Constructions géométriques par intersections de coniques

Jean-Marie Arnaudiès
et Pierre Delezoide

1. Présentation historique du problème

Il est connu depuis très longtemps que certains problèmes d'origine géométrique ne sont pas résolubles par l'utilisation exclusive de la règle et du compas. Certains de ces problèmes peuvent être résolus en autorisant l'utilisation de coniques dans les constructions. C'est le sujet que nous allons aborder ici.

Constructibilité

Il faut d'abord préciser ce qu'on entend par « constructible ». On part d'un ensemble fini de points du plan, dits points initiaux, ou données du problème. Par exemple, s'il s'agit de construire le centre du cercle circonscrit à un triangle, les sommets du triangle pourront être les points initiaux. S'il s'agit de construire un pentagone régulier, les points initiaux peuvent être son centre et l'un de ses points. Les points constructibles à partir de ces points initiaux sont les points définis récursivement de la manière suivante :
c'est un point initial
ou il appartient à l'intersection de deux figures constructibles distinctes.

Dans les constructions à la règle et au compas, les figures constructibles sont les droites constructibles, définies par deux points constructibles distincts, et les cercles constructibles qui sont les cercles de centre un point constructible et passant par (au moins) un point constructible. Dans les constructions utilisant les coniques, on ajoute à l'ensemble des figures constructibles les coniques propres définies par cinq points constructibles (par cinq points dont trois quelconques ne sont pas alignés, passe une conique propre et une seule). Les démonstrations de constructibilité, soit à la règle et au compas, soit à la règle, au compas et par intersections de coniques, sont en général assez simples et peuvent rester dans le domaine géométrique : il suffit d'exhiber une construction ; mais toutes les démonstrations connues de non constructibilité, que ce soit à la règle et au compas, ou à la règle, au compas et par intersections de coniques, font appel à la théorie des corps, ou dans certains cas (non constructibilité de π et e) à la théorie des corps et à la théorie des fonctions de variable complexe. On donnera ultérieurement des outils théoriques pour mener à bien une démonstration de non constructibilité à la règle et au compas et on établira que l'ennéagone (9 côtés) régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.

Il faut noter que les points d'une figure constructible ne sont pas tous constructibles, loin s'en faut. Si l'ensemble des points initiaux est fini, à chaque étape de la construction le nombre de figures constructibles utilisables est fini, donc le nombre de nouveaux points constructibles ajoutés est fini. L'ensemble des points constructibles à partir de ces points initiaux est donc une union dénombrable d'ensembles finis, donc est au plus dénombrable. En conséquence, sur une droite constructible, ou sur une figure constructible en général, l'ensemble des points (individuellement) constructibles est au plus dénombrable.

La géométrie grecque

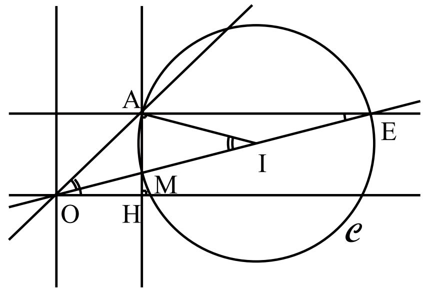
Le premier problème de non constructibilité (à la règle et au compas) rencontré historiquement est sans doute le problème de la duplication du cube. L'oracle de Délos ayant dit que pour atténuer le courroux des Dieux (qui avaient envoyé la peste sur Athènes) il fallait construire un autel (cubique) deux fois plus grand que le précédent, on demanda à Platon comment s'y prendre. Platon botta en touche en répondant que les Dieux étaient mécontents qu'on n'étudiât pas assez la géométrie. Cela se passait sans doute vers –400. Les principaux problèmes analogues qui ont intéressé les mathématiciens des périodes de la Grèce classique (Pythagore, –550) et hellénistique (Apollonius, –200) sont la duplication du cube, généralisé en le problème de la double moyenne proportionnelle, c'est-à-dire connaissant les longueurs a et b, comment construire des longueurs x et y telles que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$, la trisection d'un angle, la construction de l'heptagone (7 côtés) régulier. On peut aussi citer le problème de la quadrature du cercle, mais on sait maintenant (Lindemann 1883, http://scienceworld.wolfram.com/biography/Lindemann.html) que π est transcendant et qu'il est par conséquent impossible de construire π par des moyens purement géométriques.

• La règle marquée

Ces problèmes ont d'abord été résolus par la méthode des « inclinaisons », *inclinatio* en latin et *νευσις* (neusis) en grec. Cette méthode consiste à faire pivoter une droite autour d'un point fixe jusqu'à ce qu'elle intercepte entre deux droites fixes une longueur donnée à l'avance. On peut réaliser concrètement une telle construction à l'aide d'une règle sur laquelle on a marqué la longueur à réaliser entre deux traits en la faisant glisser et pivoter autour du point fixe ; pour cette raison cette méthode de construction s'appelle aussi actuellement la méthode de la règle marquée. On peut remarquer que ce procédé de « construction » ne rentre pas facilement dans un modèle de constructibilité au sens énoncé plus haut dans cet article.

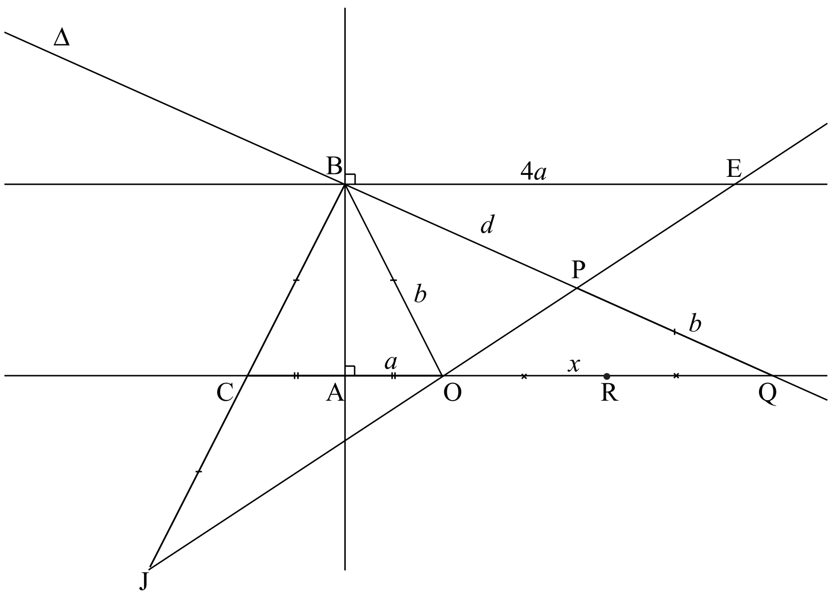
• Une trisection de l'angle

Voici par cette méthode une construction de la trisection de l'angle, construction probablement connue du mathématicien Hippocrate de Chios (–471/–410) d'après le site de l'université St Andrews, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk L'angle à couper en trois est l'angle aigu $\widehat{\mathrm{HOA}}$. On fait pivoter la droite (OM), M restant sur l'intervalle]HA] , de telle sorte que le segment [ME] ait pour longueur le double de la longueur OA. Cela arrive nécessairement une fois et une seule quand M décrit l'intervalle]HA] car cette longueur varie continûment de manière strictement décroissante de $+\infty$ à 0. Quand l'égalité est vérifiée, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [ME], qui passe toujours par A, a pour rayon OA. Le triangle OAI, où I est le centre de $\mathcal{C}$, est isocèle en A, l'angle $\widehat{\text{MOA}}$ est égal à $\widehat{\text{MIA}}$ qui est le double de l'angle $\widehat{\text{MEA}}$, égal à l'angle $\widehat{\text{HOM}}$. L'angle $\widehat{\text{HOM}}$ est donc le tiers de l'angle $\widehat{\text{HOA}}$.



• *Une construction de la racine cubique*

Voici une figure illustrant une méthode du même type pour la construction d'une racine cubique. Cette méthode est due à Nicomède (–280/–210).



On suppose $0 < a < b$; on commence par construire un triangle OAB rectangle en A et tel que OA = a et OB = b. On note C le symétrique de O par rapport à (AB) et J le symétrique de B par rapport à C. Une droite Δ passant par B coupe la droite (JO) en P et la droite (CO) en Q ; on la fait pivoter autour de B jusqu'à ce que la distance PQ soit égale à b. On note E l'intersection de la droite (JO) avec la parallèle à (AO) menée de B et R le milieu de [OQ]. La distance BE est $4a$. Soit d = BP et $x = \text{OR} = \dfrac{\text{OQ}}{2}$; comme les triangles PBE et PQO sont homothétiques, $\dfrac{2x}{4a} = \dfrac{b}{d}$, donc $d = \dfrac{2ab}{x}$. D'après le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles OAB et QAB on a :

$$AB^2 = b^2 - a^2 = (d + b)^2 - (a + 2x)^2.$$

On en déduit

$$d^2 + 2bd = 4ax + 4x^2,$$

d'où

$$\frac{2ab}{x}\left(\frac{2ab}{x} + 2b\right) = 4x(a+x),$$

soit encore

$$\frac{2ab}{x}\frac{2b}{x}(a+x) = 4x(a+x).$$

On obtient finalement :

$$x^3 = ab^2.$$

• *Problèmes d'éthique*

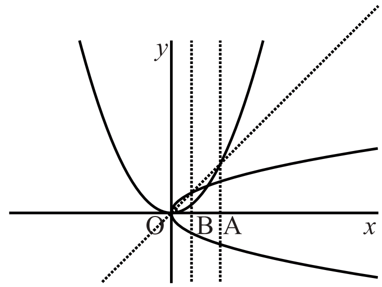
Ce genre de méthodes dites mécaniques ne plaisait pas à certains géomètres, dont Platon, car ils considéraient que cela faisait intervenir le monde sensible, par le mouvement, dans le monde des idées, la géométrie. Évidemment on pouvait répondre à cet argument eu faisant intervenir des courbes autres que les cercles et les droites, et ainsi virent le jour les cissoïdes et conchoïdes. Dans l'exemple précédent le point Q décrit une conchoïde de la droite (JO) dont on « prend » l'intersection avec la droite (OC). Cette façon de voir élimine en quelque sorte le mouvement, mais pas tout à fait car la conchoïde, par exemple, n'était définie que comme, dirait-on maintenant, une courbe paramétrée, au contraire du cercle ou des coniques : sections d'un cône par un plan. Les droites, cercles et coniques étaient conçus comme des objets géométriques engendrés en entier et non pas comme des ensembles de points éventuellement obtenus à l'aide d'un mouvement. On peut retrouver dans cette façon de voir les choses l'opposition entre les courbes définies par équations et les courbes définies paramétriquement.

Platon aurait sans doute apprécié à leur juste valeur les méthodes de constructions par intersections de coniques, mais ces méthodes semblent être apparues un peu plus tard.

Ménechme (–350) savait résoudre le problème de la double moyenne proportionnelle par intersection de paraboles, mais le mot n'existait pas encore. La connaissance des (sections) coniques se développa principalement à l'époque hellénistique grâce à Apollonius (–260/–190) à qui on doit les noms de parabole, hyperbole et ellipse. Il est probable qu'Apollonius savait comment résoudre les problèmes d'inclinaisons par intersections de coniques. Malheureusement son livre « Des inclinaisons » a été perdu.

• *La double moyenne proportionnelle par Ménechme*

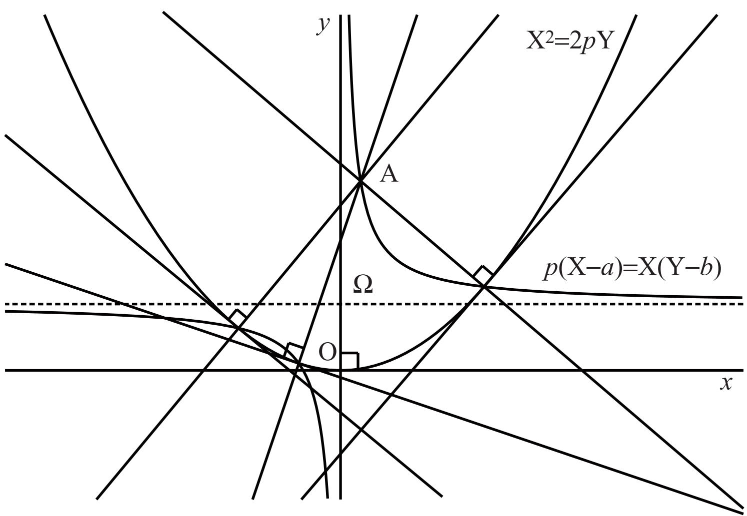
Il s'agit de trouver x et y tels que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, ce qui équivaut à $ay = x^2$ et $bx = y^2$ (on suppose a et b positifs) ; donc le couple (x,y) solution est le couple des coordonnées du point d'intersection autre que l'origine des deux paraboles figurées ci-contre. À partir des points initiaux que sont l'origine et les points A $(a,0)$ et B $(b,0)$, on construit (à l'aide de la droite d'équation $x = y$) les points de coordonnées (a,a) et (b,b) par lesquels passent respectivement la première et la deuxième parabole. On peut facilement construire à partir des points initiaux cinq points pour chacune des deux paraboles.



• ***Normale à la parabole par Apollonius***

Il est presque certain qu'Apollonius savait résoudre à l'aide d'une hyperbole équilatère le problème de la détermination de la ou des normales à la parabole passant par un point donné. Dans le langage actuel on peut résoudre ce problème de la manière suivante :

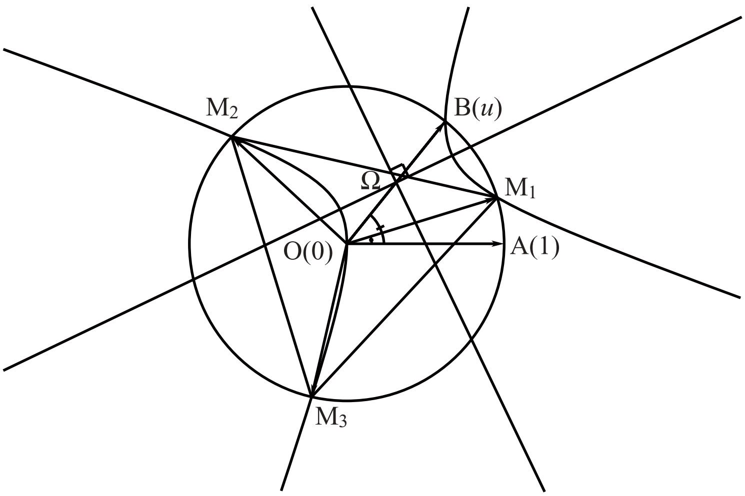
La parabole de sommet O a pour équation $X^2 = 2pY$ et on cherche à construire les normales à la parabole qui passent par le point A de coordonnées (a,b). Au point (x,y) de la parabole, l'équation de la tangente est $xX = p(Y + y)$; un vecteur tangent a pour coordonnées (p,x), donc la normale en (x,y) passe par (a,b) si, et seulement si, $p(x - a) + x(y - b) = 0$. Le point (x,y) doit donc vérifier deux conditions, être sur la parabole, soit $x^2 = 2py$, et vérifier $xy = (b - p)x + ap$, c'est-à-dire se trouver sur l'hyperbole équilatère dont le centre est le point Ω de coordonnées $(0,(b - p))$, dont les directions asymptotiques sont les directions des axes de coordonnées, et qui passe par (a,b). On peut facilement trouver cinq points constructibles à la règle et au compas sur chacune de ces coniques à partir des points initiaux que sont l'origine, le point de coordonnées $(0,p)$ et le point par où doivent passer les normales ; ces normales sont donc bien constructibles par intersections de coniques.



• Trisection, méthode de Pappus

Cinq siècles plus tard, Pappus renouvela les études sur les coniques en reprenant et en développant les écrits d'Apollonius, dont peut-être le fameux livre « Des inclinaisons ». Il explicita une construction de la trisection de l'angle par intersection d'un cercle avec une hyperbole équilatère. C'est à Pappus (précurseur de la géométrie projective) que nous devons la classification des problèmes géométriques en problèmes plans (*i.e.* résolubles à la règle et au compas), problèmes solides « $\sigma\tau\varepsilon\rho\varepsilon\alpha$ » (stéréa) résolubles par intersection de coniques (par référence à la nature spatiale des coniques) et problèmes linéaires, c'est-à-dire résolubles par l'utilisation de courbes paramétrées comme les conchoïdes, spirales, etc.

Voici une méthode moderne où l'on retrouve l'hyperbole équilatère utilisée par Pappus :



Il s'agit de couper en trois l'angle $\widehat{AOB}$; on prend un repère orthonormé dans lequel l'affixe de O est 0 et celle de A est 1 ; l'affixe de B est alors un complexe u de module 1 ; l'équation à résoudre est $z^3 = u$. On cherche une conique qui coupe le cercle unité en les trois solutions de cette équation. En général, si deux coniques ont 3 points communs, elles en ont 4, il faut donc ajouter artificiellement une solution. Il paraît logique d'ajouter la solution u : l'équation à résoudre devient :

$$(z-u)(z^3-u) = z^4 - uz^3 - uz + u^2 = 0.$$

En divisant par z^2 cette équation, on obtient :

$$z^2 - uz - \frac{u}{z} + \frac{u^2}{z^2} = 0,$$

puis, en tenant compte du fait que les racines sont de module 1,

$$z^2 + u^2\bar{z}^2 - uz - u\bar{z} = 0,$$

et enfin en multipliant par $\bar{u}$ (de module 1) on trouve l'équation complexe d'une conique :

$$\bar{u}z^2 + u\bar{z}^2 - z - \bar{z} = 0.$$

On verra que cette conique est une hyperbole équilatère : elle recoupe le cercle unité en les 3 racines de l'équation $z^3 = u$ et en u.

Déterminons les éléments de cette hyperbole. L'équation s'écrit :

$$\bar{u}\left(z - \frac{u}{2}\right)^2 + u\left(\bar{z} - \frac{\bar{u}}{2}\right)^2 = \frac{u + \bar{u}}{4}.$$

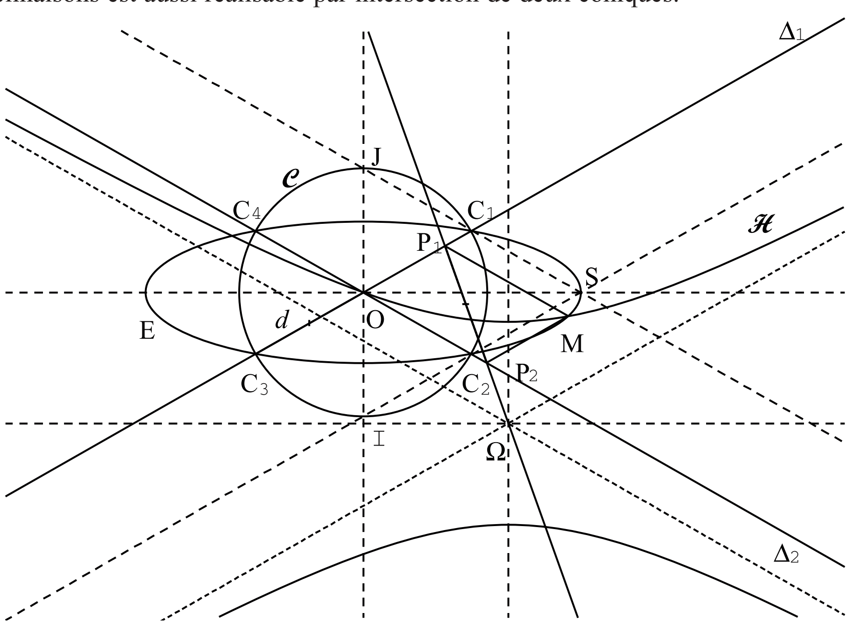
Le centre de symétrie de l'hyperbole, son centre donc, est le point Ω d'affixe $u/2$, facilement constructible (milieu de O et B). En choisissant v tel que $u = v^2$, l'équation devient

$$\left(\frac{z - u/2}{v}\right)^2 + \left(\frac{\bar{z} - \bar{u}/2}{\bar{v}}\right)^2 = \frac{u + \bar{u}}{4}.$$

Dans le repère orthonormé direct de centre Ω et d'axes dirigés par v et iv, l'équation s'écrit $\varsigma^2 + \bar{\varsigma}^2 = \dfrac{u + \bar{u}}{4}$ ou encore $x'^2 - y'^2 = \dfrac{u + \bar{u}}{8}$. Cette conique est donc bien une hyperbole : ses axes de symétrie sont les droites passant par Ω et parallèles aux bissectrices de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$; elle passe par B d'affixe u et comme on connaît son centre, ses axes de symétrie et ses asymptotes, il est facile d'en construire quatre autres points.

• *Le livre perdu d'Apollonius*

Montrons par une méthode moderne ce qu'Apollonius avait probablement compris, c'est-à-dire que toute construction réalisable par la méthode des inclinaisons est aussi réalisable par intersection de deux coniques.



On a deux droites distinctes Δ_1 et Δ_2 qui se coupent en O, une distance $d > 0$ qui est ici matérialisée par le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon d, et d'autre part un point Ω qui n'est sur aucune des droites. On cherche à construire par intersection de coniques une droite passant par Ω coupant les droites Δ_1 et Δ_2 en des points P_1 et P_2 tels que $P_1P_2 = d$.

Le cercle $\mathcal{C}$ recoupe la droite Δ_1 en C_1, C_3 et Δ_2 en C_2, C_4 comme indiqué sur la figure. On pose $\vec{u_1} = \overrightarrow{OC_1}$ et $\vec{u_2} = \overrightarrow{OC_2}$, on utilisera le repère non orthonormé $\left(O, \vec{u_1}, \vec{u_2}\right)$; la longueur des vecteurs de base est d et leur produit scalaire est $d^2 \cos \alpha$. L'application qui à M (x,y) fait correspondre le couple de ses projections P_1 $(x,0)$ et P_2 $(0,y)$ sur les axes est bijective. Nous allons démontrer que l'ensemble des points M tels que $P_1P_2 = d$ est une ellipse $\mathcal{E}$ de centre O et que l'ensemble des points M tels que P_1, P_2, Ω soient alignés est une hyperbole $\mathcal{H}$ de centre Ω. Les points M qui correspondent aux droites cherchées sont les points communs à cette ellipse et à cette hyperbole.

L'ellipse $\mathcal{E}$: la distance P_1P_2 est la norme du vecteur $y\vec{u_2} - x\vec{u_1}$, son carré scalaire vaut $d^2\,(y^2 - 2xy \cos \alpha + x^2)$. L'ensemble des points M tels que $P_1P_2 = d$ est donc la conique d'équation $x^2 - 2xy \cos \alpha + y^2 = 1$, qui est bien une ellipse ; sou centre est l'origine O, elle passe par les points C_1 $(1,0)$, C_2 $(0,1)$, C_3 $(-1,0)$, C_4 $(0,-1)$ et il est clair, géométriquement et analytiquement, que les bissectrices des droites Δ_1 et Δ_2, dirigées par $\vec{u_1} + \vec{u_2}$ et $\vec{u_1} - \vec{u_2}$, sont des axes de symétries. Pour obtenir au moins un cinquième point de cette ellipse, prenons les intersections I et J du cercle $\mathcal{C}$ avec l'une des bissectrices de (Δ_1,Δ_2) ; traçons par exemple la parallèle à Δ_1 par I et la parallèle à Δ_2 par J, ces deux droites se coupent en un sommet S de l'ellipse (on obtient de manière analogue les quatre sommets). On peut remarquer en effet que les points P_1 et P_2 associés au point S sont respectivement les milieux de JS et IS, et par conséquent $P_1P_2 = IJ/2 = d$.

L'hyperbole $\mathcal{H}$: On reprend les notations précédentes, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega P_1}$ de coordonnées $(x - a,-b)$ et $\overrightarrow{\Omega P_2}$ de coordonnées $(-a,y - b)$ sont liés si, et seulement si, $ab = (x - a)(y - b)$. On trouve ainsi l'équation d'une hyperbole de directions asymptotiques celles de Δ_1 et Δ_2, axes du repère, passant par O, et de centre Ω puisque dans le repère de centre Ω son équation est $x'y' = ab$. Les axes de symétrie de cette hyperbole sont parallèles aux bissectrices de (Δ_1,Δ_2) et passent par Ω, cela nous donne quatre points de $\mathcal{H}$: le point O et ses trois symétriques. Pour obtenir un cinquième point de $\mathcal{H}$, comme on connaît les asymptotes, on peut utiliser le fait qu'une droite coupe une hyperbole en deux points dont le milieu est le milieu des intersections de cette droite avec les asymptotes.

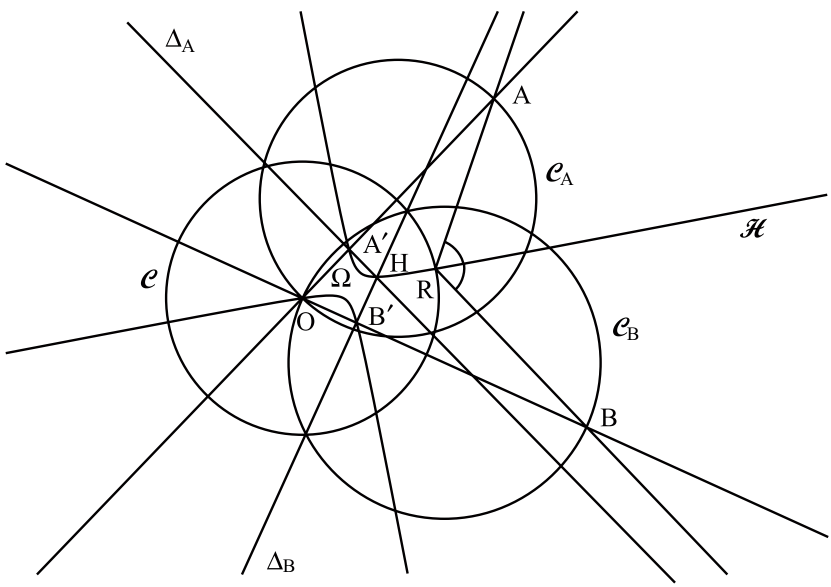
On a donc démontré que toute construction par une règle marquée peut être remplacée par une construction par intersection de deux coniques passant chacune par au moins cinq points constructibles à partir des données initiales. Nous verrons plus loin que la réciproque est vraie.

La géométrie de la culture islamique

Vers l'an 900, les géomètres de la culture islamique avaient connaissance d'une tentative d'Archimède pour construire l'heptagone régulier. Cette méthode, qu'il serait trop long de retracer ici, dite lemme d'Archimède, ne fait que déplacer le problème et ne permet en rien une construction de l'heptagone régulier, même à l'aide d'une règle marquée. La possibilité de dépasser les maîtres grecs en géométrie en résolvant un problème non encore résolu, dynamisa probablement leurs recherches et les premières constructions de l'heptagone régulier apparurent vers 970. Nous justifierons et décrirons ultérieurement une construction moderne de l'heptagone régulier et du 13-gone régulier.

• Le miroir circulaire

Parmi les nombreuses contributions des géomètres islamiques, nous retiendrons celle de Alhazen (vers l'an 1000) qui s'intéressa au problème de la réflexion sur un miroir circulaire ; ce problème a été introduit par Ptolémée dans l'Almageste. Il semble que Alhazen ait résolu ce problème par la méthode de la règle marquée et que Huygens en ait donné une solution par intersection de coniques. Étant donnés un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et deux points A et B extérieurs au cercle, on cherche à construire le point R du cercle où un rayon lumineux issu de B va se réfléchir pour arriver en A. On peut résoudre ce problème par une méthode analytique analogue à la méthode utilisée pour la trisection de l'angle. Nous nous bornerons ici à décrire la construction des points R solutions comme intersection de $\mathcal{C}$ avec une hyperbole $\mathcal{H}$.



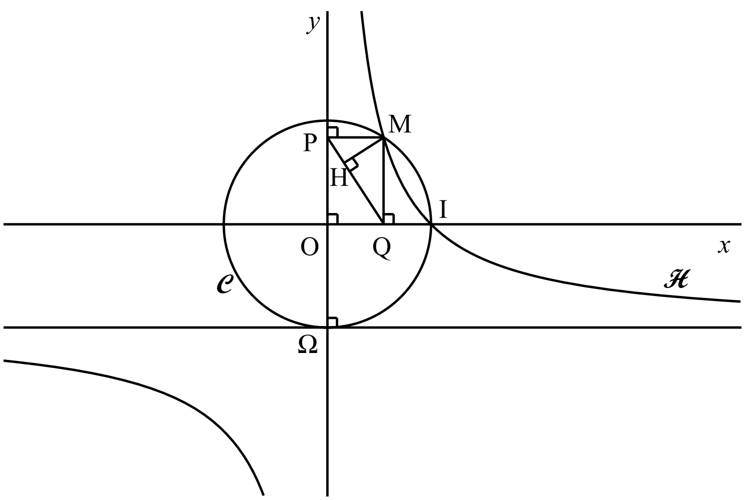
On construit les cercles $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ de diamètres respectifs [OA] et [OB] et les axes radicaux Δ_A et Δ_B de ces cercles avec le cercle $\mathcal{C}$. On construit les inverses A′ et B′ de A et de B dans l'inversion de cercle $\mathcal{C}$. L'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour centre le milieu Ω de

A′ et B′, elle passe par O, A′ et B′ et ses directions asymptotiques sont les directions des bissectrices de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$. Si B est visible de A après réflexion sur $\mathcal{C}$, il y a un seul point R commun à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ tel que les segments [AR] et [BR] restent extérieurs au cercle et de directions symétriques par rapport à la normale en R à $\mathcal{C}$. Le point B est donc vu de A dans la direction de [AR). Si A et B sont intérieurs à $\mathcal{C}$, la construction reste valide et porte alors le nom de « Billard de Alhazen ».

• ***Le triangle d'Al Kayyam***

Citons encore le Persan Al Kayyam (vers 1100), connu comme poète chantant le vin, et comme géomètre novateur. Il semble avoir été le premier à donner une méthode pour résoudre géométriquement les équations de degré 3, méthode qui semble être celle qu'on a attribuée à Descartes (cf. plus loin). La figure représente une résolution du problème suivant : trouver un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit égale à la longueur d'un côté augmenté de la hauteur sur l'hypoténuse.

Une construction est la suivante : on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r, la longueur désirée pour l'hypoténuse du triangle, et deux axes orthogonaux se coupant en O. Dans le repère orthonormé ainsi obtenu, on considère le point I $(r,0)$ et Ω $(0,-r)$. L'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre Ω qui passe par I et qui a pour directions asymptotiques les directions des axes recoupe $\mathcal{C}$ en un point M. Ce point M et ses projections orthogonales P et Q sur les axes forment un triangle rectangle MPQ vérifiant les conditions.



De cette période datent aussi, probablement, des constructions de l'ennéagone régulier (9 côtés).

La Renaissance et la période classique

• *Cardan et Descartes*

On peut se rappeler que c'est Cardan qui au début du XVI^{e} siècle publia dans son « Ars magna » les résolutions par radicaux des équations de degré 3 et 4. Ces méthodes n'étaient pas ses inventions. Même si les coefficients de l'équation sont réels, interviennent dans la résolution des racines cubiques de nombres éventuellement complexes (c'est d'ailleurs là sans doute l'origine de l'utilisation des nombres « imaginaires »). Ces formules de résolution prouvent que si on sait construire les racines cubiques d'un complexe, ce qui revient à une construction de racine cubique d'un réel accompagnée d'une trisection d'angle, alors on sait construire les solutions (réelles ou complexes) des équations de degré inférieur ou égal à 4 (à coefficients réels ou complexes). Il semble que Viète ait remarqué en 1593 qu'on peut en déduire qu'il est possible de résoudre toutes les équations de degré inférieur ou égal à 4 (à coefficients réels) à l'aide d'une règle marquée. Comme l'intersection de deux coniques quelconques peut être ramenée à la résolution d'une équation de degré 4 (à coefficients réels), nous en déduisons immédiatement que tonte construction réalisable par intersection de coniques peut être réalisée à l'aide d'une règle marquée. En étudiant attentivement le problème, on peut même démontrer qu'il suffit d'appliquer une seule fois la méthode de la règle marquée pour construire l'intersection de deux coniques ; cela est lié au fait que l'équation du second degré $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$ associée à l'équation du troisième degré à coefficients réels $X^3 + pX + q = 0$ a soit deux racines réelles distinctes ou confondues, dont on prendra les racines cubiques, soit deux racines complexes conjuguées dont le carré du module est $-\frac{p^3}{27}$, qui est un cube parfait : il suffit donc dans ce cas de trisecter l'angle pour obtenir les racines cubiques. Même si ce fait était, semble-t-il, connu des géomètres ultérieurs, il est difficile de savoir auquel attribuer cette remarque. En tout cas, on attribue à Descartes (XVII^{e} siècle) la découverte (ou la redécouverte ?) d'une méthode directe de résolution des équations de degré 3 ou 4 à coefficients réels, par intersections de coniques. Cette méthode était en germe dans la résolution de la duplication du cube. Il suffit de remplacer x^2 dans l'équation par y partout où on le peut ; on obtient une équation de conique et les solutions sont données par les abscisses des points d'intersection avec la parabole d'équation $y = x^2$.

Par exemple l'équation :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

devient :

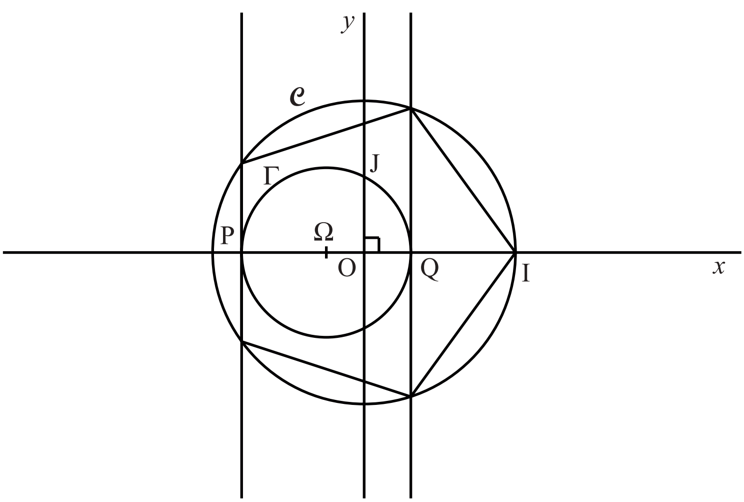
$$ay^2 + bxy + cy + dx + e = 0 \text{ et } y = x^2.$$

Il faut cependant noter que cette méthode ne permet de trouver directement que les solutions réelles d'une équation à coefficients réels.

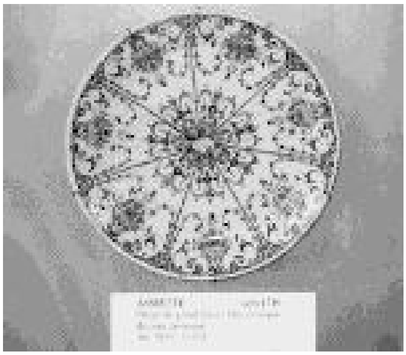
• *Quelques céramiques*

En visitant le musée de la céramique à Sèvres, un géomètre s'aperçoit rapidement que presque toutes les assiettes ont des décors dont les symétries sont très faciles à réaliser géométriquement : symétries hexagonales, octogonales et les symétries dont l'ordre est de la forme 2^n ou 3.2^n. Mais on peut voir d'assez nombreuses assiettes de symétrie pentagonale et décagonales (1% environ).

Cela s'explique par le fait que le pentagone est facilement constructible à la règle et au compas. On trace le cercle Γ de centre Ω (–1/4,0) passant par le point J (0,1/2) ; ce cercle recoupe l'axe des x en deux points P et Q ; les parallèles à l'axe des y passant respectivement par P et Q recoupent le cercle unité $\mathcal{C}$ en les sommets du pentagone régulier défini par son centre O et l'un de ses points I.



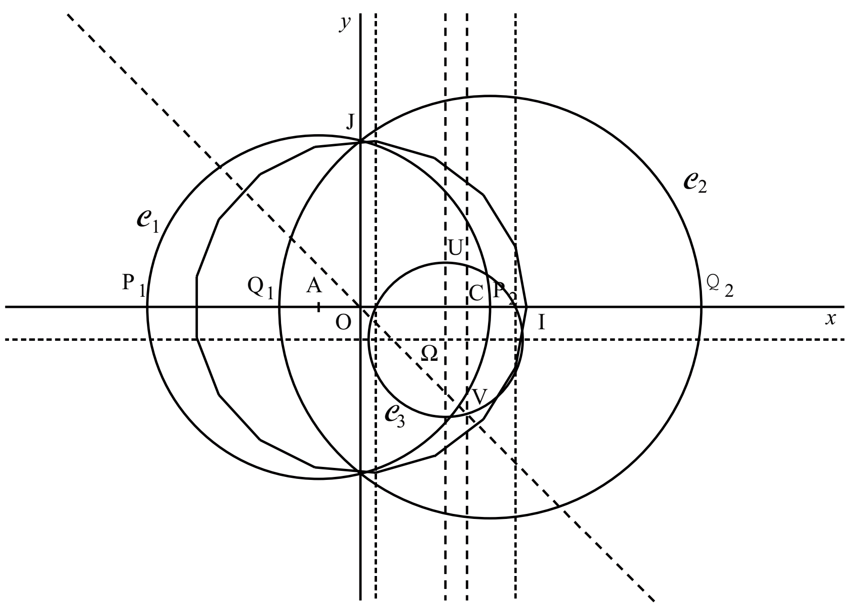
On peut aussi voir une assiette heptagonale et une assiette ennéagonale :



La période moderne

• Gauss et la construction du 17-gone régulier

La période moderne commence avec Gauss qui, grâce à l'invention de ce qu'on appelle maintenant les périodes de Gauss, donna la clé pour la constructibilité à la règle et au compas du 17-gone régulier. Ce qui était nouveau, c'est que la méthode utilisée était initialement totalement algébrique et que la construction géométrique n'est venue qu'après. D'ailleurs Gauss lui-même s'est d'abord contenté de montrer algébriquement que l'équation $X^{17} - 1 = 0$ était résoluble par radicaux carrés et d'en déduire que la construction était possible à la règle et au compas. D'autres que lui ont donné des constructions effectives, avant que lui-même, 20 ans plus tard, ne donne la sienne. Voici une construction originale due aux auteurs de cet article.



On prend un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. Le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A $(-1/4,0)$ passant par J recoupe l'axe Ox en P_1 $(p_1,0)$ et P_2 $(p_2,0)$. Le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre P_2 passant par J recoupe l'axe Ox en Q_1 $(q_1,0)$ et Q_2 $(q_2,0)$. On pose sur l'axe Ox le point C d'abscisse $(1/2 + p_2)/2$ (on le construit en traçant des milieux). Sur la parallèle à Oy passant par C on place les points U d'ordonnée 1/4 et V à l'intersection avec la droite d'équation $y = -x$. Le cercle $\mathcal{C}_3$ passe par U et V et son centre Ω a pour abscisse $q_2/4$ (peu différent de 1/2) ; ce cercle recoupe l'axe Ox en deux points qui sont des abscisses de sommets du 17-gone régulier, la plus grande de ces abscisses est $\cos(2\pi/17)$.

Gauss a clairement démontré que les polygones réguliers ayant p côtés, où p est un nombre premier de Fermat, sont constructibles à la règle et au compas. Les nombres premiers de Fermat sont les nombres premiers de la forme $2^{2^n} + 1$; les seuls connus à ce jour sont 3, 5, 17, 257, 65 537) ([6], p. 154). On lui attribue aussi le résultat suivant : les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas sont les polygones réguliers dont le nombre de côtés est de la forme $2^a p_1 p_2 \dots p_k$, où les nombres $p_1, \dots, p_k$ sont des nombres premiers de Fermat distincts. Si on sait que les polygones réguliers ayant un nombre de côtés égal à un nombre premier de Fermat sont constructibles à la règle et au compas, il est facile d'en déduire à l'aide de l'identité de Bachet (dite aussi de Bézout) que ces polygones réguliers sont constructibles. Par exemple pour construire le polygone régulier à 30 côtés, il suffit de remarquer :

$$2 \times 5 - 3 \times 3 = 1$$

d'où

$$\frac{2\pi}{30} = \frac{1}{2}\left(2\frac{2\pi}{3} - 3\frac{2\pi}{5}\right).$$

Le fait que seuls ces polygones réguliers soient constructibles à la règle et au compas ne semble pas avoir été explicitement démontré par Gauss. De même Gauss a paternellement conseillé aux géomètres amateurs de ne pas tenter de chercher des constructions à la règle et au compas de la trisection de l'angle ou de la duplication du cube, sans en démontrer l'impossibilité.

• Après Gauss, Wantzel

Il semble que ce soit à Pierre Wantzel dans « Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème peut se résoudre avec la règle et le compas », publié dans le Journal des mathématiques pures et appliquées en 1837, qu'il faille attribuer les premières démonstrations explicites de non constructibilité à la règle et au compas. Il y avait à cette époque une grande activité autour du problème de la constructibilité et de la résolubilité par radicaux. C'est dans ce contexte que se sont développées les idées de Galois, mais en aucun cas Wantzel n'a pu utiliser les idées de Galois, mort en mai 1832, mais dont les papiers principaux ne furent connus qu'à partir de 1846. On attribue à P. Wantzel le résultat suivant : dans un repère constructible à partir des points initiaux, les points constructibles sont les points dont les coordonnées peuvent s'écrire à l'aide des rationnels, des opérations algébriques et de racines carrées réelles. Nous y reviendrons ultérieurement.

• J. Pierpont

En utilisant des méthodes algébriques devenues alors bien connues, James Pierpont publia en 1895 dans l'American Mathematical Society Bulletin, une démonstration du fait que les polygones réguliers constructibles à l'aide de la règle marquée, ou par intersection de coniques, sont les polygones réguliers dont le nombre de côtés est de la forme $2^a 3^b p_1 \ldots p_k$, où les entiers $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts, de la forme $1 + 2^p 3^q$. Il généralisait ainsi le résultat attribué à Gauss. Ces nombres premiers sont appelés les nombres de Pierpont ; il semble qu'il y en ait une infinité et qu'ils soient à peu près bien répartis, mais cela, comme beaucoup d'autres conjectures concernant les nombres premiers, reste à démontrer ou à infirmer.

• Récemment

Les recherches sur ce sujet ont connu depuis quelques années une nouvelle impulsion, en partie grâce aux logiciels de dessin géométrique actuellement disponibles. En 1984 J.-C. Carrega a publié dans la Revue de Mathématiques Spéciales (Vuibert) une étude où il généralise aux points constructibles par intersection de coniques la caractérisation de Wantzel, et où il reprend la caractérisation des polygones réguliers constructibles par intersection de coniques. En 1988, M. Gleason a précisé les résultats de J. Pierpont en démontrant que la construction des polygones réguliers constructibles par intersections de coniques était possible en utilisant uniquement la trisection des angles. En 1997, Carlos Videla a publié un article de contenu analogue à celui de J.C. Carrega. Enfin dans un article que nous avons publié en 2001 dans la revue américaine Advances in Mathematics (article en français), nous avons, entre autres, distingué les constructions réalisables par construction de racines cubiques de réels de celles réalisables par trisection d'angles, caractérisé par leur groupe de Galois les équations dont les solutions sont constructibles par intersection de coniques, explicité des constructions originales des polygones réguliers à 5, 7, 13, 19, 37 côtés, constructions par intersections de coniques, et des 17 et 257-gones réguliers, constructions à la règle et au compas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Heath. *A manual of Greek Mathematics*, t. 1, Dover, New York, 1963.

[2] Collette, J.-P., *Histoire des Mathématiques*, Éditions du Renouveau pédagogique, Inc., Ottawa, 1971.

[3] Dahan-Dalmédico, A. & Peiffer, J., *Routes et dédales*, Études vivantes, 1982.

[4] Rashed R., *Histoire des sciences arabes*, Éditions du Seuil, Paris, 1997.

[5] Martin G.E., *Geometric constructions*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[6] Delahaye J.-P., *Merveilleux nombres premiers*, Belin, 2000.

[7] Gauss F., *Recherches Arithmétiques*, trad. par Poulet-Delisle, A.C.M., Blanchard (réimpression), 1953.

[8] Wantzel P., *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, Journal de Mathématiques pures et appliquées p. 366-372, Paris, 1836-37.

[9] Pierpont J., *On an undemonstrated theorem of the Disquisitiones Arithmeticæ*, American Mathematical Society Bulletin, 2, p. 206-207 and plate 11, 1895-96.

[10] Carrega J.-C., *Théorie des corps*, Hermann, 2001.

[11] Gleason A.M., *Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon*, Amer. Math. Monthly 95, n° 3, p. 185-194, 1988.

[12] Videla C.R., *On points constructible from conics*, Mathematical intelligencer 19 p. 53-57, 1997.

[13] Cuppens R., *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri Géomètre II*, tome 1, numéro 124 et tome 2, numéro 125, Publication de l'A.P.M.E.P., Juillet 1999.

[14] Arnaudiès J.-M., Delezoide P., *Nombres (2,3)-constructibles*, Advances in Mathematics 158, 2001.

Constructions géométriques par intersections de coniques(*)

Jean-Marie Arnaudiès
et Pierre Delezoide

2. Aperçus algébriques

2.1. Caractérisation algébrique de la constructibilité à la règle et au compas

Introduction

On se place ici dans un plan affine euclidien. Il sera question principalement de constructibilité et de non constructibilité à la règle et au compas dans cette partie. Les termes « constructibilité » ou « constructible » sans précisions devront être pris en ce sens.

L'objectif de ce qui suit est en particulier de distinguer les angles qui sont trisécables à la règle et au compas de ceux qui ne le sont pas. On peut considérer qu'un angle est la donnée du centre O d'un cercle et de deux points A et B sur le cercle ; un tel angle peut être trisécable à la règle et au compas à partir de O, A, B sans que B soit constructible à partir de O et de A. De manière générale, une figure géométrique peut être déterminée par un ensemble de points, les points initiaux, fixés arbitrairement, et on se pose la question de savoir si tel ou tel point déterminé par les points initiaux est constructible à la règle et au compas à partir de ces points initiaux.

Nous voulons caractériser les points constructibles à partir des points initiaux par les propriétés algébriques de leurs coordonnées ; mais alors se pose le problème de savoir dans quel repère. Il est clair que le repère choisi doit être lié aux points initiaux. D'autre part il serait absurde de lier la constructibilité de tel ou tel point à des propriétés directement métriques ; si un point est constructible à partir d'un ensemble de points initiaux, ils le sera tout autant si on multiplie toutes les distances par $\sqrt[3]{2}$ ou par π. Nous verrons dans la suite quels repères utiliser.

Constructibilité à la règle et au compas

Définition 2.1

Soit D *une partie du plan affine euclidien ; une droite sera dite définie à partir de* D *si elle passe par deux points de* D *distincts. Un cercle sera dit défini à partir de* D *si son centre appartient à* D *et s'il passe par un point de* D.

(*) Suite du Bulletin 446, p. 367-382.

Définition 2.2

Soit D *un ensemble de points du plan ; un ensemble* D′ *est dit directement constructible à partir de* D *s'il existe deux figures distinctes* F_1 *et* F_2 *(cercles ou droites) définies à partir de* D *telles que* $D' \subset D \cup (F_1 \cap F_2)$.

Définition 2.3

Une suite finie $D = D_0 \subset \ldots \subset D_n$ *de parties du plan telle que, pour tout* $k \in [1, n-1]$, D_{k+1} *soit directement constructible à partir de* D_k *sera appelée une construction géométrique.*

Définition 2.4

Soit D *une partie du plan ; un point* M *du plan sera dit* D*-constructible s'il existe une construction géométrique* $D = D_0 \subset \ldots \subset D_n$ *telle que* $M \in D_n$. *Une partie* D′ *du plan sera dite* D*-constructible si tous ses éléments sont* D*-constructibles.*

Afin de ne pas alourdir cet exposé, nous admettrons les deux résultats suivants, qui sont d'ailleurs intuitifs.

Théorème 2.1

Soient D, D′ *des parties du plan telles que* $D \subset D'$ *; tout point* D*-constructible est aussi* D′*-constructible.*

Théorème 2.2

Soit D *une partie du plan et* D′ *une partie* D*-constructible, tout point* D′*-constructible est aussi* D*-constructible.*

Constructibilité par intersection de droites, de cercles et de coniques

Rappelons que par cinq points du plan, dont trois quelconques ne sont pas alignés, passe une conique propre (c'est-à-dire qui n'est pas réunion de droites) et une seule. Les définitions relatives à la constructibilité par intersection de droites, cercles et coniques peuvent être calquées sur les définitions relatives à la constructibilité à la règle et au compas, à la différence près que dans la définition de la D-constructibilité directe, on s'autorise à utiliser, en plus des droites et des cercles définis à partir de D, les coniques propres passant par cinq points de D.

Extensions quadratiques

Proposition 2.1

Soit K *un sous-corps de* **R** *et* $d \in K$, $d \geq 0$ et $\sqrt{d} \notin K$. *L'ensemble des réels de la forme* $\lambda + \mu\sqrt{d}$ *où* $(\lambda, \mu) \in K^2$, *est un sous-corps de* **R**. *Ce corps est noté* $K(\sqrt{d})$, *c'est un* K*-espace vectoriel de dimension* 2.

Démonstration :

L'ensemble $K(\sqrt{d})$ est le sous-K-espace vectoriel de **R** engendré par 1 et $\sqrt{d}$; il est de dimension 2. C'est un sous-anneau car $1 = 1 + 0 \times \sqrt{d} \in K(\sqrt{d})$ et, pour tous λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 dans K :

$$(\lambda_1 + \mu_1\sqrt{d})(\lambda_2 + \mu_2\sqrt{d}) = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 d + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\sqrt{d} \in \mathrm{K}(\sqrt{d}).$$

Soit $x = \lambda + \mu\sqrt{d}$ non nul (avec λ et μ dans K), ce qui équivaut à $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ et entraîne $\lambda - \mu\sqrt{d} \neq 0$; on a :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\lambda + \mu\sqrt{d}} = \frac{\lambda - \mu\sqrt{d}}{\lambda^2 - \mu^2 d} \in \mathrm{K}(\sqrt{d}).$$

L'ensemble $\mathrm{K}(\sqrt{d})$ est donc un sous-corps de **R**.

Définition 2.5

Soit K *un sous-corps de* **R** *; les corps* $\mathrm{K}(\sqrt{d})$*, où d est un élément positif de* K *et* $\sqrt{d} \notin \mathrm{K}$*, sont les extensions quadratiques réelles de* K.

Repères géométriques et tours d'extensions quadratiques

Définition 2.6

Un repère du plan affine euclidien sera dit géométrique s'il est orthogonal et si ses vecteurs de base sont de même norme.

Proposition 2.2

Soit $\mathcal{R}$ *un repère géométrique et* A_1 *et* A_2 *deux points distincts dont les coordonnées dans* $\mathcal{R}$ *sont dans un sous-corps* K *de* **R** *; le cercle de centre* A_1 *passant par* A_2 *a une équation dont les coefficients sont dans* K.

Démonstration :

Soient (a_1, b_1) les coordonnées de A_1 et (a_2, b_2) celles de A_2. Notons λ le carré scalaire des vecteurs de la base. Une équation du cercle de centre A_1 passant par A_2 est :

$$\lambda(x - a_1)^2 + \lambda(y - b_1)^2 = \lambda(a_2 - a_1)^2 + \lambda(b_2 - b_1)^2.$$

Une équation équivalente est :

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y = a_2^2 + b_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2.$$

Les coefficients de cette équation sont dans K.

Lemme 2.1

Si les coordonnées des éléments de l'ensemble D *dans un certain repère géométrique* $\mathcal{R}$ *du plan sont dans un sous-corps* K *de* **R***, et si* D′ *est directement constructible à partir de* D*, alors il existe un corps* K′ *qui est* K *ou une extension quadratique réelle de* K*, contenant l'ensemble des coordonnées dans* $\mathcal{R}$ *des éléments de* D′.

Démonstration :

Reprenons les notations de la définition 2.2 ; si les figures F_1 et F_2 sont deux droites définies à partir de D, il est clair qu'on peut prendre K′ = K.

Supposons que F_1 soit une droite et F_2 un cercle. Comme la droite F_1 passe par deux éléments de D, elle a une représentation paramétrique de la forme :

$$x = a + tu,$$
$$y = b + tv.$$

où a, b, u, v sont des éléments de K. En exprimant x et y en fonction de t dans une équation à coefficients dans K du cercle F_2, on obtient une équation du second degré à coefficients dans K, de discriminant $d \geq 0$, $d \in$ K, dont les solutions sont les paramètres des points d'intersection. Si $\sqrt{d} \in$ K, les coordonnées des éléments de D′ seront toutes dans K et sinon elles seront dans le corps $K(\sqrt{d})$, qui est une extension quadratique de K.

Si F_1 et F_2 sont deux cercles définis par des éléments de D, on se ramène au cas précédent en considérant l'intersection de l'un des cercles avec l'axe radical des deux cercles, dont une équation est la différence des équations des cercles (de termes de degré 2 égaux à $x^2 + y^2$), à coefficients dans K.

Théorème 2.3

Si les coordonnées dans un repère géométrique $\mathcal{R}$ des éléments d'un ensemble D *sont dans un sous corps* K *de* **R**, *pour tout point* M *constructible à partir de* D, *il existe une tour d'extensions quadratiques réelles, c'est-à-dire une suite croissante* $K_0 \subset \ldots \subset K_n$ *de sous-corps de* **R** *où, pour tout* $k \in [1, n]$, K_k *est une extension quadratique de* K_{k-1}, *telle que* $K_0 = K$ *et telle que les coordonnées de* M *appartiennent à* K_n.

Démonstration :

Par définition de la constructibilité (à la règle et au compas), il existe une construction géométrique $D = D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_n$ telle que $M \in D_n$. D'après le lemme 2.1, on peut associer à ces parties une suite croissante de sous-corps de **R**, $K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n$, telle que les coordonnées de M appartiennent à K_n et telle que pour $k \in [1, n]$ le corps K_k soit K_{k-1} ou une extension quadratique réelle de K_{k-1} ; en supprimant les corps superflus, on obtient une tour d'extensions quadratiques réelles vérifiant les conditions.

Repères géométriques associés et réels constructibles

Définition 2.7

Soit D *une partie du plan ; le repère géométrique* $\mathcal{R} = \left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ *sera dit associé à* D *si* O *et* $I = O + \vec{u}$ *appartiennent à* D.

Théorème 2.4

Soit D *une partie du plan, on appelle corps associé à* D, *noté* K_D, *le sous-corps de* **R** *engendré par les coordonnées des éléments de* D *dans un repère* $\mathcal{R}$ *associé à* D. *Ce corps ne dépend pas du repère* $\mathcal{R}$.

Démonstration :

Soient $\mathcal{R}_1 = \left(O_1, \overrightarrow{O_1I_1}, \vec{v}_1\right)$ et $\mathcal{R}_2 = \left(O_2, \overrightarrow{O_2I_2}, \vec{v}_2\right)$ deux repères géométriques associés à D et K_1, K_2 les sous-corps de **R** engendrés par les coordonnées des éléments de D, respectivement dans $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$. Comme les points O_2 et I_2 appartiennent à D, les coordonnées (a_2, b_2) de $\overrightarrow{O_2I_2}$ dans $\mathcal{R}_1$ sont dans le corps K_1. On voit facilement que, comme $\mathcal{R}_1$ est un repère géométrique, les coordonnées dans $\mathcal{R}_1$ du vecteur $\overrightarrow{v_2}$, qui est orthogonal à $\overrightarrow{O_2I_2}$ et de même carré scalaire, sont nécessairement $(-b_2, a_2)$ ou $(b_2, -a_2)$. Les coefficients de la matrice de passage P de la base $\left(\overrightarrow{O_1I_1}, \overrightarrow{v_1}\right)$ vers la base $\left(\overrightarrow{O_2I_2}, \overrightarrow{v_2}\right)$ sont donc dans le corps K_1. Les coefficients du vecteur colonne Ω des coordonnées dans $\mathcal{R}_1$ de la nouvelle origine O_2 sont aussi dans K_1. Pour tout point $M \in D$, si X_1 est le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{R}_1$, le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{R}_2$ est

$$X_2 = P^{-1}(X_1 - \Omega).$$

Cela prouve que les coordonnées dans $\mathcal{R}_2$ de M appartiennent au corps K_1. Comme ceci est vrai pour tout point $M \in D$, on en déduit $K_2 \subset K_1$; on a bien sûr de même $K_1 \subset K_2$, d'où $K_2 = K_1$.

Définition 2.8

Soit K *un sous-corps de* **R** ; *on dit qu'un réel x est* K*-constructible s'il existe une tour d'extensions quadratiques réelles* $K = K_0 \subset \ldots \subset K_n$ *telle que* $x \in K_n$.

Théorème 2.5

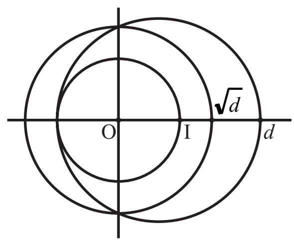
Soit D *un ensemble de points du plan et* $\mathcal{R}$ *un repère géométrique associé à* D *; l'ensemble des coordonnées dans* $\mathcal{R}$ *des points* D*-constructibles est un corps contenant* K_D*, c'est l'ensemble des réels* K_D*-constructibles. Ce corps ne dépend pas de* $\mathcal{R}$*, il sera noté* $K_D^{[2]}$. *Les points* D*-constructibles sont les points dont les deux coordonnées dans* $\mathcal{R}$ *appartiennent à* $K_D^{[2]}$.

Démonstration :

Fixons pour l'instant le repère géométrique $\mathcal{R}$ associé à D et montrons que l'ensemble K′ des coordonnées dans $\mathcal{R}$ des points D-constructibles est un sous-corps de **R** contenant le corps K_D engendré par les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des éléments de D. Nous utiliserons de nombreuses fois de manière implicite les théorèmes 2.1 et 2.2.

Posons $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$; il est clair que J est D-constructible. Soit M un point D-constructible dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont (x, y) ; les points de coordonnées $(0, y)$, $(y, 0)$, $(x, 0)$ sont {O, I, J, M}-constructibles et comme {O, I, J, M} est D-constructible, ces points sont D-constructibles. L'ensemble K′ est donc l'ensemble des réels x tels que le point de coordonnées $(x, 0)$ dans $\mathcal{R}$ soit D-constructible. Comme $O \in D$, on en déduit $0 \in K'$; si x_1 et x_2 sont dans K′, il est clair que le point $(x_1 - x_2, 0)$ est D-constructible, donc $x_1 - x_2 \in K'$; K′ est donc un sous-groupe additif. Comme le point I de coordonnées (1, 0) est par hypothèse dans D, on en déduit $1 \in K'$; le rapport de deux éléments non nuls de K′ est dans K′ (Thalès), donc $K' \setminus \{0\}$ est stable par l'inverse et le produit. L'ensemble K′ est donc un corps ; les coordonnées des éléments de D appartiennent à K′, puisque D est D-constructible ; K′ contient donc le sous-corps engendré dans **R** par les coordonnées des éléments de D, c'est-à-dire $K_D \subset K'$.

Montrons maintenant que K′ est l'ensemble des réels K_D-constructibles. Soit $x \in K'$, c'est par définition une coordonnée dans $\mathcal{R}$ d'un point D constructible M ; comme les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des éléments de D appartiennent à K_D, d'après le théorème 2.3 et la définition 2.8, les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$ sont K_D-constructibles, donc en particulier x est K_D-constructible. Réciproquement, il s'agit de démontrer que tout réel K_D-constructible est élément de K′, ou encore que, si $K_D = K_0 \subset \ldots \subset K_n$ est une tour d'extensions quadratiques réelles, alors $K_n \subset K'$. C'est vrai si $n = 0$ puisque $K_D \subset K'$; supposons le résultat vrai pour $n - 1$. L'extension $K_{n-1} \subset K_n$ étant quadratique réelle, il existe un élément $d > 0$ dans K_{n-1} tel que $K_n = K_{n-1}(\sqrt{d})$; d'après l'hypothèse de récurrence, $d \in K'$; le point de coordonnées $(d, 0)$ est donc D-constructible. On construit le point de coordonnées $(\sqrt{d}, 0)$ à la règle et au compas à partir de O, I et du point de coordonnées $(d, 0)$; ce point est par conséquent D-constructible, d'où $\sqrt{d} \in K'$. Plus généralement, comme $K_{n-1} \subset K'$, $\sqrt{d} \in K'$ et que K′ est un corps, on a $K_n = K_{n-1}(\sqrt{d}) \subset K'$; cela termine la démonstration par récurrence.



Comme le corps K_D ne dépend pas de $\mathcal{R}$ et que K′ est l'ensemble des réels qui sont K_D-constructibles, il est clair que K′ ne dépend que de D, ce qui justifie la notation $K_D^{[2]}$. On dira qu'un sous-corps K de **R** est stable par racine carrée si $\forall\, d \in K \cap \mathbf{R}_+$, $\sqrt{d} \in K$. On peut remarquer que $K_D^{[2]}$ est le plus petit des sous-corps de **R** stables par racine carrée et contenant K_D.

Si M est D-constructible, par définition, ses deux coordonnées dans $\mathcal{R}$ appartiennent à $K_D^{[2]}$. Réciproquement, si les coordonnées x, y dans $\mathcal{R}$ d'un point M appartiennent $K_D^{[2]}$, comme les points $(x, 0)$ et $(0, y)$ sont D-constructibles. M est aussi D-constructible.

2.2. À propos de la trisection

Nous reprenons dans cette partie les hypothèses générales de la partie précédente ; nous utiliserons le théorème 2.5 pour démontrer la non trisécabilité de certains angles.

Un outil algébrique

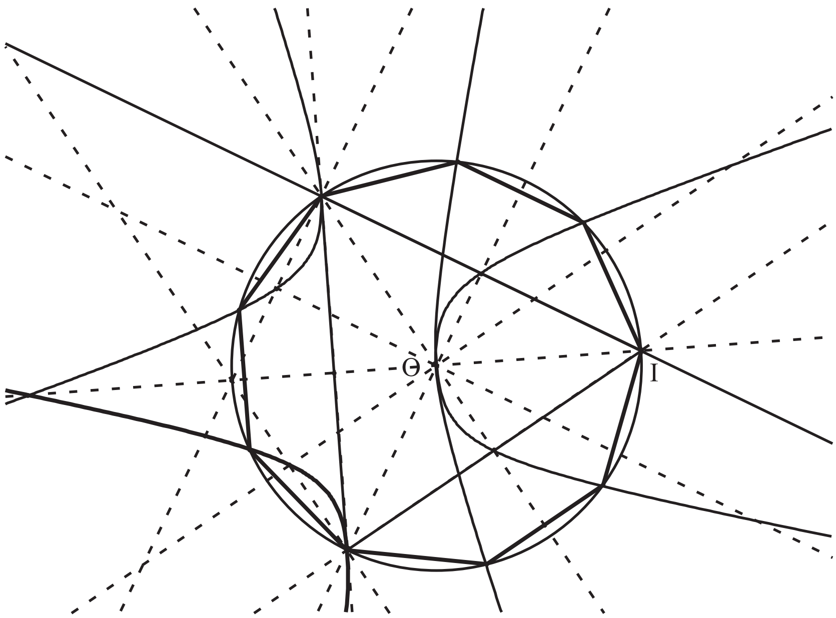
Théorème 2.6

Soit K *un sous-corps de* **R** *et* $P \in K[X]$ *un polynôme de degré* 3 *; si* P *a un zéro* K*-constructible, alors il a un zéro dans* K.

Démonstration :

Supposons $P(\beta) = 0$ où β est K-constructible ; soit une tour d'extensions quadratiques réelles $K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_p$ telle que $\beta \in K_p$. Soit r le plus petit entier dans $[0, p]$ tel que P ait au moins un zéro dans K_r ; si on avait $r > 0$, le polynôme P aurait un zéro $\alpha \in K_r$ et $\alpha \notin K_{r-1}$; comme K_r est de dimension 2 sur K_{r-1}, $(1, \alpha, \alpha^2)$ est une famille de K_r qui est liée sur K_{r-1} ; de plus $(1, \alpha)$ est libre sinon $\alpha \in K_{r-1}$, donc α annule un polynôme $A \in K_{r-1}[X]$ de degré exactement 2. Dans $K_{r-1}[X]$ on peut effectuer la division euclidienne $P = D\,A + R$ où R est de degré < 2 ; mais comme $R(\alpha) = (P - DA)(\alpha) = 0$, le polynôme R ne peut pas être de degré 1, sinon $\alpha \in K_{r-1}$; donc il est constant et constant nul. Cela prouve $P = D\,A$ dans $K_{r-1}[X]$; mais D est de degré 1 et par conséquent P a un zéro dans K_{r-1}, ce qui contredit la minimalité de r. On en déduit $r = 0$; par conséquent le polynôme P a un zéro dans K.

Non constructibilité de l'ennéagone



Nous nous plaçons dans un plan euclidien dans lequel on a choisi deux points initiaux O et I distincts. Nous nous proposons de montrer que l'ennéagone, c'est-à-dire le polygone régulier à 9 côtés, de centre O et dont un sommet est I, n'est pas constructible à la règle et au compas à partir de O et de I. Cela revient à dire que l'angle de mesure $2\pi/9$ n'est pas constructible à la règle et au compas.

Théorème 2.7

L'ennéagone n'est pas constructible à la règle et au compas à partir de son centre et de l'un de ses sommets.

Démonstration :

On pose $\theta = 2\pi/9$ et $x = \cos(\theta)$. On a :

$$\cos(3\theta) = \cos(2\pi/3) = -1/2$$

d'où, d'après la formule de trigonométrie :

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = \cos(3\theta),$$

l'égalité :

$$4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$$

soit

$$8x^3 - 6x + 1 = 0.$$

Montrons que le polynôme $P(x) = 8x^3 - 6x + 1$ n'a aucun zéro rationnel. Supposons qu'il existe des entiers premiers entre eux p et q, $q \in \mathbf{N}^*$, tels que $P(p/q) = 0$; alors $8p^3 - 6pq^2 + q^3 = 0$, d'où $q^3 = 2p(3q^2 - 4p^2)$. On en déduit que p divise q^3 et, comme p est premier avec q^3, $p = \pm 1$. On a aussi $q^2(6p - q) = 8p^3$, donc q est pair et ne peut être que 2 puisque q^2 divise 8 ; on en déduit $3p - 1 = p^3 = p$, ce qui est impossible. D'après le théorème 2.6, le réel $x = 2\pi/9$ n'est donc pas **Q**-constructible.

L'ensemble D des points initiaux est ici constitué de l'origine O et d'un sommet I de l'ennéagone. Un repère géométrique associé à D est de la forme $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{OI}, \vec{v}\right)$.

Le corps K engendré par les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des éléments de D est le plus petit corps contenant 0 et 1, c'est **Q**. D'après le théorème 2.5, les points D-constructibles sont les points dont les deux coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont **Q**-constructibles ; comme ce n'est pas le cas pour $\cos(2\pi/9)$ d'après ce qui précède, on en déduit que le sommet de l'ennéagone dont l'affixe dans $\mathcal{R}$ est $e^{2i\pi/9}$ n'est pas constructible à la règle et au compas à partir de O et I.

Mais l'ennéagone est constructible par intersection de coniques par trisection de l'angle de mesure $\pi/3$ (voir la première partie de cet exposé dans le Bulletin vert 446), ce qui donne la figure du début de ce paragraphe.

Un angle trisécable, mais non constructible

Nous nous plaçons ici dans le plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$, muni de son repère canonique.

Il existe un réel $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que $\varphi(\theta) = \cos(\theta/3) - \cos(\theta) = 1/2$, puisque $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\pi/2) = \cos(\pi/6) > 1/2$. Pour une telle valeur de θ, l'angle $\widehat{IOM}$, où $O = (0,0)$, $I = (1,0)$, $M = (\cos(\theta),\sin(\theta))$ est évidemment trisécable à la règle et au compas à partir des points initiaux O, I, M, mais nous allons montrer que le point M n'est pas constructible à la règle et au compas à partir des point initiaux O, I.

D'après la formule de trigonométrie: $4\cos^3(\theta/3) - 3\cos(\theta/3) = \cos(\theta)$, la condition $\cos(\theta/3) - \cos(\theta) = 1/2$ est vérifiée si, et seulement si, en posant $x = \cos(\theta/3)$, on a :

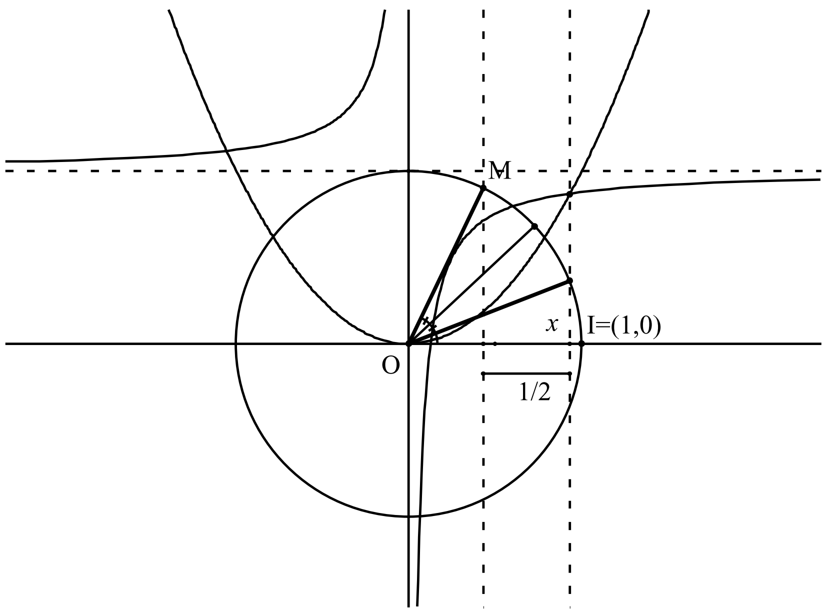
$$x - (4x^3 - 3x) = \frac{1}{2},$$

soit

$$8x(1 - x^2) = 1.$$

Il est assez facile de voir que le point M est constructible à la règle et au compas à partir de O et de I si, et seulement si, le point de coordonnées $(x, 0)$ l'est. Un repère associé aux points initiaux est le repère canonique et le corps engendré par les coordonnées des points initiaux est le corps des rationnels. Par conséquent, d'après les théorèmes 2.5 et 2.6, le point M ne sera pas constructible à la règle et au compas à partir de O et I si le polynôme $P = 8X(1 - X^2) - 1$ n'a pas de zéro rationnel. Ceci se démontre sans difficultés en utilisant la même méthode que dans l'exemple précédent.

Le point M n'est donc pas constructible à la règle et au compas à partir de O et I, mais il l'est par intersection de coniques. Les racines de l'équation $8X(1 - X^2) = 1$ sont les coordonnées x des points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et de l'hyperbole équilatère d'équation $8x(1 - y) = 1$ (c'est la méthode de Descartes). Il est facile de voir que ces deux coniques propres passent par cinq points à coordonnées rationnelles, donc constructibles à partir des point initiaux O et I.



2.3. Construction de l'heptagone

Nous allons maintenant décrire et justifier une construction de l'heptagone régulier par intersection de coniques, à partir de son centre O et de l'un de ses sommets I. Un repère géométrique $\mathcal{R}$ associé à l'ensemble des points initiaux $D = \{O, I\}$ est de la forme $\left(O, \overrightarrow{OI}, \vec{v}\right)$. Les sommets de l'heptagone régulier sont les points dont les affixes z dans $\mathcal{R}$ vérifient $z^7 = 1$: ce sont les éléments du groupe des racines septièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$. Ce groupe multiplicatif sera noté $\mathbf{U}_7$.

• Description de la construction

Soit $\omega \in \mathbf{U}_7\backslash\{1\}$; on sait que $\mathbf{U}_7$ est l'ensemble des puissances de ω, ce que l'on peut écrire :

$$\mathbf{U}_7 = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \omega^{-3}\}.$$

On pose $p = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $q = \omega^3 + \omega^6 + \omega^5 = \omega^{-4} + \omega^{-1} + \omega^{-2}$. Comme $p + q + 1$ est la somme des zéros du polynôme $X^7 - 1$, on a $p + q + 1 = 0$, soit $p + q = -1$. D'autre part :

$$\begin{aligned} pq &= (\omega+\omega^2+\omega^4)(\omega^{-1}+\omega^{-2}+\omega^{-4}) \\ &= \omega^0+\omega^{-1}+\omega^{-3}+\omega^1+\omega^0+\omega^{-2}+\omega^3+\omega^2+\omega^0 = 2. \end{aligned}$$

Les complexes p et q sont donc les zéros du polynôme $X^2 + X + 2$.

Les complexes ω, ω^2, ω^4 sont les zéros du polynôme $X^3 - pX^2 + qX - 1$, puisque $\omega\,\omega^2\,\omega^4 = 1$ et $\omega\,\omega^2 + \omega\,\omega^4 + \omega^2\,\omega^4 = \omega^3 + \omega^{-2} + \omega^{-1} = q$. L'objectif est d'obtenir les points d'affixes ω, ω^2, ω^4 comme intersections du cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par I avec une hyperbole équilatère, mais si le cercle unité coupe une hyperbole équilatère en ces trois points, il y a un quatrième point dans l'intersection. Nous pouvons fixer arbitrairement ce point à I. Le polynôme unitaire qui a $(1, \omega, \omega^2, \omega^4)$ pour zéros est :

$$\begin{aligned} P &= (X-1)(X^3-pX^2+qX-1) \\ &= X^4-(p+1)X^3+(p+q)X^2-(1+q)X+1 \\ &= X^4+qX^3-X^2+pX+1. \end{aligned}$$

Les zéros de ce polynôme sont de module 1 ; en divisant l'équation $P(z) = 0$ par z^2 et en remplaçant $1/z$ par $\bar{z}$, on obtient l'équation complexe :

$$z^2+\bar{z}^2+\bar{p}z+p\bar{z}=1.$$

En posant $p = a + ib$, où a, b sont réels, et $z = x + iy$, l'équation devient :

$$x^2-y^2+ax+by=\frac{1}{2},$$

soit :

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}.$$

Les complexes 1, ω, ω^2, ω^4 sont donc les affixes des intersections avec le cercle $\mathcal{C}$ de l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ de centre le point Ω d'affixe $\dfrac{-a+ib}{2}=-\dfrac{\bar{p}}{2}=-\dfrac{q}{2}$, de directions asymptotiques les droites d'équations $x = \pm y$ passant par I. Les conjugués 1, ω^{-1}, ω^{-2}, ω^{-4} sont évidemment les intersections avec $\mathcal{C}$ de l'hyperbole $\mathcal{H}'$, symétrique de $\mathcal{H}$ par rapport à Ox, de centre Ω' d'affixe $-\dfrac{p}{2}$.

Les centres Ω et Ω' de ces hyperboles sont constructibles à la règle et au compas à partir de $\{O, I\}$; en effet on peut remarquer que $-\dfrac{p}{2}-\dfrac{q}{2}=\dfrac{1}{2}$ et donc que Ω et Ω'

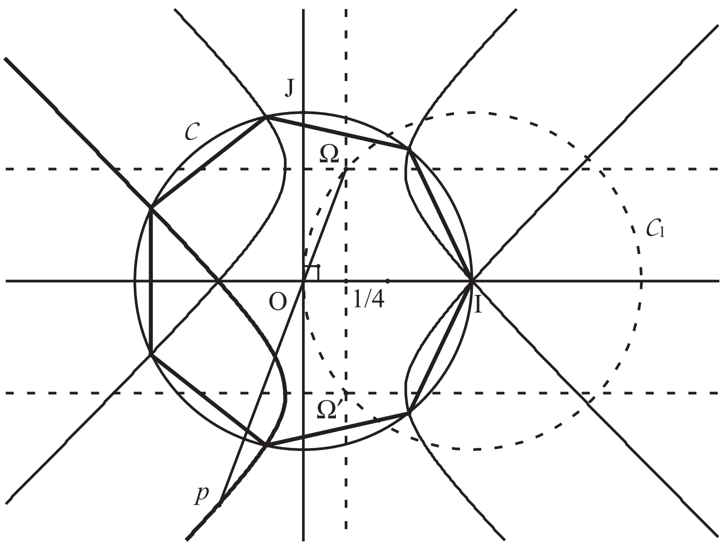
sont symétriques par rapport à l'axe Ox sur la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$ et que d'autre part

$$\left|-\frac{p}{2}-1\right|^2 = \left(\frac{p}{2}+1\right)\left(\frac{q}{2}+1\right) = \frac{pq}{4} + \frac{p+q}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1.$$

Par conséquent Ω et Ω′ sont les intersections de la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$ et du cercle $\mathcal{C}_1$ d'équation complexe $|z - 1| = 1$, de centre I et passant par O. L'hyperbole $\mathcal{H}$ passe par I et les symétriques de I par rapport aux axes de symétrie de l'hyperbole, ce qui fait quatre points ; elle passe aussi par le point d'affixe p puisque :

$$p^2 + \overline{p}^2 + \overline{p}p + p\overline{p} = (p + \overline{p})^2 = (p + q)^2 = 1.$$

Ces cinq points sont constructibles à la règle et au compas à partir de {O, I} et déterminent l'hyperbole $\mathcal{H}$. On obtient donc ainsi une construction, utilisant les intersections d'un cercle avec deux hyperboles équilatères, d'un heptagone régulier à partir de son centre et de l'un de ses sommets.



• Aperçu rapide sur les motivations algébriques

Le lecteur a pu remarquer que la clé de la construction est l'utilisation des sommes $p = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $q = \omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}$, qui sont les racines d'une équation du second degré à coefficients entiers. Ces sommes sont ce qu'on appelle des périodes de Gauss. C'est à l'aide d'une construction analogue que Gauss a pu prouver la constructibilité à la règle et au compas du 17-gone régulier. Ces regroupements de racines ne sont évidemment pas faits au hasard. On peut vérifier que chacune de ces sommes est la somme des puissances 1, 2, 4 de chacun de ses termes. Par exemple :

$$\omega^{-1}+\omega^{-2}+\omega^{-4}=\left(\omega^{-2}\right)^{1}+\left(\omega^{-2}\right)^{2}+\left(\omega^{-2}\right)^{4}.$$

Les calculs des puissances peuvent se faire modulo 7, puisque $\omega^7 = 1$. Introduisons l'anneau $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ des classes d'entiers modulo 7 et son groupe multiplicatif des classes non nulles, noté $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})^*$, de cardinal 6. La partie $\{1, 2, 4\}$ de ce groupe est le sous-groupe des carrés. En effet, modulo 7, $1^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4$ et $3^2 \equiv (-3)^2 \equiv 2$. Ce sous-groupe est le seul sous-groupe de cardinal 3, il est l'ensemble des puissances de la classe de $2 \equiv 3^2$; alors que le groupe entier est l'ensemble des puissances de la classe de 3. Ce sont ces propriétés algébriques de l'ensemble $\{1, 2, 4\}$ qui déterminent le comportement des périodes de Gauss associées p et q.

Le lecteur intéressé par le sujet pourra retrouver sur le site de 1'APMEP une étude des constructions de l'heptagone, du 13-gone régulier et du 17-gone régulier, ce par quoi tout a commencé pour Gauss et pour beaucoup de concepts algébriques actuellement utilisés, dont probablement la théorie de Galois. Le lien entre les sous-groupes des groupes multiplicatifs $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ et la résolution des équations $z^p = 1$, pour $p = 7, 13, 17$, y sera décrit. Le lecteur pourra ainsi avoir des idées concrètes sur quelques applications de la théorie de Galois. Il y trouvera aussi une bibliographie sur le sujet plus riche que celle figurant ci-après.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lebesgue H. *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1950.

[2] Martin G.E., *Geometric constructions*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] Carrega J.-C., *Théorie des corps, la règle et le compas*, Hermann, Paris, 2001.

[4] Gleason A.M., *Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon*, Amer. Math. Monthly **95**, n° 3, p. 185-194, 1988.