216 - Etudes métriques de courbes. Exemples.

On se place dans l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne, et éventuellement d'une orientation.

1 Courbes, tangentes, longueur

1.1 Définition

Définition 1. On appelle *arc paramétré* de $\mathbf{R}^n$ tout couple (I, f), où I est un intervalle et f une application continue de I dans $\mathbf{R}^n$. $f(I)$ est appelé le *support* de l'arc et est noté $supp(I, f)$. On appelle *courbe* tout sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ qui est le support d'un arc de classe C^1. Un arc paramétré est dit *régulier* (resp. bi, k-régulier) s'il est de classe C^1 (resp. C^2, C^k) et si sa dérivée ne s'annule jamais (resp ses deux/k premières dérivées forment toujours un système libre).

Exemple. Une droite de $\mathbf{R}^n$, le graphe d'une fonction C^1 $f : I \to \mathbf{R}$, avec I ouvert, le cercle $\mathbf{S}^1$ sont des courbes.

Remarque (Interprétation cinématique). On peut considérer que t représente le temps et $f(t)$ un point mobile.

Définition 2 (Changement de paramétrage)**.** Soient (I, f) et (J, g) deux arcs paramétrés de classe C^k. On dit qu'ils sont C^k*-équivalents* s'il existe un C^k-difféomorphisme $\theta : I \to J$ telle que $g = f \circ \theta$. Les C^k classes d'équivalence sont appelées des C^k*-arcs géométriques* ; à un arc géométrique est associée une unique courbe. Les représentants d'un C^k-arc géométrique sont appelés *paramétrages admissibles*, et θ est appelé un *changement de paramétrage admissible.* (I, f) et (J, g) sont dits *positivement équivalents* s'il existe un C^k-difféomorphisme croissant $\theta : I \to J$ telle que $g = f \circ \theta$. Si un arc géométrique possède deux classes d'équivalence pour cette relation, on dit qu'il est *orientable* ; choisir une *orientation* de l'arc géométrique, c'est choisir une classe d'équivalence positive.

Remarque. Par contre à une courbe on peut associer plusieurs arcs géométriques : $t \mapsto e^{it}$ sur $]-\pi, \pi]$ et sur $\mathbf{R}$.

Remarque. Continuons l'interprétation cinématique : regarder un arc géométrique, c'est considérer uniquement la trajectoire du point, indépendamment de la vitesse à laquelle le point a parcouru ladite trajectoire.

1.2 Tangente et sous-espaces fondamentaux

Théorème 1. *Soit $i \in \mathbf{N}$, (I, f) un arc géométrique et $t_0 \in I$. Alors le sous-espace vectoriel $Vect(f'(t_0), \dots, f^{(i)}(t_0))$ est indépendant du choix du représentant de l'arc géométrique. Il est appelé i-*ème sous-espace fondamental *de l'arc géométrique en t_0.*

Remarque. Attention, cela ne signifie pas que les dérivées successives de deux représentants d'un arc sont deux à deux colinéaires !

Définition 3. Sous réserve d'existence, le sous-espace fondamental de dimension 1 est appelé *tangente* à l'arc géométrique en t_0 et celui de dimension 2 *plan osculateur* en t_0.

Remarque. Si l'arc est régulier, ce qui est souvent le cas en pratique, la tangente en t_0 est $\mathbf{R}f'(t_0)$. S'il est birégulier, le plan osculateur est $Vect(f'(t_0), f''(t_0))$.

Définition 4. On suppose que l'arc possède un plan osculateur, tel que la p-ième dérivée soit la première non nulle et que la q-ième soit la première non proportionelle à la p-ième.
- Si p impair et q pair (par ex. si le point est birégulier), on a un *point ordinaire.*
- Si p impair et q impair, on a un *point d'inflexion.*
- Si p pair et q impair, on a un *point de rebroussement de première espèce.*

– Si p pair et q pair, on a un *point de rebroussement de seconde espèce.*

Proposition 1. *On se place dans le cas $n = 3$, et on suppose que l'arc est tri-régulier en $t_0 = 0$. On note $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ les projections de $f(t) - f(t_0)$ sur les vecteurs de la base $f'(t_0)$, $f''(t_0)$, $f'''(t_0)$. Par formule de Taylor, on a les équivalents : $x(t) \sim t$, $y(t) \sim \frac{t^2}{2}$, $z(t) \sim \frac{t^3}{6}$.*

1.3 Longueur et abscisse curviligne

Définition 5. Soit $\gamma = ([a, b], f)$ un arc paramétré continu. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions $\sigma = (t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b)$de $[a, b]$. On appelle *longueur* de l'arc γ l'élément de $\overline{\mathbf{R}_+}$ $\sup_{\sigma\in\mathcal{S}} \sum_{i=1}^{m} d(f(t_{i-1}), f(t))$, noté $l(\gamma)$; il est indépendant du paramétrage choisi. L'*abscisse curviligne* de $t \in [a, b]$ est le réel $\varphi(t) = l(([a, t], f_{|[a,t]}))$.

Proposition 2. *L'application φ est croissante et continue. Cela permet de définir son inverse lorsqu'il n'existe pas d'intervalle d'intérieur non vide sur lequel f est constante (par exemple si l'arc est régulier). Le cas échéant, il existe des paramétrisations, dites* normales, *telle que l'on ait pour tout t, t', $\varphi(t) - \varphi(t') = t - t'$. Deux paramétrisations normales (I, f) et (J, g) vérifient $f(t) = g(\pm t + T)$.*

Proposition 3. *Soit $([a, b], f)$ un arc paramètré de classe C^1. Alors sa longueur est $\int_a^b \|f'(t)\| dt$.*

Exemple. On retrouve le fait que la longueur du cercle unité est 2π. Celle-ci est approchée inférieurement par les polygones réguliers inscrits dans le cercle, ce qui a fourni les premiers calculs de π (Archimède).

Exemple. On considère la cycloïde, définie par $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$. Alors la longueur d'une « arche »est 8.

Application ([Laf]). Une sous-variété connexe de dimension 1 est difféomorphe à $\mathbf{S}^1$ si elle est compacte, à $\mathbf{R}$ sinon ; en particulier c'est une courbe.

Application (Théorème de Jordan C^1). Soit γ une courbe de Jordan de classe C^1 dans $\mathbf{R}^2$. Alors $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$ possède exactement deux composantes connexes, l'une compacte et l'autre pas.

Théorème 2 (Green-Riemann, [Gou]). *Soit K un compact à bord de $\mathbf{R}^2$ et $Pdx + Qdy$ une forme différentielle de degré 1, de classe C^1 sur un ouvert contenant K, alors*

$$\int_{\partial K^+} (Pdx + Qdy) = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Application (Caclul d'aire). Si K est un compact à bord, on peut exprimer son aire $\mathcal{A} = \iint_K dxdy$ comme

$$\mathcal{A} = \int_{\partial K^+} xdy = -\int_{\partial K^+} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} r^2\, d\theta$$

Exemple (Aire de la boucle droite de la lemniscate de Bernoulli). C'est la courbe exprimée en polaires par $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$, avec $a > 0$. L'aire de la boucle droite vaut :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}$$

Application (Inégalité isopérimétrique). Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$ une courbe de Jordan continue par morceaux de longueur L enfermant une surface S. Alors $L^2 \geq 4\pi S$, avec égalité si et seulement si γ définit un cercle parcouru une fois.

2 Courbure

On considère un arc géométrique Γ C^k, $k \geq 2$, orienté et régulier, de représentation normale $\gamma = (I, f)$.

2.1 Définition, premières propriétés

On suppose ici $n = 3$, mais ceci reste valable en dimension 2, quitte à se plonger dans un espace plus grand.

Définition 6. La *courbure* de Γ au point d'abscisse curviligne s est le réel $c(s) = \|f''(s)\|$. Si $c(s) \neq 0$, son inverse est appelé le *rayon de courbure* de Γ en s, noté $R(s)$. Le point $p(s) = f(s) + R(s)f'(s)$ est appelé *centre de courbure* de Γ en s, et le cercle de contre $p(s)$ de rayon $R(s)$ *cercle osculateur* de Γ en s.

Remarque. L'arc est birégulier en s si et seulement si $c(s) \neq 0$ pour tout s ; le rayon de courbure est alors toujours défini.

Proposition 4. *Le vecteur $f'(t)$ est toujours orthogonal au vecteur $f''(t)$. Ainsi on a $c = \|f' \wedge f''\|$.*

Proposition 5. *Un arc C^2 régulier a une courbure identiquement nulle si et seulement si son support est inclus dans une droite.*

Proposition 6. *À un point birégulier, le cercle osculateur est le cercle approchant le mieux la courbe, dans le sens que si on considère une paramétrisation normale du cercle de courbure, elle aura le même développement limité à l'ordre 2 que f.*

Proposition 7 (Calcul pratique de la courbure)**.** *On suppose maintenant que l'on s'est donné (J, g) un représentant quelconque de l'arc géométrique Γ (i.e. $g = f \circ \varphi$). Alors la courbure est donnée par*

$$c(t) = \frac{\|g'(t) \wedge g''(t)\|}{\|g'(t)\|^3}$$

.

Exemple (Hélice circulaire, [RDO]). C'est l'arc défini en coordonnées cylindriques par $g(\theta) = au_r + b\theta u_z$. Sa courbure est donnée par $c(\theta) = \frac{a}{a^2+b^2}$. Si $b = 0$, on retrouve la courbure du cercle.

Exemple (Limaçon de Pascal, [BG]). C'est la courbe donnée en polaires par $\rho(\theta) = 1 + 2\cos\theta$. Sa courbure est $c(\theta) = \frac{9+6\cos\theta}{(5+4\cos\theta)^{3/2}}$.

2.2 Courbure algébrique en dimension 2, développées

On suppose ici $n = 2$, si bien qu'on peut identifier $\mathbf{R}^n$ à $\mathbf{C}$.

Définition 7. On appelle *courbure algébrique* de γ en s le réel $c(s)$ défini par $f''(s) = c(s)if'(s)$.

Remarque. La valeur absolue de la courbure algébrique est égale à la courbure classique. Plus précisément, $c = [f', f'']$.

Proposition 8. *Dans le plan, deux arcs géométriques ayant la même courbure algébrique sont identiques à isométrie près.*

Exemple. Dans le plan, les arcs de courbure constante non nulle sont les cercles. Ceci est faux en dimension supérieure (cf hélice circulaire).

Théorème 3 (des quatre sommets, [BG])**.** *Soit Γ un arc géométrique de Jordan convexe régulier de classe C^3. Alors Γ possède au moins quatre sommets, i.e. quatre points où la dérivée de la courbure s'annule.*

Proposition 9 (Calcul pratique de la courbure)**.** *Comme supra, soit (J, g) un représentant quelconque de l'arc géométrique Γ. Alors la courbure algébrique est donnée par*

$$c(t) = \frac{[g'(t), g''(t)]}{\|g'(t)\|^3}$$

.

Définition 8. L'arc géométrique donné par le lieu des centres de courbure est appelé *développée* de la courbe Γ.

Exemple. La développée de l'ellipse d'équation

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

est la transformée d'une *astroïde* par une affinité, elle est d'équation

$$\begin{cases} \zeta(t) = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t \\ \eta(t) - \frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$$

3 Courbes de l'espace : repère de Frénet et torsion

On se place dans l'espace euclidien de dimension 3.

Définition 9. On suppose que l'arc est birégulier en l'abscisse curviligne s. Alors les vecteurs $\tau(s) = f'(s)$, $\nu(s) = \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|}$ et $\beta(s) = \tau(s) \wedge \nu(s)$ sont appelés respectivement vecteurs *tangent, normal* et *binormal* de Γ en s. Ils forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$, et le repère $(f(s), \tau(s), \nu(s), \beta(s))$ est appelé le *repère de Frénet* de Γ en s.

Proposition 10. *Si l'arc est de classe C^3, le vecteur $\beta'(s)$ est toujours colinéaire au vecteur $\nu(s)$. La* torsion *en s est le réel $\gamma(s)$ tel que $\beta'(s) = \gamma(s)\nu(s)$.*

Proposition 11 (Formules de Serret-Frenet)**.** *On suppose que l'arc est de classe C^3. On a alors :*

$$\tau' = c\nu, \qquad \nu' = -c\tau - \gamma\beta, \qquad \beta' = \gamma\nu$$

Proposition 12. *Comme supra, soit (J, g) un représentant quelconque de l'arc géométrique birégulier Γ (i.e. $g = f \circ \varphi$). Alors :*

$$\tau = \frac{g'}{\|g'\|} \qquad \beta = \frac{g' \wedge g''}{\|g' \wedge g''\|} \qquad \nu = \beta \wedge \tau \qquad \gamma = -\frac{[g', g'', g''']}{\|g' \wedge g''\|^2}$$

Exemple. Reprenons l'exemple de l'hélice circulaire. Dans ce cas $\tau = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} u_\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} u_z$, $\nu = -u_r$, $\beta = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} u_\theta + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} u_z$ et $\gamma = \frac{-b}{a^2+b^2}$.

3.1 Équation intrinsèque

On cherche à étendre à l'espace le résultat d'unicité à courbure identique dans le plan.

Théorème 4. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, $\varphi \in C^1(I, \mathbf{R}_+^*)$ et $\psi \in C^0(I, \mathbf{R})$. Alors pour tout quadruplet $(s_0, M_0, U_0, V_0) \in I \times \mathbf{R}^3 \times (\mathbf{S}^2)^2$ tel que U_0 et V_0 soient orthogonaux, il existe un unique C^3-arc géométrique orienté birégulier admettant un représentant normal (I, f) dont la courbure est φ et la torsion ψ, et tel que $f(s_0) = M_0$, $f'(s_0) = U_0$ et $f''(s_0) = \|f''(s_0)\| V_0$. De plus, à partir d'une solution on obtient toutes les autres par déplacement.*

Plus précisément, l'ensemble des déplacements agit transitivement et simplement sur l'ensemble des arcs géométriques orientés solutions.

Remarque. La birégularité est essentielle : sinon la torsion n'existe pas, mais même avec une torsion prolongeable par continuité on peut trouver des courbes ayant même courbure et même torsion sans pour autant que l'une ne se déduise de l'autre par déplacement. Par exemple :

$$\begin{cases} t \mapsto (t, e^{-1/t}, 0) \text{ si } t > 0 \\ t \mapsto (t, 0, e^{1/t}) \text{ si } t < 0 \\ 0 \mapsto (0,0,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} t \mapsto (t, e^{-1/t}, 0) \text{ si } t > 0 \\ t \mapsto (t, e^{1/t}, 0) \text{ si } t > 0 \\ 0 \mapsto (0,0,0) \end{cases}$$

Exemple. Les courbes à courbures et torsion constantes et non nulles sont les hélices circulaires.

Références

[Aud] M. Audin, *Géométrie.*

[BG] M. Berger, B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.*

[DC] M. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces.*

[GT] S. Gonnord, N. Tosel, *Calcul différentiel*

[Gou] X. Gourdon, *Les maths en tête, analyse.*

[Laf] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles.*

[Lav] G. Laville, *Courbes et surfaces.*

[RDO] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, tome 5.*

[Rou] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

[ZQ] C. Zuily, H. Queffélec, *Analyse pour l'agrégation.*

Développements

- Classification des variétés de dim 1 [Laf] (+ 207, 217)
- Version faible du théorème de Jordan C^1 [GT] (+ 204, 217)
- Inégalité isopérimétrique [ZQ] et théorème des quatre sommets [BG] (+ 219, 246, 253)
- Équation intrinsèque [RDO] (+ 220, 221, 239 ?)