit die Aussage gezeigt ist.]

Nun folgt aus dem Transformationssatz inkl. Zusatz und dem Satz von Fubini für alle $\rho_1, \rho_2 \in [0,\infty[$, $\phi_1, \phi_2 \in [0,2\pi]$, $\theta_1, \theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $\rho_1 < \rho_2$, $\phi_1 < \phi_2$, $\theta_1 < \theta_2$ und jede stetige Funktion $f\colon h_3([\rho_1,\rho_2] \times [\phi_1,\phi_2] \times [\theta_1,\theta_2]) \to \mathbb{R}$

$$\int_{h_3([\rho_1,\rho_2]\times[\phi_1,\phi_2]\times[\theta_1,\theta_2])} f(x,y,z)\ \mathrm{d}(x,y,z)$$
$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(r\cos(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\varphi)\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))\, r^2\cos(\vartheta)\ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta.$$

Beispiel. Wir berechnen das Trägheitsmoment Θ einer homogenen Hohlkugel $M = h_3([r_1, r_2] \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ mit Radien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$, $r_1 < r_2$, der Massendichte $m \in \mathbb{R}_+$ bzgl. der z-Achse durch den Mittelpunkt, welches gegeben ist durch

$$\Theta = \int_M m\,(x^2 + y^2)\, d(x, y, z).$$

Nach 12.57 gilt

$$\begin{aligned}
\Theta &= m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} r^4 \cos^3(\vartheta)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta = \frac{2}{5}\pi\, m\, ({r_2}^5 - {r_1}^5) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{2}{5}\pi\, m\, ({r_2}^5 - {r_1}^5) \left[\sin(\vartheta) - \frac{1}{3}\sin^3(\vartheta)\right]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}\pi\, m\, ({r_2}^5 - {r_1}^5).
\end{aligned}$$

Beispiel 12.58 (n-dimensionale Polarkoordinaten)**.** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ definieren rekursiv eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $h_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$h_n(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) := (h_{n-1}(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}) \cos(\vartheta_{n-2}), r \sin(\vartheta_{n-2})),$$

d.h.

$$\begin{aligned}
(h_n)_1(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) &= r\cos(\varphi)\cos(\vartheta_1)\cdots\cos(\vartheta_{n-2}), \\
(h_n)_2(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) &= r\sin(\varphi)\cos(\vartheta_1)\cdots\cos(\vartheta_{n-2}), \\
(h_n)_3(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) &= r\sin(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2)\cdots\cos(\vartheta_{n-2}), \\
(h_n)_4(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) &= r\sin(\vartheta_2)\cos(\vartheta_3)\cdots\cos(\vartheta_{n-2}), \\
&\ \vdots \\
(h_n)_{n-1}(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) &= r\sin(\vartheta_{n-3})\cos(\vartheta_{n-2}), \\
(h_n)_n(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) &= r\sin(\vartheta_{n-2}).
\end{aligned}$$

(Für $n = 3$ stimmt diese Definition mit der in 12.57 überein.)

h_n bildet $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\, \times\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{n-2}$ bijektiv auf $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n-2}$ ab und für $(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\, \times\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{n-2}$ gilt

$$\det \mathrm{d}_{(r,\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2})} h_n = r^{n-1}\cos(\vartheta_1)\cos^2(\vartheta_2)\cdots\cos^{n-2}(\vartheta_{n-2}) > 0.$$

[Die letzte Aussage sieht man induktiv ein.

Für $n = 3$ ist der Beweis bereits in 12.57 erbracht worden. Sei daher $n \geq 4$ und gelte die Behauptung für $n - 1$.

Es gilt $h_n = g \circ k$, wobei $g, k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
g(\rho, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}, x_n) &= (h_{n-1}(\rho, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}), x_n), \\
k(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) &= (r\cos(\vartheta_{n-2}), \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-3}, r\sin(\vartheta_{n-2})).
\end{aligned}$$

k bildet $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\, \times\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{n-2}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\, \times\,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{n-3} \times \mathbb{R}$ ab, und letztere Menge wird nach Induktionsvoraussetzung durch g bijektiv auf $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ abgebildet.

Weiter gilt nach Induktionsvoraussetzung für alle $(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\det \mathrm{d}_{(r,\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2})}(g \circ k) &= \det \mathrm{d}_{k(r,\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2})} g \cdot \det \mathrm{d}_{(r,\varphi,\vartheta_1,\ldots,\vartheta_{n-2})} k \\
&= r^{n-2}\cos(\vartheta_1)\cos^2(\vartheta_2)\cdots\cos^{n-2}(\vartheta_{n-3})\, r\cos(\vartheta_{n-2}).\,]
\end{aligned}$$

Aus dem Transformationssatz inkl. Zusatz und dem Satz von Fubini folgt für alle $\rho_1, \rho_2 \in [0, \infty[$, $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi]$, $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \ldots, \theta_{n-2,1}, \theta_{n-2,2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $\rho_1 < \rho_2$, $\phi_1 < \phi_2$, $\theta_{1,1} < \theta_{1,2}, \ldots, \theta_{n-2,1} < \theta_{n-2,2}$ und jede stetige Funktion $f\colon h_3(\underbrace{[\rho_1, \rho_2] \times [\phi_1, \phi_2] \times [\theta_{1,1}, \theta_{1,2}] \times \ldots \times [\theta_{n-2,1}, \theta_{n-2,2}]}_{=:Q}) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int\limits_{h_3(Q)} & f(x_1, \ldots, x_n)\ \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \int\limits_{\theta_{n-2,1}}^{\theta_{n-2,2}} \ldots \int\limits_{\theta_{1,1}}^{\theta_{1,2}} \int\limits_{\phi_1}^{\phi_2} \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} f \circ h_n(r, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}) \\ &\qquad \cdot r^{n-1} \cos(\vartheta_1) \cos^2(\vartheta_2) \cdots \cos^{n-2}(\vartheta_{n-2})\ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta_1 \ldots \mathrm{d}\vartheta_{n-2}.\end{aligned}$$

12.59 (Uneigentliche Riemann-Integrale)**.** Seien M eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Man kann nun auch in der mehrdimensionalen Theorie das *uneigentliche Riemann-Integral von f über M* definieren. Hierbei nennen wir eine aufsteigende[107] Folge $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Jordan-meßbarer (also insbesondere beschränkter) Teilmengen von M *ausschöpfend*, wenn für jedes $r \in \mathbb{R}_+$ gilt

(i) $(M \setminus M_k) \cap B_r^n$ ist Jordan-meßbar für jedes $k \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim_{k\to\infty} \mathrm{Vol}_n\left((M \setminus M_k) \cap B_r^n\right) = 0$.

Sei nun zunächst $f \geq 0$. Dann heißt f *uneigentlich Riemann-integrierbar über M*, wenn eine ausschöpfende Folge $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von M existiert derart, daß $f|_{M_k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ beschränkt und Riemann-integrierbar über M_k ist. In diesem Falle heißt

$$\int\limits_M f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) := \lim_{k\to\infty} \int\limits_{M_k} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

das *uneigentliche Riemann-Integral von f über M*. Man kann zeigen, daß diese Definition unabhängig von der speziellen Wahl der ausschöpfenden Folge $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von M mit der gewünschten Eigenschaft ist.

Ist f beliebig, so heißt f *uneigentlich Riemann-integrierbar über M*, wenn sowohl $f_+ := \max\{f, 0\}$ als auch $f_- := \max\{-f, 0\}$ uneigentlich Riemann-integrierbar über M sind und nicht sowohl $\int\limits_M f_+(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)$ als auch $\int\limits_M f_-(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)$ gleich $+\infty$ sind. Dann heißt

$$\begin{aligned}\int\limits_M & f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \\ &:= \int\limits_M f_+(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) - \int\limits_M f_-(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \in \widehat{\mathbb{R}}\end{aligned}$$

das *uneigentliche Riemann-Integral von f über M*.

[107] Eine Folge $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen einer Menge heißt *aufsteigend* genau dann, wenn gilt $\forall_{k\in\mathbb{N}}\, M_k \subset M_{k+1}$.

13 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Inhalt dieses Kapitels sollen folgende Themen sein:

- Einführung
- Explizite Differentialgleichungen erster Ordnung
- Existenz- und Eindeutigkeitssätze
- Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Der Autor verweist hier auf die Kapitel 1, 2 und 3 sowie 6.19 und 6.20 seines Skriptums über *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, das auf seiner Homepage unter `http://www.mathemaik.uni-erlangen.de/~bock/DGL.pdf` zu finden ist.

A Der Körper ${}^*\mathbb{R}$ der hyperreellen Zahlen

Definition A.1 (Filter)**.** Sei I eine nicht-leere Menge. Ein *Filter über I* ist eine Menge $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(I)$ derart, daß gilt:

(i) $\mathcal{F} \neq \varnothing$ und $\varnothing \notin \mathcal{F}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$,

(iii) $\forall_{B \in \mathfrak{P}(I)} \left(\exists_{A \in \mathcal{F}} A \subset B \Longrightarrow B \in \mathcal{F} \right)$.

Beispiel A.2 (Der Filter der koendlichen Teilengen einer unendlichen Menge)**.** Sei I eine unendliche Menge. Dann ist offenbar

$$\mathcal{F} := \{ A \in \mathfrak{P}(I) \,|\, I \setminus A \text{ endlich} \}$$

ein Filter über I, der sog. *Filter der koendlichen Teilmengen von I*.

Satz A.3. *Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter über einer nicht-leeren Menge I. Dann gilt für $A_1, \dots, A_n, A \in \mathfrak{P}(I), n \in \mathbb{N}_+$:*

$$(A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \,\wedge\, A_1 \cap \ldots \cap A_n \subset A) \Longrightarrow A \in \mathcal{F}.$$

Beweis. Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Wegen Definition A.1 (ii) gilt $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$, und mit Definition A.1 (iii) folgt aus $A_1 \cap \ldots \cap A_n \subset A$, daß gilt $A \in \mathcal{F}$. □

Definition A.4 (Ultrafilter)**.** Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt *Ultrafilter* genau dann, wenn für jeden Filter $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ bereits $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ gilt.

Beispiel A.5. Seien I eine nicht-leere Menge und $i_0 \in I$. Dann ist

$$\mathcal{F} := \{ A \in \mathfrak{P}(I) \,|\, i_0 \in A \}$$

ein Ultrafilter.

[Daß $\mathcal{F}$ ein Filter ist, ist klar.

Sei $\mathcal{G}$ ein weiterer Filter mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ und angenommen $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Dann existiert $A \in \mathcal{G}$ mit $i_0 \notin A$. Es gilt $\{i_0\} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, also folgt aus der Filtereigenschaft (ii) von $\mathcal{G}$, daß $\varnothing = A \cap \{i_0\} \in \mathcal{G}$, im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{G}$ als Filter die leere Menge nicht enthält.]

Satz A.6 (Äquivalente Charakterisierung von Ultrafiltern)**.** *Ein Filter $\mathcal{F}$ über einer nicht-leeren Menge I ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für alle $A \in \mathfrak{P}(I)$ gilt: $A \in \mathcal{F} \vee (I \setminus A) \in \mathcal{F}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter. $A, (I \setminus A) \in \mathcal{F}$ kann nach Definition A.1 (ii), (i) nicht gelten. Ohne Einschränkung sei $A \notin \mathcal{F}$, d.h. nach Definition A.1 (iii) $\forall_{B \in \mathcal{F}} B \not\subset A$ bzw. $B \cap (I \setminus A) \neq \varnothing$. Dann ist $\mathcal{G} := \{ C \in \mathfrak{P}(M) \,|\, \exists_{B \in \mathcal{F}} B \cap (I \setminus A) \subset C \}$ ein $\mathcal{F}$ umfassender Filter mit $I \setminus A \in \mathcal{G}$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Insbesondere gilt $I \setminus A \in \mathcal{F}$.

Gelte umgekehrt $\forall_{A \in \mathfrak{P}(I)} A \in \mathcal{F} \vee I \setminus A \in \mathcal{F}$ und sei $\mathcal{G}$ ein Filter über I mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Angenommen es existiert $A \in \mathcal{G}$ mit $A \notin \mathcal{F}$. Dann gilt aber $I \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, also auch $\varnothing = A \cap (I \setminus A) \in \mathcal{G}$, Widerspruch! □

Satz A.7. *Zu jedem Filter über einer nicht-leeren Menge I existiert ein diesen Filter umfassender Ultrafilter über I.*

Zum *Beweis*, der übrigens das zum Auswahlaxiom 1.9 äquivalente *Zornsche Lemma* verwendet, vgl. [13, S. 11]. □

Satz A.8. *Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter über einer nicht-leeren Menge I. Dann gilt für $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(I), n \in \mathbb{N}_+$:*

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \exists_{k \in \{1,\ldots,n\}} A_k \in \mathcal{F}.$$

Sind $A_1, \ldots, A_n$ disjunkt, so existiert genau ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $A_k \in \mathcal{F}$.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $n = 2$ zu zeigen; der allgemeine Fall folgt dann induktiv. Seien also $A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(I)$ mit $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$ und angenommen $A_1 \notin \mathcal{F} \wedge A_2 \notin \mathcal{F}$. Aus Satz A.6 folgt $(I \setminus A_1), (I \setminus A_2) \in \mathcal{F}$, also (da $\mathcal{F}$ Filter) $I \setminus (A_1 \cup A_2) = (I \setminus A_1) \cap (I \setminus A_2) \in \mathcal{F}$. Die Filterdefinition beinhaltet $\varnothing \notin \mathcal{F}$, somit folgt $A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{F}$, Widerspruch!

Der zweite Teil der Behauptung ist klar. □

Wir fixieren nun einen den Filter der koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ umfassenden Ultrafilter $\mathcal{F}$ und definieren auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine *Äquivalenzrelation* $\sim$ durch

$$\forall_{\alpha=(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}, \beta=(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\, \alpha \sim \beta :\Longleftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i = \beta_i\} \in \mathcal{F},$$

d.h. per definitionem, daß für alle $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}, \beta = (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}, \gamma = (\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gilt

$$\alpha \sim \alpha,\ (\alpha \sim \beta \Longrightarrow \beta \sim \alpha) \text{ und } (\alpha \sim \beta \wedge \beta \sim \gamma \Longrightarrow \alpha \sim \gamma).$$

[Die ersten beiden Eigenschaften sind klar, und die dritte gilt wegen

$$\{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i = \beta_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} \,|\, \beta_i = \gamma_i\} \subset \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i = \gamma_i\}$$

und Satz A.3.]

Zu einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die Folge $a_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch $\forall_{i\in\mathbb{N}}\, a_{\mathbb{N}}(i) = a$ und setzen für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\overline{\alpha} := \begin{cases} a, & \text{falls } \exists_{a\in\mathbb{R}}\, \alpha \sim a_{\mathbb{N}}, \\ \{\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \beta \sim \alpha\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachte, daß $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nach linearer Algebra in disjunkte Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ zerfällt.

Wir definieren nun $\boxed{{}^*\mathbb{R}} := \{\overline{\alpha} \,|\, \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$. Die Elemente von ${}^*\mathbb{R}$ heißen *hyperreelle Zahlen*.

Für jede Teilmenge M von $\mathbb{R}$ setzen wir analog $\boxed{{}^*M} := \{\overline{\alpha} \,|\, \alpha \in M^{\mathbb{N}}\}$[108]. Dann gilt offenbar ${}^*M \subset {}^*\mathbb{R}$.

Die Elemente von ${}^*\mathbb{N}, {}^*\mathbb{Z}$ und ${}^*\mathbb{Q}$ heißen *hypernatürliche*, *hyperganze* und *hyperrationale Zahlen*.

[108] Warnung: Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{\alpha} \in {}^*M$ gilt i.a. nur $\{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i \in M\} \in \mathcal{F}$ und nicht etwa $\forall_{i\in\mathbb{N}}\, \alpha_i \in M$.

Satz A.9. *Seien* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *und* $a \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

(i) $\overline{\alpha} = \overline{\beta} \Longleftrightarrow \alpha \sim \beta$,

(ii) $\overline{a_{\mathbb{N}}} = a$ *und* $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$.

Beweis. Zu (i): „$\Rightarrow$" Sei $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$. Ist $\alpha \sim a_{\mathbb{N}}$ für ein $a \in \mathbb{R}$, so gilt $\overline{\alpha} = a$. Daher ist auch $\overline{\beta} = a_{\mathbb{N}}$, und somit ist $\alpha \sim \beta$.

Gilt $\alpha \sim a_{\mathbb{N}}$ für kein $a \in \mathbb{R}$, so ist $\overline{\alpha}$ nach Definition eine Äquivalenzklasse, also $\alpha \in \overline{\alpha} = \overline{\beta}$, d.h. $\alpha \sim \beta$.

„$\Leftarrow$" Gelte $\alpha \sim \beta$. Falls $a \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \sim a_{\mathbb{N}}$ existiert, folgt $\beta \sim a_{\mathbb{N}}$ und somit $\overline{\alpha} = a = \overline{\beta}$.

Gilt $\alpha \sim a_{\mathbb{N}}$ für kein $a \in \mathbb{R}$, so ist $\beta \sim a_{\mathbb{N}}$ für kein $a \in \mathbb{R}$. Daher sind $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ Äquivalenzklassen, und wegen $\alpha \sim \beta$ gilt daher $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$.

Die erste Aussage von (ii) gilt wegen $a_{\mathbb{N}} \sim a_{\mathbb{N}}$, und die zweite folgt unmittelbar. □

Wir definieren nun eine Addition ${}^*{+}$ und eine Multiplikation ${}^*{\cdot}$ auf ${}^*\mathbb{R}$, indem wir für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ setzen

$$\overline{\alpha} \,{}^*{+}\, \overline{\beta} := \overline{\alpha + \beta},$$
$$\overline{\alpha} \,{}^*{\cdot}\, \overline{\beta} := \overline{\alpha \cdot \beta},$$

wobei $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ gegeben sind durch $\forall_{i \in \mathbb{N}}\, (\alpha + \beta)_i = \alpha_i + \beta_i$, $(\alpha \cdot \beta)_i = \alpha_i \cdot \beta_i$.

[Wir müssen natürlich nachweisen, daß diese Definition wohldefiniert ist:

Seien $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{\alpha} = \overline{\tilde{\alpha}}$ und $\overline{\beta} = \overline{\tilde{\beta}}$. Nach Satz A.9 (i) gilt dann

$$A_1 := \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i = \tilde{\alpha}_i\},\ A_2 := \{i \in \mathbb{N} \,|\, \beta_i = \tilde{\beta}_i\} \in \mathcal{F},$$

also

$$A_1 \cap A_2 \subset A := \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i + \beta_i = \tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i\}$$

und somit nach Satz A.3: $A \in \mathcal{F}$. Aus Satz A.9 (i) folgt dann $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}$.

Der Beweis von $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}}$ verläuft analog.]

Satz A.10. *Für alle* $a, b \in \mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ *gilt*

(i) $a \,{}^*{+}\, b = a + b$,

(ii) $a \,{}^*{\cdot}\, b = a \cdot b$,

Beweis. Seien also $a, b \in \mathbb{R}$. Zu (i): Es gilt $\overline{a_{\mathbb{N}}} = a, \overline{b_{\mathbb{N}}} = b, \overline{(a+b)_{\mathbb{N}}} = a + b$, vgl. Satz A.9, und es folgt

$$a + b = \overline{(a+b)_{\mathbb{N}}} \overset{\text{Def.}}{=} \overline{a_{\mathbb{N}}} \,{}^*{+}\, \overline{b_{\mathbb{N}}} = a \,{}^*{+}\, b.$$

(ii) sieht man analog ein. □

Wir können wegen des letzten Satzes nun $+$ und $\cdot$ für ${}^*{+}$ und ${}^*{\cdot}$ schreiben, da die letzteren Operationen erstere erweitern

Satz A.11. $({}^*\mathbb{R},+,\cdot)$ *ist ein Körper mit Nullelement* 0 *und Einselement* 1.

Das zu $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ *bzgl.* $+$ *inverse Element ist* $-\overline{\alpha} := (-1)\cdot\overline{\alpha}$.

Und im Falle $\overline{\alpha} \neq 0$, *ist das zu* $\overline{\alpha}$ *bzgl.* $\cdot$ *inverse Element* $(\overline{\alpha})^{-1} := \overline{\beta}$, *wobei* $\forall_{i\in\mathbb{N}}\, \beta_i := \begin{cases} (\alpha_i)^{-1}, & \text{falls } \alpha_i \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Beachte $\overline{\alpha} \neq 0 \Leftrightarrow \neg(\alpha \sim 0_{\mathbb{N}}) \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i = 0\} \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i \neq 0\} \in \mathcal{F}$. □

Als nächstes definieren wir $\boxed{{}^*\mathbb{R}_+} \subset {}^*\mathbb{R}$ durch

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\, \overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}_+ :\Longleftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i > 0\} \in \mathcal{F}.$$

[Auch hier ist die Wohldefiniertheit zu zeigen:

Seien $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{\alpha} = \overline{\tilde{\alpha}}$ und gelte $\{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i > 0\} \in \mathcal{F}$. Nach Satz A.9 (i) gilt dann $\{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i = \tilde{\alpha}_i\} \in \mathcal{F}$, also

$$\{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i = \tilde{\alpha}_i\} \cap \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i > 0\} \subset \{i \in \mathbb{N} \,|\, \tilde{\alpha}_i > 0\},$$

d.h. nach Satz A.3: $\{i \in \mathbb{N} \,|\, \tilde{\alpha}_i > 0\} \in \mathcal{F}$.]

Satz A.12. $({}^*\mathbb{R},+,\cdot,{}^*\mathbb{R}_+)$ *ist ein angeordneter Körper.*

Beweis. Nicht offensichtlich ist nur ${}^*\mathbb{R} \setminus \{0\} = -{}^*\mathbb{R}_+ \,\dot\cup\, {}^*\mathbb{R}_+$. Sei also $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$. Zu zeigen ist, daß entweder $\{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i > 0\} \in \mathcal{F}$ oder $\{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i = 0\} \in \mathcal{F}$ oder $\{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i < 0\} \in \mathcal{F}$ gilt. Wegen

$$\{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i > 0\} \,\dot\cup\, \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i = 0\} \,\dot\cup\, \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i < 0\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$$

folgt dies Sofort aus Satz A.8. □

Satz A.13. *Für alle* $a \in \mathbb{R}$ *gilt:* $a \in {}^*\mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Da $\mathcal{F}$ als Filter über $\mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{N}$ enthalten muß, (vgl. Definition A.1 (i), (iii)), gilt

$$\underbrace{a}_{=\overline{a_N}} \in {}^*\mathbb{R}_+ \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\{i \in \mathbb{N} \,|\, \underbrace{a_{\mathbb{N}}(i)}_{=a} > 0\}}_{=\mathbb{N}} \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow a > 0,$$

□

Wegen des letzten Satzes können wir $<, \leq, >, \geq$ (vgl. Definition 2.14) auf ${}^*\mathbb{R}$ erweitern, indem wir für alle $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$

$$\underbrace{\overline{\alpha} < \overline{\beta}}_{\Leftrightarrow:\overline{\beta}>\overline{\alpha}} \quad :\Longleftrightarrow \quad \overline{b} - \overline{a} \in {}^*\mathbb{R}_+,$$

$$\underbrace{\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}}_{\Leftrightarrow:\overline{\beta}\geq\overline{\alpha}} \quad :\Longleftrightarrow \quad \overline{\alpha} < \overline{\beta} \vee \overline{\alpha} = \overline{\beta}$$

setzen. Wie in jedem angeordneten Körper definieren wir den Betrag durch $\forall_{\overline{\alpha}\in{}^*\mathbb{R}}\, |\overline{\alpha}| := \begin{cases} \overline{\alpha}, & \text{falls } \overline{\alpha} \geq 0, \\ -\overline{\alpha}, & \text{falls } \overline{\alpha} < 0. \end{cases}$

Die Gültigkeit des folgenden Satzes folgt direkt aus den letzten Definitionen.

Satz A.14. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$. Dann gilt:*

(i) $\overline{\alpha} = \overline{\beta} \iff \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i = \beta_i\} \in \mathcal{F}$,

(ii) $\overline{\alpha} \le \overline{\beta} \iff \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i \le \beta_i\} \in \mathcal{F}$,

(iii) $|\overline{\alpha} - \overline{\beta}| \le \varepsilon \iff \{i \in \mathbb{N} \,|\, |\alpha_i - \beta_i| \le \varepsilon\} \in \mathcal{F}$,

(iv) $|\overline{\alpha} - a| \le \varepsilon \iff \{i \in \mathbb{N} \,|\, |\alpha_i - a| \le \varepsilon\} \in \mathcal{F}$.

Es gelten (ii), (iii) und (iv) entsprechend mit $\ge$ anstelle von $\le$. □

Beweis. (i), (ii) sind klar, (iii) gilt wegen
l.S. $\Leftrightarrow -\overline{\varepsilon_{\mathbb{N}}} \le \overline{\alpha - \beta} \le \varepsilon \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \,|\, -\varepsilon \le \alpha_i - \beta_i\}, \{i \in \mathbb{N} \,|\, \alpha_i - \beta_i \le \varepsilon\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow$ r.S.
und (iv) folgt aus (iii) wegen $a = \overline{a_{\mathbb{N}}}$. □

Definition A.15. Seien $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$. Wir nennen

$$\begin{aligned}
&\overline{\alpha} \textit{ finit} \text{ oder } \textit{endlich} \;:\iff \exists_{n \in \mathbb{N}}\, |\overline{\alpha}| \le n,\\
&\overline{\alpha} \textit{ infinit} \text{ oder } \textit{unendlich} \;:\iff \forall_{n \in \mathbb{N}}\, |\overline{\alpha}| \ge n,\\
&\overline{\alpha} \textit{ infinitesimal} \;:\iff \forall_{n \in \mathbb{N}}\, |\overline{\alpha}| \le \frac{1}{n+1},\\
&\overline{\alpha}, \overline{\beta} \textit{ infinitesimal benachbart } (\text{i.Z. } \overline{\alpha} \approx \overline{\beta}) :\iff \overline{\alpha} - \overline{\beta} \text{ infinitesimal.}
\end{aligned}$$

Aussage (ii) des nächsten Satzes besagt, daß ${}^*\mathbb{R}$ – genauer $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, {}^*\mathbb{R}_+)$ – nicht archimedisch angeordnet ist.

Satz A.16.

(i) *${}^*\mathbb{R}$ enthält von 0 verschiedene infinitesimale Elemente.*

(ii) *${}^*\mathbb{R}$ enthält unendliche Elemente.*

(iii) *Der angeordnete Körper $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, {}^*\mathbb{R}_+)$ ist nicht vollständig angeordnet.*

Beweis. $\overline{(\frac{1}{i+1})_{i \in \mathbb{N}}}$ ist offenbar infinitesimal und $\overline{(i)_{i \in \mathbb{N}}}$ unendlich. Damit sind (i) und (ii) klar. Da unendliche Elemente eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ darstellen, genügt es zum Nachweis von (iii) zu zeigen, daß für alle $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ gilt:

$$\overline{\alpha} \text{ obere Schranke von } \mathbb{N} \Longrightarrow \overline{\alpha} - 1 \text{ obere Schranke von } \mathbb{N}.$$

Beweis hiervon: Sind $\overline{\alpha}$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so gilt: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \le \overline{\alpha} \Rightarrow n \le \overline{\alpha} - 1$. □

Bemerkung. Offenbar ist die Äquivalenzklasse einer jeden Nullfolge infinitesimal und die Äquivalenzklasse jeder Folge, die gegen $\pm\infty$ konvergiert unendlich.

Umgekehrt folgt nicht aus der Infinitesimalität bzw. der Unendlichkeit einer Äquivalenzklasse nicht, daß alle Repräsentanten Nullfolgen sind bzw. gegen $\pm\infty$ konvergieren:

Wähle $A \subset \mathbb{N}$ derart, daß A und $\mathbb{N} \setminus A$ unendlich sind, und definiere

$$\forall_{i \in \mathbb{N}}\, \alpha_i := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{falls } i \in A, \\ 0, & \text{sonst,} \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \beta_i := \left\{ \begin{array}{ll} i, & \text{falls } i \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{array} \right\}$$

Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, können wir gemäß Satz A.6 ohne Einschränkung annehmen, daß $A \in \mathcal{F}$ gilt (ansonsten vertausche A und $\mathbb{N} \setminus A$). Dann folgt $\overline{\alpha} = 1_{\mathbb{N}}$ und damit $\forall_{n\in\mathbb{N}} |\overline{\alpha} - 1| \leq \frac{1}{n+1}$, aber $\alpha - 1$ konvergiert nicht gegen null. Außerdem gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\{i \in \mathbb{N} \,|\, \beta_i \geq n\} = A \setminus \{0, \ldots, n-1\} = A \cap (\mathbb{N} \setminus \{0, \ldots, n-1\}) \in \mathcal{F},$$

also $\overline{\beta} \geq n$, aber β konvergiert nicht gegen $+\infty$.

Satz A.17. *$\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $^*\mathbb{R}$, und für alle $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gilt:*

(i) $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta} \Longleftrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}} \{i \in \mathbb{N} \,|\, |\alpha_i - \beta_i| \leq \frac{1}{n+1}\} \in \mathcal{F}$,

(ii) $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta} \Longrightarrow -\overline{\alpha} \approx -\overline{\beta}$,

(iii) $(\overline{\alpha} \approx \overline{\beta} \wedge \overline{\tilde{\alpha}} \approx \overline{\tilde{\beta}}) \Longrightarrow \overline{\alpha} + \overline{\tilde{\alpha}} \approx \overline{\beta} + \overline{\tilde{\beta}}$,

(iv) $(\overline{\alpha} \approx \overline{\beta} \wedge \overline{\tilde{\alpha}} \approx \overline{\tilde{\beta}} \wedge \overline{\alpha}, \overline{\tilde{\alpha}}$ *endlich* $) \Longrightarrow \overline{\alpha} \cdot \overline{\tilde{\alpha}} \approx \overline{\beta} \cdot \overline{\tilde{\beta}}$.

Beweis. (i) ist klar nach Definition von $\approx$ in A.15 und Satz A.14 (iii). Hieraus folgt sofort, daß $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist. (ii), (iii) und (iv) folgen ebenfalls aus (i). Exemplarisch beweisen wir (iv): Es ist $\overline{\alpha}\overline{\tilde{\alpha}} = \overline{\alpha\tilde{\alpha}}$, $\overline{\beta}\overline{\tilde{\beta}} = \overline{\beta\tilde{\beta}}$, und daher haben wir nach (i) zu zeigen:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, \left|\alpha_i\tilde{\alpha}_i - \beta_i\tilde{\beta}_i\right| \leq \frac{1}{n+1} \right\} \in \mathcal{F}. \tag{409}$$

Sei hierzu $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen dann, daß es ein $n_0 \in \mathbb{N}_+$ gibt mit

$$\{i \in \mathbb{N} \,|\, |\tilde{\alpha}_i| \leq n_0\} \in \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \{i \in \mathbb{N} \,|\, |\beta_i| \leq n_0\} \in \mathcal{F}, \tag{410}$$

$$\left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, |\alpha_i - \beta_i| \leq \frac{1}{2(n+1)n_0} \right\} \in \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \left\{ i \in \mathbb{N} \,\middle|\, \left|\tilde{\alpha}_i - \tilde{\beta}_i\right| \leq \frac{1}{2(n+1)n_0} \right\} \in \mathcal{F}. \tag{411}$$

Wegen $|\alpha_i\tilde{\alpha}_i - \beta_i\tilde{\beta}_i| \leq |\alpha_i - \beta_i||\tilde{\alpha}_i| + |\tilde{\alpha}_i - \tilde{\beta}_i||\beta_i|$ erhält man (409) aus (410) und (411).

Zu (410): Da $\overline{\alpha}$ endlich und $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta}$ ist $\overline{\beta}$ endlich. Da auch $\overline{\tilde{\alpha}}$ endlich ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_+$ mit $|\overline{\tilde{\alpha}}| \leq n_0$ und $|\overline{\beta}| \leq n_0$. Aus Satz A.14 (iv) folgt nun (410).

(411) folgt sofort aus $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta}, \overline{\tilde{\alpha}} \approx \overline{\tilde{\beta}}$ und (i). □

Satz A.18. *Zu jedem endlichen $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ existiert genau ein $a \in \mathbb{R}$, das zu $\overline{\alpha}$ infinitesimal benachbart ist.*

Beweis. Da $\overline{\alpha}$ endlich ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\overline{\alpha}| \leq n_0$. Setze

$$M := \{a \in \mathbb{R} \,|\, a \leq \overline{\alpha}\}.$$

Wegen $-n_0 \in M$ und $\forall_{a\in M}\, a \leq n_0$ ist A eine nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nach ($\mathbb{R}$13) eine obere Grenze $a := \sup M \in \mathbb{R}$ besitzt. Wir behaupten

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\; a - \frac{1}{n+1} \leq \overline{\alpha} \leq a + \frac{1}{n+1}. \tag{412}$$

Hieraus folgt dann $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ -\frac{1}{n+1} \le \overline{\alpha} - a \le \frac{1}{n+1}$, d.h. $a \approx \overline{\alpha}$, und die Existenzaussage ist gezeigt.

Die Einzigkeit ist klar, da für $b \in \mathbb{R}$ mit $\beta \approx \overline{\alpha}$ aus $a \approx \overline{\alpha}$ und der Tatsache, daß $\approx$ nach Satz A.17 eine Äquivalenzrelation ist, $a \approx b$ folgt und somit wegen $a, b \in \mathbb{R}$: $a = b$:

Zu zeigen bleibt (412). Hierzu sei $n \in \mathbb{N}$. Da a obere Schranke von M ist, folgt $a + \frac{1}{n+1} \notin M$, also $\overline{\alpha} \le a + \frac{1}{n+1}$. Da $a - \frac{1}{n+1}$ keine obere Schranke von M ist, existiert $b \in M$ mit $b > a - \frac{1}{n+1}$. Somit ist $a - \frac{1}{n+1} < b \le \overline{\alpha}$. □

Definition A.19 (Standardteil und Monade)**.**

(i) Zu jedem endlichen $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ heißt die eindeutig bestimmte Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $\overline{\alpha} \approx a$ wie in Satz A.18 der *Standardteil von* $\overline{\alpha}$ und wird mit $\operatorname{st}(\overline{\alpha})$ bezeichnet.

(ii) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ heißt

$$\mathrm{m}(a) := \{\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R} \,|\, \overline{\alpha} \approx a\}$$

die *Monade* von a.

Bemerkung.

(i) Ist $a \in \mathbb{R}$, so gilt $\mathrm{m}(a) = \{a + \Delta \,|\, \Delta \in {}^*\mathbb{R} \text{ infinitesimal}\}$.

[„$\subset$“ Sei $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ mit $\overline{\alpha} \approx a$. Dann ist $\Delta := \overline{\alpha} - a$ infinitesimal mit $\overline{\alpha} = a + \Delta$.

„$\supset$“ Für infinitesimales Δ ist offenbar $a - (a + \Delta)$ infinitesimal, also gilt $a \approx (a + \Delta)$.]

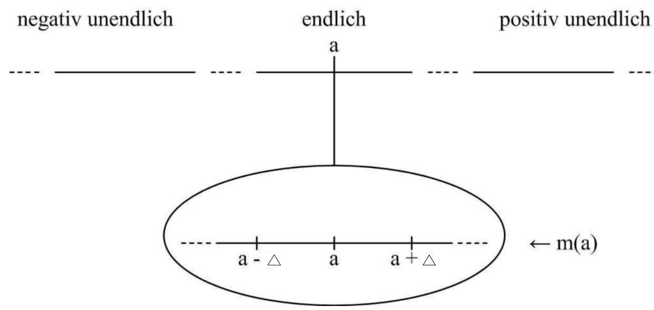
Die Menge der infinitesimalen Zahlen ist somit gleich $\mathrm{m}(0)$.

(ii) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so gilt $\forall_{\overline{\alpha}\in\mathrm{m}(a)} \forall_{\overline{\beta}\in\mathrm{m}(b)}\ \overline{\alpha} < \overline{\beta}$.

[Zunächst ist klar, daß $\mathrm{m}(a) \cap \mathrm{m}(b) = \varnothing$, denn sonst folgte aus der Transitivität von $\approx$, daß a und b infinitesimal benachbart sind. Für $\overline{\alpha} \in \mathrm{m}(a)$ und $\overline{\beta} \in \mathrm{m}(b)$ kann daher nur entweder $\overline{\alpha} < \overline{\beta}$ oder $\overline{\alpha} > \overline{\beta}$ gelten.

Angenommen $\overline{\alpha} > \overline{\beta}$. Schreibe $\overline{\alpha} = a + \Delta_a$ und $\overline{\beta} = b + \Delta_b$ mit $\Delta_a, \Delta_b \in \mathrm{m}(0)$. Dann existiert $\overline{\gamma} \in {}^*\mathbb{R}_+$ mit $a + \Delta_a = b + \Delta_b + \overline{\gamma}$. Schreibe $\overline{\gamma} = c + \Delta_c$ mit $c \in \mathbb{R}_+$ und $\Delta_c \in \mathrm{m}(0)$. Dann gilt $a - b - c = \Delta_a - \Delta_b - \Delta_c$. Nach Satz A.17 ist die rechte Seite der letzten Gleichung infinitesimal und die linke reell. Folglich müssen beide Seiten gleich null sein, d.h. $a = b + c$, also (wegen $c \in \mathbb{R}_+$) $a > b$, Widerspruch!]

Wir haben nun gezeigt, daß die Menge der hyperrellen Zahlen aus zwei disjunkte Teilmengen besteht, nämlich der Menge der endlichen und der der unendlichen hyperreellen Zahlen. Eine unendliche hyperreelle Zahl ist entweder negativ unendlich (d.h. per definitionem kleiner als jede natürliche Zahl) oder positiv unendlich (d.h. per definitionem größer als jede natürliche Zahl), also zerfällt die Menge der unendlichen hyperreellen Zahlen disjunkt in die der positiv unendlichen und die der negativ unendlichen Zahlen, und zwischen diesen beiden Mengen sind die endlichen Zahlen angesiedelt. Die Menge der endlichen hyperrellen Zahlen wiederum besteht aus der disjunkten Vereinigung über alle zu verschiedenen reellen Zahlen gehörigen Monaden.



Die Punkte in obiger Abbildung, welche [13, S. 26] nachempfunden ist, deuten an, daß es jeweils weder kleinste noch größte Elemente gibt.

Sei $M \subset \mathbb{R}$. Jeder Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ wird nun in kanonischer Weise eine Funktion $\boxed{{}^*f\colon {}^*M \to {}^*\mathbb{R}}$ zugeordnet, die die vorgegebene Funktion f fortsetzt. Eigenschaften wie Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit oder Differenzierbarkeit von f lassen sich dann in intuitiver Form durch die Funktion ${}^*f$ ausdrücken.

Sei also $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zu $\overline{\alpha} \in {}^*M$ wählen wir $\mu \in M^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{\mu} = \overline{\alpha}$ – ein solches μ existiert nach Definition von ${}^*M$ – und setzen

$$ {}^*f(\overline{\alpha}) := \overline{f \circ \mu}, $$

wobei $f \circ \mu$ gegeben ist durch $\forall_{i \in \mathbb{N}}\, (f \circ \mu)_i = f(\mu_i)$.

[Wir müssen zeigen, daß dies wohldefiniert ist:

Seien $\mu, \tilde{\mu} \in M^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{\mu} = \overline{\tilde{\mu}}$. Aus Satz A.9 (i) folgt dann $\{i \in \mathbb{N} \,|\, \mu_i = \tilde{\mu}_i\} \in \mathcal{F}$, und es ist $\{i \in \mathbb{N} \,|\, \mu_i = \tilde{\mu}_i\} \subset \{i \in \mathbb{N} \,|\, f(\mu_i) = f(\tilde{\mu}_i)\}$, also nach Definition A.1 (iii) $\{i \in \mathbb{N} \,|\, f(\mu_i) = f(\tilde{\mu}_i)\} \in \mathcal{F}$. Nach Satz A.9 (i) gilt dann $\overline{f \circ \mu} = \overline{f \circ \tilde{\mu}}$.]

Satz A.20. *Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so gilt $\forall_{a \in M}\, {}^*f(a) = f(a)$.*

Beweis. Wegen der letzten Definition und Satz A.9 (ii) gilt für jedes $a \in M$ ${}^*f(a) = {}^*f(\overline{a_{\mathbb{N}}}) = \overline{f \circ a_{\mathbb{N}}} = f(a)$. □

Satz A.21. *Seien $M \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a_0 \in M$. Dann gilt:*

(i) ${}^*(f \pm g) = {}^*f \pm {}^*g$, ${}^*(f \cdot g) = {}^*f \cdot {}^*g$,

(ii) ${}^*(f \circ g) = {}^*f \circ {}^*g$.

(iii) Aus $\forall_{a \in M}\, f(a) = f(a_0) + (a - a_0)\, g(a)$ *folgt*

$$ \forall_{\overline{\alpha} \in {}^*M}\, {}^*f(\overline{\alpha}) = f(a_0) + (\overline{\alpha} - a_0)\, {}^*g(\overline{\alpha}). $$

Beweis. Für alle $\mu \in M^{\mathbb{N}}$ gilt
${}^*(f+g)(\overline{\mu}) = \overline{(f+g) \circ \mu} = \overline{f \circ \mu} + \overline{g \circ \mu} = {}^*f(\overline{\mu}) + {}^*g(\overline{\mu})$ und
${}^*(f \circ g)(\overline{\mu}) = \overline{(f \circ g) \circ \mu} = \overline{f \circ (g \circ \mu)} = {}^*f({}^*g(\overline{\mu})) = ({}^*f \circ {}^*g)(\overline{\mu})$.

Damit sind (i) und (ii) klar.

Zu (iii): Nach Voraussetzung von (iii) gilt

$$ {}^*f(\overline{\mu}) \overset{A.20}{=} \overline{f \circ \mu} \overset{\text{Vor}}{=} \overline{(f(a_0))_{\mathbb{N}} + (\mu - (a_0)_{\mathbb{N}}) g \circ \mu} $$

$$= \quad \overline{(f(a_0))_{\mathbb{N}}} + (\overline{\mu} - \overline{(a_0)_{\mathbb{N}}})\,\overline{g \circ \mu}$$
$$\overset{A.9(ii)}{=} \quad f(a_0) + (\overline{\mu} - a_0)\,\overline{g \circ \mu} \overset{A.20}{=} f(a_0) + (\overline{\mu} - a_0)\,{}^*g(\overline{\mu}).$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Satz A.22 (Nichtstandard-Kriterium für Stetigkeit)**.** *Seien $M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a_0 \in M$. Dann gilt:*
f ist stetig in $a_0 \Longleftrightarrow \forall_{\overline{\alpha} \in {}^*M}\ (\overline{\alpha} \approx a_0 \Rightarrow {}^*f(\overline{\alpha}) \approx f(a_0))$.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei $\overline{\alpha} \in {}^*M$ mit $\overline{\alpha} \approx a_0$. Zu zeigen ist

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |{}^*f(\overline{\alpha}) - f(a_0)| \le \frac{1}{n+1}.$$

Wähle $\mu \in M^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{\mu} = \overline{\alpha}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung der linken Seite existiert $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß

$$\forall_{a \in M} \left(|a - a_0| \le \delta \Longrightarrow |f(a) - f(a_0)| \le \frac{1}{n+1}\right).$$

Es gilt $\overline{\mu} \approx a_0 \overset{A.9(ii)}{=} \overline{(a_0)_{\mathbb{N}}}$, also nach Satz A.17 (i) $\{i \in \mathbb{N} \,|\, |\mu_i - a_0| \le \delta\} \in \mathcal{F}$ und somit $\{i \in \mathbb{N} \,|\, |f(\mu_i) - f(a_0)| \le \frac{1}{n+1}\} \in \mathcal{F}$. Aus Satz A.14 (iv) ergibt sich nun $|\overline{f \circ \mu} - f(a_0)| \le \frac{1}{n+1}$ und wegen $\overline{f \circ \mu} = {}^*f(\overline{\mu}) = {}^*f(\overline{\alpha})$ und der Beliebigkeit von $n \in \mathbb{N}$ gilt die Behauptung.

„$\Leftarrow$" Angenommen f ist nicht stetig in a_0. Dann existieren eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $\mu_i \in M$ derart, daß

$$|\mu_i - a_0| \le \frac{1}{i+1} \;\wedge\; |f(\mu_i) - f(a_0)| \ge \varepsilon. \tag{413}$$

Hieraus folgt für $\mu := (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$, daß gilt $\overline{\mu} \approx a_0$, also aus der Voraussetzung der rechten Seite ${}^*f(\overline{\mu}) \approx f(a_0)$.

Aus (413) und Satz A.14 (iv) ergibt sich $|\overline{f \circ \mu} - f(a_0)| \ge \varepsilon$, und wir erhalten wegen $\overline{f \circ \mu} = {}^*f(\overline{\mu})$ einen Widerspruch zu ${}^*f(\overline{\mu}) \approx f(a_0)$. □

Mit der im letzten Satz gegebenen Nichtstandard-Charakterisierung der Stetigkeit lassen sich nun sehr einfach wohlbekannte Tatsachen über Stetigkeit beweisen.

Korollar A.23. *Seien $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $a_0 \in M$ stetig sind. Dann sind auch $f \pm g$, $f \cdot g\colon M \to \mathbb{R}$ in a_0 stetig.*

Beweis. Sei $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ mit $\overline{\alpha} \approx a_0$. Wähle $\mu \in M^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{\mu} = \overline{\alpha}$. Nach Voraussetzung gilt dann ${}^*f(\overline{\mu}) \approx f(a_0)$ und $*g(\overline{\mu}) \approx g(a_0)$. Aus den Sätzen A.21 (i) und A.17 (iii) folgt

$${}^*(f \pm g)(\overline{\mu}) = {}^*f(\overline{\mu}) \pm {}^*g(\overline{\mu}) \approx f(a_0) \pm g(a_0) = (f \pm g)(a_0),$$

d.h. wegen der Beliebigkeit von $\overline{\alpha} = \overline{\mu}$ mit $\overline{\alpha} \approx a_0$, daß $(f \pm g)$ in a_0 stetig ist.

Der Beweis der Stetigkeit von $f \cdot g$ in a_0 folgt analog aus A.21 (i) und A.17 (iii). Beachte hierbei, daß $f(a_0), g(a_0)$ endlich sind. □

Korollar A.24. *Seien M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a_0 \in \mathbb{R}$. g sei in a_0 und f in $g(a_0)$ stetig. Dann ist $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in a_0 stetig.*

Beweis. Sei $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ mit $\overline{\alpha} \approx a_0$. Wähle $\mu \in M^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{\mu} = \overline{\alpha}$. Wegen der Stetigkeit von g in a_0 gilt zunächst ${}^*g(\overline{\mu}) \approx g(a_0)$ und sodann, da f in $g(a_0)$ stetig ist, ${}^*f({}^*g(\overline{\mu})) \approx f(g(a_0))$. Hieraus und aus Satz A.21 (ii) folgt nun

$${}^*(f \circ g)(\overline{\mu}) = {}^*f({}^*g(\overline{\mu})) \approx f(g(a_0)) = (f \circ g)(a_0),$$

d.h. wegen der Beliebigkeit von $\overline{\alpha} = \overline{\mu}$ mit $\overline{\alpha} \approx a_0$, daß $(f \circ g)$ in a_0 stetig ist. □

Nach Satz A.22 ist eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$, wobei $M \subset \mathbb{R}$, genau dann stetig, wenn gilt:

$$\forall_{\overline{\alpha} \in {}^*M} \forall_{b \in M} \left(\overline{\alpha} \approx b \Rightarrow {}^*f(\overline{\alpha}) \approx f(a_0)\right).$$

Hat man sich dies vor Augen geführt, so ist die nun folgende Charakterisierung der gleichmäßigen Stetigkeit besonders schön.

Satz A.25 (Nichtstandard-Kriterium für gleichmäßige Stetigkeit)**.** *Seien M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a_0 \in M$. Dann gilt:*
f ist gleichmäßig stetig $\iff \forall_{\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*M} \left(\overline{\alpha} \approx a_0 \Rightarrow {}^*f(\overline{\alpha}) \approx {}^*f(\overline{\beta})\right)$.

Beweis. Der Beweis verläuft mehr oder weniger genauso wie der Beweis des entsprechenden Satzes für stetige Funktionen:
„$\Rightarrow$“ Seien $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*M$ mit $\overline{\alpha} \approx a_0$. Zu zeigen ist

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |{}^*f(\overline{\alpha}) - {}^*f(\overline{\beta})| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Wähle $\mu, \nu \in M^{\mathbb{N}}$ mit $\overline{\mu} = \overline{\alpha}$ und $\overline{\nu} = \overline{\beta}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung der linken Seite existiert $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, daß

$$\forall_{a,b \in M} \left(|a - b| \leq \delta \Longrightarrow |f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{n+1}\right).$$

Es gilt $\overline{\mu} \approx \overline{\nu}$, also nach Satz A.17 (i) $\{i \in \mathbb{N} \,|\, |\mu_i - \nu_i| \leq \delta\} \in \mathcal{F}$ und somit $\{i \in \mathbb{N} \,|\, |f(\mu_i) - f(\nu_i)| \leq \frac{1}{n+1}\} \in \mathcal{F}$. Aus Satz A.14 (iii) ergibt sich nun, daß gilt $|\overline{f \circ \mu} - \overline{f \circ \nu}| \leq \frac{1}{n+1}$ und wegen $\overline{f \circ \mu} = {}^*f(\overline{\mu}) = {}^*f(\overline{\alpha})$, $\overline{f \circ \nu} = {}^*f(\overline{\nu}) = {}^*f(\overline{\beta})$ und der Beliebigkeit von $n \in \mathbb{N}$ gilt die Behauptung.
„$\Leftarrow$“ Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann existieren eine Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und zu jedem $i \in \mathbb{N}$ reelle Zahlen $\mu_i, \nu_i \in M$ derart, daß

$$|\mu_i - \nu_i| \leq \frac{1}{i+1} \;\wedge\; |f(\mu_i) - f(\nu_i)| \geq \varepsilon. \tag{414}$$

Hieraus folgt für $\mu := (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}, \nu := (\nu_i)_{i \in \mathbb{N}}$, daß gilt $\overline{\mu} \approx \overline{\nu}$, also aus der Voraussetzung der rechten Seite ${}^*f(\overline{\mu}) \approx {}^*f(\overline{\nu})$.
Aus (414) und Satz A.14 (iii) ergibt sich $|\overline{f \circ \mu} - \overline{f \circ \nu}| \geq \varepsilon$, und wir erhalten wegen $\overline{f \circ \mu} = {}^*f(\overline{\mu}), \overline{f \circ \nu} = {}^*f(\overline{\nu})$ einen Widerspruch zu ${}^*f(\overline{\mu}) \approx {}^*f(\overline{\nu})$. □

Wir geben nun eine Charakterisierung der Differenzierbarkeit im Geiste Sir Isaac Newtons und Gottfied Wilhelm Leibniz'.

Satz A.26 (Nichtstandard-Kriterium für Differenzierbarkeit). *Seien $M \subset \mathbb{R}$ offen, $f: M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a_0 \in M$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &f \text{ ist differenzierbar in } a_0 \text{ mit } f'(a_0) = c \\ &\iff \exists_{c \in \mathbb{R}} \forall_{\overline{\alpha} \in {}^*M \setminus \{a_0\}} \left(\overline{\alpha} \approx a_0 \Rightarrow \frac{{}^*f(\overline{\alpha}) - f(a_0)}{\overline{\alpha} - a_0} \approx c \right). \end{aligned}$$

Bemerkung. Mit $x_0 := a_0$ besagt die rechte Seite genau

$$\forall_{\mathrm{d}x \in \mathrm{m}(0) \setminus \{0\}} \, x_0 + \mathrm{d}x \in {}^*M \Rightarrow \frac{{}^*f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)}{\mathrm{d}x} \approx c.$$

Beweis. Wir definieren $g: M \to \mathbb{R}$ durch $g(a) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{f(a) - f(a_0)}{a - a_0}, & a \neq a_0, \\ c, & a = a_0. \end{array} \right\}$

Wir haben

linke Seite $\iff g$ ist stetig in $a_0 \overset{A.22}{\iff} \forall_{\overline{\alpha} \in {}^*M} \left(\overline{\alpha} \approx a_0 \Rightarrow {}^*g(\overline{\alpha}) \approx c\right)$.

Daher ist der Satz gezeigt, falls gilt $\forall_{\overline{\alpha} \in {}^*M \setminus \{a_0\}} {}^*g(\overline{\alpha}) = \frac{{}^*f(\overline{\alpha}) - f(a_0)}{\overline{\alpha} - a_0}$, und dies folgt aus der Definition von g sowie Satz A.21. □

Analysis beginnt in der Regel mit der Untersuchung von Folgen auf Konvergenz. Zum Abschluß dieses Kapitels diskutieren wir kurz das Nichtstandard-Kriterium für Konvergenz.

Man beachte, daß eine Folge $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ per definitionem eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist. Daher haben wir ${}^*\alpha: {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ bereits definiert, und gemäß Satz A.20 gilt $\forall_{n \in \mathbb{N}} {}^*\alpha(n) = \alpha_n$. Wir können daher für jedes $\overline{\nu} \in {}^*\mathbb{N}$ schreiben $\alpha_\nu := {}^*\alpha(\overline{\nu})$, ohne daß Verwechslungen auftreten können.

Satz A.27 (Nichtstandard-Kriterium für Adhärenzwerte und Konvergenz von Folgen). *Seien $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) a ist Adhärenzwert von $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \exists_{\overline{\iota} \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}} {}^*\alpha_{\overline{\iota}} \approx a$.

(ii) $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \iff \exists_{\overline{\iota} \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}} {}^*\alpha_{\overline{\iota}} \approx a$.

Wir bereiten den Beweis des letzten Satzes durch das folgende Lemma vor:

Lemma A.28. ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ *ist nicht leer und enthält nur unendliche Elemente.*

Beweis. $\overline{(n)_{n \in \mathbb{N}}} \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, also ist ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ nicht leer.

Sei $\overline{\iota} \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Zum Nachweis des Lemmas genügt es, $\forall_{n \in \mathbb{N}} \, \iota > n$ zu zeigen.

$n = 0$: Für jedes $\overline{\nu} \in {}^*\mathbb{N}$ gilt $\overline{\nu} \geq 0$. (Denn nach Definition von ${}^*\mathbb{N}$ können wir ohne Einschränkung annehmen, daß ν eine Folge in $\mathbb{N}$ ist, also gilt $\nu_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.) Damit gilt natürlich auch $\overline{\iota} \geq 0$, und wegen $\overline{\iota} \notin \mathbb{N}$ muß gelten $\overline{\iota} > 0$.

$n \mapsto n + 1$: Es gelte $\overline{\iota} > n$, d.h. $\{k \in \mathbb{N} \,|\, \iota_k > n\} \in \mathcal{F}$. hieraus folgt dann $\{k \in \mathbb{N} \,|\, \iota_k \geq n + 1\} \in \mathcal{F}$, also $\overline{\iota} \geq n + 1$. Wegen $\overline{\iota} \notin \mathbb{N}$ folgt $\overline{\iota} > n + 1$. □

Beweis des Satzes. Zu (i): „⇒“ Es existiere also eine Teilfolge $(\alpha_{\iota_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \left(n \geq n_0 \Longrightarrow |\alpha_{\iota_n} - a| \leq \frac{1}{k+1} \right).$$

Hieraus folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$, daß gilt $\left\{n \in \mathbb{N} \,|\, |\alpha_{\iota_n} - a| \le \frac{1}{k+1}\right\} \in \mathcal{F}$. Aus Satz A.14 (iv) ergibt sich $|\overline{\alpha \circ \iota} - a| \le \frac{1}{k+1}$. Aus ${}^*\alpha(\overline{\iota}) = \overline{\alpha \circ \iota}$ und der Beliebigkeit von $k \in \mathbb{N}$ folgt die rechte Seite von (i). Beachte, daß $(\iota_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist, da $(\alpha_{\iota_n})_{n \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und somit $\overline{\iota} \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ gilt.

„$\Leftarrow$" Existiere $\overline{\iota} \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ mit ${}^*\alpha_{\overline{\iota}} \approx a$. Nach Definition von ${}^*\mathbb{N}$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt $\forall_{n \in \mathbb{N}}\, \iota_n \in \mathbb{N}$. Nach dem letzten Lemma ist $\overline{\iota}$ unendlich, also gilt $\lim_{n \to \infty} \iota_n = +\infty$, und somit existiert eine streng monoton wachsende Teilfolge von ι. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei ι selbst streng monoton wachsend. Wegen ${}^*\alpha_{\overline{\iota}} \approx a$, ${}^*\alpha(\overline{\iota}) = \overline{\alpha \circ \iota}$ gilt $\forall_{k \in \mathbb{N}} |\overline{\alpha \circ \iota} - a| \le \frac{1}{k+1}$ und somit nach Satz A.14 (iv)

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \left\{n \in \mathbb{N} \,|\, |\alpha_{\iota_n} - a| \le \frac{1}{k+1}\right\} \in \mathcal{F}. \tag{415}$$

Angenommen a ist kein Adhärenzwert von α. Dann gilt für jede streng monoton wachsende Abbildung $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\exists_{k_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n_0 \in \mathbb{N}} \exists_{n \in \mathbb{N}} \left(n \ge n_0 \wedge |\alpha_{i_n} - a| > \frac{1}{k_0 + 1}\right).$$

Insbesondere besitzt dann ι eine Teilfolge $(\iota_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\forall_{n \in \mathbb{N}} \left|\alpha_{\iota_{j_n}} - a\right| > \frac{1}{k_0+1}$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $j = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ gilt. (Ansonsten gehen wir von ι zu $\iota \circ j$ über.) Aus (415) folgt $\varnothing = \left\{n \in \mathbb{N} \,|\, |\alpha_{\iota_n} - a| \le \frac{1}{k_0+1}\right\} \in \mathcal{F}$, im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{F}$ ein Filter ist.

Zu (ii): Der Beweis verläuft analog zu dem von (i). Beim Beweis von „$\Rightarrow$" wird ι durch eine beliebige Abbildung $\iota\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\lim_{n \to \infty} \iota_n = +\infty$ ersetzt, und beim Beweis von „$\Leftarrow$" ist ι die Identität auf $\mathbb{N}$. $\square$

B Multilineare Algebra: Tensorprodukte

Generalvoraussetzung. Seien stets $\mathbb{k}$ ein Körper, $k \in \mathbb{N}_+$ sowie $V, V_1, \ldots, V_k$ und $W, W_1, \ldots, W_k$ $\mathbb{k}$-Vektorräume.

Definition B.1 (Multilineare Abbildungen)**.** $\varphi \in W^{\times_{i=1}^k V_i}$ heißt eine *k-fach $\mathbb{k}$-multilineare Abbildung* genau dann, wenn für alle $v_1 \in V_1, \ldots, v_k \in V_k$ und jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ die Abbildung

$$V_i \longrightarrow W, \; v \longmapsto \varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_k),$$

$\mathbb{k}$-linear – d.h. ein Element von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V_i, W)$ – ist.

Die Menge aller k-fach $\mathbb{k}$-multilinearen Abbildungen $\times_{i=1}^k V_i \to W$ bezeichnen wir mit $\boxed{\mathcal{L}_{\mathbb{k}}(V_1, \ldots, V_k; W)}$ und mit $\boxed{\mathcal{L}_{\mathbb{k}}^k(V, W)}$, falls gilt $V_1 = \ldots = V_k = V$.

Definition B.2 (Tensorprodukt von Vektorräumen)**.** Ein Paar (T, τ) – für das wir auch kurz T schreiben –, bestehend aus einem $\mathbb{k}$-Vektorraum T und einer k-fach $\mathbb{k}$-multilinearen Abbildung $\tau\colon \times_{i=1}^k V_i \to T$ heißt *k-faches Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_k$ über* $\mathbb{k}$ genau dann, wenn für jede k-fach $\mathbb{k}$-multilineare Abbildung $\varphi\colon \times_{i=1}^k V_i \to W$ genau eine $\mathbb{k}$-lineare Abbildung $\Phi\colon T \to W$ existiert derart, daß $\Phi \circ \tau = \varphi$ gilt, d.h. daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\Phi"] & W \\
\displaystyle\bigtimes_{i=1}^{k} V_i \arrow[u, "\tau"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Satz B.3. *Bis auf (kanonische) Isomorphie von $\mathbb{k}$-Vektorräumen existiert genau ein Tensorprodukt* $\boxed{\left(\bigotimes_{i=1}^{k} V_i, \otimes^k\right)}$ *von $V_1, \ldots, V_k$ über $\mathbb{k}$. Wir schreiben i.d.R. zu $(v_1, \ldots, v_k) \in \times_{i=1}^k$ auch $v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$ für $\otimes^k(v_1, \ldots, v_k)$ und im Falle $k = 2$ $\otimes$ anstelle von $\otimes^2$.*

Beweisskizze. Zur Eindeutigkeit: Seien (T_1, τ_1), (T_2, τ_2) zwei Tensorprodukte von $V_1, \ldots, V_k$ über $\mathbb{k}$. Dann existieren eindeutig bestimmte $\Phi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(T_1, T_2)$, $\Phi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(T_2, T_1)$ derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, "\Phi_1"] & T_2 \arrow[d, "\Phi_2"] \\
\displaystyle\bigtimes_{i=1}^{k} V_i \arrow[u, "\tau_1"] \arrow[ur, "\tau_2"'] \arrow[r, "\tau_1"'] & T_1
\end{tikzcd}$$

Wir setzen $\Psi := \Phi_2 \circ \Phi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(T_1, T_1)$, also ist auch

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, "\Psi"] & T_1 \\
\bigtimes_{i=1}^{k} V_i \arrow[u, "\tau_1"] \arrow[ur, "\tau_1"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Aus der Eindeutigkeit von Ψ mit dieser Eigenschaft folgt $\Psi = \mathrm{id}_{T_1}$, d.h. $\Phi_2 \circ \Phi_1 = \mathrm{id}_{T_1}$, und analog sieht man ein, daß $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \mathrm{id}_{T_2}$ gilt. Daher sind Φ_1, Φ_2 zueinander isomorphe $\mathbb{k}$-Vektorraum-Isomorphismen.

Zur Existenz: Im Falle $k = 1$ leistet (V_1, id) das Gewünschte.

Im Falle $k = 2$ sei $\mathcal{F}$ der $\mathbb{k}$-Vektorraum aller endlichen formalen Summen $\sum_{(v_1,v_2)\in V_1\times V_2} \lambda_{(v_1,v_2)}\,(v_1, v_2)$.

Weiter sei U der von

$$\begin{gathered}
(v_1 + \tilde{v}_1, v_2) - (v_1, v_2) - (\tilde{v}_1, v_2), \\
(v_1, v_2 + \tilde{v}_2) - (v_1, v_2) - (v_1, \tilde{v}_2), \\
(\lambda\, v_1, v_2) - \lambda\,(v_1, v_2), \\
(v_1, \lambda\, v_2) - \lambda\,(v_1, v_2)
\end{gathered}$$

(mit $v_1, \tilde{v}_1 \in V_1$, $v_2, \tilde{v}_2 \in V_2$, $\lambda \in \mathbb{k}$) aufgespannte Untervektorraum von $\mathcal{F}$.

Dann wird durch $T := \mathcal{F}/U$ und

$$\tau\colon V_1 \times V_2 \longrightarrow T,\ \ (v_1, v_2) \longmapsto (v_1, v_2) + U,$$

ein Tensorprodukt (T, τ) von V_1, V_2 über $\mathbb{k}$ definiert.

[Die Bilinearität von τ folgt aus der Definition von U.

Da $V_1 \times V_2$ offenbar eine Basis von $\mathcal{F}$ bildet, induziert jede bilineare Abbildung $\varphi\colon V_1 \times V_2 \to W$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\widetilde{\Phi}\colon \mathcal{F} \to W$, und die Bilinearität von φ stellt sicher, daß $U \subset \mathrm{Kern}(\widetilde{\Phi})$. Daher existiert eine lineare Abbildung $\Phi\colon T \to W$ mit $\widetilde{\Phi} = \Phi \circ \pi$, wobei $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}/U$ die kanonische Projektion bezeichne. Aus der Surjektivität von π folgt dann, daß Φ die Eindeutigkeitsbedingung erfüllt.]

Im Falle $k > 2$ verläuft die Konstruktion eines Tensorproduktes analog zum Falle $k = 2$. □

Bemerkung.

1.) Die k-fach $\mathbb{k}$-multilinearen Abbildungen $\bigtimes_{i=1}^{k} V_i \to W$ stehen also in einer 1 : 1-Beziehung zu den linearen Abbildungen $\bigotimes_{i=1}^{k} V_i \to W$.

2.) $\otimes^k\colon \bigtimes_{i=1}^{k} V_i \to \bigotimes_{i=1}^{k} V_i$ ist i.a. nicht surjektiv, z.B. liegt $(e_1 \otimes e_2) + (e_2 \otimes e_1)$ nicht im Bild von $\otimes\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$.

   Der Beweis des letzten Satzes zeigt aber, daß das Bild von $\otimes^k$ den Vektorraum $\bigotimes_{i=1}^{k} V_i$ erzeugt. Die Darstellung ist übrigens i.a. nicht eindeutig. Elemente des Bildes von $\otimes^k$ nennt man *reine Tensoren*.

Satz B.4. *Wir bezeichnen im folgenden den $\Bbbk$-Vektorraum $V_1 \times V_2$ auch mit $V_1 \oplus V_2$.*[109] *Es gibt kanonische $\Bbbk$-Vektorraum-Isomorphismen*

$$V \otimes \Bbbk \longrightarrow V, \tag{416}$$
$$V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_2 \otimes V_1, \tag{417}$$
$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \longrightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \tag{418}$$
$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \longrightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \tag{419}$$
$$(V_1 \oplus V_2) \otimes W \longrightarrow (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W), \tag{420}$$
$$W \otimes (V_1 \oplus V_2) \longrightarrow (W \otimes V_1) \oplus (W \otimes V_2). \tag{421}$$

Beweis. Zu (416): Die Abbildung $V \times \Bbbk \to V$, $(v, \lambda) \mapsto \lambda v$, ist bilinear, induziert also eine lineare Abbildung $\Phi\colon V \otimes \Bbbk \to V$. Trivialerweise ist die Abbildung $\Psi\colon V \to V \otimes \Bbbk$, $v \mapsto v \otimes 1$, linear, und es gilt $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_V$ sowie $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{V \otimes \Bbbk}$. Folglich sind Φ und Ψ zueinander inverse $\Bbbk$-Vektorraum-Isomorphismen.

Zu (417): $V_1 \times V_2 \to V_2 \otimes V_1$, $(v_1, v_2) \mapsto v_2 \otimes v_1$, ist bilinear, induziert also eine Abbildung $V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$. Die dazu inverse Abbildung erhält man analog durch Vertauschung von V_1 und V_2.

Zu (418): Die Abbildung

$$V_1 \times V_2 \times V_3 \longrightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3,\ (v_1, v_2, v_3) \longmapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3,$$

ist trilinear, faktorisiert also über $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ zu einer Abbildung, deren Inverse wie folgt konstruiert wird:

Da das Tensorprodukt von reinen Tensoren erzeugt wird, ist durch die Zuordnung $(v_1 \otimes v_2, v_3) \mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ eine Abbildung $(V_1 \otimes V_2) \times V_3 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ gegeben, die offenbar bilinear ist. Daher faktorisiert sie über $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ zu der gesuchten Abbildung.

(419) zeigt man analog zu (418).

Die offensichtliche Abbildung $(V_1 \oplus V_2) \otimes W \to (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W)$ und $(V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W) \to (V_1 \oplus V_2) \otimes W$, $(v_1 \otimes w, v_2 \otimes \tilde{w}) \mapsto ((v_1, 0) \otimes w) + ((0, v_2) \otimes \tilde{w})$, sind zueinander inversen Isomorphismen, d.h. es gilt (420).

(421) beweist man analog zu (420). □

Bemerkung. Aus (418) und (419) folgt induktiv, daß bis auf Isomorphie auch allgemeine Assoziativität für $\bigotimes_{i=1}^{k} V_i$ gilt.

Satz B.5. *Sind I_i Mengen und $\{v_{i,l} \mid l \in I_i\}$ Basen für V_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, so ist*

$$\left\{ v_{1,j_1} \otimes \ldots \otimes v_{k,j_k} \mid \forall_{i \in \{1,\ldots,k\}}\, j_i \in I_i \right\}$$

eine Basis von $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$.

[109] Der Leser mag sich fragen, wieso hier zwei Schreibweisen für denselben Vektorraum eingeführt werden. In diesem Zusammenhang besteht erst dann ein wesentlicher Unterschied, wenn die Indexmenge nicht mehr endlich ist.

Für eine beliebige Menge I und eine Familie $(V_i)_{i \in I}$ von $\Bbbk$-Vektorräumen ist $\bigtimes_{i \in I} V_i$ der $\Bbbk$-Vektorraum aller Abbildungen $f\colon I \to \bigcup_{i \in I} V_i$ derart, daß gilt $\forall_{i \in I}\, f(i) \in V_i$, und $\bigoplus_{i \in I} V_i$ ist der Untervektorraum von $\bigtimes_{i \in I} V_i$, der aus den Abbildungen $f\colon I \to \bigcup_{i \in I} V_i$ mit $\forall_{i \in I}\, f(i) \in V_i$ besteht, die zusätzlich an nur endlich vielen Stellen $i \in I$ ungleich null sind.

Beweisskizze. Daß der $\Bbbk$-Spann von $\left\{v_{1,j_1} \otimes \ldots \otimes v_{k,j_k} \,\middle|\, \forall_{i\in\{1,\ldots,k\}}\, j_i \in I_i\right\}$ den $\Bbbk$-Vektorraum $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ erzeugt, ist klar, da das Bild von $V_1 \times \ldots \times V_k$ unter $\otimes^k$ dies leistet.

Sei nun $\sum \lambda_{j_1,\ldots,j_k}\, v_{1,j_1} \otimes \ldots \otimes v_{k,j_k} = 0$, wobei $\lambda_{j_1,\ldots,j_k} \in \Bbbk$ fast alle null. Dann folgt $\sum \lambda_{j_1,\ldots,j_k}\, \varphi(v_{1,j_1}, \ldots, v_{k,j_k}) = 0$ für jede k-fach $\Bbbk$-multilineare Abbildung $\varphi\colon \bigtimes_{i=1}^k V_i \to \Bbbk$. Für festes $i_1, \ldots, i_k$ gilt dies insbesondere für $\varphi_{i_1,\ldots,i_k}$, gegeben durch

$$\varphi_{i_1,\ldots,i_k}(v_{1,j_1}, \ldots, v_{k,j_k}) = \delta_{i_1,j_1} \cdots \delta_{i_k,j_k},$$

also folgt $\lambda_{j_1,\ldots,j_k} = 0$. □

Korollar B.6. *Sind $V_1, \ldots, V_k, W$ endlich-dimensionale $\Bbbk$-Vektorräume, so gilt* $\dim_\Bbbk \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_k; W) = \left(\prod_{i=1}^k \dim_\Bbbk V_i\right) \dim_\Bbbk W$.

Beweis. Klar nach Bemerkung 1.) zu Satz B.3 und dem letzten Satz. □

Satz B.7. *Seien V, W zwei endlich-dimensionale $\Bbbk$-Vektorräume. Dann sind* $\mathrm{Hom}_\Bbbk(V, W)$ *und* $V^* \otimes W$ *kanonisch isomorph. Der Isomorphismus wird induziert durch*

$$V^* \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Bbbk(V, W), \ (f, w) \longmapsto (v \mapsto f(v)\, w)\,. \tag{422}$$

Insbesondere sind $\mathrm{End}_\Bbbk(V)$ *und* $V^* \otimes V$ *isomorph.*

Beweisskizze. Die Abbildung in (422) ist bilinear und faktorisiert somit über $V^* \otimes W$ zu einer Abbildung $\Phi\colon V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}_\Bbbk(V, W)$. Aus Dimensionsgründen genügt es zu zeigen, daß Φ surjektiv ist.

Seien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bzw. $\{w_1, \ldots, w_m\}$ Basen von V bzw. W und für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ sei $f_{i,j} \in \mathrm{Hom}_\Bbbk(V, W)$ gegeben durch

$$\forall_{l\in\{1,\ldots,n\}}\, f_{i,j}(v_l) = \delta_{i,l}\, w_j.$$

Dann ist $\{f_{i,j} \,|\, i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\}$ eine Basis von $\mathrm{Hom}_\Bbbk(V, W)$, und es gilt $\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} \forall_{j\in\{1,\ldots,m\}}\, \Phi(v_i^* \otimes w_j) = f_{i,j}$, wobei $v_i^*\colon V \to \Bbbk$ die zu v_i duale Linearform sei. Letztere ist gegeben durch $v_i^*(\sum_{l=1}^n \lambda_l v_l) = \lambda_i$. □

Beispiel B.8.

(i) Sind V, W zwei endlich-dimensionale $\Bbbk$-Vektorräume, so sind $V \otimes W$ und $\mathrm{Hom}_\Bbbk(V^*, W)$ kanonisch isomorph. Der Isomorphismus wird induziert durch

$$V \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Bbbk(V^*, W)\,, \ (v, w) \longmapsto (f \mapsto f(v)\, w)\,. \tag{423}$$

[Aus Dimensionsgründen genügt es, zu zeigen, daß die Abbildung in (423) surjektiv ist:

Seien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ Basen von V und W. Sei dann für $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ weiter $F_{i,j} \in \mathrm{Hom}_\Bbbk(V^*, W)$ gegeben durch $F_{i,j}(f) = f(v_i) w_j$. Die Menge $\{F_{i,j} \,|\, i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}\}$ liegt offenbar im Bild der Abbildung (423). Wir zeigen, daß jene auch Basis von

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V^*, W)$ ist, und hierfür genügt es aus Dimensionsgründen, lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Zum Beweis hiervon seien nun $\lambda_{i,j} \in \mathbb{k}$ mit $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j} F_{i,j} = 0$. Dann gilt für alle $l \in \{1, \dots, n\}$

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j}\, F_{i,j}(v_l^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j}\, v_l^*(v_i)\, w_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{l,j}\, w_j,$$

also – da $\{w_1, \dots, w_m\}$ Basis – $\forall_{j\in\{1,\dots,m\}}\, \lambda_{l,j} = 0$, und aus der Beliebigkeit von l folgt, daß alle $\lambda_{k,j} = 0$ sind.]

(ii) Für $n, m \in \mathbb{N}_+$ können wir $\mathbb{k}^n \otimes \mathbb{k}^m$ mit dem Raum $\mathbb{k}^{n\times m}$ aller $n \times m$-Matrizen mit Werten in $\mathbb{k}$ identifizieren, wobei wir für $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{k}^n$ und $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{k}^m$

$$a \otimes b := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_m \end{pmatrix}$$

setzen.

Die $E_{i,j} := e_i \otimes e_j$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, bilden eine Basis von $\mathbb{k}^{n\times m}$, und zu einer gegebenen bilinearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^m \to W$ definieren wir $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{n\times m}, W)$ durch $\forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\forall_{j\in\{1,\dots,m\}}\Phi(E_{i,j}) = \varphi(e_i, e_j)$. Dann ist der Homomorphismus Φ offenbar eindeutig mit $\Phi \circ \otimes = \varphi$.

Definition B.9 (Tensorprodukt von Homomorphismen)**.** Für $i \in \{1, \dots, k\}$ seien $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V_i, W_i)$. Wir definieren $\boxed{f_1 \otimes \dots \otimes f_k} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\bigotimes_{i=1}^{k} V_i, \bigotimes_{i=1}^{k} W_i)$ als die durch die k-fach $\mathbb{k}$-multilineare Abbildung

$$\bigtimes_{i=1}^{k} V_i \longrightarrow \bigotimes_{i=1}^{k} W_i,\ (v_1, \dots, v_k) \longmapsto f_1(v_1) \otimes \dots \otimes f_k(v_k), \tag{424}$$

induzierte Abbildung auf $\bigotimes_{i=1}^{k} V_i$. $f_1 \otimes \dots \otimes f_k$ heißt das *Tensorprodukt von* $f_1, \dots, f_k$.

Weiter bezeichnen wir auch die Abbildung in (424) mit $f_1 \otimes \dots \otimes f_k$.

Satz B.10. *Seien $f, \tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V_1, W_1)$, $g, \tilde{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V_2, W_2)$. Weiter seien Z_1, Z_2 $\mathbb{k}$-Vektorräume sowie $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(W_1, Z_1)$, $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(W_2, Z_2)$. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{id}_{V_1} \otimes \mathrm{id}_{V_2} = \mathrm{id}_{V_1 \otimes V_2}$,

(ii) $f \otimes (g + \tilde{g}) = (f \otimes g) + (f \otimes \tilde{g})$, $(f + \tilde{f}) \otimes g = (f \otimes g) + (\tilde{f} \otimes g)$,

(iii) $(h \circ f) \otimes (\tilde{h} \circ g) = (h \otimes \tilde{h}) \circ (f \otimes g)$.

(iv) Zu (i) - (iii) analoge Aussagen gelten auch für k-fache Tensorprodukte.

Beweis als Übung. □

Bemerkung. Gemäß (416) identifizieren wir $\mathbb{k}\otimes\ldots\otimes\mathbb{k}$ mit $\mathbb{k}$, wobei die Identifikation durch $\mathbb{k}\times\ldots\times\mathbb{k}\to\mathbb{k}, (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\mapsto\lambda_1\cdots\lambda_k$, induziert wird. D.h., sind $f_i\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V_i,\mathbb{k})=(V_i)^*$ für $i\in\{1,\ldots,k\}$, so gilt

$$f_1\otimes\ldots\otimes f_k\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}\left(\bigotimes_{i=1}^k V_i,\mathbb{k}\right)=\left(\bigotimes_{i=1}^k V_i\right)^*. \tag{425}$$

Satz B.11. *Seien $V_1,\ldots,V_k$ endlich-dimensionale $\mathbb{k}$-Vektorräume. Dann sind $\bigotimes_{i=1}^k(V_i)^*$ und $\left(\bigotimes_{i=1}^k V_i\right)^*$ kanonisch isomorph. Der Isomorphismus wird induziert durch*

$$\bigtimes_{i=1}^k (V_i)^*\longrightarrow\left(\bigotimes_{i=1}^k V_i\right)^*,\ (f_1,\ldots,f_k)\longmapsto f_1\otimes\ldots\otimes f_k. \tag{426}$$

Zusatz. *Ist $i\in\{1,\ldots,k\}$ und $\{v_{i,1},\ldots,v_{i,i_n}\}$ Basis von V_i, so ist gemäß (425) $\left\{v_{1,j_1}^*\otimes\ldots\otimes v_{k,j_k}^*\,|\,\forall_{i\in\{1,\ldots,k\}}\,j_i\in\{1,\ldots,i_n\}\right\}$ eine Basis von $\left(\bigotimes_{i=1}^k V_i\right)^*$.*

Beweis. Aus Dimensionsgründen genügt es, zu zeigen, daß die durch (426) induzierte Abbildung surjektiv ist, und hierfür wiederum genügt es, zu zeigen, daß eine Basis von $\left(\bigotimes_{i=1}^k V_i\right)^*$ im Bild von (426) liegt.

Sei $i\in\{1,\ldots,k\}$ und sei $\{v_{i,1},\ldots,v_{i,i_n}\}$ eine Basis von V_i. Gemäß Satz B.5 ist dann $\left\{v_{1,j_1}\otimes\ldots\otimes v_{k,j_k}\,|\,\forall_{i\in\{1,\ldots,k\}}\,j_i\in\{1,\ldots,i_n\}\right\}$ eine Basis von $\bigotimes_{i=1}^k V_i$. Wegen $\dim_{\mathbb{k}}\bigotimes_{i=1}^k V_i<\infty$ ist weiter $\left\{\left(v_{1,j_1}\otimes\ldots\otimes v_{k,j_k}\right)^*\,|\,\forall_{i\in\{1,\ldots,k\}}\,j_i\in\{1,\ldots,i_n\}\right\}$ eine Basis von $\left(\bigotimes_{i=1}^k V_i\right)^*$, deren Elemente $\left(v_{1,j_1}\otimes\ldots\otimes v_{k,j_k}\right)^*$ nach (425) mit den $v_{1,j_1}^*\otimes\ldots\otimes v_{k,j_k}^*$ identifiziert werden[110], und letztere liegen trivialerweise im Bild der Abbildung in (426). □

Satz B.12. *Sind $V_1,\ldots,V_k,W$ endlich-dimensionale $\mathbb{k}$-Vektorräume mit Basen $\{v_{i,1},\ldots,v_{i,i_n}\}$ von V_i für $i\in\{1,\ldots,k\}$ und $\{w_1,\ldots,w_m\}$ von W, so ist*

$$\Big\{\underbrace{\left(v_{1,j_1}^*\otimes\ldots\otimes v_{k,j_k}^*\right)\otimes w_l}_{\in\left(\bigotimes_{i=1}^k V_i^*\right)\otimes W}\,|\,\forall_{i\in\{1,\ldots,k\}}\,j_i\in\{1,\ldots,i_n\}\wedge l\in\{1,\ldots,m\}\Big\}$$

eine Basis von $\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_k;W)$.[111] *Für $\varphi\in\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_k;W)$ gilt*

$$\begin{aligned}\varphi&=\sum_{l=1}^m\left(w_l^*\circ\varphi\right)w_l\\&=\sum_{l=1}^m w_l^*\left(\sum_{j_1,\ldots,j_k}\left(v_{1,j_1}^*\otimes\ldots\otimes v_{k,j_k}^*\right)^*(\varphi)\,\left(v_{1,j_1}^*\otimes\ldots\otimes v_{k,j_k}^*\right)\right)w_l\\&=\sum_{l=1}^m\sum_{j_1,\ldots,j_k}w_l^*\left(\varphi\left(v_{1,j_1},\ldots,v_{k,j_k}\right)\right)\left(v_{1,j_1}^*\otimes\ldots\otimes v_{k,j_k}^*\right)w_l.\end{aligned}$$

[110]Denn es gilt zum einen $\left(v_{1,i_1}\otimes\ldots\otimes v_{k,i_k}\right)^*\left(v_{1,j_1}\otimes\ldots\otimes v_{k,j_k}\right)=\delta_{i_1,j_1}\cdots\delta_{i_k,j_k}$ und zum anderen $v_{1,i_1}^*\otimes\ldots\otimes v_{k,i_k}^*\left(v_{1,j_1}\otimes\ldots\otimes v_{k,j_k}\right)=\delta_{i_1,j_1}\cdots\delta_{i_k,j_k}$.

[111]Beachte, daß

$$\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_k;W)\xleftarrow{\otimes^k\circ\ldots}\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}\left(\bigotimes_{i=1}^k V_i,W\right)\xrightarrow{B.7}\left(\bigotimes_{i=1}^k V_i\right)^*\otimes W\xrightarrow{B.11}\left(\bigotimes_{i=1}^k V_i^*\right)\otimes W$$

kanonische $\mathbb{k}$-Vektorraum-Isomorphismen sind.

Bemerkung. Es gilt natürlich auch

$$\varphi = \sum_{j_1,\ldots,j_k} \varphi\big(v_{1,j_1},\ldots,v_{k,j_k}\big)\; v_{1,j_1}^* \otimes \ldots \otimes v_{k,j_k}^*.$$

Beweis des Satzes. Aus Dimensionsgründen genügt es zu zeigen, daß die angegebene Menge ein Erzeugendensystem ist, und dies haben wir mit der obigen Entwicklung von $\varphi \in \mathcal{L}_{\Bbbk}(V_1,\ldots,V_k;W)$ gezeigt. □

Literatur

[1] W. P. Barth: *Elemente der Analysis*, Skriptum zu gleichnamigen Vorlesungen, WS 2006/07 - WS 2007/08, Universität Erlangen-Nürnberg.

[2] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch (2008).

[3] W. Capelle (Hrsg.): *Die Vorsokratiker. Die Fragmente und Quellenberichte*, Kröner (1935).

[4] O. Deiser: *Einführung in die Mengenlehre*, Springer (2002).

[5] P. Dombrowski: *Differentialrechnung I und Abriß der linearen Algebra*, Bibliographisches Institut (1970).

[6] U. Eckhardt: *Die Schildkröte des Zenon von Elea – Gedanken eines Mathematikers zur Unendlichkeit*, Vortrag am 13. November 2007 auf Einladung der Universitätsgesellschaft Hamburg im Warburg-Haus, Hamburg.

[7] H.-D. Ebbinghaus et al.: *Zahlen*, Springer (1983).

[8] F. Erwe: *Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band: Integralrechnung*, Bibliographisches Institut (1971).

[9] G. Fischer: *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*, Springer (2010).

[10] W. Henke: *Vorlesungen über Analysis*, WS 1997/98 - WS 1998/99, Universität zu Köln.

[11] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis I*, Teubner (2003).

[12] K. Jänich: *Topologie*, Springer (2007).

[13] D. Landers, L. Rogge: *Nichtstandard Analysis*, Springer (1994).

Index