Periodico di Matematica (IV) Vol. V(2) giugno 2023, pp. 109-124

Il siamese di Koch

Un frattale straordinariamente vario nel tassellare il piano

Giorgio Pietrocola *

*APAV; giorgio.pietrocola@gmail.com

DOI : 10.53159 /PdM(IV).v5n2.114

Sunto: *Vengono presentati particolari poligoni con lati trasformati in merletti di Koch, alcuni dei quali, se non assenti, almeno poco noti in letteratura Tra questi si evidenziano forme triangolari esagonali e rombiche capaci di veicolare una tassellazione del piano mediante una unica forma frattale, una variante allungata del fiocco di neve di Koch, detta Siamese, che si moltiplica in serie geometriche decrescenti di figure simili formanti trame frattali straordinariamente varie.*

Parole Chiave: *Curve di Koch, variante Siamese del fiocco di neve, tassellazioni con frattali.*

Abstract: *Particular polygons are presented with sides transformed into Koch curves, some of which, if not absent, are at least little known in the literature. Among these, hexagonal and rhombic triangular shapes are highlighted, capable of conveying a tessellation of the plane through a single fractal shape, an elongated variant of Koch's snowflake, called Siamese, which multiplies in decreasing geometric series of similar figures forming extraordinarily varied fractal textures.*

Keywords: *Koch curves, Siamese variant of the snowflake, tessellations with fractals.*

1 - Introduzione

Nel pittoresco mondo dei frattali, il protagonista di questo articolo sembra senza nome. Se in qualche occasione un nome gli è stato assegnato, la notizia non si è diffusa abbastanza, così nel 2020, quando pubblicai sul Tartapelago (Pietrocola 2020) una serie di animazioni sulla tassellatura frattale del piano, che lo mostrano come rivale del famoso fiocco di neve di Koch, dovetti assegnargliene uno! Lo chiamai "siamese" perché corrisponde alla fusione di due normali fiocchi gemelli in uno solo di forma allungata.

Sia il fiocco che il siamese, così come le altre figure che presenteremo, derivano dal celebre merletto di Koch, scoperto nel 1904 dal matematico svedese Helge von Koch (1870-1924).

1.1 – Il merletto a trina di Koch

Noto anche come curva di Koch e merletto a trina di Koch, il merletto è il mattone usato per costruire le figure che saranno introdotte nei prossimi paragrafi.

Diremo merlettato un segmento trasformato secondo la procedura seguente.

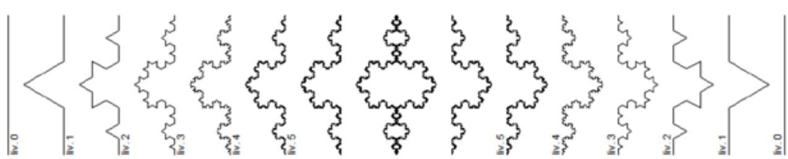

Figura 1. I primi livelli della costruzione con punta a sinistra e a destra. Al centro due opposti merletti combaciano formando l'antisiamese

Il primo passo per la costruzione del merletto è frazionare in tre parti uguali un segmento. I due estremi rimangono al loro posto mentre il centrale, raddoppiato, mantiene la continuità del segmento originario formando un triangolo equilatero privo però della base.

Il secondo passo è come il primo, ma si applica a ognuno dei quattro segmenti della spezzata ottenuta. Si continua così, un livello dopo l'altro, ogni volta la lunghezza dei segmenti è divisa per tre e il loro numero moltiplicato per quattro.

I passi non finirebbero mai, ma, mentre per gli antichi greci esisteva solo l'infinito potenziale, per noi esiste anche quello attuale (Lombardo Radice, 2014). Possiamo perciò considerare tutti gli infiniti passi come effettivamente conclusi e quindi il relativo risultato finale: una singolare curva continua, ma ovunque non derivabile, limitata in estensione, ma talmente frastagliata da avere lunghezza infinita! Come ogni figura simile ad una sua parte propria, cioè auto-simile, il merletto di Koch è considerato un frattale.

1.2 – Il fiocco e l'antifiocco di neve di Koch

Il fiocco è di gran lunga il più famoso delle figure che stiamo presentando. L'antifiocco, meno noto del fiocco, gode comunque di una relativa notorietà come mostra anche il possesso di un nome condiviso che lo identifica non solo in Italia (antisnowflake). Merlettando i lati di un triangolo equilatero verso l'esterno si ottiene il fiocco, merlettandoli verso l'interno si ottiene invece l'antifiocco (fig.2) . Il fiocco si può ottenere anche merlettando verso l'interno i lati di un esagono regolare. Un secondo modo per ottenere l'antifiocco è, invece, merlettare da ambo le parti tre segmenti uguali convergenti in un punto a formare angoli di 120°.

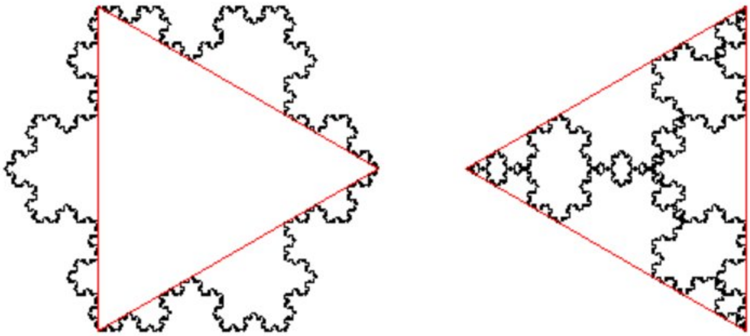

Figura 2. Il fiocco e l'antifiocco, merletti esterni e interni al triangolo.

Il fiocco è una curva chiusa di perimetro infinito. Infatti, nella sua costruzione partendo dal triangolo equilatero, passo dopo passo, il calcolo del perimetro porta ad una serie geometrica divergente di ragione 4/3.

L'area delimitata dal fiocco conduce invece ad una serie geometrica convergente di ragione 4/9 e risulta aumentata del 60% dell'area del triangolo equilatero che lo delimita internamente. Simmetricamente l'area dell'antifiocco, distribuita in quella di infiniti siamesi, diminuisce del 60% rispetto all'area dello stesso triangolo, che però lo delimita esternamente.

Il fiocco di neve composto da frattali, a rigore, non è auto-simile, ma è comunque considerato un frattale in virtù degli elementi che lo compongono. L'antifiocco invece è autosimile. Per esempio se si sottraggono i tre siamesi più grandi da questo frattale rimane, al centro, isolato, un antifiocco con le dimensioni pari a un terzo dell'originale. Iterando questo procedimento, si ottengono infinite miniature decrescenti in progressione geometrica.

2 - Il siamese e l'antisiamese di Koch

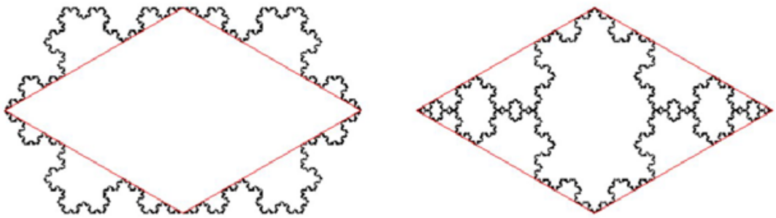

Figura 3. Il siamese e l'antisiamese, esterni e interni al rombo.

Un modo per costruire il siamese è partire da un particolare rombo, scomponibile mediante la sua diagonale minore in due triangoli equilateri, e merlettare i suoi lati verso l'esterno. Verso l'interno invece si ottiene l'antisiamese (fig.3). Come l'antifiocco si contrappone al fiocco che merletta esternamente il triangolo così l'antisiamese si contrappone al siamese che merletta esternamente il rombo. Anche questa coppia di figure, come le precedenti, ha una costruzione alternativa. Il secondo modo per ottenere il siamese è merlettare internamente un esagono ottenuto da un regolare raddoppiando due lati paralleli, avendo cura di merlettare separatamente le due metà dei lati doppi. Il secondo modo per ottenere l'antisiamese è merlettare un segmento da ambo le parti.

Al centro dell'antisiamese vi è il siamese maggiore. Ai suoi fianchi si notano i due siamesi, secondi in altezza, aventi dimensioni ridotte a un terzo ed area ridotta ad un nono del maggiore.

Questi due a loro volta hanno due siamesi ancora più piccoli ai loro lati e così via all'infinito.

Le aree divise ogni volta per nove diminuiscono secondo una progressione geometrica di ragione 1/9 mentre il loro numero raddoppia ogni volta. Anche il siamese, come il fiocco, è una curva chiusa di perimetro infinito.

L'area delimitata dal siamese porta invece ad una serie geometrica convergente e risulta aumentata del 40% rispetto all'area del rombo che lo delimita internamente. Simmetricamente l'area dell'antisiamese, distribuita in quella di infiniti siamesi, diminuisce del 40%.

L'antisiamese, come l'antifiocco, è un frattale autosimile. Infatti se si sottrae il siamese maggiore centrale, rimangono, isolati, due antisiamesi in miniatura. Iterando questo procedimento si ottengono miniature simili decrescenti in progressione geometrica.

Dunque, benché in letteratura sembri sconosciuto, il siamese si trova non di rado rappresentato come parte ripetuta dell'antifiocco dove compare anche l'antisiamese in tre copie uguali.

In questo frattale il siamese è unico attore, ma è moltiplicato all'infinito in una serie geometrica di suoi simili, sempre più piccoli man mano che ci si avvicina al centro oppure ai tre vertici che sono solo alcuni degli infiniti punti di accumulazione di questa figura.

L'antifiocco però è solo una delle molteplici composizioni che hanno il siamese come unico attore. Forse la bellezza complessiva dell'antifiocco ha avuto il sopravvento e ha messo in ombra il suo protagonista, pur ripetuto all'infinito. Oppure, chissà, ad oscurare la fama del siamese potrebbe essere stata una paura irrazionale indotta dalla sua forma allungata evocante il pernicioso bacillo, scoperto però da un altro Koch.

3 - Il pupazzo di neve di Koch

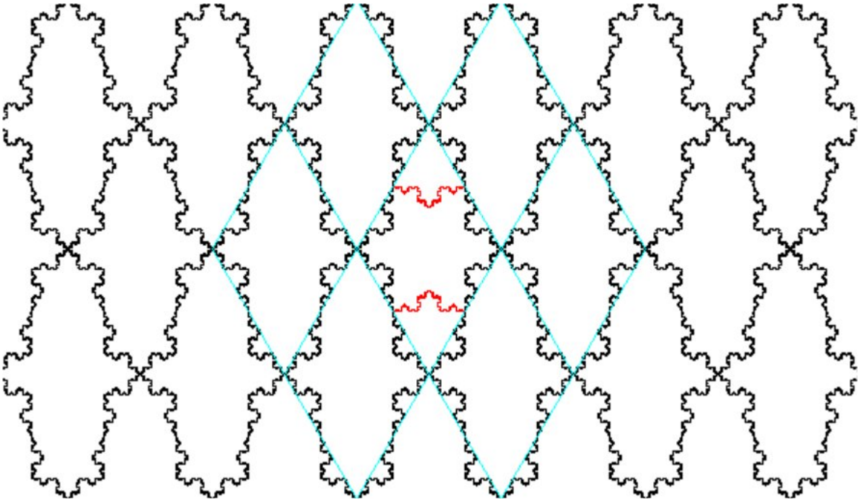

Figura 4. Il pupazzo di Koch eredita la proprietà di tassellare il piano dal rombo che lo genera. Al centro è evidenziata la possibilità di scomporre questo frattale in tre fiocchi, uno grande e due più piccoli. Ne deriva che il piano può essere tassellato da fiocchi di due diverse taglie.

Se infiniti sono i poligoni merlettabili, perché allora dare un nome solo ad alcuni di essi? E' opportuno dar loro un nome e studiarli quando svolgono un ruolo importante, per esempio nella tassellatura, e mostrano quindi straordinarie qualità. Ecco allora il pupazzo di neve di Koch (fig.4). Si ottiene da un rombo simile a quello già visto con angoli di 60° e 120°. Ogni lato si merletta però in due tappe partendo da un angolo acuto. La prima metà del primo segmento viene merlettata esternamente, la seconda internamente, si procede per tutti e quattro i lati invertendo ogni volta l'ordine precedente (ei,ie,ei,ie).

Il pupazzo può essere anche scomposto in tre fiocchi. Uno grande e due piccoli. Per rendersene conto si può pensare ad un esagono regolare con due triangoli equilateri su due dei lati opposti che, eliminati i lati in comune, lo trasformano in rombo. L'algoritmo visto induce a merlettare esternamente i lati del triangolo e internamente quelli dell'esagono. In ambo i casi si genera parte di un fiocco dove però il fiocco dell'esagono ha un'area tripla di quella degli altri due. L'area racchiusa dal pupazzo è uguale a quella del rombo con cui viene costruito. Infatti quello che si perde con le quattro merlettature interne lo si recupera con le quattro esterne. stata una paura irrazionale indotta dalla sua forma allungata evocante il pernicioso bacillo, scoperto però da un altro Koch.

4 - Replicanti e tassellanti

Il più semplice dei nostri replicanti, capaci di riprodursi per scissione, è lo stesso merletto di Koch. E' infatti una figura che si ripete (Gardner, 1997) appartenente alla classe rep-2.

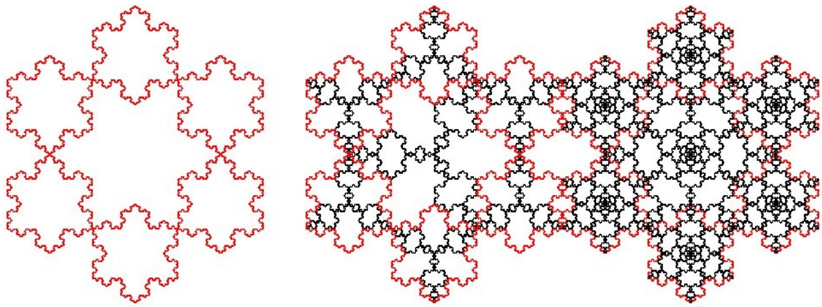

Figura 5. Un fiocco di neve formato da 7 fiocchi mostra che il fiocco è un replicante irregolare: irrep-7. Due copie dello stesso, sulla destra, integrate diversamente, sono state accostate per iniziare una tassellazione esagonale del piano veicolante una tassellazione di soli siamesi. La prima "piastrella" è stata integrata da un antisiamese , in ognuno dei sette fiocchi. La seconda da sei antisiamesi a raggiera. L'esempio mostra anche che, per ogni tassellazione con fiocchi di neve, si possono far corrispondere più tassellazioni con soli siamesi

Questo perché se lo suddividiamo in due parti uguali, ogni parte è un merletto in miniatura del tutto simile all'originale. Altri esempi di questa proprietà sono il triangolo rettangolo isoscele e il rettangolo corrispondente al foglio A4. Anche il fiocco è un replicante in quanto scomponibile in 7 parti simili a se stesso. Non tutte uguali però, sei uguali ed una più grande (fig.5). Per questo è considerato un replicante irregolare. Lo chiameremo irrep-7 come la sua classe di appartenenza. E il siamese? Non mi sembra si possa scomporre in un numero finito di copie simili a se stesso. In compenso, e non mi sembra poco, si può scomporre in un numero infinito di suoi simili. La prova in fig.6, dove si osservano infinite serie geometriche di siamesi incastrarsi alla perfezione a formare un solo siamese!

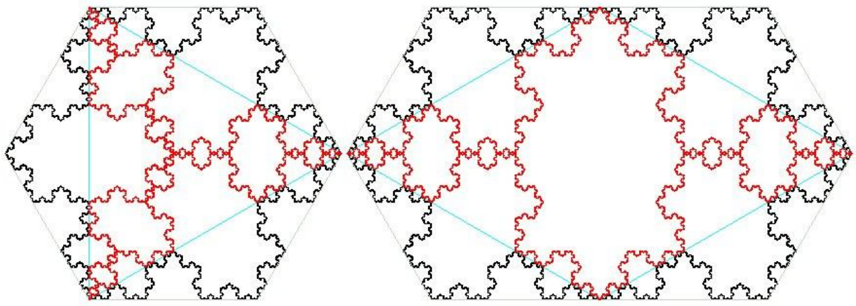

Figura 6. Antifiocco e antisiamese (in rosso) inseriti internamente al fiocco e al siamese. La seconda figura ottenuta si scompone in infinite copie di se stessa.

Il pupazzo si distingue tra le altre figure basate sul merletto di Koch per la sua capacità, ereditata dal rombo, di tassellare il piano, cioè di ripetersi identica ricoprendo il piano senza alcuna sovrapposizione. Il fiocco può fare altrettanto solo se si usano due sue copie, una di area tripla dell'altra. Per questo basta partire da una tassellazione di pupazzi e sostituire ognuno di essi con i tre fiocchi equivalenti, uno grande e due piccoli. Il siamese, a quanto ne so, non è in grado di tassellare il piano con un numero finito di copie ma eccelle invece nel tassellarlo con infinite copie di sé in serie geometriche decrescenti. Per constatarlo possiamo partire dall'antifiocco. Il solito modo di presentarlo in forma isolata nasconde molto della sua bellezza. Per scoprirlo possiamo tassellare il piano con il triangolo equilatero che lo contiene .

In alternativa potremmo usare rombi formati da coppie di triangoli frattali o esagoni composti da sei di questi (fig.7).

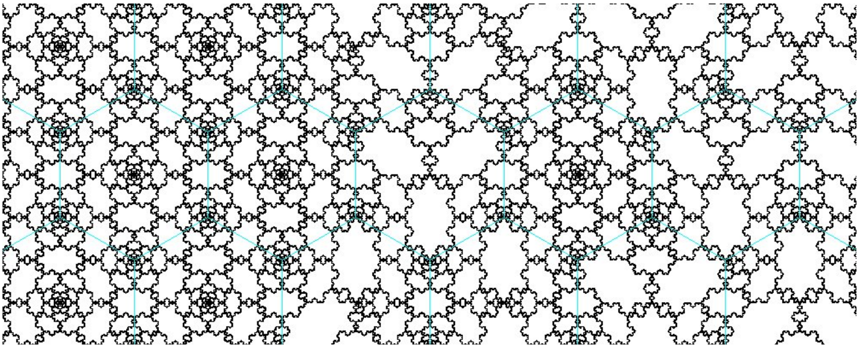

Figura 7. Tassellazione con siamesi veicolata da esagoni frattali di tipo diverso. A sinistra ci sono esagoni regolari ottenuti inserendo nel fiocco inscritto, sei antisiamesi a raggiera congiungenti il centro con i vertici dell'esagono. Proseguendo verso destra gli esagoni perdono casualmente da 0 a 3 raggi non consecutivi.

Continuando ad assemblare tasselli, data la simmetria della figura ripetuta, si otterrà sempre lo stesso disegno periodico. Emergerà con questo un magnifico incastro di un solo protagonista, sia pure in infinite copie di dimensioni decrescenti: il siamese di Koch!

Ci sono molti altri modi simili, però, per assemblare siamesi ed ottenere risultati incredibilmente vari. Potremmo tassellare il piano mediante il rombo frattale contenente l'antisiamese oppure con l'esagono allungato contenente il siamese oppure con l'esagono regolare del fiocco completo di antifiocco e tanti altri (fig.8).

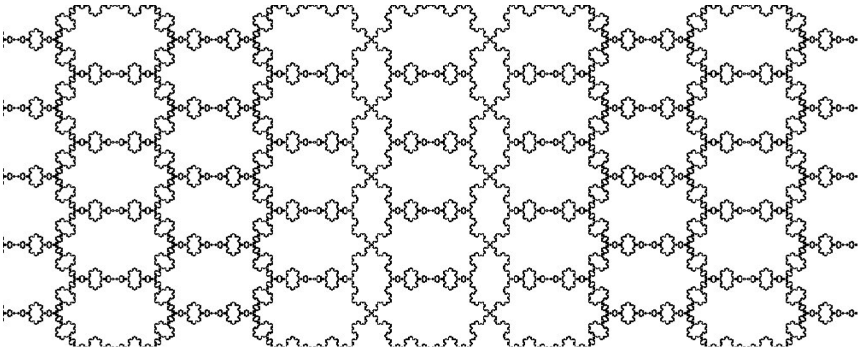

Figura 8. Tassellazione con siamesi veicolata da una tassellazione con esagoni allungati, merlettati internanente, e interrotta da due file centrali di rombi, merlettati esternamente, che si inseriscono perfettamente nella trama

C'è una gran varietà di diversi tasselli della normale geometria che possono veicolare una tassellazione frattale del piano fatta da soli siamesi.

Nel caso dell'esagono con fiocco e antifiocco si forma un esagono con vertici a cui corrispondono disegni alternati di due tipi. Ogni volta che si aggiunge un esagono frattale si hanno di fronte due diverse possibilità. Si potrebbe anche prendere a caso ogni volta tra due alternative creando configurazioni caotiche.

.

5- Un confronto

Dopo questa breve disamina introduttiva sulla intricata geometria creata dal merletto di Koch, è giunto il momento di mettere a confronto il fiocco e il siamese per stabilire se la grande fama del primo e la sistematica ignoranza del secondo hanno un loro motivo d'essere.

Dal punto di vista estetico il primo sembra essere preferibile per la sua maggiore simmetria ereditata dall'esagono regolare da cui deriva. Una figura che dal punto di vista estetico sembra essere superiore a quella dell'esagono allungato da cui deriva il secondo.

Il fiocco sembra anche aver ereditato qualcosa della capacità dell'esagono di tassellare il piano, pur non riuscendo a farlo con una sola figura identicamente ripetuta. Ci riesce però con due sue copie di diverse dimensioni, cosa che il siamese non sembra in grado di fare, nonostante il suo genitore esagonale sia anche lui capace di ciò. Come abbiamo visto, per questo scopo al siamese servono serie infinite, ma, in compenso, il risultato è straordinariamente vario.

Non che le tassellazioni del piano con fiocchi non possano essere rese varie. Sostituendo alcuni fiocchi tassellanti con l'irrep-7, come in tutti i replicanti, si può, infatti, complicare all'infinito.

Ciononostante la sfida con il siamese è persa perchè qualsiasi tassellazione con soli fiocchi si può trasformare in una tassellazione con solo siamesi in infiniti modi, per esempio inserendo un antifiocco dentro ogni fiocco (fig.6).

Risultando il viceversa impossibile ed essendoci tanti altri modi per tassellare il piano con soli siamesi, mi sembra di aver giustificato il fatto che queste tassellature appaiono all'occhio molto più varie e interessanti (Pietrocola, 2020).

Per concludere credo che il confronto mostri che le due figure siano entrambe degne di interesse per la loro specificità e che cooperino nel mostrare la bellezza della geometria frattale: un mondo che sembra ancora in parte inesplorato e in cui potrete entrare attivamente armandovi di una tartaruga del linguaggio Logo (fig.9). Potreste così sperimentando voi stessi, come ho fatto io, le virtù di questo automa digitale ideato da Seymour Papert (Papert, 1984) per rendere l'apprendimento logico-formale attivo, divertente ed efficace.

6 - Sulla tartaruga

Tutte le figure di questo articolo sono state realizzate con FMSLogo una versione del Logo che si può scaricare gratis alla url "https://fmslogo.sourceforge.io/" cliccando poi su "download FMSLogo".

In fig.9 è visibile la finestra principale con il pulsante "Execute" per mandare in esecuzione gli ordini per la tartaruga scritti nell'apposita linea dei comandi alla sinistra del pulsante. Appena sopra c'è un campo di testo dove rimane traccia delle immissioni. Superiormente c'è il campo grafico dove la tartaruga, rappresentata dal classico triangolino, esegue gli ordini impartiti. Nella figura l'automa ha appena realizzato un pupazzo di neve rispondendo al comando "pupazzo 100". Le pochissime primitive necessarie per iniziare sono spiegate nel vocabolario animato del Tartapelago (Pietrocola, 2005). Se volete copiare le procedure per realizzare le figure mostrate nell'articolo potete immettere la url: "www.pietrocola.eu/periodicomat.txt" , e poi copiare e incollare il testo nella memoria della tartaruga, accessibile premendo il tasto "Edall" che apre la finestra "Editor" visibile in figura. Dopo aver salvato il testo copiato mediante il menù "file" la tartaruga, a comando, eseguirà i vari disegni nelle dimensioni specificate. Tutto dovrebbe essere agevole ma se avete problemi non esitate a contattarmi.

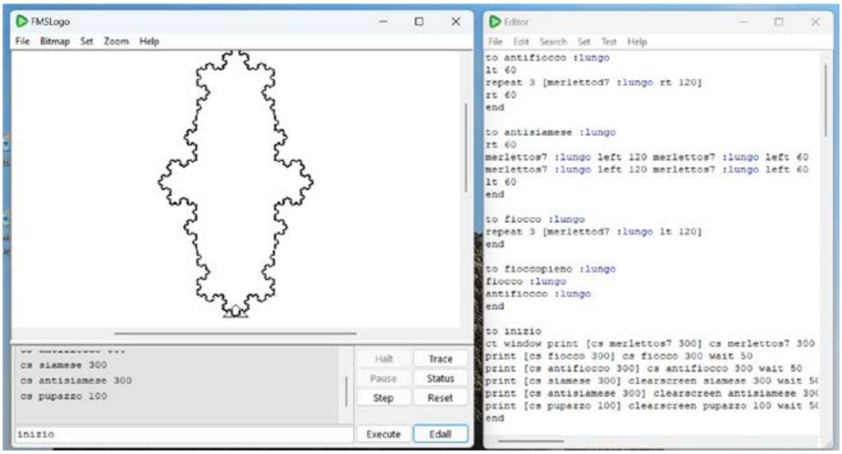

Figura 9. Le finestre del FMSLogo.

Bibliografia

G.Pietrocola (2020), L'arte della tassellazione del piano con fiocchi di Koch,Tartapelago,2020, url: http://www.maecla.it/tartapelago/frattali/indexfiocchi.htm

L.Lombardo Radice (2014), *L'infinito, Itinerari filosofici e matematici di un concetto base*, Editori Riuniti, 2014

G.Pietrocola (2005), Vocabolario animato primitive Logo, Tartapelago,Maecla,2005,url: http://www.maecla.it/tartapelago/vocanimato/index.htm

M.Gardner (1997), Figure piane che si ripetono in *Enigmi e giochi matematici*, vol.4, Sansoni

S. Papert (1984), Mindstorm *Bambini, computer e creatività*, Emme edizioni. (1993).


Raffaello Cortina Editore
Piergiorgio
Odifreddi
Pillole
matematiche
I numeri
tra umanesimo e scienza
Φ
SCIENZA
E IDEE
Collana fondata
da Giulio Giorello