MEMOIRS
OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

Number 16

PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

by

ALEXANDER GROTHENDIECK

Published by the
American Mathematical Society
Providence, Rhode Island
1966

MEMOIRS
OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

Number 16

PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

by

ALEXANDER GROTHENDIECK

Published by the

American Mathematical Society
Providence, Rhode Island
1966

Fourth printing, 1966

Library of Congress Catalog Number 52–42839

Printed in the United States of America

Meiner Mutter, Hanka Grothendieck,
in Verehrung und Dankbarkeit gewidmet

Table des matières

INTRODUCTION [1]

I - OBJET DU TRAVAIL

Ce travail constitue une étude systématique du produit tensoriel, convenablement topologisé, de deux espaces vectoriels topologiques localement convexes (Chap.1), et d'une nouvelle classe remarquable d'espaces localement convexes, les espaces nucléaires, liée à cette notion (Chap.2). Ces recherches avaient pour origine d'éclaircir et de généraliser les propriétés très spéciales que semblaient posséder certains espaces de fonctions indéfiniment différentiables en vertu du "théorème des noyaux" de L. Schwartz (voir [23] et [24]). Ces mêmes propriétés se retrouvent, sous une forme différente, dans l'espace des fonctions holomorphes sur une variété holomorphe donnée, espace que j'ai étudié de façon très détaillée dans [10] (où j'en subordonne encore l'étude, un peu artificiellement, à la théorie de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur la variété). Mais la bonne formulation de la notion générale d' "espace nucléaire" correspondant à ces propriétés, était encore assez cachée (Chap.2, §2, définition 4). Et les nombreuses conséquences que l'on peut en tirer, et dont certaines sont nouvelles, même dans les classiques espaces de L. Schwartz, demandaient une technique assez fine, mise au point au Chap. 1. Il se trouve alors que tous les espaces du type ($\mathcal{M}$) qu'on rencontre usuellement en Analyse sont des espaces nucléaires (d'ailleurs, on prouve que les espaces nucléaires sont forcément du type ($\mathcal{M}$)), et les résultats généraux exposés ici leur sont donc applicables.

Une théorie intimement liée à la notion de produit tensoriel topologique est la théorie de Fredholm, dont une bonne compréhension n'est

---

1. Les numéros placés entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

plus possible sans cette notion [2]. Pour ne pas subordonner cette théorie à tout le mécanisme développé ici, nous avons préféré en donner ailleurs un exposé séparé et se suffisant à lui-même ([11]). Pour certains résultats fins du travail présent, relatifs à des propriétés de décroissance de la suite des valeurs propres d'un opérateur de Fredholm et certaines questions connexes (Chap.2, §1, et Chap.2, §2, n°4) je suis obligé de faire appel à quelques définitions et propositions de [11], mais l'essentiel de la théorie que nous exposons ici ne dépend pas de ces résultats (qui aident cependant pour une meilleure compréhension).

Ce travail est assez peu lié à celui de R. Schatten sur les produits tensoriels d'espaces de Banach [21]. Tandis que je mets l'accent principal sur les espaces localement convexes <u>généraux</u> et <u>une</u> définition précise du produit tensoriel topologique, Schatten étudie <u>toutes</u> les normes raisonnables sur un produit tensoriel de deux <u>espaces de Banach</u>, et n'obtient de véritables résultats (d'ailleurs fort beaux) que dans le cas des espaces de Hilbert.

Je donne succinctement au cours du texte quelques applications des résultats obtenus. Dans un article ultérieur, je donnerai une variante "vectorielle-topologique" du "théorème de Künneth" relatif au produit tensoriel de deux "modules à dérivation", avec une ou deux applications à la théorie de l'homologie et la théorie des faisceaux (voir, pour ces notions, le "Séminaire de Topologie Algébrique" de H. Cartan à l'Ecole Normale Supérieure 1948-1949, et 1950-1951). Un autre article donnera, relativement aux espaces de Banach, le développement systématique des

---

2. Cette liaison a été aperçue avant moi par A. F. <u>Ruston</u>, Direct Product of Banach spaces and linear fonctional equations, Proceedings of the London Math. Society (3), 1, 1951. Mon travail sur ce sujet avait été conçu indépendamment du sien, et en est assez différent.

idées effleurées au Chap.1, §4, n°6, avec diverses applications.

Je suis heureux de remercier ici M. J. Dieudonné et M. L. Schwartz, pour la stimulation constante que j'ai trouvée auprès d'eux, tant dans mes recherches que dans ma formation générale.

II - CONTENU, INDICATIONS DIVERSES

De peur de trop allonger cet article, je ne donnerai pas l'énumération, même sommaire, des résultats principaux. Le lecteur pourra consulter la table des matières, et parcourir l'énoncé des définitions et théorèmes de cet article. Suivant un usage commode qui commence à se répandre, les théorèmes groupent les résultats particulièrement importants ou offrant une difficulté particulière, les autres résultats sont inclus dans les propositions, corollaires, lemmes, remarques. Le numérotage des théorèmes, propositions, etc. d'une part, des §§ d'autre part, est repris du début avec le Chap.2. Dans chacun des deux chapitres, le numérotage se poursuit sans tenir compte de la séparation en paragraphes et en numéros.

Nous avons mis en "retrait" certaines parties du texte, de nature en général assez technique, qui pourraient être omises en première lecture (raffinements de propositions qui précédaient, exemples et contre-exemples questions ouvertes avec des indications diverses, etc.).

D'importantes questions ont dû être laissées sans réponse. Je les signale à mesure qu'elles se présentent ; la plus importante (équivalente au problème classique d'approximation des opérateurs compacts d'un espace de Banach dans un autre par des opérateurs de rang fini) fait l'objet du § 5 du Chap.1. Les autres sont résumées à la fin de ce travail.

III - NOTATIONS GÉNÉRALES

Les espaces vectoriels topologiques envisagés sont tous localement convexes, et implicitement supposés séparés sauf au n°1 du §1 Chap.1, sauf mention expresse du contraire. Le corps des scalaires est indifféremment la droite réelle $\mathbf{R}$ ou le corps des complexes $\mathbf{C}$. Certains résultats valent d'ailleurs (sans modification essentielle de la démonstration) pour des espaces vectoriels normés, ou munis d'une famille de semi-normes, sur un corps valué complet quelconque. Par espace quotient d'un espace localement convexe séparé E, nous entendrons un espace quotient par un sous-espace vectoriel fermé de E.

Nous suivons sans référence, les résultats et les notations les plus usuels de [1], [2], [7], et utilisons couramment (avec les références précises) les résultats et les définitions de [9]. Signalons seulement que nous suivons ce dernier travail, et non [7], dans l'emploi du mot réflexif (semi-réflexif dans la terminologie de [7]) et que nous nous écartons de la terminologie de [7], suivie dans [9], pour la définition des espaces $(\mathcal{LF})$ (voir plus bas, IV, 1). Un espace E est réflexif si $E = E''$, i.e. si ses parties bornées et faiblement fermées sont faiblement compactes, et E est complètement réflexif si de plus la topologie de E est la topologie du dual fort de E' fort, i.e. si E est réflexif et quasi-tonnelé (voir plus bas). Nous appelons espace $(\mathcal{M})$ un espace dont les parties bornées sont relativement compactes. De [9], nous empruntons surtout la notion d'espace $(\mathcal{DF})$, d'espace quasi-normable, et d'espace de Schwartz (loc. cité, §1 définition 1, §3 définition 4 et 5). Nous ne redéfinirons pas ici l'espace $(\mathcal{DF})$; rappelons seulement que le dual fort d'un espace du type $(\mathcal{F})$ est du type $(\mathcal{DF})$ et que le dual fort d'un espace du type $(\mathcal{DF})$ est du type $(\mathcal{F})$, enfin que tout espace normable est $(\mathcal{DF})$. L'espace E est dit quasi-normable si pour toute partie équicontinue convexe cerclée A dans E', il en existe une autre $B \supset A$ tel que sur A, la topologie induite par E' fort soit identique à celle induite par l'espace normé E'_B engendré par B (défini plus bas). Un espace qui est à la fois quasi-normable et du type $(\mathcal{M})$ est appelé espace de Schwartz ou espace (S). E est du type (S) si et seulement si pour toute partie équicontinue convexe cerclée $A \subset E'$ il en existe une autre $B \supset A$ tel que l'application identique $E'_A \to E'_B$ soit compacte, i.e. tel que A soit une partie relativement compacte de l'espace normé E'_B.

Espace quasi-complet. quasi-tonnelé - Nous appelerons, avec N. Bourbaki, espace quasi-complet tout espace localement convexe dont les parties bornées et fermées sont complètes ; espace quasi-tonnelé tout espace localement convexe tel que les parties fortement bornées de son dual soient équicontinues. (Rappelons [2] qu'on appelle tonnelé un espace tel que les parties faiblement bornées du dual soient équicontinues). Pour un espace quasi-complet, il revient donc au même de dire qu'il est tonnelé, ou quasi-tonnelé (car les parties fortement ou faiblement bornées du dual sont alors les mêmes - voir p. ex. [2] prop. 4 -).

Nous aurons enfin constamment besoin des diverses notations spéciales qui vont suivre, et auxquelles nous ne référerons plus.

1. Notations E_A, E_V, $\hat{E}_V$. - Soit E un espace localement convexe séparé, A une partie bornée convexe cerclée de E, on désigne par E_A l'espace normé obtenu en munissant l'espace vectoriel engendré par A de la norme $\|x\|_A = \operatorname{Inf}_{x \in \lambda A} |\lambda|$. Si A est fermé dans E, la boule unité de E_A est identique à A. Si A est complet dans E, il est facile de voir que E_A est complet ([2], page 9, lemme) donc un espace de Banach. En particulier si A est une partie équicontinue convexe cerclée et faiblement fermée de dual F' d'un espace localement convexe F, F'_A est un espace de Banach. Soit maintenant V un voisinage convexe cerclé de l'origine dans E; on note E_V l'espace normé obtenu en munissant le quotient E/N de E par le sous espace N des x tels que $\lambda x \in V$ pour tout scalaire λ, de la norme déduite de la semi-norme $\|x\|_V = \operatorname{Inf}_{x \in \lambda V} |\lambda|$ sur E. (Cette notation ne risque pas d'entraîner des confusions avec la notation précédente E_A. Car si A est à la fois borné et un voisinage de l'origine, les deux définitions données coïncident). Le dual de E_V s'identifie manifestement à E'_{V^o} (où

V^o est le polaire de V dans E'). E_V n'est pas complet en général, même si E l'est ; son complété sera noté $\widehat{E}_V$.

2. Applications linéaires bornées. - Soient E et F deux espaces localement convexes. Une application linéaire de E dans F est dite bornée (resp. compacte, faiblement compacte) si elle applique un voisinage convenable V de l'origine dans une partie A de F qui est bornée (resp. compacte, faiblement compacte). Supposant V et A convexes cerclés (ce qui est loisible), cette application définit alors une application linéaire continue de l'espace normé E_V (ou même de $\widehat{E}_V$ si A est complet) dans l'espace normé F_A. - Un ensemble M d'applications linéaires de E dans F est dit équiborné si les $u \in M$ sont bornées, et si le voisinage V et le borné A ci-dessus peuvent être pris indépendants des $u \in M$.

3. Dual topologique, bidual. - Soit E un espace localement convexe; on désigne son dual par E', et quand E' est considéré comme espace localement convexe, il sera supposé muni, sauf indication du contraire, de sa topologie forte, i.e. la topologie de la convergence bornée (i.e. la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E). Si on veut le préciser encore dans la notation on notera le dual fort par E'_b. E'_s et E'_τ désignent respectivement E' muni de la topologie faible $\sigma(E',E)$ et de la topologie de Mackey $\tau(E',E)$. Plus généralement, si $\mathfrak{S}$ est un ensemble quelconque de parties bornées de E, $E'_{\mathfrak{S}}$ désignera E' muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence.

On notera E_s, E_τ l'espace E muni respectivement de $\sigma(E,E')$, ou de $\tau(E,E')$.

Le dual de E'_b , ou bidual de E, noté E'', sera toujours, sauf indication expresse du contraire, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'. Cette topologie induit toujours sur E (supposé séparé) la topologie donnée de E (contrairement à ce qui se passe en général pour la topologie de dual fort de E'_b sur E'', envisagée surtout dans [7]).

4. Espaces d'applications linéaires. - Soient E et F deux espaces localement convexes. L(E,F) désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Si $\mathfrak{S}$ est un ensemble de parties bornées de E, on désigne par $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ l'espace L(E,F) muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence. Quand $\mathfrak{S}$ est respectivement l'ensemble des parties réduites à un point, l'ensemble des parties précompactes ou l'ensemble de toutes les parties bornées de E, on prendra les notations $L_s(E,F)$, $L_c(E,F)$ et $L_b(E,F)$. Enfin pour l'espace L(E',F) (et son sous-espace $L(E'_s,F_s) = L(E'_\tau,F)$), il y a lieu souvent d'introduire la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'. Muni de cette topologie, nous désignerons cet espace par $L_e(E',F)$ (resp. par $L_e(E'_\tau,F)$).

Signalons que $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est complet si et seulement si $E'_{\mathfrak{S}}$ et F sont complets, pourvu que la topologie de E soit $\tau(E,E')$ (nous supposons en plus $\bigcup\mathfrak{S} = E$, et F séparé comme toujours). Pour la nécessité, on note que $E'_{\mathfrak{S}}$ et F sont isomorphes à des sous-espaces vectoriels fermés de $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ (car pour un élément non nul donné y dans F resp. x' dans E', l'application $x' \to x' \otimes y$ resp. $y \to x' \otimes y$ de $E'_{\mathfrak{S}}$ resp. F dans $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est un isomorphisme sur un sous-espace vectoriel fermé, comme on vérifie immédiatement). Pour la suffisance, comme l'espace de toutes les applications de E dans l'espace complet F est complet pour la $\mathfrak{S}$-convergence, il suffit de montrer que $L_{\mathfrak{S}}(E,F)$ en est un sous-espace fermé, i.e. que toute application u de E dans F qui est limite pour la $\mathfrak{S}$-convergence d'applications linéaires continues, est linéaire et continue. Elle est linéaire de toutes façons, et pour vérifier qu'elle est continue, il suffit de vérifier la continuité faible, i.e. que pour tout $y' \in F'$, la forme $y' \circ u$ sur E est continue. Or il est immédiat que cette dernière est limite pour la $\mathfrak{S}$-convergence de formes linéaires $y' \circ u_i$ continues, donc continue puisque $E'_{\mathfrak{S}}$ est complet.

5. Espaces d'applications bilinéaires. - Soient E, F, G, trois espaces localement convexes. On a défini dans [2] la notion d'application bilinéaire séparément continue de $E \times F$ dans G. Plus généralement, un ensemble M d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G sera dit séparément équicontinu si pour tout $x \in E$, l'ensemble des applications $y \to u(x,y)$ de F dans G, où u parcourt M, est une partie équicontinue de L(F,G), et si pour tout $y \in F$ l'ensemble des applications $x \to u(x,y)$ de E dans G, où u parcourt M, est une partie équicontinue de L(E,G). Nous désignons par $\mathcal{B}(E,F;G)$ l'espace des applications bilinéaires séparément continues de $E \times F$ dans G, par B(E,F;G) le sous-espace formé des applications bilinéaires continues. Si G est le corps des scalaires, on note simplement $\mathcal{B}(E,F)$ et B(E,F).- Soit $\mathfrak{S}_1$ resp. $\mathfrak{S}_2$ un ensemble de parties bornées de E resp. F, on peut considérer sur $\mathcal{B}(E,F;G)$ (et sur son sous-espace B(E,F;G)) la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathfrak{S}_1$ et $B \in \mathfrak{S}_2$, appelée encore topologie de la $\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2$ - convergence (voir [2]). Elle est toujours localement convexe sur B(E,F;G), et elle l'est encore sur $\mathcal{B}(E,F;G)$ si par exemple les $A \in \mathfrak{S}_1$, ont une enveloppe convexe cerclée fermée complète, plus généralement si les parties faiblement bornées du dual de E sont bornées pour la topologie de la $\mathfrak{S}_1$-convergence. Si $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont chacun l'ensemble des parties précompactes de E, F, resp. l'ensemble de toutes les parties bornées de E, F, cette topologie prend le nom de topologie de la convergence bicompacte, resp. bibornée, et l'espace $\mathcal{B}(E,F,G)$ ainsi topologisé est noté $\mathcal{B}_c(E,F;G)$, resp. $\mathcal{B}_b(E,F;G)$. Dans le cas d'un espace $\mathcal{B}(E',F';G)$ (E' et F' étant donc les duals forts de E et F), il y a lieu souvent d'introduire la topologie de la convergence uniforme sur les produits de deux parties équicontinues de E' et F' respectivement ; cette topologie est appelée topologie de la convergence bi-équicontinue (elle est toujours

localement convexe), et muni de cette topologie, notre espace sera noté $\mathcal{B}_e(E',F';G)$. Notations analogues pour topologiser le sous-espace $B(E,F;G)$ de $\mathcal{B}(E,F;G)$ et le sous-espace $\mathcal{B}(E'_s, F'_s; G)$ de $\mathcal{B}(E',F';G)$. Quand G est le corps des scalaires, on écrit plus simplement $\mathcal{B}_b(E,F)$, $B_b(E,F)$, $\mathcal{B}_e(E',F')$, $B_e(E',F')$ etc.

6. <u>Relations entre formes bilinéaires et applications linéaires</u>. - Rappelons que si E et F sont deux ELC, l'espace $\mathcal{B}(E,F)$ des formes bilinéaires séparément continues u sur $E \times F$ est canoniquement isomorphe à l'espace $L(E,F'_s)$ des applications linéaires faiblement continues v de E dans F, à v correspondant la forme bilinéaire $(x,y) \to \langle y, vx \rangle$, et à u l'application linéaire faisant correspondre à tout x dans E la forme $y \to u(x,y)$ sur F. Nous noterons $x \to u.x$ cette application linéaire de E dans F', et $y \to {}^t u.y$ l'application linéaire de F dans E' définie de façon analogue, et qui n'est autre que la transposée de l'application précédente. La forme bilinéaire u est continue si et seulement si l'application $x \to u.x$ transforme un voisinage convenable de 0 dans E en une partie équicontinue de F'. Notons aussi que dans l'isomorphisme naturel $\mathcal{B}(E,F) \approx L(E,F'_s)$, à la topologie de la $\mathfrak{S}_1$- $\mathfrak{S}_2$-convergence sur le premier espace correspond la topologie sur le deuxième induite par l'espace $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}_1}(E,F'_{\mathfrak{S}_2})$ de toutes les applications de E dans $F'_{\mathfrak{S}_2}$, muni de la topologie de la $\mathfrak{S}_1$-convergence. En particulier, l'espace $\mathcal{B}_e(E'_s,F'_s)$ (voir n°5 précédent) est isomorphe canoniquement, comme espace vectoriel topologique, à l'espace $L_e(E'_\tau,F)$ (voir n°4 précédent). Par suite (même référence) $\mathcal{B}_e(E'_s,F'_s)$ <u>est complet si et seulement si</u> E <u>et</u> F <u>le sont</u>.

IV - COMPLÉMENTS SUR LES LIMITES INDUCTIVES

1. <u>Généralités</u>. - Les espaces étudiés dans [7] sous le nom d'espaces $(\mathcal{LF})$ sont des cas particuliers d'une catégorie plus fréquente d'espaces,

dont nous résumons ici les principales propriétés connues (et qui d'ailleurs vont toutes nous servir dans la suite). Soit E un espace vectoriel, (E_i) une famille d'espaces localement convexes, et pour tout indice i soit u_i une application linéaire de E_i dans E. Il nous sera commode de supposer que E est engendré par la réunion des $u_i(E_i)$, bien que ce ne soit pas essentiel pour la suite. On appelle topologie <u>limite inductive</u> des topologies des E_i par les applications u_i, la plus fine des topologies localement convexes sur E qui rende continues les applications u_i des E_i dans E. Muni de cette topologie, E s'appelle limite inductive des E_i (par les applications u_i). Un système fondamental de voisinage de l'origine dans E est formé des ensembles <u>convexes cerclés</u> V tels que $\overset{-1}{u_i}(V)$ soit un voisinage de l'origine dans E_i pour tout i.- Les E_i peuvent être des sous-espaces vectoriels de E et les u_i les applications identiques. Le plus souvent, la famille des E_i est alors filtrante croissante (E est donc réunion des E_i) et si $E_i \subset E_j$, E_j induit sur E_i une topologie moins fine que la topologie donnée de E_i ; mais tout cela n'a rien d'obligatoire (et on peut d'ailleurs facilement se ramener toujours à ce cas). Si cependant les conditions précédentes sont vérifiées, et si de plus, pour $E_i \subset E_j$, E_i est fermé dans E_j et la topologie de E_i est <u>identique</u> à celle induite par E_j, on dit que E est limite <u>inductive stricte</u> des E_i, et on retrouve les espaces considérés dans [7].

Les faits suivants sont encore triviaux : une application linéaire u de la limite inductive E dans un espace localement convexe F est <u>continue</u> si et seulement si pour tout i, $u \circ u_i$ est une application continue de E_i dans F. Si les E_i sont <u>tonnelés</u> (resp. <u>quasi tonnelés</u>, <u>bornologiques</u>) alors leur limite inductive E l'est aussi.- En revanche, même si E est une limite inductive séparée d'une <u>suite</u> croissante d'espaces de Banach ou d'espaces du type $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{M})$, E peut ne pas être complet, et une partie bornée de E peut ne pas être image d'une partie bornée d'un

E_i (voir [17] pour le cas où les E_i sont des Banachs, et [9] § 2, ou le Chap.2 § 4 prop.14 de ce travail dans le cas où les E_i sont du type $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{M})$). C'est là la difficulté principale pour les espaces limites inductives [3]. Cependant, si E est la limite inductive <u>stricte</u> d'une suite d'espaces localement convexes E_i, E est complet si les E_i le sont, E induit sur chaque E_i la topologie donnée de E_i, et toute partie bornée de E est contenue dans un des espaces E_i (les démonstrations données dans [7] subsistent en effet sans modification). A part ce cas bien particulier hélas, je ne connais que deux faits positifs de quelque généralité, relatifs aux parties bornées de la limite inductive d'une suite d'espaces $(\mathcal{F})$, savoir : le "théorème A" ci-dessous et ses corollaires, et le résultat donné dans [9], Th.9, relatif aux limites inductives de suites d'espaces $(\mathcal{DF})$.

Contrairement à la terminologie de [7] et [9], nous appelons ici <u>espace</u> $(\mathcal{LF})$ tout espace localement convexe qui est limite inductive d'une <u>suite</u> d'espaces E_i du type $(\mathcal{F})$. On peut alors manifestement supposer que les E_i forment une suite <u>croissante</u> de sous espaces vectoriels de E, E_{i+1} induisant sur E_i une topologie moins fine que la topologie donnée de E_i. Une telle suite sera encore appelée une <u>suite de définition</u> de la limite inductive E. Notons qu'un espace <u>quotient</u> d'un espace $(\mathcal{LF})$ est un espace $(\mathcal{LF})$.

2. <u>Sommes directes topologiques</u>. - Soit (E_i) une famille d'espaces localement convexes, $E = \sum_i E_i$ leur somme directe. Les E_i s'identifient à

---

3. Pour les espaces définis comme "limites projectives" (i.e. dont la topologie est définie comme la moins fine des topologies rendant continues des applications linéaires données u_i de E dans des espaces localement convexes E_i donnés), les difficultés sont pratiquement exactement inverses.

des sous-espaces vectoriels de E, et on peut considérer sur E la topologie limite inductive correspondante. Muni de cette topologie, E prend le nom de somme directe topologique des espaces E_i. Il est immédiat ici que E <u>induit sur chaque</u> E_i <u>la topologie donnée de</u> E_i, et on prouve aussi facilement que <u>toute partie bornée de</u> E <u>est contenue dans la somme directe d'un nombre fini des</u> E_i. Il en résulte aussitôt que <u>le dual fort de la somme directe topologique</u> $E = \sum_i E_i$ <u>s'identifie au produit vectoriel-topologique des duals forts</u> E'_i. Enfin, <u>pour que</u> E <u>soit complet</u>, <u>il faut et il suffit que les</u> E_i <u>le soient</u>. La nécessité est évidente, car les E_i s'identifient à des sous-espaces vectoriels <u>fermés</u> de E. Pour la suffisance, il suffit de montrer que toute forme linéaire f sur le dual $E' = \prod_i E'_i$, dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues, est dans E (voir [12]). La topologie faible de E' est manifestement le produit des topologies faibles des E'_i, et les parties équicontinues de E' sont celles contenues dans un ensemble de la forme $\prod_i A_i$, où, pour tout i, A_i est une partie équicontinue de E'_i. On prouve d'abord facilement par l'absurde que f s'annule sur tous les espaces facteurs sauf un nombre fini au plus, d'où suit aussitôt que la restriction de f à $\sum_i E'_i$ provient d'un élément de E. Puis on achève en remarquant que tout élément de $E' = \prod_i E'_i$ est contenu dans l'adhérence faible d'une partie équicontinue, contenue dans la somme directe des E'_i.

Soit maintenant E une limite inductive générale d'une famille (E_i) d'espaces localement convexes par des applications linéaires u_i. Il existe alors une application linéaire continue naturelle $u((x_i)) = \sum_i x_i$ de la somme directe topologique $E_o = \sum_i E_i$ <u>sur</u> E, et si E est séparé il résulte aussitôt des définitions que u est un homomorphisme topologique de E_o sur E, de sorte que la <u>limite inductive</u> E <u>est isomorphe à un espace quotient de la somme directe topologique</u> $E_o = \sum_i E_i$. Cela permet de ramener fréquemment les propriétés des limites inductives générales aux propriétés des sommes directes et des quotients. C'est ainsi qu'on prouve par exemple que si E est la limite inductive d'une suite d'espaces E_i qui sont des espaces de Schwartz (resp. des espaces quasi-normables - voir [9], § 3, définitions 4 et 5) alors E l'est aussi.

3. Exemples. - En plus des exemples de limites inductives strictes envisagés dans [7], notons les exemples suivants.

a) Si E est un espace bornologique, il est limite inductive d'une famille d'espaces normables (et réciproquement, puisque un espace normable est bornologique). En effet, pour toute partie bornée convexe cerclée A de E, on peut considérer l'application identique de l'espace normé E_A dans E, et dire que E est bornologique signifie précisément, en vertu des définitions, que E est limite inductive des E_A.

b) En particulier, le dual fort d'un espace $(\mathcal{F})$ distingué ([7] p.78) est limite inductive d'une suite d'espaces de Banach (et réciproquement) car on sait qu'un espace du type $(\mathcal{F})$ est distingué si et seulement si son dual fort est bornologique ([9], §1, th.7).

c) L'espace L des applications linéaires bornées (voir III, 2) d'un espace E dans un espace F, où E et F sont du type $(\mathcal{F})$, peut être considéré comme un espace $(\mathcal{LF})$, en prenant un système fondamental (V_i) de voisinages convexes cerclés de 0 dans E, en désignant pour tout i par L_i l'espace $L_b(E_{V_i}, F)$, et en considérant L comme limite inductive des L_i. De même l'espace des applications linéaires compactes de E dans F peut être considéré comme un espace $(\mathcal{LF})$. Ces deux espaces $(\mathcal{LF})$ ne sont en général pas complets (Chap.2, § 4, prop.14, 2°).

d) Soient E et F deux espaces du type $(\mathcal{F})$, considérons l'espace $L_b(E,F)$. Sous des conditions fréquentes, que nous ne détaillerons pas, le dual de cet espace est du type $(\mathcal{LF})$. Nous en verrons par exemple des cas particuliers au Chap.2, §4, n°1, lemme 9 et corollaire du th.14.

Nous en déduirons, au Chap.2, §4, n°4, que les duals des espaces $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$ de L. Schwartz [22] sont des espaces du type $(\mathcal{LF})$ (d'ailleurs complets).

4. Propriétés spéciales des espaces $(\mathcal{LF})$. - (voir définition des espaces $(\mathcal{LF})$ fin du n°1). Les propriétés en vue découlent du théorème général suivant, qui a été inspiré par le th.1 de [7] :

THÉORÈME A. - *Soit* E *un espace localement convexe séparé*, F *un espace du type* $(\mathcal{F})$, (F_i) *une suite d'espaces du type* $(\mathcal{F})$, *soit* u *une application linéaire continue de* F *dans* E, *et pour tout* i *soit* u_i *une application linéaire continue de* F_i *dans* E. *Supposons* $u(F) \subset \bigcup_i u_i(F_i)$. *Alors il existe un indice* i *tel que* $u(F) \subset u_i(F_i)$, *et si alors* u_i *est biunivoque, il existe une application linéaire continue* v *de* F *dans* F_i *telle que l'on ait* $u = u_i \circ v$.

Démonstration.- Pour tout i, soit H_i le sous-espace de $F \times F_i$ formé des couples (x,y) tels que $ux = u_i y$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace produit $F \times F_i$, donc un espace du type $(\mathcal{F})$. Soit p_i l'opérateur de projection de l'espace $F \times F_i$ sur le facteur F. $p_i(H_i)$ est l'ensemble des $x \in F$ tels que $u(x) \in u_i(F_i)$. L'hypothèse signifie que $F = \bigcup_i p_i(H_i)$; il en résulte que l'un au moins des espaces $p_i(H_i)$ est non maigre, donc, d'après un célèbre théorème de Banach ([1], page 38, th.3) que p_i applique H_i *sur* F, c'est-à-dire $u(F) \subset u_i(F_i)$. Supposons u_i biunivoque, alors pour tout $x \in F$, il existe un seul $y \in F_i$ tel que $u_i y = ux$, i.e. tel que $(x,y) \in H_i$. Cet y dépend évidemment linéairement de x, soit $y = vx$, et l'application $x \to vx$ de F dans F_i est continue d'après le théorème du "graphe fermé", car son graphe H_i est fermé. Le théorème A est démontré.

COROLLAIRE 1. - *Soit* E *un espace localement convexe*, (F_i) *une suite d'espaces du type* $(\mathcal{F})$, u_i *une application linéaire continue de* F_i *dans* E. *Soit* A *une partie bornée convexe cerclée et complète de* E, *contenue* dans la réunion des espaces $u_i(F_i)$. Alors A est contenu dans un des $u_i(F_i)$ et si alors u_i est biunivoque, A est l'image par u_i d'une partie bornée de F_i.

Il suffit d'appliquer le th. A, à l'espace $F = E_A$. - En particulier

COROLLAIRE 2. - Soit E un espace $(\mathcal{LF})$, limite inductive d'une suite croissante de sous-espaces vectoriels E_i du type $(\mathcal{F})$. Alors toute partie bornée convexe cerclée complète de E est une partie bornée d'un des espaces E_i.

COROLLAIRE 3. - Soit E un espace du type $(\mathcal{LF})$. Alors deux suites de définition (E_i) et (F_j) de E sont toujours cofinales (i.e. pour tout i, il existe j tel que $E_i \subset F_j$ et $F_i \subset E_j$).

Du théorème A, on tire une généralisation étendue du "théorème des homomorphismes" et du "théorème du graphe fermé" de Banach. Nous aurons à envisager des espaces localement convexes qui sont limite inductive d'une famille (non nécessairement dénombrable) d'espaces de Banach, nous les appellerons, pour abréger, espaces du type (β). Ainsi, tout espace bornologique et quasi complet est du type (β) (voir 3;, exemple a)) - en particulier un espace $(\mathcal{F})$ est du type (β). Toute limite inductive d'une suite d'espaces (β) est du type (β), en particulier les espaces $(\mathcal{LF})$ sont du type (β). Ceci posé :

THÉORÈME B. - Soient E et F deux espaces localement convexes et séparés, on suppose que E a une topologie d'espace $(\mathcal{LF})$, ou une topologie moins fine qu'une topologie T_0 d'espace $(\mathcal{LF})$, et que F est du type (β). Alors :

1. Toute application linéaire continue de E sur F est un homomorphisme topologique.

2. Pour qu'une application linéaire u de F dans E soit continue (il faut et) il suffit que son graphe soit fermé, et même qu'il n'existe pas

<u>de suite</u> (y_i) <u>dans</u> F <u>tendant vers zéro</u>, <u>telle que la suite</u> (uy_i) <u>tende vers une limite non nulle dans un espace</u> E_n (où (E_n) est une suite de définition de E pour T_o).

Notons que l'hypothèse sur E signifie qu'il existe une suite d'espaces E_i du type $(\mathcal{F})$ et d'applications linéaires continues u_i de E_i dans E, telles que $E = \bigcup\limits_i u_i(E_i)$. D'ailleurs, on est ramené immédiatement au cas où la topologie de E est identique à la topologie T_o, et de plus, dans 1., on peut supposer que u est biunivoque (car un espace quotient d'un espace du type $(\mathcal{LF})$ est encore du type $(\mathcal{LF})$. Pour prouver dans ce cas 1., il suffit de prouver que $\overset{-1}{u}$ est continue, donc, puisque F est du type (β), que pour toute application linéaire continue v d'un espace de Banach G dans F, $\overset{-1}{u} \circ v$ est application continue. Introduisant une suite de définition (E_i) de E et les applications u_i restrictions de u aux E_i, notre assertion résulte alors immédiatement du théorème A, puisque $F = \bigcup\limits_i u_i\,(E_i)$. - Dans l'énoncé 2., pour prouver que u est continue, on est aussitôt ramené au cas où F est un espace de Banach. Soit H le sous-espace vectoriel de $F \times E$ graphe de u ; la plus faible des deux hypothèses envisagées signifie que l'intersection H_i de $F \times E_i$ avec H est un sous-espace vectoriel <u>fermé</u> de $F \times E_i$. Il en résulte que H, réunion de la suite des espaces H_i munis de topologies d'espace $(\mathcal{F})$ plus fines que la topologie induite par H, satisfait à l'hypothèse postulée sur E pour l'énoncé 1. Donc la projection de H sur F est un homomorphisme topologique, donc son inverse v est continue, donc aussi l'application u, obtenue en effet en composant v avec la projection de H sur E. - Le th. B, dans le cas de deux espaces $(\mathcal{LF})$ au sens strict, est dû à Dieudonné - Schwartz [7], et a été démontré pour deux espaces $(\mathcal{LF})$ quelconques par G. Köthe.

Il semble plausible que dans l'énoncé du théorème B, des hypothèses beaucoup plus larges sur E que celles envisagées doivent être permises, et que la catégorie des espaces E admissibles dans cet énoncé comprenne, en plus des espaces de Banach, tous les espaces que l'on peut obtenir à partir des espaces de Banach, par un nombre fini (ou même transfini) d'opérations du type : produits vectoriels topologiques ou sommes directes topologiques de familles dénombrables d'espaces localement convexes, passage à un sous-espace vectoriel fermé ou à un espace quotient séparé (ce qui redonnerait les espaces $(\mathcal{F})$ comme sous-espaces de produits topologiques de suites d'espaces de Banach, donc les espaces $(\mathcal{LF})$ comme quotients de sommes directes de suites d'espace du type $(\mathcal{F})$) - et peut-être d'autres opérations usuelles encore. Mais j'ignore encore si cette conjecture est vérifiée même pour un produit topologique d'une suite d'espaces $(\mathcal{DF})$ et ses sous-espaces vectoriels fermés, par exemple pour l'espace de distributions $(\mathcal{D}')$ ([22], t.1).

V - NOTATIONS ET RAPPELS POUR CERTAINS ESPACES SPÉCIAUX

Notations générales. - Soit M un espace topologique, nous désignons par $\mathcal{C}^{\infty}(M)$ l'espace de Banach des fonctions scalaires continues et bornées sur M, muni de la norme uniforme, par $\mathcal{C}_0(M)$ le sous-espace du précédent formé des fonctions "nulles à l'infini" (i.e. qui tendent vers zéro suivant le filtre des complémentaires des parties compactes, quand M est non compact), par $\mathcal{C}(M)$ l'espace de toutes les fonctions continues sur M, muni de la topologie de la convergence compacte. Si M est localement compact, le dual de $\mathcal{C}_0(M)$, ou espace des mesures bornées sur M, est noté $\mathcal{M}^1(M)$, $\mathcal{M}(M)$ est l'espace de toutes les mesures sur M. Si M est compact, les espaces $\mathcal{C}(M)$, $\mathcal{C}_0(M)$ et $\mathcal{C}^{\infty}(M)$ sont identiques, ainsi que les espaces $\mathcal{M}(M)$ et $\mathcal{M}^1(M)$. - Si μ est une mesure sur l'espace localement compact M, on note $L^p(\mu)$ (pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$) l'espace L^p construit sur μ, et si aucune confusion n'est à craindre, nous le notons simplement L^p. - Si I est un ensemble d'indices quelconque, on peut considérer I comme un espace localement compact discret, et considérer sur I la mesure qui, à chaque point de I, attache la masse + 1. Alors les espaces L^p correspondants sont notés simplement $\ell^p(I)$ (espace des familles de scalaires de puissance p.ème sommable sur l'ensembles d'indices I), et l'espace $\mathcal{C}_0(I)$ est noté ici $c_0(I)$ (espace des familles de scalaires sur I, tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies). Ici on aura $\mathcal{C}^\infty(I) = \ell^\infty(I)$, $\mathcal{M}^1(I) = \ell^1(I)$. Si I est l'ensemble des entiers $\geqslant 0$, on retrouve les classiques espaces ℓ^p, c_0. Rappelons que le dual de c_0 est ℓ^1, et que le dual de ℓ^1 est ℓ^∞.

Mesurabilité, égalité p. p. - Dans toute la suite de ce n°, M désigne un espace localement compact muni d'une mesure $\mu \geqslant 0$. Une application f de M dans un espace topologique E est dite mesurable, si elle satisfait à la condition de Lusin : Pour toute partie compacte $K \subset M$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_1 \subset K$ tel que $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de f à K_1 soit continue. Un ensemble A de fonctions scalaires sur M est dit équimesurable, si pour tout compact $K \subset M$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_1 \subset K$ et un ensemble A_1 uniformément borné et équicontinu de fonctions scalaires sur K_1, tels que $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$ et que toute $f \in A$ est presque partout égale sur K_1 à une $f_1 \in A_1$. Cette notion ne dépend manifestement que de l'ensemble des classes de fonctions (modulo les fonctions égales localement presque partout) définies par les fonctions de A, de sorte qu'on peut aussi parler d'un ensemble équimesurable de classes de fonctions. L'utilité de la notion d'ensemble équimesurable de fonctions apparaîtra au Chap.1, §2, n°2.

Soit E un espace localement convexe. Une application f de M dans E est dite scalairement mesurable (resp. scalairement sommable, ou scalairement essentiellement bornée, etc.) si pour tout $x' \in E'$, la fonction scalaire $t \rightarrow \langle f(t), x' \rangle$ est mesurable (resp. sommable, ou essentiellement bornée, etc.). Deux applications f et g de M dans E sont dites

<u>scalairement égales presque partout</u> (resp. <u>scalairement égales localement presque partout</u>) si pour tout $x' \in E'$, les fonctions $t \to \langle f(t), x' \rangle$ et $t \to \langle g(t), x' \rangle$ sont égales p. p. (resp. égales loc. p. p.). <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont faiblement continues et égales scalairement localement presque partout, elles coïncident sur le support de</u> μ, comme on voit aussitôt par passage aux composantes scalaires. Il en résulte facilement que <u>si</u> f <u>et</u> g <u>sont mesurables et égales scalairement localement presque partout, elles sont égales loc. p. p.</u>

Voici deux cas importants où une fonction scalairement mesurable est mesurable, dûs à Pettis : <u>Toute application scalairement mesurable de</u> M <u>dans un espace</u> E <u>de type</u> ($\mathcal{F}$) <u>et séparable est mesurable</u>. <u>Si</u> E <u>est un espace de Banach dont le dual fort est séparable</u>, <u>alors toute application scalairement mesurable de</u> M <u>dans</u> E'_s <u>est fortement mesurable</u>. Indiquons par exemple la démonstration de la première assertion (la seconde s'y ramène d'ailleurs aisément). On se ramène d'abord aussitôt au cas où M est compact, E un espace de Banach. E étant séparable, on sait qu'il existe alors une suite faiblement dense (x'_i) dans la boule unité de E', d'où résulte que $\|f(t)\| = \operatorname{Sup}_i |\langle f(t), x'_i \rangle|$ est une fonction mesurable de t. Appliquant ceci, pour tout $x \in E$, à la fonction $f(t) - x$, on trouve que $\|f(t) - x\|$ est une fonction mesurable de t. Soit alors (x_i) une suite dense dans E, donnons nous $\varepsilon > 0$. Alors il existe pour tout i un compact $K_i \subset M$ tel que $\mu(\complement K_i) \leqslant 2^{-i}\varepsilon$, et que la restriction à K_i de la fonction $\|f(t) - x_i\|$ soit continue. Soit $K = \bigcap_i K_i$, on a $\mu(\complement K) \leqslant \varepsilon$, et la restriction de f à K est manifestement continue.

<u>Intégrales faibles</u>. - Soit f une application scalairement sommable de M dans l'espace localement convexe E, alors pour $x' \in E'$ variable, l'intégrale $\int \langle f(t), x' \rangle \, d\mu(t)$ est une forme linéaire sur E', donc un élément du complété faible $\hat{E}$ de E, élément appelé <u>intégrale faible</u> de f et noté $\int f d\mu$ ou $\int f(t) d\mu(t)$. D'ailleurs, le produit de f par toute

$\varphi \in L^{\infty}(\mu)$ est encore scalairement sommable, d'où pour toute $\varphi \in L^{\infty}(\mu)$ une intégrale faible $\int \varphi f d\mu$; f définit donc une application linéaire naturelle $\varphi \rightarrow \int \varphi f d\mu$ de $L^{\infty}(\mu)$ dans $\hat{E}$; d'ailleurs ce n'est autre par définition que l'application transposée de l'application $x' \rightarrow f_{x'}$ de E' dans $L^1(\mu)$ qui, à toute $x' \in E'$, associe la classe $f_{x'}$ dans $L^1(\mu)$ de la fonction $t \rightarrow \langle f(t), x' \rangle$. Il est évident que deux applications scalairement sommables f et g de M dans E définissent la même application linéaire de $L^{\infty}(\mu)$ si et seulement si f et g sont scalairement localement presque partout égales (d'où l'intérêt de cette relation d'équivalence).

Si μ est bornée, $\|\mu\|_1 \leqslant 1$, et si f est une application scalairement sommable de M dans E, alors $\int f d\mu$ appartient à l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée de f(M) dans $\hat{E}$ (et à son enveloppe convexe faiblement fermée dans $\hat{E}$ si μ est positive de masse égale à 1), comme il résulte facilement du th. de Hahn-Banach. En particulier, <u>si</u> μ <u>est une mesure bornée</u>, <u>et si l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée dans</u> E <u>de</u> f(M) <u>est faiblement compacte</u>, <u>alors</u> $\int f d\mu \in E$; on aura donc aussi, plus généralement, $\int \varphi f d\mu \in E$ pour toute $\varphi \in L^{\infty}(\mu)$. Voici un autre cas important où par intégration faible on ne sort pas de l'espace de départ : <u>Si</u> E <u>est le dual faible</u> F'_s <u>d'un espace</u> F <u>du type</u> ($\mathcal{F}$), f <u>une application scalairement sommable de</u> M <u>dans</u> $E = F'_s$, <u>on a</u> $\int f d\mu \in E$. Ce résultat, dû à Dunford-Gelfand, est une application facile du théorème du graphe fermé: il suffit de prouver en effet que l'application $x \rightarrow f_x$ de E dans $L^1(\mu)$ définie par f est continue.

Si f est une application scalairement essentiellement bornée de M dans E, alors pour toute $\varphi \in L^1(\mu)$, φf est scalairement sommable, d'où une intégrale faible $\int \varphi f d\mu \in \hat{E}$, donc une application linéaire de $L^1(\mu)$ dans $\hat{E}$. Si la mesure μ est bornée, et si l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée A de f(M) dans E est faiblement compacte, on a même $\int \varphi f d\mu \in E$ pour tout $\varphi \in L^1(\mu)$ d'après ce qui précède, et de façon précise

$\varphi \to \int \varphi f d\mu$ est une application de $L^1(\mu)$ dans E_A de norme $\leqslant \|\mu\|_1$. - Supposons toujours μ bornée, d'où $L^\infty(\mu) \subset L^1(\mu)$, soit f une application scalairement sommable de M dans E, et supposons que l'application $\varphi \to \int \varphi f d\mu$ de $L^\infty(\mu)$ dans $\hat{E}$ applique le premier espace dans E, et soit continue pour la topologie induite par $L^1(\mu)$; c'est-à-dire, si E est complet, l'application précédente peut se prolonger en une application linéaire continue $\varphi \to \alpha.\varphi$ de $L^1(\mu)$ dans E. <u>Alors</u> f <u>est scalairement essentiellement bornée</u>, <u>et on a</u> (<u>si E est complet</u>) $\alpha.\varphi = \int \varphi f d\mu$ pour toute $\varphi \in L^1(\mu)$; on se ramène en effet aussitôt au cas scalaire. D'autre part, on vérifie aussi aisément qu'<u>une fonction scalairement essentiellement bornée qui est mesurable</u>, <u>est essentiellement bornée</u>, <u>i.e. localement p.p. égale à une application bornée de</u> M <u>dans</u> E : Supposant toujours, pour simplifier, μ bornée, on considère une suite de compacts $K_i \subset M$ tels que $\complement \bigcup_i K_i$ soit négligeable pour μ, que la restriction de μ à K_i ait pour support K_i, et qu'enfin la restriction de f à K_i soit continue ; il est alors immédiat que l'image de $\bigcup_i K_i$ par f est une partie faiblement bornée, donc bornée, de E.

<u>Structures latticielles</u>. - Rappelons que les espaces $L^p(\mu)$ (où $1 \leqslant p \leqslant +\infty$), construits avec les réels comme scalaires, sont des <u>lattices complets</u> pour leur structure d'ordre naturelle (i.e. que toute partie majorée - resp. minorée - admet une borne supérieure - resp. inférieure -). Suivant la terminologie générale, une partie A de $L^p(\mu)$ est dite <u>latticiellement bornée</u> si elle est majorée et minorée, ou, ce qui revient au même, si l'ensemble des $|f|$, pour $f \in A$, est majoré. Si le corps des scalaires est le corps des complexes, on dit encore qu'une partie A de $L^p(\mu)$ est latticiellement bornée si l'ensemble des fonctions positives $|f|$, pour $f \in A$, est majoré.

Rappelons le résultat essentiel suivant : <u>Si</u> $1 \leqslant p < +\infty$, <u>pour qu'une partie filtrante croissante</u> A <u>de</u> $L^p(\mu)$ <u>soit majorée</u>, <u>il faut et</u>

il suffit que $\operatorname{Sup}_{\varphi \in A} \|\varphi\|_p < +\infty$, *et alors le filtre des sections de* A *converge vers* $\operatorname{Sup}_{\varphi \in A} \varphi$. On en déduit aussitôt : *Si une partie* B *de* $L^p(\mu)$ *est majorée, alors il existe une suite* (φ_i) *extraite de* B *qui a même borne supérieure dans* $L^p(\mu)$ *que* B. *Et la borne supérieure d'une suite majorée* (φ_i) *dans* $L^p(\mu)$ *est la classe dans* $L^p(\mu)$ *de la fonction* $t \to \operatorname{Sup}_i \varphi_i(t)$ (où pour tout i on suppose choisi un représentant $t \to \varphi_i(t)$ de φ_i).

Considérons l'ensemble $\mathfrak{M}(\mu)$ de toutes les classes de fonctions mesurables réelles, finies ou infinies, sur M (classes prises modulo la relation d'équivalence : égalité localement p. p.). Ce n'est plus un espace vectoriel, mais c'est encore un ensemble muni d'une relation d'ordre naturelle, avec plus petit et plus grand élément (savoir la fonction constante $-\infty$ et $+\infty$ respectivement). Supposons d'abord M compact, alors $\mathfrak{M}(\mu)$ est isomorphe de façon évidente, pour sa relation d'ordre, au sous-ensemble des $\varphi \in L^1(\mu)$ telles que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, qui est un sous-lattice. On obtient facilement, grâce à cet isomorphisme : *Si* M *est compact, toute partie* A *de* $\mathfrak{M}(\mu)$ *a une borne supérieure et une borne inférieure. Il existe une suite* (φ_i) *extraite de* A *ayant même borne supérieure que* A. *Et la borne supérieure d'une suite* (φ_i) *dans* $\mathfrak{M}(\mu)$ *est la classe de la fonction* $t \to \operatorname{Sup}_i \varphi_i(t)$ (où pour tout i on suppose choisi un représentant $t \to \varphi_i(t)$ de φ_i).

Toujours dans le cas où M est compact, on obtient la démonstration du

LEMME A. - *Soit* M *un espace localement compact muni d'une mesure positive* μ; E *un espace localement convexe quelconque*, f *une application scalairement mesurable de* M *dans* E. *Soit* A *une partie faiblement bornée de* E', *et pour tout* $x' \in E'$, *soit* $f_{x'}$ *la classe de la fonction* $t \to \langle f(t), x' \rangle$.

1. <u>Il existe une fonction positive mesurable finie</u> h <u>sur</u> M <u>telle que l'on ait, pour</u> $x' \in A$: $|f_{x'}(t)| \leqslant h(t)$ <u>loc. p. p.</u>

2. <u>Soit</u> $h = \operatorname{Sup}_{x' \in A} |f_{x'}|$, <u>où le sup. est pris dans le lattice complet des classes de fonctions réelles mesurables sur</u> M. <u>Soit</u> $t \to h(t)$ <u>une fonction représentant de</u> h. <u>Posons, pour tout</u> $x \in E$: $\|x\| = \operatorname{Sup}_{x' \in A} |\langle x, x' \rangle|$. <u>Alors on a</u> $h(t) \leqslant \|f(t)\|$ <u>loc. p. p.</u>

Démonstration. - Soit h la borne supérieure dans $\mathfrak{M}(\mu)$ de l'ensemble des $|f_{x'}|$, avec $x' \in A$, il faut prouver seulement que $h(t) \leqslant \|f(t)\|$ loc. p. p., quand $t \to h(t)$ est un représentant quelconque de h.- En effet il existe une suite $\varphi_i = |f_{x'_i}|$ extraite de la partie envisagée de $\mathfrak{M}(\mu)$, telle que $h(t) = \operatorname{Sup}_i \varphi_i(t)$ p. p., or on peut prendre $\varphi_i(t) = \langle f(t), x'_i \rangle$, d'où $\operatorname{Sup}_i \varphi_i(t) \leqslant \|f(t)\|$ pour tout t, d'où enfin $h(t) \leqslant \|f(t)\|$ p. p.

Le fait que $\mathfrak{M}(\mu)$ soit un lattice complet, ainsi que la validité du lemme précédent, subsistent encore si M n'est pas compact. On peut en effet aisément se ramener au cas où M est compact, grâce au lemme suivant :

LEMME B (Godement). - <u>Soit</u> M <u>un espace localement compact muni d'une mesure positive</u> μ, E <u>un espace topologique</u>. <u>Si à toute partie compacte</u> K <u>de</u> M <u>on associe une classe</u> g_K <u>d'applications mesurables de</u> K <u>dans</u> E (classe modulo l'égalité presque partout) <u>de telle façon que pour</u> $K \subset K'$, g_K <u>soit la "restriction" de</u> $g_{K'}$ à K, <u>alors il existe une application mesurable</u> g <u>de</u> M <u>dans</u> E <u>qui, sur toute partie compacte</u> K <u>de</u> M, <u>induise</u> g_K.

Démonstration. - On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications f d'ouverts $U \subset M$ dans E, telles que f induise g_K sur tout compact $K \subset U$. Il est immédiat que, ordonné par la relation de "prolongement", $\mathcal{F}$ est inductif, et que pour tout élément maximal de $\mathcal{F}$, on a U = M. Le th. de

Zorn donne alors la conclusion voulue.

VI - RAPPELS SUR LES FORMES BILINÉAIRES

Nous nous bornons à énoncer deux lemmes, dont la démonstration n'offre aucune difficulté. Si E et F sont deux espaces localement convexes, f une forme bilinéaire sur $E \times F$, f est dite hypocontinue si elle est hypocontinue par rapport à l'ensemble des parties bornées de E et l'ensemble des parties bornées de F, au sens de [2]. La continuité de f implique l'hypocontinuité.

LEMME C. - *Soient E et F deux espaces localement convexes, f une forme bilinéaire hypocontinue sur $E \times F$. Il existe une forme bilinéaire et une seule $\hat{f}$ sur $E'' \times F$, séparément faiblement continue et prolongeant f. On l'appelle le prolongement canonique de f à $E'' \times F$. Si f est continue $\hat{f}$ est continue, et si E et F sont des espaces de Banach, f et $\hat{f}$ ont la même norme. Si f parcourt un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $E \times F$, $\hat{f}$ parcourt un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $E'' \times F$.*

Rappelons que la topologie que nous mettons sur un bidual a été définie dans Introduction III, et que d'autre part la topologie faible de E'' est (sauf mention expresse du contraire) la topologie $\sigma(E'',E')$. - On définit de façon symétrique le prolongement canonique de u à $E \times F''$. On notera que si on prolonge canoniquement u de $E \times F$ à $E'' \times F$, puis de $E'' \times F$ à $E'' \times F''$, on n'obtient en général par la même chose que si on prolonge d'abord à $E \times F''$, puis à $E'' \times F''$, même si E et F sont des espaces de Banach (prendre pour E un espace de Banach non réflexif, $F = E'$, u forme bilinéaire fondamentale sur $E \times E'$). Si (E et F étant des espaces de Banach) u est *faiblement compacte* [4], alors les deux prolongements précédents sont

4. Une forme bilinéaire continue f sur le produit de deux espaces de Banach est dite faiblement compacte, si l'application linéaire de E dans

toutefois identiques, et caractérisés par le fait d'être un prolongement faiblement séparément continu de u à $E'' \times F''$.

Nous dirons que la forme bilinéaire séparément continue f sur $E \times F$ est <u>pseudo-compacte</u>, si l'application linéaire de E dans F'_b qu'elle définit transforme les parties bornées en des parties précompactes ; il revient au même de dire que l'application linéaire de F dans E'_b qu'elle définit transforme les parties bornées en des parties précompactes (voir p. ex. [13], lemme 2).

LEMME D. - *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes*, f *une forme bilinéaire hypocontinue sur* $E \times F$. *Soit* A (*resp.* B) *une partie bornée de* E (*resp.* F).

1. f *est continue sur* (A *faible*)$\times F$ *et sur* $E \times$(B *faible*). *Si* A *ou* B *est précompact*, f *est continue sur* (A *faible*) $\times$ (B *faible*).

2. *Si* f *est pseudo-compacte*, *elle est continue sur* (A *faible*) $\times$ (B *faible*).

La première assertion dans 1° se vérifie trivialement. La deuxième assertion dans 1° en est un cas particulier, car sur une partie précompacte de E ou F, la topologie faible est identique à la topologie donnée. Enfin 2° est une conséquence immédiate de 1°.

F' qui lui correspond est faiblement compacte. Il revient au même de dire que l'application linéaire de F dans E' qui lui correspond est faiblement compacte (voir [13], lemme 1).

CHAPITRE I

THÉORIE GÉNÉRALE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES.

§1. PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES PROJECTIFS : GÉNÉRALITÉS

1. Définitions fondamentales.

PROPOSITION 1 [5]. - 1. Soient E et F deux espaces vectoriels, α (resp. β) une semi-norme sur E (resp. F). Alors il existe sur le produit tensoriel $E \otimes F$ une semi-norme et une seule γ ayant la propriété suivante : Pour tout espace vectoriel G [6] muni d'une semi-norme ρ, l'isomorphisme canonique (défini en Algèbre, voir [3]) $A \to \tilde{A}$ entre l'espace des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G et l'espace des applications linéaires de $E \otimes F$ dans G, induit un isomorphisme entre l'espace semi-normé $B(E, F; G)$ des applications bilinéaires bornées (au sens des semi-normes α, β, ρ) et l'espace semi-normé $L(E \otimes F, G)$ des applications linéaires bornées (pour les semi-normes γ, ρ).

2. On a, pour tout $u \in E \otimes F$

$$(1) \qquad \gamma(u) = \operatorname{Inf} \sum_i \alpha(x_i)\, \beta(y_i) \qquad \text{pour } u = \sum_i x_i \otimes y_i$$

(Le Inf étant étendu à toutes les suites finies $((x_i, y_i))$ dans $E \times F$ telles que $u = \sum_i x_i \otimes y_i$). γ est identique à la jauge de l'ensemble

---

5. Cette proposition, et la définition qui en résulte, sont dues essentiellement à R. Schatten.

6. Un tel énoncé, faisant intervenir une "variable" dans la catégorie de "tous" les espaces vectoriels, n'est peut être pas licite dans les systèmes logiques usuels, mais pourrait, dans chaque cas où nous emploierons des énoncés de cette nature, se remplacer par un énoncé explicite plus légitime. Nous préférons dans la suite conserver ces énoncés "naïfs", plus frappants et plus simples, et qui en fait ne risquent d'amener aucune difficulté.

$\Gamma(M \otimes N)$, _enveloppe convexe cerclée de l'ensemble_ $M \otimes N$ _des_ $x \otimes y$ _tels que_ x (_resp._ y) _appartienne à la "boule unité" de_ E (_resp._ F). _Si_ α _et_ β _ne sont pas nulles, l'application bilinéaire canonique de_ $E \times F$ _dans_ $E \otimes F$ _est de norme égale à_ 1 _pour les semi-normes_ α, β, γ, _et on a_ $\gamma(x \otimes y) = \alpha(x)\,\beta(y)$ _pour_ $x \in E$, $y \in F$.

3. γ _est une vraie norme si et seulement si_ α _et_ β _le sont_.

Démonstration. - 1. et 2. Il est trivial que l'expression (1) est bien une semi-norme sur $E \otimes F$, soit γ. En remplaçant, dans le second membre de (1), $x_i \otimes y_i$ par $\lambda_i\, a_i \otimes b_i$, où $\lambda_i = \alpha(x_i)\,\beta(y_i)$, $a_i = \frac{x_i}{\alpha(x_i)}$, $b_i = \frac{y_i}{\beta(y_i)}$ et en posant $\lambda = \sum_i \lambda_i$, $v = \sum_i \lambda_i\, a_i \otimes b_i$, on obtient $\gamma(u) = \operatorname{Inf} \lambda$, le Inf étant étendu aux couples v, λ avec $\lambda > 0$, $v \in \Gamma(M \otimes N)$, $\lambda v = u$, ce qui exprime que γ est la _jauge_ de de $\Gamma(M \otimes N)$. Cela implique que la norme de l'application canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$ est $\leqslant 1$.

Il en résulte aussitôt que si G est un espace vectoriel muni d'une semi-norme ρ, A une application bilinéaire de $E \times F$ dans G telle que l'application linéaire $\tilde{A}$ de $E \otimes F$ qu'elle définit soit bornée, alors A est borné et de norme au plus égale à celle de $\tilde{A}$. La réciproque et l'inégalité inverse se vérifient immédiatement sur l'expression (1) de γ.- Enfin, γ est entièrement déterminé par la propriété envisagée dans l'énoncé 1., même en se restreignant au cas où G est le corps des scalaires. En effet, l'ensemble des formes linéaires sur $E \otimes F$ qui sont de norme $\leqslant 1$ est déterminé, puisqu'il s'identifie à l'ensemble des formes bilinéaires de norme $\leqslant 1$ sur $E \times F$.

Montrons enfin qu'on a $\gamma(x \otimes y) = \alpha(x)\,\beta(y)$, ce qui implique aussitôt, si α et β sont non nuls, que l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$ a une norme exactement égale à 1. On sait déjà que

$\gamma(x \otimes y) \leqslant \alpha(x)\ \beta(y)$. D'autre part, soit $x' \in E'$ (resp. $y' \in F'$) de norme $\leqslant 1$ et tel que $\langle x, x' \rangle = \alpha(x)$ (resp. $\langle y, y' \rangle = \beta(y)$), alors $x' \otimes y'$ est une forme bilinéaire de norme $\leqslant 1$ sur $E \times F$, donc définit une forme linéaire de norme $\leqslant 1$ sur $E \otimes F$, d'où $|\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle| \leqslant \gamma(x \otimes y)$, or le premier membre s'écrit $\langle x, x' \rangle\ \langle y, y' \rangle = \alpha(x)\ \beta(y)$.

3. De $\gamma(x \otimes y) \leqslant \alpha(x)\ \beta(y)$ on conclut immédiatement que si γ est une vraie norme, α et β le sont également. Pour la réciproque, on note qu'un espace semi-normé est normé si et seulement si il est séparé, c'est-à-dire si son dual "sépare" les points de cet espace. Notre assertion résulte alors aussitôt du

LEMME 1. - _Si_ E _et_ F _sont deux espaces localement convexes séparés, la dualité naturelle entre_ $E \otimes F$ _et_ $E' \otimes F'$ _est séparée_.

C'est évident et purement algébrique du côté de $E' \otimes F'$ (E' et F' s'identifient à des sous-espaces du dual _algébrique_ de E resp. F) donc par raisons de symétrie c'est vrai du côté de $E \otimes F$ (puisque E et F, étant séparés, s'identifient resp. au dual de E'_s et de F'_s).

DÉFINITION 1. - _La semi-norme_ γ _définie dans la prop. 1 est appelée produit tensoriel des semi-normes_ α _et_ β. _Si_ E _et_ F _sont deux espaces normés, leur produit tensoriel_ $E \otimes F$ _muni de la norme produit tensoriel des normes de_ E _et de_ F _est appelé produit tensoriel normé de_ E _et de_ F, _son complété est appelé produit tensoriel normé complété_ (_ou simplement produit tensoriel complété_) _des espaces normés_ E _et_ F, _et noté_ $E \hat{\otimes} F$. _Sa norme est notée_ $u \to \|u\|_1$.

Si E et F sont deux espaces normés, $E \otimes F$ sera toujours, sauf mention expresse du contraire, considéré comme espace normé de la façon précédente.

PROPOSITION 2. - _Soient_ E _et_ F _deux espaces localement convexes_.

1. _Il existe sur_ $E \otimes F$ _une topologie localement convexe_ T _et une seule ayant la propriété suivante_ : _Quel que soit l'espace localement_

convexe G, *l'isomorphisme canonique entre l'espace des applications bilinéaires de* $E \times F$ *dans* G *et l'espace des applications linéaires de* $E \otimes F$ *dans* G *induit un isomorphisme entre l'espace* $B(E,F;G)$ *des applications bilinéaires continues et l'espace* $L(E \otimes F,G)$ *des applications linéaires continues. - Alors les parties équicontinues de ces deux espaces se correspondent aussi.*

En particulier, le dual de $E \otimes F$ *pour* T *s'identifie à l'espace* $B(E,F)$ *des formes bilinéaires continues sur* $E \times F$, *et ses parties équicontinues aux parties équicontinues de* $B(E,F)$ (de sorte que T n'est autre que la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $B(E,F)$, mis en dualité avec $E \otimes F$).

2. *Si* (α_i) (resp. (β_j)) *est un système fondamental de semi-normes continues sur* E (resp. F) *la topologie* T *est définie par la famille des semi-normes* γ_{ij}, *où* γ_{ij} *est le produit tensoriel des semi-normes* α_i *et* β_j (définition 1). *Une famille fondamentale de voisinages de* 0 *pour* T *est formée des enveloppes convexes cerclées* $\Gamma(U_i \otimes V_j)$ *où* U_i (resp. V_j) *parcourt un système fondamental de voisinages de* 0 *dans* E (resp. F). *L'application bilinéaire canonique de* $E \times F$ *dans* $E \otimes F$ *est continue.*

3. *Pour que* $E \otimes F$ *soit séparé* (pour T) *il faut et il suffit que* E *et* F *le soient.*

DÉMONSTRATION. - Commençons par prouver l'unicité de T. En effet, l'application identique de $E \otimes F$ muni de T sur lui-même étant continue, l'application bilinéaire $E \times F \to E \otimes F$ qui lui correspond est continue par hypothèse ; et de plus, pour *toute* topologie localement convexe T' sur $E \otimes F$ rendant continue cette application $E \times F \to E \otimes F$, l'application identique de $E \otimes F$ muni de T dans $E \otimes F$ muni de T' est continue en vertu de l'hypothèse sur T, i.e. T est plus fine que T'. Ainsi, T *apparaît comme la plus fine des topologies localement convexes sur* $E \otimes F$ *rendant* *continues l'application bilinéaire canonique de* $E \times F$ *dans* $E \otimes F$, *oe qui établit l'unicité de* T.

Prouvons l'existence de T. En vertu de la proposition 1, 2°, les deux topologies définies dans la deuxième partie de notre énoncé sont identiques, soit T cette topologie. L'application bilinéaire oanonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$ est manifestement continue pour T. Il en résulte que si A est une application bilinéaire de $E \times F$ dans un espace localement oonvexe G définissant une application linéaire *continue* de $E \otimes F$ dans G alors A est aussi continue, et la réciproque est aussi immédiate en vertu de la prop. 1, 1°. Plus généralement, on voit ainsi que les parties équicontinues de $B(E,F;G)$ et de $L(E \otimes F,G)$ se correspondent.

DÉFINITION 2. - *La topologie* T *sur* $E \otimes F$ *définie dans la prop. 2 est appelée produit tensoriel projectif des topologies localement convexes données sur* E *et* F, *et muni de oette topologie*, $E \otimes F$ *prend le nom de produit tensoriel topologique projectif de* E *et* F (*ou simplement produit tensoriel topologique si aucune confusion n'est à craindre*). *Son complété est appelé produit tensoriel topologique* (*projectif*) *complété de* E *et* F, *et noté* $E \hat{\otimes} F$.

Si E et F sont des espaces localement convexes, $E \otimes F$ sera toujours, sauf mention expresse du contraire, considéré comme muni de la topologie de produit tensoriel projectif de E et F.

Soholie. - Soient E, F, deux espaoes localement convexes séparés, G un espace localement convexe séparé et *complet*. L'espace $B(E,F;G)$ des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G s'identifie canoniquement à l'espace $L(E \otimes F,G)$ des applications linéaires continues du produit tensoriel complété $E \otimes F$ dans G, avec correspondance des parties équicontinues. Si E, F, G, sont *normés*, cette correspondance conserve les normes naturelles. - En particulier, le dual de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à l'espace $B(E,F)$ des formes bilinéaires continues sur $E \times F$ et la topologie de $E \otimes F$ est celle de la convergence uniforme sur les ensembles équicontinus de formes bilinéaires sur $E \times F$.

Ce scholie résulte aussitôt des définitions et des propositions 1 et 2. - Nous examinerons au § 3 diverses variantes de la notion de produit tensoriel topologique envisagée ici, permettant des scholies analogues.

Exemples. - De nombreux exemples seront donnés au Chap.2 §3, n°3, dont nous signalons par exemple le suivant : Soit V une variété indéfiniment différentiable, E l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur V muni de sa topologie naturelle (qui en fait un espace du type ($\mathcal{F}$) si V est "dénombrable à l'infini"), F un espace localement convexe complet quelconque. Alors $E \otimes F$ s'identifie à l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur V à valeurs dans F, muni de sa topologie naturelle (topologie de la convergence compacte de la fonction f et de chacune de ses dérivées). Résultat analogue si V est une variété holomorphe (i.e. analytique complexe) et si E désigne l'espace des fonctions holomorphes sur V, muni de sa topologie naturelle. Nous verrons aussi au § 2 (Th. 2) qu'un énoncé analogue est valable quand E est l'espace des fonctions sommables sur un espace localement compact muni d'une mesure positive μ.

"Problème des Topologies". Soit $\mathfrak{S}_1$ (resp. $\mathfrak{S}_2$) un ensemble de parties bornées de E (resp. F). On peut alors envisager sur B(E,F;G) la topologie de la $\mathfrak{S}_1$- $\mathfrak{S}_2$- convergence qui est toujours localement convexe. Il est immédiat que cette topologie correspond dans L $(E \otimes F,G)$ (resp. dans $L(E \hat{\otimes} F,G)$ si G est complet) à la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties de la forme $A \otimes B$ [7], avec $A \in \mathfrak{S}_1$, $B \in \mathfrak{S}_2$, ou aussi

7. $A \otimes B$ désigne l'ensemble des $x \otimes y$, avec $x \in A$, $y \in B$. Dans la suite,

sur les enveloppes convexes cerclées fermées de telles parties dans $E \otimes F$ (resp. dans $E \hat{\otimes} F$). Cette topologie est a priori moins fine que la topologie de dual fort de $E \otimes F$ (resp. de $E \hat{\otimes} F$). Une question naturelle est : ces topologies sont-elles en fait identiques quand $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont l'ensemble de <u>toutes</u> les parties bornées de E resp. de F ? On sait qu'il revient au même (si $G \neq 0$!) de dire que toute partie bornée de $E \otimes F$ (resp. de $E \hat{\otimes} F$) est contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble $A \otimes B$, où A est borné dans E, B borné dans F. Cela est faux en général, par exemple dans le cas simple où E est le produit vectoriel topologique, F la somme directe topologique, d'une suite de droites [8]. Cela est manifestement vrai au contraire si E et F sont normables (voir prop.1, 2°), et nous verrons que c'est vrai encore si E et F sont tous deux du type $(\mathcal{DF})$ (prop.5, 2°), en particulier si ce sont des duals forts d'espaces du type $(\mathcal{F})$. J'ignore si c'est encore vrai si E et F sont du type $(\mathcal{F})$, même si l'un est normable, sauf dans certains cas particuliers (voir §2 prop.12 et Chap.2 §3, prop.12). Si la réponse était affirmative dans ce cas, B(E,F) s'identifierait avec sa topologie de la convergence biborné au dual fort d'un espace métrisable $E \otimes F$,

---

une confusion avec la notation usuelle (non cohérente avec la précédente) $M \otimes N$, ou M et N sont des espaces vectoriels (et $M \otimes N$ l'espace vectoriel produit tensoriel de M et N) n'est pas à craindre.

8. La vérification est laissée au lecteur.- Noter que sauf dans les cas ou les formes linéaires séparément continues sur $E \times F$ sont déjà continues (ce qui signifie pratiquement que E et F sont tous deux du type $(\mathcal{F})$, ou tous deux du type $(\mathcal{DF})$), la topologie de la convergence uniforme sur les produits de deux parties bornées n'est pas "la bonne topologie" sur B(E,F) (elle n'est pas assez fine ; en général, B(E,F) ne sera pas complet pour cette topologie). Cela explique pourquoi on ne doit pas espérer alors

et serait donc du type $(\mathcal{DF})$, ce qui résoudrait une question posée dans [9] (question 7). Réciproquement d'ailleurs, si B(E,F) est du type $(\mathcal{DF})$ pour la convergence bibornée, et si on sait par ailleurs, par exemple, que ses parties bornées sont métrisables, alors B(E,F) est tonnelé ([9], th. 5) d'ou résulte facilement que sa topologie est aussi celle du dual fort de $E \otimes F$.

Soient E et F deux espaces localement convexes séparés, alors $E \otimes F$ et $E' \otimes F'$ sont en dualité séparée (lemme 1), ce qui permet de considérer $E \otimes F$ comme un espace de formes bilinéaires sur $E' \times F'$. Il est immédiat que $E \otimes F$ s'identifie exactement à l'espace des formes bilinéaires <u>continues</u> sur $E'_s \times F'_s$, ou aussi à l'espace des formes bilinéaires continues de <u>rang fini</u> sur $E' \times F'$, quand E' et F' sont munis de topologies localement convexes donnant pour dual E resp. F. L'application bilinéaire $(x,y) \to x \otimes y$ de $E \times F$ dans $\mathcal{B}_e(E'_s,F'_s)$ est manifestement continue, donc (prop.2, 1°) <u>l'immersion de</u> $E \otimes F$ <u>dans</u> $\mathcal{B}_e(E'_s,F'_s)$ <u>est continue</u>. Nous verrons par la suite qu'il est tout à fait exceptionnel que ce soit un isomorphisme topologique (voir § 4, n°5 et Chap.2, § 2, n°1). Si $\mathcal{B}_e(E'_s,F'_s)$ est complet, on peut prolonger l'application précédente à $E \hat{\otimes} F$. Or, on a dit dans Introduction III, 6 que $\mathcal{B}_e(E'_s,F'_s)$ est complet si et seulement si E et F sont complets (en supposant E et F non nuls). Donc, <u>si</u> E <u>et</u> F <u>sont complets, il existe une application linéaire continue canonique de</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>dans</u> $\mathcal{B}_e(E'_s,F'_s)$. Si E et F sont normés, cette application a une norme ≤ 1, comme il résulte immédiatement du fait que l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans B(E',F') est de norme ≤ 1.

---

trouver une réponse affirmative à la question posée. Il y a lieu de remplacer ici $E \hat{\otimes} F$ par le produit tensoriel inductif complété $E \bar{\otimes} F$, et B(E,F) par $\mathcal{B}(E,F)$ (voir §3, n°1).

"Problème de biunivocité" et "Problème d'approximation".- L'application précédente de $E \hat{\otimes} F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ est-elle biunivoque ? Je l'ignore même dans le cas où E et F sont des espaces de Banach, bien qu'on puisse donner des conditions très larges permettant de conclure par l'affirmative, comme nous verrons au §5, consacré exclusivement à ce problème et à ses nombreuses variantes. Notons seulement ici que dire que l'application naturelle de $E \hat{\otimes} F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ est biunivoque signifie que si un élément de $E \hat{\otimes} F$ s'annule sur $E' \otimes F'$, il est nul, c'est-à-dire en vertu du th. de Hahn-Banach, que $E' \otimes F'$ est dense dans $B(E,F)$ pour la topologie faible définie par la dualité avec $E \hat{\otimes} F$ ("Problème d'approximation"). Pour résoudre ce problème on peut visiblement se ramener au cas ou E et F sont des espaces de Banach (en introduisant, pour tout $A \in B(E,F)$ un voisinage convexe cerclé U (resp. V) de 0 dans E (resp. F) tel que $|A(x,y)| \leqslant 1$ pour $x \in U$, $y \in V$, et en considérant les espaces de Banach $\hat{E_U}$, $\hat{E_V}$).

$\mathcal{L}(E'_s, F'_s)$ s'identifie aussi à l'espace des applications linéaires continues de E'_s dans F_s ou aussi à l'espace des applications linéaires continues de E'_τ dans F (voir [2], prop.7), et c'est même là un isomorphisme topologique de $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ sur $L_e(E'_\tau, F)$. Par suite $E \otimes F$ <u>s'immerge canoniquement dans</u> $L_e(E'_\tau, F)$, <u>et si</u> E <u>et</u> F <u>sont complets</u>, <u>il existe une application linéaire canonique de</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>dans</u> $L_e(E'_\tau, F)$, que nous notons le plus souvent $u \to \tilde{u}$. A $x \otimes y$ correspond manifestement l'application linéaire $x' \to \langle x, x' \rangle y$.

Les applications $u \in L_e(E'_\tau, F)$ qui sont dans l'image de $E \hat{\otimes} F$ ont des propriétés très spéciales, dont nous ne signalons pour l'instant que la plus grossière : <u>Ces applications transforment les parties équicontinues de</u> E' <u>en parties relativement compactes de</u> F (supposé toujours complet). Cela résulte du

LEMME 2. - Soient E et F deux espaces localement convexes, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E. Alors l'ensemble des $u \in L(E,F)$ qui transforment les $A \in \mathfrak{S}$ en parties précompactes de F est fermé pour la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence.- En particulier, toute application linéaire continue de E dans F qui est limite uniforme sur les $A \in \mathfrak{S}$ d'application linéaires continues de rang fini, transforme les $A \in \mathfrak{S}$ en parties précompactes de F.

La démonstration de ce lemme est connue (pour les opérateurs compacts d'un espace de Banach dans un autre), et d'ailleurs immédiate grâce au critère usuel de précompacité.- Pour une réciproque de la dernière partie du lemme, voir §5, prop.37.

2. Produit tensoriel d'applications linéaires.

Dans toute la suite de ce travail, les espaces localement convexes envisagés sont supposés séparés, sauf mention expresse.

Soient (E_1,E_2), (F_1,F_2) deux couples d'espaces localement convexes, A_i une application linéaire continue de E_i dans F_i. L'application bilinéaire $(x_1,x_2) \rightarrow A_1x_1 \otimes A_2x_2$ de $E_1 \times E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$ est manifestement continue, donc (prop.2, 1°) l'application linéaire de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$ qu'elle définit est continue et se prolonge par suite en une application linéaire continue de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \hat{\otimes} F_2$, notée encore $A_1 \otimes A_2$ et appelée produit tensoriel des applications linéaires continues A_1 et A_2. Si les espaces envisagés sont normés, on a

$$(2) \qquad \| A_1 \otimes A_2 \| \leqslant \|A_1\| \cdot \|A_2\|$$

comme il résulte aussitôt de la prop.1, 1°. Cette notion satisfait manifestement aux propriétés usuelles d'associativité

$$(3) \qquad (A_1 \otimes A_2) \circ (B_1 \otimes B_2) = (A_1 \circ B_1) \otimes (A_2 \circ B_2)$$

(Le lecteur explicitera). Si les espaces envisagés sont complets, on a avec la notation introduite à la fin du n°1

(4) $\widetilde{(A_1 \otimes A_2).\,u} = A_2 \circ \tilde{u} \circ {}^tA_1$

pour tout $u \in E_1 \hat{\otimes} E_2$, comme on vérifie par prolongement par continuité à partir de $u \in E_1 \otimes E_2$. Nous écrirons donc parfois $A_1 u\, {}^tA_2$ au lieu de $(A_1 \otimes A_2).\,u$, et $A_1 u$ (resp. $u\, {}^tA_2$) si A_2 (resp. A_1) est l'application identique de E_2 sur E_2 (resp. de E_1 sur E_1). La formule 3 s'écrit alors $B_1(A_1 u\, {}^tA_2)\, {}^tB_2 = (B_1 A_1)\, u\, ({}^tA_2\, {}^tB_2)$.

Soient toujours $(E_1, E_2), (F_1, F_2)$ deux couples d'espaces localement convexes, A_i une application linéaire continue de E_i dans F_i.

PROPOSITION 3. - 1. Si A_i est un homomorphisme topologique de E_i sur un sous-espace dense de F_i $(i = 1,2)$, alors $A_1 \otimes A_2$ est un homomorphisme topologique de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ sur un sous-espace dense de $F_1 \hat{\otimes} F_2$, ce sous-espace étant identique à $F_1 \hat{\otimes} F_2$ quand E_1 et E_2 sont métrisables.

2. Si E_1 et E_2 sont des espaces normés, et si A_1 et A_2 sont des applications linéaires canoniques sur des espaces quotients E_1/N_1 et E_2/N_2, alors $A_1 \otimes A_2$ est un isomorphisme d'espace normé d'un quotient de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ sur $F_1 \hat{\otimes} F_2$.

3. Le noyau de $A_1 \otimes A_2$ est le sous-espace vectoriel fermé de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ engendré par les $x_1 \otimes x_2$ avec $A_1 x_1 = 0$ ou $A_2 x_2 = 0$

Démonstration. - Dire que $A = A_1 \otimes A_2$ est un homomorphisme topologique sur un sous-espace partout dense signifie que son transposé ${}^tA$ est biunivoque, a une image faiblement fermée, et que l'image inverse, dans le dual $B(F_1, F_2)$ de $F_1 \otimes F_2$, d'une partie équicontinue du dual $B(E_1, E_2)$ de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ est équicontinue [9]. Mais si $f \in B(F_1, F_2)$ alors ${}^tA.f$ est la

---

9. Nous admettons, dans la démonstration de la prop.3 (resp.4) les résultats suivants, dont la démonstration est facile :
Lemme a. Soient E et F deux espaces localement convexes, u une application linéaire continue de E dans F. Pour que u soit un homomorphisme topologique, il faut et il suffit que u soit un homomorphisme faible,

forme bilinéaire $f(A_1x_1, A_2x_2)$ sur $E_1 \times E_2$, et l'image de $B(F_1,F_2)$ est l'ensemble des $g \in B(E_1,E_2)$ telles que $g(x_1,x_2) = 0$ si $A_1x_1 = 0$ ou $A_2x_2 = 0$. L'affirmation devient alors immédiate. Si E_1 et E_2 sont métrisables $E_1 \hat{\otimes} E_2$ est métrisable et complet, dono tout espace quotient de cet espace est complet, d'où résulte qu'alors A est un homomorphisme sur. De même si $F_1 = E_1/N_1$, $F_2 = E_2/N_2$, E_1 et E_2 normés, il est trivial que ${}^tA$ est un isomorphisme de l'espace normé $B(F_1,F_2)$ dans l'espace normé $B(E_1,E_2)$, ce qui signifie aussi que A est un isomorphisme d'espace normé d'un espace quotient de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ sur $F_1 \hat{\otimes} F_2$.- Enfin, le noyau de A est l'orthogonal de l'image par A du dual $B(F_1,F_2)$ de $F_1 \hat{\otimes} F_2$, image qui est identique à l'ensemble des formes bilinéaires g telles que $g(x_1,x_2) = 0$ si $x_1 \in N_1$ ou $x_2 \in N_2$ (N_i désignant le noyau de A_i) d'où résulte la caractérisation donnée du noyau de A, grâce au théorème des bipolaires.

PROPOSITION 4. - Supposons que A_i soit un isomorphisme topologique, identifiant donc E_i à un sous-espace vectoriel topologique de F_i ($i = 1,2$).

1. Pour que $A_1 \otimes A_2$ soit un isomorphisme topologique, il faut et il suffit que tout ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $E_1 \times E_2$ soit l'ensemble des restrictions d'un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $F_1 \times F_2$. Si F_1 et F_2 sont métrisables on peut dans cet énoncé remplacer l'ensemble équicontinu donné par une forme bilinéaire continue.

(i.e. ${}^tu(F')$ est faiblement fermé dans E'), et que toute partie équicontinue de ${}^tu(F')$ soit l'image d'une partie équicontinue de F'.
Lemme b. Soient E et F deux espaces localement convexes, u une application linéaire continue de E dans F. Pour que u soit un isomorphisme topologique, il faut et il suffit que toute partie équicontinue A de E' soit l'image par ${}^tu$ d'une partie équicontinue de F'.

2. Si F_1 et F_2 sont normés, pour que $A_1 \otimes A_2$ soit un isomorphisme d'espace normé, il faut et il suffit que toute forme bilinéaire continue sur $E_1 \times E_2$ soit restriction d'une forme bilinéaire continue sur $F_1 \times F_2$ ayant même norme.

Démonstration. - Le début de 1° et 2°, sont immédiats par transposition comme pour la prop. 3 [10]. Dans le cas où F_1 et F_2 sont métrisables, $E_1 \hat{\otimes} E_2$ et $F_1 \hat{\otimes} F_2$ sont métrisables, et il revient alors au même de dire que A est un homomorphisme pour les topologies fortes ou pour les topologies faibles ([2], prop.7), ce qui prouve la fin de 1° et par là la proposition 4.

COROLLAIRE 1. - Sous les conditions de la prop.4, pour que $A_1 \otimes A_2$ soit un isomorphisme topologique, il suffit que E_i admette un supplémentaire topologique dans F_i $(i = 1,2)$.

COROLLAIRE 2. - Soit F un espace de Banach, E un sous-espace vectoriel fermé admettant un supplémentaire topologique dans son bidual. Alors l'application canonique $E \hat{\otimes} E' \to F \hat{\otimes} E'$ est un isomorphisme topologique si et seulement si E admet un supplémentaire topologique dans F.

C'est en effet suffisant en vertu du corollaire 1. C'est nécessaire, car en vertu de la prop.4, la forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$ est alors restriction d'une forme bilinéaire continue sur $F \times E'$, ou, ce qui revient au même, l'application identique de E dans E" est restriction d'une application linéaire continue de F dans E". En composant avec un projecteur continu de E" sur E, on obtient une projection continue de F sur E, i.e. E admet un supplémentaire topologique dans F.- Ce corollaire permet de donner de nombreux exemples où le produit tensoriel de deux isomorphismes

10. Voir note 9 page 38.

topologiques n'est pas un isomorphisme topologique.

COROLLAIRE 3. - <u>L'application linéaire canonique</u> $E \hat{\otimes} F \to E'' \hat{\otimes} F$ <u>est un isomorphisme topologique, et un isomorphisme d'espace normé quand</u> E <u>et</u> <u>F sont des espaces normés.</u> [11]

Cela signifie, en vertu de la prop.4, que tout ensemble d'applications linéaires de F dans E' appliquant un voisinage fixe de 0 dans une partie équicontinue fixe de E' provient d'un ensemble analogue d'applications linéaires <u>de</u> F dans le dual de E'' (ayant mêmes normes s'il s'agit d'espaces normés), ce qui est immédiat, une partie équicontinue de E' s'identifiant à une partie équicontinue du dual de E''.

En particulier, si F = E', l'application canonique $E' \hat{\otimes} E \to E'' \hat{\otimes} E'$ (obtenue en composant l'application canonique $E' \hat{\otimes} E \to E' \hat{\otimes} E''$ avec l'isomorphisme topologique - resp. normé - $E' \hat{\otimes} E'' \to E'' \hat{\otimes} E'$) est un isomorphisme topologique (resp. un isomorphisme d'espaces normés). Quand les éléments de $E' \hat{\otimes} E$ sont interprétés comme opérateurs dans E, ceux de $E'' \hat{\otimes} E'$ comme opérateurs dans E', l'application précédente n'est autre que l'opération de transposition.- Remarquons que si on prend $E = c_0$ (espace des suites qui tendent vers zéro) E n'a pas de supplémentaire topologique dans son bidual ℓ^∞ ([25]), bien que, d'après ce qui précède, $E \hat{\otimes} E' \to E'' \hat{\otimes} E'$ soit un isomorphisme topologique. Donc la restriction faite dans le corollaire 2 sur l'espace E est bien essentielle.

<u>Applications de la proposition</u> 3.-

1. Soit V une variété indéfiniment différentiable [12], $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur V avec sa topolo-

---

11. La manière dont nous topologisons E'' a été précisée dans l'Introduction, III.

12. Pour simplifier, nous supposons, dans tout cet article, les variétés envisagées dénombrables à l'infini, i.e. réunion d'une suite de compacts. Alors $\mathcal{E}(V)$ est un espace du type $(\mathcal{F})$.

gie usuelle d'espace $(\mathcal{F})$, D un opérateur différentiel dans $\mathcal{E}$. Supposons que D applique $\mathcal{E}$ <u>sur</u> $\mathcal{E}$ (ce qui est vrai dans les cas les plus fréquents en pratique) alors D est même un <u>homomorphisme topologique</u> de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$ en vertu du th. des homomorphismes de Banach. Soit E un espace du type $(\mathcal{F})$, $\mathcal{E}_E$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur V à valeurs dans E, muni de sa topologie usuelle. D définit de façon évidente un opérateur D_E dans $\mathcal{E}_E$. <u>Alors D_E est aussi un homomorphisme de $\mathcal{E}_E$ sur $\mathcal{E}_E$</u>. En effet nous avons déjà dit (n°1, exemples) que $\mathcal{E}_E$ s'identifie à $\mathcal{E} \hat{\otimes} E$, et on vérifie facilement qu'on a avec cet identification $D_E = D \otimes 1$ (1 désigne l'application identique dans E), et il suffit d'appliquer la prop. 3. D'ailleurs, du fait que $\mathcal{E}$ est <u>nucléaire</u> (voir Chap.2, §2) on peut même conclure que chaque fois que D est un homomorphisme topologique (pas nécessairement de $\mathcal{E}$ <u>sur</u> $\mathcal{E}$), D_E est aussi un homomorphisme topologique (appliquer la prop. 4 et Chap.2, §3, corollaire de la prop.10). Bien entendu, dans tout ceci, $\mathcal{E}$ pouvait se remplacer par l'espace analogue construit pour un type quelconque de tenseurs sur V. On a un résultat analogue quand V est une variété holomorphe, $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions holomorphes sur V, muni de la topologie de la convergence compacte.- On fera attention que si E n'est pas du type $(\mathcal{F})$, D_E peut ne pas être un homomorphisme de $\mathcal{E}_E$ <u>sur</u> $\mathcal{E}_E$, même si D est un homomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$. Ainsi, si $E = \mathcal{E}'$ (dual fort de $\mathcal{E}$) il résulte facilement des résultats du Chap.2 (voir Chap.2, fin du th.6) que D_E est une application de $\mathcal{E}_E$ <u>sur</u> $\mathcal{E}_E$ si et seulement si le noyau de D admet un supplémentaire topologique dans $\mathcal{E}$ (i.e. si D admet un inverse à droite dans $\mathcal{E}$) Ce n'est, par exemple, déjà pas le cas pour l'opérateur Δ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, ni plus généralement pour aucun opérateur différentiel à coefficients constants elliptique sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$, l'ordre de D étant > 0) [13]

2. Considérons une variété indéfiniment différentiable V, un espace E du type $(\mathcal{F})$, et un espace quotient E/F de E. Alors la prop. 3 montre ici que toute application indéfiniment différentiable de V dans E/F peut s'obtenir en composant une application indéfiniment différentiable de V dans E, avec l'application canonique de E sur E/F. On procède de la même façon pour obtenir des théorèmes de relèvement pour des fonctions vectorielles holomorphes, ou sommables, etc. Dans tous ces exemples, il est encore essentiel que l'espace E envisagé soit du type $(\mathcal{F})$.

3. Propriétés de permanence générales.

PROPOSITION 5. - Soient E et F deux espaces localement convexes.

1. Si E et F sont du type $(\mathcal{F})$, $E \hat{\otimes} F$ est du type $(\mathcal{F})$, $E \otimes F$ est métrisable et tonnelé.

2. Si E et F sont du type $(\mathcal{DF})$, alors $E \otimes F$ et $E \hat{\otimes} F$ sont du type $(\mathcal{DF})$. Sur $B(E,F)$, la topologie de la convergence bibornée est identique à la topologie de dual fort de $E \hat{\otimes} F$. Toute partie bornée de $E \hat{\otimes} F$ est contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble $A \otimes B$, où A (resp. B) est une partie bornée de E (resp. F).

Démonstration. - 1° est trivial, sauf que $E \otimes F$ soit tonnelé, ce qui résulte aussitôt d'un théorème classique (tout ensemble de formes bilinéaires sur $E \times F$, borné pour la topologie de la convergence simple, est équicontinu).

---

13. Un opérateur différentiel est dit (globalement) elliptique s'il admet un noyau inverse très régulier (pour cette notion, voir le § 1 de : Grothendieck, Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles, Journal d'Analyse Mathématique, p.243-280, Vol II (1952-53))

2. On note d'abord que B(E,F) est du type ($\mathcal{F}$) pour la topologie de la convergence bibornée ([9], prop.3), donc pour vérifier que son application identique dans le dual fort de E $\hat{\otimes}$ F est continue, il suffit de montrer qu'elle transforme une suite qui converge vers zéro en une suite bornée ; or, une telle suite est équicontinue dans B(E,F) ([9], prop.3), donc équicontinue dans le dual de E $\hat{\otimes}$ F. L'identité des deux topologies sur B(E,F) est par là établie, ce qui équivaut précisément à la propriété des enveloppes envisagée dans l'énoncé (voir n°1, "Problème des topologies"). Il en résulte que E $\widehat{\otimes}$ F admet une <u>suite</u> fondamentale de parties bornées. Pour vérifier que c'est un espace ($\mathcal{DF}$) il reste à vérifier que si la réunion d'une suite de parties équicontinues de son dual est fortement bornée, elle est même équicontinue, ce qui n'est autre encore que la prop.3 de [9].

COROLLAIRE 1. - <u>Sous les conditions de la prop</u>.5, 2°, <u>pour que</u> E $\otimes$ F <u>soit bornologique</u> (<u>resp</u>. <u>tonnelé</u>, <u>quasi-tonnelé</u>) <u>il faut et suffit</u> (<u>si</u> E <u>et</u> F <u>ne sont pas nuls</u>) <u>que</u> E <u>et</u> F <u>le soient</u>. <u>Pour que</u> E $\hat{\otimes}$ F <u>soit tonnelé</u>, <u>il faut et il suffit que</u> E <u>et</u> F <u>soient quasi-tonnelés</u>.

Supposons E et F tonnelés (resp. quasi-tonnelé) montrons que E $\otimes$ F l'est aussi, i.e. que toute partie de B(E,F) bornée pour la convergence simple (resp. la convergence bornée) est équicontinue. Mais cela est inclus aussitôt dans [9], th.2. A fortiori E $\hat{\otimes}$ F sera alors tonnelé (comme complété d'un espace quasi-tonnelé). Supposons E et F bornologiques, montrons que E $\otimes$ F est bornologique. E et F étant quasi-tonnelés, E $\otimes$ F sera quasi-tonnelé, il reste donc à vérifier que toute forme linéaire sur E $\otimes$ F, bornée sur les parties bornées, est continue. Mais il résulte immédiatement du fait que E et F sont bornologiques que la forme bilinéaire qui correspond à la forme linéaire donnée est séparément continue, et de plus bornée sur le produit de deux bornés. Il en résulte qu'elle est même continue ([9], th.2) donc aussi la forme linéaire donnée.- Pour les réciproques, on note qu'un espace du type $(\mathcal{DF})$ est quasi-tonnelé si et seulement si son complété est tonnelé, ce qui nous ramène à prouver que si $E \otimes F$ est bornologique (resp. tonnelé, quasi-tonnelé) E et F le sont. Or cela résulte aussitôt du

LEMME 3. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces localement convexes non nuls</u>. E <u>et</u> F <u>sont isomorphes à des facteurs directs de</u> $E \otimes F$ <u>et les complétés de</u> E <u>et</u> F <u>sont isomorphes à des facteurs directs de</u> $E \hat{\otimes} F$.

Pour le voir, il suffit de décomposer p. ex. F en la somme directe topologique d'une droite F_0 et d'un hyperplan fermé, ce qui donne une décomposition correspondante de $E \otimes F$ resp. $E \hat{\otimes} F$ (voir prop.6 ci-dessous) dont un facteur est isomorphe à $E \otimes F_0$ (resp. à $E \hat{\otimes} F_0$) donc à E (resp. son complété).

COROLLAIRE 2 de la Prop. 5. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces du type</u> $(\mathcal{DF})$, E <u>étant du type</u> $(\mathcal{M})$, F <u>du type</u> $(\mathcal{M})$ (<u>resp</u>. <u>réflexif</u>). <u>Alors</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>est un espace du type</u> $(\mathcal{M})$ (<u>resp</u>. <u>réflexif</u>).

En effet, cela résulte de la prop.5, 2°, moyennant le théorème de Krein-Šmulian [14] et le

LEMME 4. - <u>Soient</u> E, F <u>deux espaces localement convexes</u>, A <u>une partie précompacte de</u> E, B <u>une partie précompacte</u> (<u>resp</u>. <u>faiblement relativement compacte</u>) <u>de</u> F. <u>Alors</u> $A \otimes B$ <u>est une partie</u>

14. Rappelons à ce propos le th. de Krein-Šmulian, que nous énonçons sous sa forme la plus générale : Soit E un espace localement convexe, K une partie faiblement compacte de E, A son enveloppe convexe cerclée fermée. Pour que A soit aussi faiblement compact, il faut et il suffit que A soit complet (ce qui est en particulier toujours le cas si K est quasi-complet)

relativement compacte (*resp. faiblement relativement compacte*) *de* $E \hat{\otimes} F$.

On peut manifestement supposer E et F complets, et alors la démonstration résulte aussitôt du fait que l'application $(x,y) \to x \otimes y$ de $A \times B$ dans $E \hat{\otimes} F$ est continue (resp. faiblement continue), ce qui est immédiat.- On notera que le lemme 4 est encore valable si on remplace $E \hat{\otimes} F$ par le "produit tensoriel *inductif* complété" $E \bar{\otimes} F$ (§ 3, définition 3), à condition de supposer A convexe cerclé complet.

PROPOSITION 6. - *Soit* (E_i) *une famille d'espaces localement convexes*, F *un espace localement convexe*.

1. $(\prod_i E_i) \hat{\otimes} F$ *est canoniquement isomorphe au produit vectoriel topologique* $\prod_i (E_i \hat{\otimes} F)$.

2. *Si* F *est normable*, *alors les espaces* $(\sum_i E_i) \hat{\otimes} F$ et $\sum_i (E_i \hat{\otimes} F)$ *sont canoniquement isomorphes* (*où* $\sum_i$ *désigne la somme directe topologique*). *Si* I *est dénombrable*, *il suffit que* F *soit du type* $(\mathcal{DF})$.

Démonstration. - 1° est immédiat en considérant les sous-espaces denses $(\sum_i E_i) \otimes F$ et $\sum_i (E_i \otimes F)$ des deux espaces à comparer : Ces sous-espaces sont algébriquement isomorphes de façon canonique, et leur isomorphisme canonique est un isomorphisme pour les topologies induites, comme il résulte p. ex. de la caractérisation des voisinages de 0 donnée dans la prop. 2, 2°.- Dans 2°, comme la somme directe topologique d'une famille d'espaces complets est complète (Introduction, IV, 2°) on se ramène aisément à prouver que les deux topologies induites resp. sur $(\sum_i E_i) \otimes F$ et sur $\sum_i (E_i \otimes F)$ sont identiques quand on identifie canoniquement ces deux espaces, ou encore que ces deux topologies donnent le même dual avec les mêmes parties équicontinues. Donc que toute partie A de $\prod_i B(E_i , F)$ qui est produit d'ensembles $A_i \subset B(E_i , F)$ qui sont des ensembles équicontinus de formes bilinéaires, est un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $(\sum_i E_i) \otimes F$. Mais soit, pour tout $i \in I$, V_i un voisinage de 0 dans E_i tel que $|u_i(V_i, B)| \leqslant 1$ pour tout $u_i \in A_i$, B étant la boule unité de F supposé normé ; soit V l'enveloppe convexe cerclée des V_i dans $\sum_i E_i$, c'est un voisinage de 0, et on a manifestement $|u(V,B)| \leqslant 1$ pour tout $u \in A$, d'où le résultat dans ce cas. On procède de façon analogue quand I est dénombrable et F du type $(\mathcal{DF})$, en utilisant le fait que pour toute suite (B_i) de voisinages de 0 dans F, il existe un voisinage de 0 fixe qui est absorbé par chaque B_i par une homothétie assez petite ([9], lemme 2).

COROLLAIRE. - *Soit* E *un espace localement convexe séparé, limite inductive d'une famille* $(E_i)_{i \in I}$ *de sous-espaces vectoriels* E_i (*munis de topologies localement convexes* T_i), F *un espace localement convexe* ; *on suppose* F *normable*, *ou* I *dénombrable et* F *du type* $(\mathcal{DF})$. *Alors sur le sous-espace vectoriel de* $E \hat{\otimes} F$ *engendré par les images canoniques des espaces* $E_i \hat{\otimes} F$, *la topologie induite par* $E \hat{\otimes} F$ *est identique à la topologie limite inductive des* $E_i \hat{\otimes} F$.

Comme la limite inductive des E_i est aussi isomorphe à un espace quotient de leur somme directe topologique $\sum_i E_i$, le corollaire résulte de l'application successive de la prop.6, 2°, et de la prop.3, 1° (n°2).

Remarque 1. - La conclusion de la prop.6, 2° est en défaut chaque fois que I est infini et que F contient un sous-espace du type $(\mathcal{F})$ non normable ; alors les deux topologies envisagées donnent même des duals distincts. En effet, il existe alors une famille (y'_i) d'éléments de F' telle qu'il n'existe aucune partie équicontinue de F' qui engendre un espace contenant tous les y'_i. Si alors pour tout i on choisit $x'_i \in E'_i$, $x'_i \neq 0$, alors la famille des $x'_i \otimes y'_i$ définit un élément de $\prod_i B(E_i, F)$, dual de $\sum_i (E_i \hat{\otimes} F)$, tandis que la forme bilinéaire sur $(\sum_i E_i) \times F$ qu'elle définit n'est pas continue, comme on vérifie aussitôt.- Une construction analogue peut d'ailleurs se répéter quand la somme directe $\sum_i E_i$ est remplacée par la limite inductive <u>stricte</u> d'une <u>suite</u> strictement croissante d'espaces localement convexes E_i : alors la topologie induite par $E \hat{\otimes} F$ sur la réunion des images canoniques des $E_i \hat{\otimes} F$ est distincte de la topologie limite inductive de ces espaces, et donne même un dual distinct.

PROPOSITION 7. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces localement convexes</u>.

1. <u>Pour que</u> $E \otimes F$ (<u>resp</u>. $E \hat{\otimes} F$) <u>soit quasi-normable</u> ([9], §3, définition 4), <u>il faut et il suffit que</u> E <u>et</u> F <u>le soient</u> (resp. <u>que les complétés de</u> E <u>et</u> F <u>le soient</u>).

2. <u>Pour que</u> $E \otimes F$, <u>ou</u> $E \hat{\otimes} F$, <u>soit un espace de Schwartz</u> ([9], §3, définition 5), <u>il faut et il suffit que</u> E <u>et</u> F <u>le soient</u>.

Démonstration. - Les réciproques sont conséquences immédiates du lemme 3, compte tenu du fait trivial qu'un espace loc. conv. est un espace de Schwartz si et seulement si son complété l'est.- Prouvons d'abord 1°. Soit M une partie équicontinue du dual de $E \otimes F$; il faut trouver un voisinage W de l'origine dans $E \otimes F$ tel que la topologie sur M induite par la topologie forte (du dual de $E \otimes F$, ou de $E \hat{\otimes} F$) soit identique à la topologie de la convergence uniforme sur W. A fortiori suffit-il qu'il en soit ainsi de la topologie T sur M induite par la topologie de la convergence bibornée. Par définition de $E \otimes F$, il existe un voisinage U (resp. V) de l'origine dans E (resp. F) tel que $M \subset (U \otimes V)^\circ$, ce qui signifie que les $u \in M$, interprétés comme applications de E dans F', appliquent U dans V°. T est alors aussi la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de U, pour la topologie forte sur F', et comme $M(U) \subset V^\circ$, on peut remplacer la topologie forte de F' par n'importe quelle autre induisant la même topologie sur V°, donc par la topologie de la convergence uniforme sur un voisinage convenable V_1 de 0 dans F (F étant quasi-normable). On peut supposer $V_1 \subset V$, et interpréter ensuite M comme un ensemble d'applications linéaires de F dans E', muni de la topologie de la convergence uniforme sur V_1, pour la topologie forte de E', et répéter le même raisonnement, qui fournit un voisinage U_1 de 0 dans E tel que la topologie T sur M soit identique à la topologie de la convergence uniforme sur $U_1 \times V_1$, i.e. la topologie de la convergence uniforme sur le voisinage $W = \Gamma(U_1 \otimes V_1)$ de 0 dans $E \otimes F$, ce qui prouve 1°.- Si E et F sont même des espaces de Schwartz, on peut dans ce qui précède supposer que U_1 est précompact pour la topologie T_U (non nécessairement séparée) définie par l'unique voisinage U de l'origine (U étant supposé convexe cerclé). Comme les $u \in M$ forment encore un ensemble uniformément équicontinu d'applications de E muni de T_U dans la partie compacte V° de F', il résulte du th. d'Ascoli que M est précompact (pour la topologie T de la convergence uniforme sur l'ensemble U_1, précompact pour T_U). Il en résulte que $E \otimes F$ et $E \hat{\otimes} F$ sont des espaces de Schwartz ([9], § 3, Prop.17).

Remarque 2. - On fera attention que le produit tensoriel complété de deux espaces de Banach réflexifs n'est en général pas réflexif. Il ne l'est jamais, par exemple, pour deux espaces de Hilbert de dimension infinie E et F, car il est facile de construire une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans l'espace ℓ^1 des suites sommables, appliquant le produit des boules unités sur la boule unité de ℓ^1 (et n'induisant donc pas une application faiblement compacte de $E \hat{\otimes} F$ dans ℓ^1) : il suffit d'utiliser l'application $((x_i), (y_i)) \rightarrow (x_i y_i)$ de $\ell^2 \times \ell^2$ sur ℓ^1.- On notera aussi que le produit tensoriel projectif complété de deux espaces de Hilbert de dimension infinie est strictement plus petit que le produit tensoriel hilbertien classique (l'un et l'autre correspondant resp. aux opérateurs à trace et aux opérateurs de Hilbert Schmidt entre E et F ; voir [8], [21] ou [11]).

4. Produit tensoriel topologique projectif de plusieurs espaces.

Il est immédiat que la prop. 1 et la définition 1, ainsi que la prop. 2 et la définition 2, s'étendent de façon évidente au produit d'un nombre fini quelconque d'espaces localement convexes (éventuellement normés). Par la suite, si E_i ($i = 1, \dots n$) sont n espaces localement convexes, on supposera toujours, sauf indication expresse du contraire, leur produit tensoriel algébrique $\bigotimes_i E_i$ muni de la topologie produit tensoriel projectif des topologies des espaces E_i ; son complété sera noté $\hat{\bigotimes}_i E_i$. Avec ces notations, toutes les considérations développées jusqu'ici s'étendent au cas du produit tensoriel topologique (projectif) de plusieurs espaces localement convexes, pourvu qu'elles gardent encore un sens. Il en est ainsi du Scholie du n°1, du lemme 1, des considérations qui accompagnent l'énoncé du "Problème des topologies" et du "Problème de biunivocité", de la définition du produit tensoriel d'applications linéaires continues et des propositions 3 et 4 qui régissent cette notion, des "propriétés de permanence" exprimées dans les propositions 5, 6, 7. Enfin, le th.1 ci-dessous (§1) qui donne l'expression des éléments du produit tensoriel complété de deux espaces du type ($\mathcal{F}$) s'étend immédiatement au cas d'un nombre fini d'espaces facteurs. Par la suite, nous ne signalerons plus les généralisations dans ce sens des résultats obtenus.

Il convient encore de noter une propriété "d'associativité" parfois utile, et d'ailleurs triviale grâce à la 2° caractérisation des voisinages de zéro dans un produit tensoriel topologique (prop. 2, 2°) : $\widehat{\bigotimes}_{1\leq i\leq n} E_i$ est isomorphe au produit tensoriel $(\widehat{\bigotimes}_{1\leq i\leq p} E_i) \hat{\otimes} (\widehat{\bigotimes}_{p<i\leq n} E_i)$ (il suffit de noter que ces espaces induisent la même topologie sur $\bigotimes_{1\leq i\leq n} E_i$ identifié de la façon usuelle à $(\bigotimes_{1\leq i\leq p} E_i) \otimes (\bigotimes_{p<i\leq n} E_i)$). Toute aussi triviale est la "commutativité" de l'opération produit tensoriel : si σ est une permutation de n indices ordonnés, alors il existe un isomorphisme naturel, noté $u \to \sigma u$, de $\bigotimes_{1\leq i\leq n} E_i$ sur $\bigotimes_{1\leq i\leq n} E_{\sigma^{-1}(i)}$, donné par $\sigma(\bigotimes_{1\leq i\leq n} x_i) = \bigotimes_{1\leq i\leq n} x_{\sigma^{-1}(i)}$.

§ 2. DEUX CAS SPÉCIAUX

1. Produit tensoriel de deux espaces du type $(\mathcal{F})$.

Un résultat fondamental dans la théorie est le

THÉORÈME 1. - Soient E et F deux espaces du type $(\mathcal{F})$

1. Tout élément $u \in E \hat{\otimes} F$ est somme d'une série absolument convergente[15]

$$(5) \quad u = \sum_i \lambda_i \, x_i \otimes y_i$$

où (λ_i) est une suite de scalaires tels que $\sum_i |\lambda_i| \leq 1$, (x_i) une suite tendant vers zéro dans E, (y_i) une suite tendant vers zéro dans F.

2. Si u parcourt une partie compacte K_0 de $E \hat{\otimes} F$, on peut supposer dans (5) que les suites (x_i) et (y_i) sont fixes et que la suite variable (λ_i) reste dans une partie compacte de la boule unité de ℓ^1 (espace des suites sommables). Si U (resp. V) est un voisinage ouvert convexe cerclé de l'origine dans E (resp. F) tels que $K_0 \subset \Gamma(U \otimes V)$, on peut supposer chaque suite (x_i), (y_i) extraite de U resp. V.

3. Si E et F sont normés, tout $u \in E \hat{\otimes} F$ est de la forme (5) où $\|x_i\| \leq 1$, $\|y_i\| \leq 1$, $\sum_i |\lambda_i| \leq \|u\|_1 + \varepsilon$ (où ε peut être donné arbitrairement). Si u parcourt un compact K de $E \hat{\otimes} F$, on peut supposer que

15. Pour la définition, voir n°2.

dans (5) *les suites* (x_i), (y_i) *sont fixes dans la boule unité de* E *resp.* F *et que* (ε *étant donné*) $\lambda = (\lambda_i)$ *parcourt une partie compacte de* ℓ^1, *avec* $\sum_i |\lambda_i| \leqslant M + \varepsilon$, où $M = \sup_{u \in K} \|u\|_1$.

Comme conséquences immédiates de 2°, signalons tout de suite le

COROLLAIRE 1. - E *et* F *étant deux espaces du type* $(\mathcal{F})$, *toute partie compacte de* $E \hat{\otimes} F$ *est contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble* $A \otimes B$, *ou* A (*resp.* B) *est une partie compacte de* E (*resp.* F) *ou encore dans l'image canonique de la boule unité d'un espace* $E_A \hat{\otimes} F_B$ (A *et* B *comme ci-dessus*). *Sur* B(E,F), *la topologie de la convergence bicompacte est identique à la topologie de la convergence compacte du dual de* $E \hat{\otimes} F$.

D'ailleurs, tenant compte du th. 5 de [7], on obtient aussi la généralisation suivante du résultat cité :

COROLLAIRE 2. - *Soient* E *et* F *deux espaces du type* $(\mathcal{F})$. *Sur* B(E,F), *la topologie de la convergence bicompacte est la topologie la plus fine sur cet ensemble qui induise la topologie faible sur ses parties équicontinues* (*topologie faible pour la dualité avec* $E \otimes F$ *ou avec* $E \hat{\otimes} F$ - *ce qui revient au même par raison d'équicontinuité*).

Des variantes de ces résultats seront vues avec la prop. 21 du §4 et ses corollaires. Notons que le corollaire 2 ci-dessus pourrait se démontrer directement par la méthode du th. 5 de [7], et il est possible de déduire de cette démonstration une autre preuve du th. 1, mais de portée moins générale (la démonstration que nous donnons ici s'applique aux espaces normés sur les corps valués complets généraux, et aux généralisations de $E \hat{\otimes} F$ aux espaces $E \overset{(p)}{\otimes} F$ et $E \overset{[p]}{\otimes} F$ du chap. 2 §1 (voir th. 1 et th. 2 du chap. 2).

Démonstration du th. 1. Il suffit manifestement de prouver 2°, qui généralise à la fois 1° et 3°. Soit (p_α) (resp. (q_α)) une suite fondamentale croissante de semi-normes continues dans E (resp. F). Posons

$I = E_* \times F_*$ (où $E_* = E \cap \complement\{0\}$, $F_* = F \cap \complement\{0\}$), I sera considéré comme un espace discret. Soient $i \to x_i$ et $i \to y_i$ ses projections sur E_* resp. F_*. Pour tout indice α, soit μ_α la fonction $i \to p_\alpha(x_i)\, q_\alpha(y_i)$ sur I considérée comme une mesure sur l'espace discret I, et soit Λ l'espace des fonctions scalaires $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I}$ sur I qui sont sommables pour chacune des μ_α, muni de la topologie définie par la suite des semi-normes

$$\|\lambda\|_\alpha = \sum_{i \in I} |\lambda_i| \mu_\alpha(i)$$

On s'assure aussitôt que Λ est un espace du type $(\mathcal{F})$. Pour tout $\lambda = (\lambda_i) \in \Lambda$, la série $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \otimes y_i$ dans $E \hat{\otimes} F$ converge absolument, car les produits tensoriels $u \to \|u\|_\alpha$ des semi-normes p_α et q_α définissent la topologie de $E \hat{\otimes} F$, et on a $\sum_{i \in I} \|\lambda_i x_i \otimes y_i\|_\alpha \leqslant \sum_i |\lambda_i|\, p_\alpha(x_i)\, q_\alpha(y_i) = \sum_i |\lambda_i| \mu_\alpha(i) = < +\infty$. On a donc une application linéaire naturelle $\lambda \to \varphi(\lambda) = \sum_i \lambda_i\, x_i \otimes y_i$ de Λ dans $E \hat{\otimes} F$, continue puisque $\|\varphi(\lambda)\|_\alpha \leqslant \|\lambda\|$. <u>C'est même là un homomorphisme de</u> Λ <u>sur</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>appliquant l'ouvert</u> $\|\lambda\|_\alpha < 1$ <u>de</u> Λ <u>sur l'ouvert</u> $\|u\|_\alpha < 1$ <u>de</u> $E \hat{\otimes} F$. Soit en effet $\Lambda_\circ$ le sous espace dense de Λ formé des familles (λ_i) pour lesquelles λ_i est nul sauf au plus pour un nombre fini d'indices ; l'application $\lambda \to \varphi(\lambda)$ induit évidemment une application linéaire de $\Lambda_\circ$ <u>sur</u> $E \otimes F$, et la définition même de la semi-norme $\|u\|_\alpha$, produit tensoriel de p_α et q_α (voir prop. 1 formule (1)), montre que ce n'est autre que la norme quotient de la norme $\|\lambda\|_\alpha$ sur $\Lambda_\circ$ par le noyau N de l'application $\lambda \to \varphi(\lambda)$. Notons maintenant le

LEMME 4 bis. - <u>Soit</u> Λ <u>un espace localement convexe</u>, $\Lambda_\circ$ <u>un sous-espace vectoriel dense</u>, φ <u>une application linéaire continue de</u> Λ <u>dans un espace localement convexe P, induisant un homomorphisme topologique de</u> $\Lambda_\circ$.

<u>Alors</u> φ <u>est un homomorphisme topologique</u>. <u>Si de plus</u> $\varphi(\Lambda) = P$ <u>et si</u> W <u>est un voisinage ouvert convexe cerclé de</u> 0 <u>dans</u> Λ, <u>alors</u> $\varphi(W)$ <u>est identique à l'intérieur de</u> $\overline{\varphi(W_o)}$, <u>où</u> $W_o = W \cap \Lambda_o$.

Dans le cas actuel, Λ étant du type $(\mathcal{F})$, donc tout espace quotient de Λ du type $(\mathcal{F})$, donc complet, et $\varphi(\Lambda_o)$ étant dense dans $P = E \mathbin{\hat{\otimes}} F$, il s'ensuivra que φ applique Λ sur $E \mathbin{\hat{\otimes}} F$, et l'ouvert $\|\lambda\|_\alpha < 1$ sur l'ouvert $\|u\|_\alpha < 1$. - La démonstration du lemme est facile : la première partie résulte par exemple immédiatement de la caractérisation des homomorphismes donnée dans la note 9 p. 38. De plus, sous les hypothèses de la seconde partie du lemme, comme on a $W \subset \overline{W_o}$, on a

$$\varphi(W) \subset \varphi(\overline{W_o}) \subset \overline{\varphi(W_o)}.$$

Comme d'autre part $\varphi(W)$ est ouvert (en vertu de la première partie) et contenu dans $\overline{\varphi(W_o)}$, pour prouver que le premier ensemble est exactement l'intérieur du second, il suffit de montrer que $\overline{\varphi(W)} = \overline{\varphi(W_o)}$, i.e. $\overline{\varphi(W)} \supset \overline{\varphi(W_o)}$, ce qui est évident puisque $\varphi(W_o) \subset \varphi(W)$.

Soit maintenant K_o une partie compacte de $E \mathbin{\hat{\otimes}} F$ contenue dans la boule ouverte $\|u\|_o < 1$, il résulte d'une proposition générale bien connue (voir lemme 6 plus bas) qu'il existe une partie compacte K dans Λ, contenue dans la boule ouverte $\|\lambda\|_o < 1$, dont l'image dans $E \mathbin{\hat{\otimes}} F$ soit K_o. K étant compact, donc séparable, il existe une partie dénombrable J de I telle que K soit contenu dans le sous-espace Λ_J de Λ formé des (λ_i) tels que $\lambda_i = 0$ pour $i \in \complement J$. Admettons pour l'instant le lemme élémentaire suivant (dont nous aurons besoin plus bas sous la forme générale que nous lui donnons ici) :

LEMME 5. - <u>Soit</u> (μ_α) $(\alpha = 0,1,..)$ <u>une suite de suites positives</u> $i \to \mu_\alpha(i)$ $(i = 1,...)$ <u>telles que pour tout</u> i, <u>existe un</u> α <u>avec</u> $\mu_\alpha(i) \neq 0$, <u>et soit</u> $0 < p < +\infty$. <u>Considérons l'espace</u> Λ <u>des suites</u> (λ_i) <u>qui sont de puissance p.ième sommable pour toute</u> μ_α, <u>muni de la topologie définie par la suite des semi-normes</u>

$\|\lambda\|_\alpha = (\sum_i |\lambda_i|^p \mu_\alpha(i))^{1/p}$ si $p \geqslant 1$, <u>par la suite des "écarts à l'origine"</u> (voir [4], §3, n°1) $S_\alpha(\lambda) = \sum_i |\lambda_i|^p \mu_\alpha(i)$ <u>si</u> $p < 1$. Λ <u>est un espace vectoriel topologique métrisable complet</u>. <u>Si</u> K <u>est une partie compacte de</u> Λ, <u>il existe une suite</u> $i \to \mu(i)$ <u>telle que</u> $\lim_{i\to\infty} \frac{\mu_\alpha(i)}{\mu(i)} = 0$ <u>pour tout</u> α, <u>et telle que</u> K <u>soit une partie compacte de l'espace</u> $\ell^p(\mu)$ <u>des suites de puissance p.ième sommable pour</u> μ.

Il en résulte dans le cas actuel qu'il existe une partie compacte K_1 de l'espace ℓ^1 ordinaire, telle que toute $\lambda = (\lambda_i) \in K$ soit de la forme $\lambda_i = \rho_i/\mu(i)$, ou $\rho = (\rho_i) \in K_1$. (Nous identifions maintenant J à l'ensemble des entiers > 0). On aura donc, pour $u \in K_0$

(6) $u = \sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i = \sum_i \frac{\rho_i}{\mu(i)} x_i \otimes y_i$

où $\rho = (\rho_i) \in K_1$. On a $p_\alpha(x_i)q_\alpha(y_i)/\mu(i) = \mu_\alpha(i)/\mu(i) \to 0$ pour $i \to +\infty$ Soit alors $i_0, i_1, \ldots, i_\alpha, \ldots$ une suite strictement croissante d'indices telle que l'on ait, pour $i \geqslant i_\alpha$, $\mu_\alpha(i)/\mu(i) < 1/\alpha^2$. On peut supposer que $i_0 = 1$, en changeant au besoin les premiers termes de la suite μ, ce qui est loisible. On a alors

(7) $\frac{1}{\mu(i)} x_i \otimes y_i = a_i \otimes b_i$ pour $i_\alpha \leqslant i < i_{\alpha+1}$

où $p_\alpha(a_i) = q_\alpha(b_i) = (\frac{1}{\mu(i)} p_\alpha(x_i)q_\alpha(y_i))^{1/2}$

Il vient donc, pour $u \in K_0$

(8) $u = \sum_i \rho_i a_i \otimes b_i$

où $\rho = (\rho_i) \in K_1$, et où (a_i) (resp. (b_i)) est une suite dans E (resp. F) <u>qui tend vers zéro</u> ; car pour α donné et pour $i \geqslant i_\beta$, où $\beta \geqslant \alpha$, on a $i_\gamma \leqslant i < i_{\gamma+1}$ pour quelque $\gamma \geqslant \beta$, d'ou $p_\alpha(a_i) \leqslant p_\gamma(a_i) \leqslant \frac{1}{\gamma} \leqslant \frac{1}{\beta}$. On a de plus $p_0(a_i) < 1$, $q_0(b_i) < 1$. Montrons enfin que l'on peut supposer que l'on a $\sum_i |\rho_i| \leqslant 1$ pour tout $\rho \in K_1$. On a évidemment par définition pour tout $\lambda \in K$: $\sum_i |\lambda_i| p_o(x_i)q_o(y_i) \leqslant M < 1$, où M est fixe, ce qui donne $\sum_i |\rho_i| p_o(a_i)q_o(b_i) \leqslant M < 1$. Soit $\varepsilon = (1-M)/4$; K_1 étant une partie compacte de ℓ^1, il existe un indice n tel que $\sum_{i>n} |\rho_i| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\rho \in K_1$, d'où

$$(9) \quad \sum_{i>n} |\rho_i| \leqslant \varepsilon \text{ et } \sum_{i \leqslant n} |\rho_i| p_o(a_i)q_o(b_i) \leqslant M + \varepsilon \text{ pour } \rho \in K_1.$$

Soit J_o l'ensemble des indices $1 \leqslant i \leqslant n$ tels que $p_o(a_i)q_o(b_i) \neq 0$, J_1 l'ensemble de ceux pour lesquels $p_o(a_i)q_o(b_i) = 0$. On peut supposer que pour $i \in J_o$, on a $p_o(a_i) = q_o(b_i) = k$ où $k = (M+\varepsilon)/(M+2\varepsilon) < 1$, en remplaçant au besoin a_i par $ka_i/p_o(a_i)$, b_i par $kb_i/q_o(b_i)$, ρ_i par $\frac{1}{k^2} p_o(a_i)q_o(b_i)\rho_i$ pour $i \in J_o$, ce qui est loisible, car cela revient à faire sur l'ensemble des $\rho = (\rho_i) \in K_1$ une transformation induite par une transformation linéaire continue de ℓ^1, ce qui transforme donc K_1 en un autre compact ; et on continue à avoir $p_o(a_i) < 1$, $q_o(b_i) < 1$, $a_i \to 0$, $b_i \to 0$, la relation (8) et la première inégalité (9). On déduit alors de (9) : $\sum_{i \in J_o} |\rho_i| \leqslant M + 2\varepsilon$. D'autre part, on peut supposer que l'on a, pour $\rho \in K_1$, $\sum_{i \in J_1} |\rho_i| \leqslant \varepsilon$, car autrement on remplacerait pour $i \in J_1$, si par exemple $p_o(a_i) = 0$, a_i par Ra_i et ρ_i par $(1/R)\rho_i$ (ce qui est encore loisible, car on aura encore $p_o(Ra_i) = Rp_o(a_i) = 0 < 1$), où R est choisi assez grand pour que l'on ait $1/R \sum_{i \in J_1} |\rho_i| \leqslant 1$ pour tout $\rho \in K_1$.- Si les conditions précédentes sont vérifiées, alors on aura bien

$$\sum_{1 \leqslant i < \infty} |\rho_i| \leqslant M + 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 1$$

pour tout $\rho \in K_1$ en vertu de (9) et ce qui précède. Le th.1 se trouve par là démontré, car on pouvait choisir la suite fondamentale de semi-normes (p_α) (resp. (q_α)) telle que l'ouvert $p_o(x) < 1$ (resp. l'ouvert $q_o(y) < 1$) soit précisément l'ouvert U (resp. V) donné.

Il reste seulement à reporter la démonstration du lemme 5 et l'énoncé d'un lemme 6.

Démonstration du lemme 5. - Il est immédiat que l'on peut supposer la suite des "mesures" μ_α croissante. Comme pour tout $\alpha \geqslant 0$, K est à fortiori compact dans l'espace $\ell^p(\mu_\alpha)$ construit sur μ_α, il résulte d'un critère de compacité bien connu que l'on peut trouver un indice i_α tel que $\sum_{i > i_\alpha} |\lambda_i|^p \mu_\alpha(i) \leqslant 4^{-\alpha}$ pour tout $\lambda \in K$. Supposons la suite des i_α strictement croissante, et définissons, pour $i_\alpha \leqslant i < i_{\alpha+1}$, $\mu(i) = 2^\alpha \mu_\alpha(i)$, et $\mu(i) = 1$ pour $i < i_0$. Alors on a, pour tout $\lambda \in K$;

$$\sum_{i \geqslant i_\alpha} |\lambda_i|^p \mu(i) = \sum_{\beta \geqslant \alpha} \Big(\sum_{i_\beta \leqslant i < i_{\beta+1}} |\lambda_i|^p \mu(i) \Big) \leqslant \sum_{\beta \geqslant \alpha} 2^\beta\, 4^{-\beta} = 2^{-\alpha+1},$$

d'où suit aussitôt que $K \subset \ell^p(\mu)$, que K est borné dans l'espace métrique $\ell^p(\mu)$ et même que K est relativement compact dans $\ell^p(\mu)$. Enfin on a évidemment, pour tout α, $\lim_{i \to \infty} \mu_\alpha(i)/\mu(i) = 0$

Enfin à toutes fins utiles, nous donnons sans démonstration l'énoncé suivant, sans doute bien connu, et dont nous avons utilisé un cas particulier :

LEMME 6. - Soit E un espace uniforme métrisable complet, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence ouverte dans E, φ l'application canonique de E sur $E/\mathcal{R}$, U une partie ouverte de E. Alors toute partie compacte de $\varphi(U)$ est l'image canonique d'une partie compacte de U. Toute suite convergente dans $\varphi(U)$ est l'image canonique d'une suite convergente dans U.

Remarque 4. - La démonstration du th. 1, avec utilisation de la seconde partie du lemme précédent, montre que si (u_j) est une suite dans $E \hat{\otimes} F$ qui converge vers zéro, alors dans la représentation (5) des éléments de cette suite, on peut supposer encore que les suites (x_i), (y_i) sont fixes dans E, resp. F, et que les $\lambda^{(j)} = (\lambda_i^{(j)})$ qui correspondent aux u_j forment une suite qui converge vers zéro dans ℓ^1.- Notons aussi que la démonstration du th. 1 ne serait pas essentiellement changée si on assujettit dans l'énoncé les x_i et y_i à être pris dans un sous-espace vectoriel dense de E resp. F donné à l'avance.

Remarque 5. - Le th.1, 1° est assez spécial au produit tensoriel complété de deux espaces du type ($\mathcal{F}$), et est en défaut, en général pour le produit tensoriel complété de deux espaces non normables dont l'un est du type ($\mathcal{F}$), l'autre du type ($\mathcal{DF}$). Il est par exemple en défaut, chaque fois que E est un espace ($\mathcal{F}$) nucléaire de dimension infinie (Chap. 2, définition 4) et F son dual fort, car nous verrons (Chap. 2, th. 6) que $E \hat{\otimes} E'$ est alors identique à $L_b(E,E)$, tandis que les opérateurs qui peuvent se représenter par des séries $\sum_i \lambda_i x_i \otimes x'_i$ comme dans le th. 1 sont les opérateurs bornés (ou encore les opérateurs de Fredholm) dans E. Le lecteur pourra s'en convaincre ici sur l'exemple où E est le produit vectoriel topologique d'une suite de droites.

Le th.1, 1° peut aussi être en défaut pour le produit tensoriel complété de deux espaces du type ($\mathcal{DF}$), dont l'un peut même être un espace normable, (par exemple l'espace L^1 classique) et l'autre un espace du type ($\mathcal{M}$) (§4, n°3, Remarque 11). Cependant il semble que du moins dans les cas les plus importants, l'énoncé du th.1, 1° reste valable pour deux espaces du type ($\mathcal{DF}$). Des résultats positifs dans ce sens sont donnés plus bas (n°2, prop. 11 ; §4, n°4, remarque 13, chap.2, §3, n°2, prop.12).

2. Produit tensoriel topologique avec un espace L^1.

Soit M un espace localement compact muni d'une mesure positive μ, soit $L^1(\mu) = L^1$ l'espace des fonctions sommables construit sur μ, muni de sa norme usuelle. Si E est un espace de Banach, on désigne par $L^1_E(\mu)$ ou L^1_E l'espace des fonctions vectorielles f absolument sommables pour μ à valeurs dans E, muni de sa norme $\|f\|_1 = \int \|f(t)\| d\mu(t)$. C'est aussi le complété de l'espace des fonctions vectorielles continues à support compact sur M, à valeurs dans E, muni de la semi-norme correspondante.

Plus généralement, soit E un espace localement convexe quelconque. Pour toute semi-norme continue p_α sur E, soit E_α l'espace de Banach complété de l'espace quotient de E par le sous-espace des x tels que $p_\alpha(x) = 0$, muni de la norme obtenue à partir de p_α par passage au quotient norme encore notée p_α ; soit u_α l'application canonique de E dans E_α. Une application f de M dans E est dite <u>absolument sommable</u> si pour toute semi-norme continue p_α sur E, $u_\alpha \circ f$ est une application absolument sommable de M dans l'espace de Banach E_α. Munissons l'espace de toutes les applications absolument sommables de M dans E de la famille des semi-normes $\|f\|_1^{p_\alpha} = \int p_\alpha(f(t))\, d\mu(t)$ et soit $\Lambda^1_E(\mu)$ l'espace localement convexe séparé associé à cet espace. Il est immédiat que les fonctions continues à support compact (à valeurs dans E) définissent un sous-espace dense de $\Lambda^1_E(\mu) = \Lambda^1_E$ (on est ramené aussitôt au cas où E est un espace de Banach), et que lorsque E est du type $(\mathcal{F})$, alors Λ^1_E est complet. De toutes façons, si E est un espace localement convexe, on désigne par $L^1_E(\mu)$ le complété de <u>l'espace</u> $\Lambda^1_E(\mu)$ <u>des fonctions absolument sommables pour</u> μ <u>à valeurs dans</u> E. C'est aussi le complété de l'espace des fonctions continues à support compact sur M, à valeurs dans E, muni de la famille des semi-normes $\|f\|_1^{p_\alpha}$ (à condition de se permettre le cas échéant de considérer l'espace complété d'un espace non séparé !).

Si $\varphi \in L^1$, $a \in E$, soit $\varphi.a$ l'élément de L^1_E défini par

$$(10) \qquad \varphi.a\,(t) = \varphi(t)\, a$$

Comme on a manifestement $\|\varphi.\, a\|_1^{p_\alpha} \leqslant \|\varphi\|_1 p_\alpha(a)$, l'application bilinéaire $(\varphi,a) \to \varphi.a$ de $L^1 \times E$ dans L^1_E est continue, donc définit une application linéaire continue naturelle de $L^1 \hat{\otimes} E$ dans L^1_E. Cela posé, on a le

THÉORÈME 2. – <u>L'application linéaire naturelle de</u> $L^1 \hat{\otimes} E$ <u>dans</u> L^1_E <u>est un isomorphisme vectoriel-topologique du premier espace sur le second. Si</u> E <u>est normé, cet isomorphisme conserve les normes.</u>

Démonstration. - Tout d'abord les combinaisons linéaires d'éléments $\varphi.a$ sont denses dans L^1_E , car les fonctions continues à support compact y sont denses, et d'autre part il est bien connu que toute fonction continue à support compact, à valeurs dans E, peut s'approcher uniformément par des combinaisons linéaires de fonctions $\varphi_i.a_i$, où les φ_i sont continues et nulles en dehors d'un compact fixe ; cela donne à fortiori une approximation au sens de L^1_E. Il suffit donc de prouver que l'on a, pour toute $u \in L^1 \otimes E$, $\|\tilde{u}\|_1^{p_\alpha} = \|u\|_\alpha$, où $\tilde{u}$ est l'image de u dans $L^1{}_E$ et ou $u \to \|u\|_\alpha$ désigne la semi-norme produit tensoriel de la norme de L^1 par p_α. On est alors aussitôt ramené au cas où E est un espace de Banach. Il suffit de prouver $\|\tilde{u}\|_1 \leqslant \|u\|_1$. Comme il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie E_0 de E tel que $u \in L^1 \otimes E_0$, on est aussitôt ramené au cas où E est de dimension finie. Notre inégalité revient à prouver que toute forme bilinéaire continue $B(\varphi,a)$ sur $L^1 \times E$ est de la forme $\tilde{B}(\varphi.a)$, où $\tilde{B}$ est une forme linéaire continue sur $L^1{}_E$ de norme au plus égale à $\|B\|$. Mais d'après le théorème de Dunford-Pettis (voir [5]), valable quand E est séparable, B est de la forme $B(\varphi,a) = \langle a, \int \varphi(t)F(t)d\mu(t)\rangle$ où $t \to F(t)$ est une application faiblement mesurable de M dans E' telle que $\|F(t)\| \leqslant \|B\|$ pour tout t. On a donc $B(\varphi,a) = \int\langle \varphi(t)a, F(t) \rangle \, d\mu(t) = \tilde{B}(\varphi.a)$, où $\tilde{B}$ est la forme linéaire sur L^1_E donnée par $\tilde{B}(f) = \int\langle f(t), F(t) \rangle \, d\mu$. Comme manifestement $\|\tilde{B}\| \leqslant \|B\|$, le th. 2 est démontré.

COROLLAIRE 1. - <u>Soient</u> E <u>un espace de Banach</u>, $f \in L^1{}_E$, $\varepsilon > 0$, <u>alors il existe une suite</u> (φ_i) (<u>resp</u>. (a_i)) <u>dans la boule unité de</u> L^1 (<u>resp. de</u> E), <u>et une suite</u> (λ_i) <u>de nombres positifs</u>, <u>telles que</u> $\sum_i |\lambda_i| \leqslant \|f\|_1 + \varepsilon$, $f = \sum_i \lambda_i \, \varphi_i \otimes a_i$.

(On aurait évidemment un résultat analogue si E était du type $(\mathcal{F})$).

COROLLAIRE 2. - <u>L'application linéaire canonique de</u> $L^1 \otimes E$ <u>dans</u> $\mathcal{L}(L^\infty, E')$ (E <u>étant un espace localement convexe complet quelconque</u>) <u>est biunivoque</u>.

On est ramené en effet au cas où E est un espace de Banach (§ 1, n°1, "Problème de biunivocité"), et c' est alors une conséquence immédiate du th. 2. (Il existe bien entendu des démonstrations tout à fait élémentaires de ce corollaire, voir §5, prop. 36, corollaire, 3°). Voici un corollaire plus essentiel

COROLLAIRE 3. - Soit E un espace de Banach, F un sous espace vectoriel fermé, alors l'application linéaire canonique de $L^1 \hat{\otimes} F$ dans $L^1 \hat{\otimes} E$ est un isomorphisme d'espaces normés. Si E est un espace localement convexe quelconque, on obtient un isomorphisme topologique.

C'est une conséquence immédiate du th. 2.- Il revient d'ailleurs au même, en vertu de la prop.4, 3°, de dire que toute application linéaire continue de F dans le dual L^∞ de L^1 se prolonge en une application linéaire continue de E dans L^∞ ayant même norme : on retrouve une propriété classique de l'espace L^∞, due à L. Nachbin [20]. D'ailleurs cela signifie manifestement aussi que toute application linéaire continue de L^1 dans le quotient E'/F° d'un dual d'espace de Banach E par un sous-espace vectoriel faiblement fermé F° s'obtient à partir d'une application linéaire de norme égale de L^1 dans E'.

Réciproquement si L est un espace de Banach tel que pour tout espace de Banach E et tout sous-espace vectoriel fermé F de E, l'application linéaire naturelle de $L \hat{\otimes} F$ dans $L \hat{\otimes} E$ soit un isomorphisme d'espaces normés, c'est-à-dire tel que le dual de L possède la "propriété de prolongement" de L. Nachbin, il résulte de [20] que L' est isomorphe avec sa norme à un espace $\mathcal{C}(K)$ construit sur un espace compact "stonien" K convenable. Il semble plausible que cela implique déjà que L soit isomorphe avec sa norme à un espace $L^1(\mu)$ construit sur une mesure μ convenable.

COROLLAIRE 4. - Soit M (resp. N) un espace localement compact muni d'une mesure positive μ (resp. ν). Alors le produit tensoriel topologique *complété* $L^1(\mu) \hat{\otimes} L^1(\nu)$ *s'identifie à l'espace* $L^1(\mu \otimes \nu)$, *où* $\mu \otimes \nu$ *est la mesure sur* $M \times N$ *produit direct de* μ *et* ν. *L'espace normé des formes bilinéaires continues sur* $L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ – *ou des applications linéaires continues de* $L^1(\mu)$ *dans* $L^\infty(\nu)$ – *s'identifie à l'espace normé* $L^\infty(\mu \otimes \nu)$.

En effet, il est bien connu que l'espace $L^1_E(\mu)$, où $E = L^1(\nu)$, s'identifie à l'espace $L^1(\mu \otimes \nu)$, ce qui établit la première partie moyennant le th.2. Comme le dual de $L^1(\mu \otimes \nu)$ s'identifie avec sa norme à $L^\infty(\mu \otimes \nu)$, la deuxième partie du corollaire n'est qu'une autre formulation de la première partie. C'est évidemment un cas particulier du th. de Dunford-Pettis, mais établi ici sans hypothèse de séparabilité.- Conjuguant ce résultat avec la propriété de prolongement vue en marge du corollaire 3, on obtient le

COROLLAIRE 5. - *Soit* M *un espace localement compact muni d'une mesure positive* μ, E *un espace de Banach isomorphe avec sa norme à un sous-espace vectoriel d'un espace* $L^1(\nu)$ *construit sur quelque mesure* ν. *Alors le th. de Dunford-Pettis, pour la représentation des applications linéaires continues de* $L^1(\mu)$ *dans* E', *est ici valable* (*sans condition de séparabilité*).

Voici une autre variante utile du th. de Dunford-Pettis, et ne faisant pas intervenir d'hypothèse de séparabilité :

PROPOSITION 8. - *Soit* M *un espace localement compact muni d'une mesure* μ, N *un espace localement compact quelconque*. *Pour toute application linéaire continue* u *de* $L^1(\mu)$ *dans l'espace* $\mathcal{M}^1(N)$ *des mesures bornées sur* N, *il existe une mesure* ρ *sur* $M \times N$ *et une seule ayant les propriétés suivantes* : a. *Pour toute partie ouverte relativement compacte* U *de* M, $U \times N$ *est de mesure finie pour* $|\rho|$.- *Par suite, la projection de* $M \times N$ *sur* M *transporte la mesure* $|\rho|$ *en une mesure* ρ' *sur* M.

b. *Il existe une constante* $c \geqslant 0$ *telle que* $\rho' \leqslant c\mu$.

c. Pour $f \in L^1(\mu)$ et $g \in \mathcal{C}_0(N)$ (espace des fonctions continues sur N "nulles à l'infini" muni de la norme de la convergence uniforme) on a

$$(11) \quad \langle g, u.f \rangle = \int f(s)g(t)d\rho(s,t)$$

où la fonction $f(s)g(t)$ est sommable pour ρ.

Réciproquement, toute mesure sur $M \times N$ satisfaisant aux conditions a. et b. définit une application linéaire continue u de $L^1(\mu)$ dans $\mathcal{M}^1(N)$ par la formule (11). La norme de u est la meilleure constante c telle que $\rho' \leqslant c\mu$.

Démonstration. - Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur. (On applique le th.2 pour $L^1(\mu)$ et l'espace $C_0(N)$).

Le th. 2 s'applique encore de façon essentielle dans [11]. J'y donne aussi, comme conséquence facile du th. 2, une caractérisation du produit tensoriel normé complété d'un espace de Banach quelconque E avec l'espace $\mathcal{M}^1(M)$ des mesures bornées sur un espace localement compact donné M.- De nombreuses autres applications sont données dans la suite de ce travail.

Remarque 6. - Le th. 2, qui doit être considéré comme une autre formulation du th. de Dunford-Pettis, est comme lui très spécial à l'espace L^1 et comme ce dernier ne se généralise pas aux espaces L^p, $1 < p \leqslant +\infty$, même pour $p = 2$. En particulier, nous avons déjà vu (fin de la remarque 3) que l'analogue pour les espaces L^2 du corollaire 4 ci-dessus est faux (et cela est d'ailleurs encore évident pour la deuxième partie de ce corollaire, qui impliquerait que toute application linéaire continue de $L^2(\mu)$ dans le dual $L^2(\mu)$ de $L^2(\mu)$ serait donnée par un noyau de Hilbert-Schmidt, et serait en particulier compacte !).

Nous développons encore quelques conséquences du th.2. Il nous sera commode d'utiliser la terminologie suivante (développée systématiquement au § 3, n°2) : Si E et F sont deux espaces de Banach, on appelle <u>application nucléaire</u> de E dans F toute application linéaire de E dans F définie par un élément de $E' \hat{\otimes} F$. L'ensemble des applications nucléaires de E dans F s'identifie donc à un espace quotient de $E' \hat{\otimes} F$ (et à $E' \hat{\otimes} F$ dans tous les cas connus, - voir "Problème de biunivocité", § 1, n° 1) ; la norme quotient sera appelée "norme-trace" et notée $u \to \|u\|_1$. (Au § 3, nous définissons la notion d'application nucléaire pour des espaces localement convexes généraux, et la prop. 9 resterait valable dans le cas général).

PROPOSITION 9. - Soit μ une mesure positive sur un espace localement compact M, E un espace de Banach, u une application linéaire continue de E dans $L^1(\mu)$.- Les conditions suivantes sont équivalentes :

a. u est nucléaire.

b. Il existe une application absolument sommable f de M dans E' telle que pour tout $x \in E$, $u.x$ soit la classe de la fonction $t \to \langle x, f(t) \rangle$. Alors $\|u\|_1 = \|f\|_1$, et f est unique.

c. u transforme la boule unité de E en une partie latticiellement bornée et équimesurable A de L^1. (voir Introduction, V). Si $h = \operatorname{Sup}_{\varphi \in A} |\varphi|$, on a $\|u\|_1 = \|h\|_1$.

Comme les applications nucléaires de E dans L^1 s'identifient aux éléments de $L^1 \hat{\otimes} E'$ (th. 2, corollaire 2) l'équivalence de a. et b. est conséquence immédiate du th. 2 - c. est conséquence très facile de b. (utiliser le fait qu'une fonction vectorielle absolument sommable, à valeurs dans un espace de Banach, est fortement mesurable [16]). De plus, on

16. Une application f de M dans un espace E du type ($\mathcal{F}$) est dite fortement mesurable (pour une mesure donnée μ) si elle satisfait à la "condition de Lusin" : pour tout compact $K \subset M$ et tout $\varepsilon > 0$, existe un compact $K_1 \subset M$ tel que $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$, et que la restriction de f à K_1 soit continue.- La fonction f est absolument sommable si et seulement si elle est fortement mesurable, et si $\int p_\alpha(f(t))d\mu(t) < +\infty$ pour toute semi-norme continue p_α.

a évidemment, avec les notations de b. et c., $\|h\|_1 \leqslant \|f\|_1$. Il reste à prouver c. $\Rightarrow$ b. et l'inégalité inverse. Soit (K_i) une suite croissante de parties compactes de M telles que h soit négligeable dans $\complement \bigcup_i K_i$, et que A coïncide sur K_i avec un ensemble équicontinu et uniformément borné A_i de fonctions continues sur K_i. On peut supposer évidemment que la restriction de μ à K_i a pour support K_i ; alors pour toute fonction g, p.p. égale sur K_i à une fonction continue $\tilde{g}$, cette fonction $\tilde{g}$ est unique. Il en résulte que pour tout i il existe une application <u>linéaire</u> continue u_i de E dans $\mathcal{C}(K_i)$, appliquant la boule unité dans A_i, et telle que u.x soit égal à $u_i.x$ p.p sur K_i pour tout $x \in E$. Posons pour tout i : $u_i.x(t) = \langle x, f_i(t)\rangle$ pour $x \in E$, $t \in K_i$, on définit ainsi une application $t \rightarrow f(t)$ de K_i dans E', application qui est continue à cause de l'équicontinuité de A_i. On a $\|f_i(t)\| \leqslant h(t)$ pour tout $t \in K_i$. D'autre part, pour $K_i \subset K_j$, f_i est évidemment la restriction de f_j à K_i. Soit f l'application de M dans E', coïncidant avec f_i sur K_i pour tout i, et nulle dans $\complement \bigcup_i K_i$. f est fortement mesurable par construction et $\|f(t)\| \leqslant h(t)$ pour tout t, d'où résulte que f est absolument sommable, et $\|f\|_1 \leqslant \|h\|_1$. Enfin, il est évident par construction que f définit bien l'application u comme il a été dit dans b., ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. - 1. <u>Soit</u> A <u>une partie bornée convexe cerclée de</u> $L^1(\mu)$. <u>Pour que</u> A <u>soit latticiellement bornée et équimesurable, il faut et il suffit que l'application identique de</u> $(L^1)_A$ <u>dans</u> L^1 <u>soit nucléaire</u>.

2. <u>Pour une suite</u> (f_n) <u>latticiellement bornée et faiblement convergente dans</u> $L^1(\mu)$ <u>il revient au même d'être équimesurable ou de converger p.p. et une telle suite converge fortement</u>.

En effet, la suffisance dans 1° résulte de l'implication a. $\Rightarrow$ c. dans la prop. 9, la nécessité résulte de l'implication inverse. Soit (f_n)

une suite latticiellement bornée et équimesurable convergeant faiblement dans L^1 vers une limite f, et soit (K_i) la suite de compacts envisagée dans la démonstration de la prop. 9. On peut, pour tout f_n, trouver un représentant, noté encore f_n, qui ait une restriction continue à chacun des K_i, et nul dans $\complement \bigcup_i K_i$, et de même f admet un tel représentant, soit f. Soit μ_i la restriction de μ à K_i ; comme on suppose que le support de μ_i est K_i, $\mathcal{C}(K_i)$ se plonge biunivoquement dans $L^1(\mu_i)$. Donc la suite (f_n), qui converge vers f dans $L^1(\mu_i)$ faible et reste dans une partie compacte A_i de $\mathcal{C}(K_i)$, converge vers f uniformément sur K_i. Cela étant vrai pour tout i, (f_n) tend vers f en chaque point. Soit enfin (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant p.p., il résulte alors du th. d'Egoroff qu'elle est uniformément mesurable. Si elle est de plus latticiellement bornée dans L^1, le th. de Lebesgue nous apprend qu'elle converge fortement dans L^1.

La prop. 9 et le corollaire 1 lient une propriété purement vectorielle topologique d'une partie de $L^1(\mu)$ à des propriétés latticielles et des propriétés de mesurabilité. On en déduit la

PROPOSITION 10. - *Soient M, N deux espaces localement compacts munis chacun d'une mesure positive μ resp. ν, soit u une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$.*

1. *Soit A une partie latticiellement bornée de $L^1(\mu)$, alors $u(A) = B$ est une partie latticiellement bornée de $L^1(\nu)$. Si $f = \operatorname{Sup}_{\varphi \in A} |\varphi|$, $g = \operatorname{Sup}_{\psi \in B} |\psi|$, on a $\|g\|_1 \leqslant \|u\| \, \|f\|_1$.*

2. *Soit A une partie latticiellement bornée et équimesurable de $L^1(\mu)$; alors $u(A)$ possède les mêmes propriétés.*

3. *Soit (f_n) une suite dans $L^1(\mu)$, latticiellement bornée et qui converge p.p. vers une $f \in L^1(\mu)$. Alors la suite $(u.f_n)$ est aussi latticiellement bornée et converge p.p. vers $u.f$.*

Démontrons d'abord 2° : Soit B l'enveloppe convexe cerclée de A, u_1 l'application identique de $(L^1(\mu))_B$ dans $L^1(\nu)$, elle est nucléaire (prop. 9, c.$\Longrightarrow$a.), donc $u \circ u_1$ est nucléaire (voir § 3, n° 2) et transforme donc B en une partie latticiellement bornée et équimesurable de $L^1(\nu)$ (prop. 9, a.$\Longrightarrow$c.). 3° en résulte aussitôt, car l'ensemble des f_n satisfait à la condition de 2° (corollaire 1, 2°, de la prop. 9) donc l'ensemble des $u.f_n$ est équimesurable et latticiellement borné en vertu de 2°, et comme $(u.f_n)$ converge vers $u.f$ fortement comme image de la suite fortement convergente (f_n), elle converge aussi p.p. (corollaire 1, 2°, de la prop. 9). Pour prouver enfin 1°, on utilise le fait classique suivant : Soit B une partie de $L^1(\mu)$; pour que B soit latticiellement borné, il faut et il suffit que $M = \operatorname{Sup}_{B'} \| \operatorname{Sup}_{\psi \in B'} |\psi| \|_1 < +\infty$ où B' parcourt l'ensemble des parties finies de B., et si alors on pose $g = \operatorname{Sup}_{\psi \in B} |\psi|$, on a $\|g\|_1 = M$.- Cela nous ramène aussitôt à démontrer le

COROLLAIRE. - Soient $f_1, \dots, f_n$ n éléments de $L^1(\mu)$, posons $f = \operatorname{Sup}_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i|$, $g = \operatorname{Sup}_{1 \leqslant i \leqslant n} |uf_i|$. Alors $\|g\|_1 \leqslant \|u\| \|f\|_1$.

Soit en effet A l'enveloppe convexe cerclée des f_i, on a $|\varphi| \leqslant f$ pour tout $\varphi \in A$, donc l'application identique u_1 de $E = (L^1(\mu))_A$ dans $L^1(\mu)$ est une application nucléaire ayant une norme-trace $\leqslant \|u_1\|_1$ égale à $\|f\|_1$ (prop. 9). Il en résulte que l'application $u \circ u_1$ est une application nucléaire de E dans $L^1(\nu)$ ayant une norme-trace $\leqslant \|u\| \|f\|_1$, d'où aussitôt le corollaire, toujours en vertu de la prop. 9.

Indiquons une variante de la démonstration de prop. 10, 1° et 3°, qui permet d'obtenir bien d'autres résultats. Elle consiste à appliquer le

LEMME 7. - Soit u une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$, E un espace localement convexe. Alors il existe une application linéaire continue $\tilde{u}$ de $L^1_E(\mu)$ dans $L^1_E(\nu)$ et une seule *telle que* $\bar{u}(\varphi.a) = u(\varphi).a$ *pour* $\varphi \in L^1(\mu)$, $a \in E$. *Si* E *est un espace de Banach, on a* $\|\bar{u}\| \leqslant \|u\|$.

En effet, identifiant $L^1_E(\mu)$ à $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ et $L^1_E(\nu)$ à $L^1(\nu) \hat{\otimes} E$ (th. 2) il suffit de prendre $\bar{u} = u \otimes 1$. Notons maintenant le corollaire suivant du th. 2 (de démonstration immédiate) :.

PROPOSITION 11. - *Soit* M *un espace localement compaot muni d'une mesure* $\mu \geqslant 0$.

1. *L'espace* $L^1(\mu) \hat{\otimes} \mathcal{C}_0 = L^1_{\mathcal{C}_0}(\mu)$ *s'identifie avec sa norme à l'espace des suites* (f_n) *dans* $L^1(\mu)$, *latticiellement bornées et convergent presque partout vers zéro, muni de la norme* $\|\operatorname{Sup}_i |f_i|\|_1$.

2. *Soit* $1 \leqslant p < +\infty$. *Alors l'espace* $L^1(\mu) \hat{\otimes} \ell^p = L^1_{\ell^p}(\mu)$ *s'identifie à l'espace des suites* (f_n) *dans* $L^1(\mu)$ *telles que* $N_p((f_n)) = \int (\sum_i |f_i(t)|^p)^{1/p} d\mu(t) < +\infty$, *muni de la norme* $N_p((f_n))$

Du lemme 7 et de la prop. 11, 1°, on déduit immédiatement la prop. 10, 3°, puis la prop. 10, 1°, en procédant comme plus haut pour se ramener d'abord aux ensembles finis. En utilisant de même le lemme 7 et la prop. 11, 2°, on obtient : *Si* u *est une application linéaire continue de* $L^1(\mu)$ *dans* $L^1(\nu)$, u *transforme toute suite* (f_n) *dans* $L^1(\mu)$ *telle que* $N_p((f_n)) = \int (\sum_i |f_i(t)|^p)^{1/p} d\mu(t) < +\infty$, *en une suite* $(g_n) = (uf_n)$ *telle que* $N_p((g_n)) \leqslant N_p((f_n)) \|u\|$.

Pour le produit tensoriel topologique complété d'un espace L^1 avec un espace $(\mathcal{F})$ quelconque, on peut résoudre par l'affirmative le "Problème des topologies" du § 1, n° 1. On a même, en effet, la

PROPOSITION 12. - *Soit* L^1 *l'espace des fonctions sommables construit sur une certaine mesure* μ *(sur un espace localement compact* M*), et soit* E *un espace du type* $(\mathcal{F})$. *Alors toute partie bornée* A *de* $L^1 \hat{\otimes} E$ *est contenue dans l'image de la boule unité d'un espace* $L^1 \hat{\otimes} E_B$, *où* B *est* une partie convexe cerclée bornée fermée de E.

Le th. 1, 3° appliqué à $L^1 \hat{\otimes} E_B$ donne alors immédiatement :

COROLLAIRE 1. - Toute partie bornée A de $L^1 \hat{\otimes} E$ est contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble $U \hat{\otimes} B$, où U est la boule unité de L^1 et B une partie bornée de E. Sur l'espace $B(L^1, E)$ la topologie de la convergence bibornée est identique à la topologie du dual fort de $L^1 \hat{\otimes} E$. En particulier, c'est un espace $(\mathcal{DF})$ ([9]).

Démonstration de la prop. 12. Soit (p_α) une suite fondamentale de semi-normes sur E, soit $u \rightarrow \|u\|_\alpha$ la semi-norme produit tensoriel de la norme de L^1 et de p_α, posons $M_\alpha = \operatorname{Sup}_{u \in A} \|u\|_\alpha$. Soit (λ_α) une suite de nombres > 0 telle que $\sum_\alpha \lambda_\alpha M_\alpha \leqslant 1$, et soit F le sous-espace de E formé des x tels que $\sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha(x) < +\infty$, muni de la norme $\|x\| = \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha(x)$ On vérifie immédiatement que F est un espace de Banach pour cette norme, et que l'application identique de F dans E est continue. Je dis que A est contenu dans l'image de la boule unité de $L^1 \hat{\otimes} F$ par l'application naturelle de cet espace dans $L^1 \hat{\otimes} E$, ce qui prouvera la proposition.

De $\sum_\alpha \lambda_\alpha \int p_\alpha(f(t)) d\mu(t) \leqslant 1$ pour $f \in A$ on conclut que $\sum \lambda_\alpha p_\alpha(f(t))$ est une fonction sommable de norme $\leqslant 1$, en particulier pour presque tout t on a $f(t) \in F$, et la norme de $f(t)$ dans F est une fonction sommable de norme $\leqslant 1$. Il suffit maintenant de prouver que f est une application fortement mesurable (donc sommable de norme $\leqslant 1$) de M dans F. Désignons, pour tout α, par E_α l'espace de Banach associé à la semi-norme p_α, et soit G le sous-espace du produit $\prod_\alpha E_\alpha$ formé des (y_α) tels que $\sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha(y_\alpha) < +\infty$, muni de la norme $\|(y_\alpha)\| = \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha(y_\alpha)$, norme qui manifestement fait de G un espace de Banach. F s'identifie à un sous-espace vectoriel normé de G par l'application $y \rightarrow (\varphi_\alpha(y))$, où φ_α désigne l'application naturelle de E dans E_α. Alors f, en tant qu'application de M dans G, est mesurable, comme il résulte aussitôt du fait que ses composantes f_α suivant les E_α sont mesurables, (de sorte que f s'obtient comme la somme d'une série de fonctions mesurables f_α). Par suite f est aussi mesurable en tant qu'application dans F. - En fait, la démonstration précédente prouve que toute partie bornée de L^p_E provient d'une partie bornée d'un espace L^p_F, où $F = E_A$, A étant une partie convexe cerclée fermée de E.

Remarque 2. - Une variante de la démonstration précédente permet de prouver ce qui suit : Soient F, E deux espaces du type $(\mathcal{F})$, E étant isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique du produit vectoriel-topologique d'une suite d'espaces de Hilbert (comme par exemple l'espace $(\mathcal{D}_{L^2})$ de L. Schwartz, - [22], t. 2 - ou un «espace échelonné d'ordre 2» - [7], page 66 -). Alors toute partie bornée de $F \hat{\otimes} E$ est contenue dans l'image canonique d'une partie bornée d'un espace $F \hat{\otimes} E_B$, où B est une partie convexe cerclée fermée de E. Si F est normable, on retrouve l'analogue de la prop. 2. Si F et E sont tous deux isomorphes à des sous-espaces vectoriels topologiques du produit vectoriel topologique d'une suite d'espaces de Hilbert, alors en appliquant deux fois de suite le résultat précédent, on trouve que toute partie bornée de $F \hat{\otimes} E$ est contenue dans l'image canonique de la boule unité d'un espace $F_A \hat{\otimes} E_B$, où A (resp. B) est une partie bornée convexe cerclée fermée de F (resp. E).

Généralisations aux espaces échelonnés généraux.

Les résultats de ce n° peuvent se généraliser aux espaces échelonnés généraux envisagés ci-dessous. Nous ne nous occuperons que de la généralisation du th. 1 et de la prop. 12.

Soit M un espace localement compact, (μ_i) une suite de mesures positives sur M, désignons par $L^1((\mu_i))$ l'espace des fonctions sur M qui sont sommables pour chacune des mesures μ_i, muni de la suite des semi-normes

$$\|f\|_{\mu_i} = \int |f(t)| d\mu_i(t)$$

espace pris "modulo" les fonctions f qui sont négligeables pour chaque μ_i. Il est immédiat que l'on obtient ainsi un espace du type $(\mathcal{F})$. Si par exemple M est "dénombrable à l'infini", i.e. réunion d'une suite d'ensembles relativement compacts O_i (qu'il est alors évidemment possible de supposer ouverts) et si μ_i désigne la restriction à O_i d'une mesure positive fixe μ sur M, alors $L^1((\mu_i))$ n'est autre que l'espace des fonctions sur M qui sont <u>localement sommables</u> pour μ, muni de sa topologie naturelle. Comme autre exemple, on obtient aussi les "gestufte Räume" de G. Köthe (voir [18] et [5]).

Soit maintenant E un espace localement convexe quelconque, nous désignons par $L^1_E((\mu_i))$ l'espace complété de l'espace $\Lambda^1_E((\mu_i))$ des applications de M dans E qui sont absolument sommables pour chacun des mesures μ_i, muni de la famille des semi-normes

$$\|f\|^{p_\alpha}_{\mu_i} = \int p_\alpha(f(t)) d\mu_i(t)$$

où (p_α) est une famille fondamentale de semi-normes continues sur E. Si E est du type $(\mathcal{F})$, alors il est facile de voir que $\Lambda^1_E((\mu_i))$ est déjà complet, et du type $(\mathcal{F})$. Cela posé, on a encore une application linéaire continue naturelle de $L^1((\mu_i)) \hat{\otimes} E$ dans $L^1_E((\mu_i))$, et on conclut immédiatement du th. 2 et des définitions que c'est là un isomorphisme vectoriel-topologique du premier espace sur le second (en effet, sur le produit tensoriel algébrique, la semi-norme $\|f\|^{p_\alpha}_{\mu_i}$ est, d'après le th. 2, identique à la semi-norme produit tensoriel de la semi-norme induite par $L^1(\mu_i)$, et de p_α).

Supposons maintenant que E soit du type $(\mathcal{F})$. Alors la prop. 12

se généralise ainsi : pour toute partie bornée $A \subset L^1_E((\mu_i))$ il existe une partie bornée convexe cerclée B (resp. C) de $F = L^1((\mu_i))$ (resp. de E) telle que A soit contenu dans l'image de la boule unité de $F_B \hat{\otimes} E_C$ par l'application naturelle de cet espace dans $F \hat{\otimes} E$. Pour le voir il suffit d'appliquer la prop. 12 et le

LEMME 8. - Soit M un espace localement compact muni d'une suite (μ_i) de mesures positives, et soit E un espace du type $(\mathcal{F})$. On suppose M dénombrable à l'infini. Alors, pour toute partie bornée A de $L^1_E((\mu_i))$, il existe une mesure positive μ sur M, telle que pour tout i existe un $\lambda_i > 0$ tel que $\lambda_i\mu_i \leqslant \mu$, et telle que A soit une partie bornée de $L^1_E(\mu)$ (comparer lemme 5).

Supposons en effet la suite des μ_i croissante, ce qui est évidemment toujours possible, et soit (p_α) une suite croissante fondamentale de semi-normes continues sur E. Posons $M_\alpha = \operatorname{Sup}_{f \in A} \int p_\alpha(f) d\mu_\alpha$ et soit (λ_α) une suite de nombres >0 telle que $\sum_\alpha \lambda_\alpha M_\alpha \leqslant 1$ et que $\sum_\alpha \lambda_\alpha \mu_\alpha$ converge dans l'espace des mesures de Radon sur M (considéré comme dual faible de l'espace des fonctions continues à support compact) - cela est possible parce que M est dénombrable à l'infini. Posons alors $\mu = \sum_\alpha \lambda_\alpha \mu_\alpha$; il est facile de voir que toute $f \in A$ est fortement mesurable pour μ [17] ; et pour tout indice α, on a

$$\int p_\alpha(f(t))d\mu(t) \leqslant \sum_\beta \lambda_\beta \int p_\alpha(f(t))d\mu_\beta(t) =$$

$$\sum_{\beta \leqslant \alpha} \lambda_\beta \int p_\alpha(f(t))d\mu_\beta(t) + \sum_{\beta > \alpha} \lambda_\beta \int p_\alpha(f(t))d\mu_\beta(t) \leqslant$$

$$(\sum_{\beta \leqslant \alpha} \lambda_\beta) \int p_\alpha(f(t))d\mu_\alpha(t) + \sum_{\beta > \alpha} \lambda_\beta \int p_\beta(f(t))d\mu_\beta(t) \leqslant$$

$$(\sum_{\beta \leqslant \alpha} \lambda_\beta) M_\alpha + \sum_{\beta > \alpha} \lambda_\beta M_\beta = R_\alpha$$

ce qui prouve que A est une partie bornée de $L^1(\mu)$.

§ 3. VARIANTES DIVERSES DE LA NOTION DE PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE

1. Produit tensoriel topologique inductif.

La définition du § 1, n° 1 a été manifestement construite sur le modèle de la définition axiomatique du produit tensoriel algébrique, telle qu'elle est donnée dans [3], et est directement adaptée pour interpréter les fonctions bilinéaires continues sur $E \times F$ comme des applications linéaires continues de $E \otimes F$ ou de $E \hat{\otimes} F$. Par une méthode analogue, on obtiendrait d'autres notions de produit tensoriel topologique, en considérant d'autres classes intéressantes de fonctions bilinéaires sur $E \times F$ liées à la topologie de E, F. Nous examinerons encore deux de ces notions dans la suite de ce § .

PROPOSITION 13. - Soient E et F deux espaces localement convexes. Il existe sur $E \otimes F$, produit tensoriel algébrique de E et F, une topologie localement convexe et une seule T_o telle que, pour tout espace localement convexe G, dans l'isomorphisme algébrique naturel entre l'espace des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G, et l'espace des applications linéaires de $E \otimes F$ dans G, aux applications bilinéaires séparément continues de $E \times F$ correspondant exactement les applications linéaires continues de $E \otimes F$ muni de T_o.- Alors les ensembles séparément équicontinus de fonctions bilinéaires sur $E \times F$ correspondent exactement aux ensembles équicontinus de fonctions linéaires sur $E \otimes F$ muni de T_o.- En particulier, le dual de $E \otimes F$ muni de T_o est identique à l'espace $\mathscr{B}(E,F)$ des formes bilinéaires séparément continues sur $E \times F$, et T_o est la topologie de la convergence uniforme sur les parties séparément équicontinues de $\mathscr{B}(E,F)$.

Démonstration. - L'unicité se voit comme dans la prop. 2, T_o est la plus fine des topologies localement convexes sur $E \otimes F$ rendant séparément

17. Voir note 16 page 64.

continue l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$.- On considère sur $E \otimes F$ la topologie T_0 de la convergence uniforme sur les parties séparément équicontinues de $\mathcal{B}(E,F)$. Il est facile de voir que pour cette topologie, les ensembles séparément équicontinus d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G correspondent exactement aux ensembles équicontinus d'applications linéaires de $E \otimes F$ dans G, car dire que $M \subset \mathcal{B}(E,F;G)$ est séparément équicontinu signifie que, si z' parcourt une partie équicontinue de G' et si u parcourt M, l'ensemble des formes bilinéaires $\langle u(x,y),\ z' \rangle$ sur $E \times F$ est séparément équicontinu.

DÉFINITION 3. - *La topologie* T_0 *de la prop.* 13 *est appelée produit tensoriel inductif des topologies données sur* E *et* F, *et muni de cette topologie*, $E \otimes F$ *prend le nom de produit tensoriel inductif des espaces localement convexes* E *et* F. *Son complété, noté* $E \,\overline{\otimes}\, F$, *est appelé produit tensoriel inductif complété de* E *et* F.

Cette définition donnerait manifestement lieu à un "Scholie" analogue à celui du § 1, n° 1. On aurait un énoncé analogue plus général si on se donnait sur E (resp. F) un ensemble $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{T}$) de parties bornées, et en s'attachant à la classe des applications bilinéaires $\mathfrak{S}$ - $\mathfrak{T}$ -hypocontinues ([2]).- Toutes les notions de produit tensoriel topologique ainsi introduites coïncident lorsque les ensembles séparément équicontinus de formes bilinéaires sur $E \times F$ sont équicontinus, ce qui est le cas quand E et F sont tous deux, soit des espaces $(\mathcal{F})$ (th. de Baire-Banach), soit soit des espaces $(\mathcal{DF})$ tonnelés (c'est alors essentiellement le th. de Dieudonné-Schwartz [7], th. 9 ; voir aussi [9], th. 2). *Dans le cas contraire*, la topologie T_0 de produit tensoriel inductif est *strictement plus fine* que la topologie T_1 de produit tensoriel projectif ; il en est en particulier ainsi si E est un espace non normable, F son dual fort : alors T_0 et T_1 ne donnent pas le même dual, car la forme bilinéaire canonique sur $E \times F$ est séparément continue et non continue. Nous verrons (Chap. 2) que si E est nucléaire, E et F complets, $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à l'espace de <u>toutes</u> les applioations linéaires continues du dual fort E' de E dans F (muni de la topologie de la convergence équicontinue), tandis que $E \bar{\otimes} F$ donne les seuls "opérateurs à trace" (n° 2, définition 4).- Nous examinons rapidement les principales propriétés du produit tensoriel inductif.

Le "Problème des topologies" se pose comme pour $E \hat{\otimes} F$: sur $\mathscr{B}(E,F)$ la topologie de la convergence bibornée est-elle identique à la topologie de dual fort de $E \bar{\otimes} F$? Cette question est même à priori mieux posée pour $E \bar{\otimes} F$ (voir note 8, page 34). Elle peut se renforcer ainsi : Toute partie bornée C de $E \tilde{\otimes} F$ est-elle contenue dans l'image canonique de la boule unité d'un espace $E_A \hat{\otimes} F_B$, où A (resp. B) est une partie bornée convexe cerclée complète de E (resp. F) ? (Noter que l'on doit postuler que A et B soient complets pour que E_A et F_B soient complets, et que l'on ait donc $E_A \bar{\otimes} F_B = E_A \hat{\otimes} F_B$, de sorte qu'on ait bien une application canonique de $E_A \hat{\otimes} F_B$ dans $E \bar{\otimes} F$). Sous cette forme du problème, il faut évidemment supposer que E et F soient quasi-complets ; la réponse est alors affirmative dans des cas assez fréquents (voir prop. 14, corollaire et pour divers exemples et contre-exemples, voir Chap. 2 § 4, et Chap. 1 § 4, remarques 11 et 12).

Soient E_i, F_i $(i = 1,2)$ des espaces localement convexes, A_i une application linéaire continue de E_i dans F_i $(i = 1,2)$, alors l'application $A_1 \otimes A_2$ de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$, est continue pour les topologies de produit tensoriel inductif, et définit donc une application linéaire de $E_1 \tilde{\otimes} E_2$ dans $F_1 \tilde{\otimes} F_2$ notée encore $A_1 \otimes A_2$. Les propositions 3 et 4 et leurs démonstrations se transposent encore de façon évidente.

L'énoncé et la démonstration de la prop. 5 relative au produit tensoriel topologique de deux espaces du type $(\mathscr{DF})$ subsistent telles quelles, mais les propriétés générales de permanence changent. En particulier, la prop. 6 doit se remplacer par la

PROPOSITION 14. - I. Soit E (resp. F) un espace localement convexe, limite inductive d'une famille (E_i) (resp. (F_j)) d'espaces localement convexes. Alors sur $E \otimes F$, la topologie produit tensoriel inductif est identique à la limite inductive des produits tensoriels inductifs $E_i \otimes F_j$, pour les applications linéaires naturelles de ces espaces dans $E \otimes F$. Sur le sous-espace de $E \bar{\hat{\otimes}} F$ engendré par les images des espaces $E_i \bar{\hat{\otimes}} F_j$, la topologie induite par $E \bar{\hat{\otimes}} F$ est identique à la topologie limite inductive des $E_i \bar{\hat{\otimes}} F_j$.

II. Soient $E = \prod_i E_i$ un espace localement convexe, produit vectoriel topologique d'une famille (E_i) d'espaces localement convexes, F un espace du type $(\mathcal{F})$ ou plus généralement le produit vectoriel-topologique d'une famille (F_j) d'espaces du type $(\mathcal{F})$. Alors le produit tensoriel inductif complété $E \bar{\hat{\otimes}} F$ est canoniquement isomorphe au produit vectoriel-topologique $\prod_i (E_i \bar{\hat{\otimes}} F)$ des produits tensoriels inductifs complétés $E_i \bar{\hat{\otimes}} F$.

Démonstration. - On procède par dualité en notant que deux topologies localement convexes sur un espace sont identiques si et seulement si elles donnent les mêmes ensembles équicontinus de formes linéaires. Chacune des deux assertions dans 1° est équivalente à l'assertion qu'un ensemble de forme bilinéaires sur $E \times F$ est séparément équicontinu si et seulement si sa restriction à chacun des $E_i \times F_j$ est séparément équicontinu, ce qui est immédiat. 2° revient à dire que pour tout ensemble équicontinu A d'applications linéaires de F dans le dual faible $E'_s = \sum_i (E'_i)_s$ de E, $\bigcup_{u \in A} u(F)$ est contenu dans la somme directe d'un nombre fini des espaces E'_i. Mais s'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite infinie d'indices distincts $i_1, i_2 \dots i_n \dots$, une suite (y_n) dans F et une suite (u_n) dans A, telles que la composante de $u_n y_n$ sur E'_i soit non nulle. Soit alors, pour tout n, x_n un élément de E_n, tel que

$\langle x_n, u_n\ y_n \rangle \neq 0$, et soit G le sous-espace vectoriel fermé de E engendré par les x_n. C'est un espace isomorphe au produit vectoriel-topologique d'une suite de droites, donc du type $(\mathcal{F})$, et on aurait sur $G \times F$ un ensemble séparément équicontinu et non équicontinu de formes bilinéaires. Cela signifie aussi qu'en permutant les rôles de G et F, nous sommes dans la situation du début de ce raisonnement, qui permet donc encore d'affirmer l'existence d'un sous-espace H de F, isomorphe au produit vectoriel topologique d'une suite de droites, et d'un ensemble séparément équicontinu et non équicontinu de formes bilinéaires sur $H \times G$, ce qui est absurde.

COROLLAIRE. - *Soit* E (resp. F) *la limite inductive d'une suite croissante de sous-espaces vectoriels* E_i (resp. F_i) *munis de topologies d'espaces du type* $(\mathcal{F})$. *Alors toute partie bornée convexe cerclée complète de* $E \overline{\otimes} F$ *qui est contenue dans la réunion* G *des images naturelles des espaces* $E_i \widehat{\otimes} F_i$ *est contenue dans l'image canonique d'une partie bornée d'un des espaces* $E_i \widehat{\otimes} F_i$, *pourvu que pour tout* i, *l'application canonique de* $E_i \widehat{\otimes} F_i$ *dans* $E \overline{\otimes} F$ *soit biunivoque*.- *En particulier*, *si cette condition est remplie*, *et si* G *muni de la topologie limite inductive des* $E_i \overline{\otimes} F_i$ *est complet*, i. e. $E \overline{\otimes} F = G$, *et si enfin*, *pour tout* i, *toute partie bornée de* $E_i \widehat{\otimes} F_i$ *est contenue dans l'image canonique de la boule unité d'un espace* $(E_i)_A \widehat{\otimes} (F_i)_B$, *où* A (resp. B) *est une partie bornée convexe cerclée fermée de* E_i (resp. F_i) , *alors de même toute partie bornée de* $E \overline{\otimes} F$ *est contenue dans l'image canonique de la boule unité d'un espace* $E_A \widehat{\otimes} F_B$, *où* A (resp. B) *est une partie bornée convexe cerclée fermée de* E (resp. F).

Il suffit d'appliquer le th. A de l'Introduction IV, n° 4. Notons que dans tous les cas connus l'hypothèse que les applications canoniques des $E_i \widehat{\otimes} F_i$ dans $E \overline{\otimes} F$ soient biunivoques est remplie d'elle-même car il est facile de voir qu'il suffit pour cela que les applications canoniques de $E_1 \hat{\otimes} F_1$ dans $B(E_1', F_1')$ soient biunivoques.

On remarquera qu'en dehors des conditions indiquées dans la prop. 14, 2°, la conclusion énoncée n'est plus valable. Ainsi si E est le produit vectoriel-topologique d'une suite de droites, F son dual fort, isomorphe à la somme directe topologique d'une suite de droites, il résulte de prop. 14, 1°, que $E \bar{\otimes} F$ s'identifie à une somme directe topologique d'une suite d'espaces isomorphes à E, et non au produit vectoriel-topologique d'une suite d'espaces tous isomorphes à F.

Notons enfin qu'on vérifie trivialement que si E et F sont bornologiques (resp. tonnelés, quasi-tonnelés) alors $E \otimes F$ muni de la topologie de produit tensoriel inductif possède la même propriété ; donc si E et F sont quasi-tonnelés, $E \bar{\otimes} F$ est tonnelé. Nous verrons (Chap. 2, § 4, prop. 14, 1°) qu'il n'en est rien pour le produit tensoriel topologique projectif.

2. Forme trace, opérateurs à trace, opérateurs de Fredholm, opérateurs nucléaires.

Soit E un espace localement convexe muni d'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées recouvrant E, soit $E'_{\mathfrak{S}}$ le dual de E muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence. La forme bilinéaire canonique sur $E \times E'_{\mathfrak{S}}$ étant séparément continue, définit une forme linéaire continue sur $E \bar{\otimes} E'_{\mathfrak{S}}$, appelée forme trace, et notée $u \longrightarrow \mathrm{Tr}.u$. Bien entendu, si $u \in E \otimes E'$, on retrouve la trace usuelle de l'opérateur de rang fini défini par u. Soit F un autre espace localement convexe, soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$, supposons que l'application ${}^tA$ de F dans $E'_{\mathfrak{S}}$ définie par A soit continue (ce n'est pas là une restriction si par exemple F est tonnelé), on peut alors considérer l'application $1 \otimes {}^tA$ de $E \bar{\otimes} F$ dans $E \bar{\otimes} E'_{\mathfrak{S}}$, posons ${}^tA \circ u = (1 \otimes {}^tA).u$. Un passage à la limite trivial donne alors

(12) $\langle u, A \rangle = \mathrm{Tr}.\, {}^tA \circ u \qquad ({}^tA \circ u \in E \bar{\otimes} E'_{\mathfrak{S}})$

De même, si $\mathcal{C}$ est un ensemble de parties bornées de F recouvrant F, et si A, considéré comme application linéaire de E dans $F'_{\mathcal{C}}$, est continue (ce qui n'est pas une restriction si E est tonnelé), on peut considérer $u \circ {}^tA = (A \otimes 1).u \in F'_{\mathcal{C}} \hat{\otimes} F$, et on a

$$\text{(12 bis)} \quad \langle u,A\rangle = \mathrm{Tr}.u \circ {}^tA \qquad (u \circ {}^tA \in F'_{\mathcal{C}} \bar{\otimes} F)$$

Si par exemple E et F sont tonnelés, les formules (12) et (12 bis) sont valables quels que soient $u \in E \bar{\otimes} F$, $A \in \mathcal{L}(E,F)$, E' et F' étant munis de leurs <u>topologies fortes</u>. On voit ainsi comment l'accouplement entre $E \bar{\otimes} F$ et $\mathcal{L}(E,F)$ peut se concrétiser par la forme trace ; nous généraliserons ceci dans le n° suivant.

Soient maintenant E,F deux espaces localement convexes <u>complets</u>. Il existe une application linéaire continue naturelle de $E \bar{\otimes} F$ dans $E \hat{\otimes} F$, qui, composée avec l'application linéaire naturelle de $E \hat{\otimes} F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s)$ (§ 1, n°1), donne une application linéaire continue naturelle de $E \bar{\otimes} F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s)$.

Comme au §1, n°1, il se pose ici le problème de la biunivocité de cette application, équivalent au suivant : $E' \otimes F'$ est-il dense dans $\mathcal{L}(E,F)$ pour la topologie définie par la dualité avec $E \bar{\otimes} F$? Lorsqu'on remplace l'espace $E \bar{\otimes} F$ par l'espace plus petit formé des <u>noyaux de Fredholm</u> (voir définition 4 ci-dessous), on est ramené à prouver que $E' \otimes F'$ est dense dans $\mathcal{L}(E,F)$ pour la topologie faible définie par les seuls noyaux de Fredholm. Cela permet facilement, dans ce cas, de se ramener au cas où E et F sont des espaces de Banach, i.e. au "Problème de biunivocité" (ou d'approximation) usuel.

On notera que faute d'avoir résolu le problème de biunivocité, il n'est pas possible en général de parler de la trace de <u>l'opérateur</u> dans E défini par un élément u de $E' \bar{\otimes} E$, même si E est un espace de Banach ; seule la trace de u lui-même sera définie.

Soient E et F deux espaces localement convexes, on a une application linéaire naturelle de $E'_b \hat{\otimes} F$, donc aussi de $E'_b \bar{\otimes} F$, dans l'espace des applications linéaires de E dans le complété $\hat{F}$ de F. En effet, soit $\widehat{E'}$ le complété de E'_b, considéré comme un espace de formes linéaires sur E, soit E_0 l'espace E muni de $\tau(E,\widehat{E'})$, son dual fort est donc $\widehat{E'}$, et $L_b(E_0,\hat{F})$ est donc complet (Introduction, III, 4). L'application bilinéaire naturelle $(x',y) \longrightarrow x' \otimes y$ de $E'_b \times F$ dans $L_b(E_0,\hat{F})$ est manifestement continue, elle définit donc une application linéaire continue de $E'_b \hat{\otimes} F$ et a fortiori de $E'_b \bar{\otimes} F$ dans $L_b(E_0,\hat{F})$. L'application définie par un $u \in E'_b \hat{\otimes} F$ ou un $u \in E'_b \bar{\otimes} F$ sera notée $x \longrightarrow u.x$, elle est faiblement continue si E'_b est complet, et applique E dans F si F est complet. En tous cas, elle pourra éventuellement appliquer E dans F lui-même.

DÉFINITION 4. - *Soient* E, F, G, *des espaces localement convexes*.

1. *Toute application linéaire de* E *dans* F *qui est définie comme ci-dessus par un élément de* $E'_b \bar{\otimes} F$ *est dite application à trace* (*elle est faiblement continue si* E'_b *est complet*).

2. *On appelle noyau de Fredholm dans* $G \bar{\otimes} F$ *tout élément de* $G \otimes F$ *qui est dans l'image canonique d'un espace* $G_A \hat{\otimes} F_B$, *où* A (resp. B) *est une partie bornée convexe cerclée de* G (resp. F) *telle que* G_A (resp. F_B) *soit complet*. *On appelle application de Fredholm de* E *dans* F *toute application à trace définie par un noyau de Fredholm élément de* $E'_b \bar{\otimes} F$.

3. *On appelle application nucléaire de* E *dans* F, *une application définie par un élément d'un espace* $E'_A \hat{\otimes} F_B$ *où* A *est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de* E', *et* B *une partie bornée convexe cerclée de* F *telle que* F_B *soit complet*. *Si* E *et* F *sont des espaces de Banach, les applications à trace, les applications de Fredholm et les applications nucléaires de* E *et* F *sont les mêmes, et l'ensemble de ces opérateurs s'identifie par définition à un espace quotient de* $E' \hat{\otimes} F$; *on notera encore* $u \longrightarrow \|u\|_1$ *la norme quotient, appelée aussi norme-trace de* u.

On notera à ce propos que $E' \otimes F$ s'identifie aussi bien à un sous-espace vectoriel de $E' \hat{\otimes} F$ que de l'espace $E' \hat{\otimes} F/J$ des opérateurs de Fredholm de E dans F, mais que par suite de la possibilité à priori que J ne soit pas nul ("Problème de biunivocité"!) les deux normes induites, désignées pourtant par la même notation $u \longrightarrow \|u\|_1$, peuvent ne pas être identiques.

On notera aussi que dans la définition 1°, si E'_b n'est pas complet, une application à trace de E dans F peut ne pas être faiblement continue (prendre une application de la forme $x' \otimes y$, où x' est dans le complété de E'_b et non dans E'_b, et $y \in F$). Comme je ne sais dire quelque chose de spécial des applications à trace que dans les cas où ces applications sont déjà des applications de Fredholm, je n'aurai plus l'occasion d'en parler.- Les notions d'application de Fredholm et d'application à trace coïncident lorsque tout élément de $E'_b \bar{\otimes} F$ est un noyau de Fredholm ; effectivement, dans des cas assez nombreux, tout élément d'un produit tensoriel inductif complété $G \bar{\otimes} F$ est un noyau de Fredholm. C'est par exemple vrai, en vertu du th. 1, quand G et F sont tous deux du type $(\mathcal{F})$; pour de nombreux autres cas, voir remarque 12 - relative au cas où G et F sont tous deux du type $(\mathcal{DF})$ - et chap. 2, § 4. Nous verrons malheureusement au Chap. 2, § 4 (notamment prop. 14) que cela peut être en défaut si G est le dual fort d'un espace $(\mathcal{F})$ nucléaire et F un espace $(\mathcal{F})$ nucléaire.

Il est immédiat que tout élément d'un espace $E'_A \hat{\otimes} F_B$, où A est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E', B une partie bornée convexe cerclée de F telle que F_B soit complet, définit bien une application nucléaire de E dans F. En effet, si E et F sont des espaces de Banach, l'application bilinéaire canonique $(x',y) \longrightarrow x' \otimes y$ de $E' \times F$ dans L(E,F) donne naissance à une application linéaire continue $E' \hat{\otimes} F \longrightarrow$

$\to L(E,F)$, et les applications nucléaires de E dans F sont celles qui proviennent d'un élément de $E'\hat{\otimes} F$. Si alors E et F sont des espaces localement convexes généraux, et A et B comme plus haut, $V = A^o$, alors, pour $u \in E'_A \hat{\otimes} F_B$, on peut considérer l'opérateur composé de la séquence :

$$(*) \qquad E \xrightarrow{\alpha} \hat{E}_V \xrightarrow{\beta} F_B \xrightarrow{\gamma} F$$

où α et γ sont les applications canoniques, et β est l'application nucléaire définie par u conformément à ce qui précède (noter que $(\hat{E}_V)' = E'_A$. Ce sera par définition l'opérateur défini par u (c'est aussi l'opérateur à trace défini par l'image canonique de u dans $E'\bar{\otimes} F$). On voit par là que toute application nucléaire de E dans F est composé d'une séquence

$$(**) \qquad E \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\beta} F_1 \xrightarrow{\gamma} F$$

où E_1, F_1 sont des espaces <u>de Banach</u>, α et γ des applications linéaires continues, et β une application nucléaire de E_1 dans F_1. La réciproque est vraie, car si β est défini par un $u \in E'_1 \hat{\otimes} F_1$, soit A l'image par ${}^t\alpha$ de la boule unité de E'_1, B l'image par γ de la boule unité de F_1, F_B est complet (car isomorphe à un quotient de F_1) et A faiblement compact. On a des applications linéaires continues ${}^t\alpha : E'_1 \to E'_A$ et $\gamma : F_1 \to F_B$, d'où une application produit tensoriel des précédentes : $E'_1 \hat{\otimes} F_1 \to E'_A \hat{\otimes} F_B$, transformant u en un élément v de $E'_A \hat{\otimes} F_B$. Alors l'application composée envisagée n'est autre que celle définie par v.

<u>Une application nucléaire est compacte</u> et à fortiori continue. D'après ce qui précède, il suffit de le voir pour les espaces de Banach, or on sait que toute limite au sens de la norme d'applications compactes de E dans F, et à fortiori d'applications éléments de $E'\otimes F$, est compacte. On peut même préciser qu'<u>une application nucléaire</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>provient d'un élément d'un espace</u> $E'_A \hat{\otimes} F_B$ <u>où</u> A <u>est même compact dans un espace</u> E'_{A_1}, B <u>compact dans un espace</u> F_{B_1} (A_1 étant une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E', B_1 une partie bornée convexe cerclée de F

telle que F_{B_1} soit complet). En effet, on sait d'abord que l'application provient d'un élément u d'un espace $E'_{A_1} \hat{\otimes} F_{B_1}$, A_1 et B_1 comme plus haut. Mais d'après § 1, n° 1, th. 1, corollaire 1, u est l'image canonique d'un élément $v \in E'_A \hat{\otimes} F_B$, où A (resp. B) est une partie convexe cerclée compacte de E'_{A_1} (resp. F_{B_1}). Se rapportant à (*), on en conclut aussi que <u>dans la représentation</u> (**) <u>de</u> u <u>comme composé de</u> α, β, γ, <u>on peut supposer</u> α <u>et</u> γ <u>compacts</u>.

Notons aussi que dans cette représentation (**), on peut supposer $E_1 = c_0$, $F_1 = \ell^1$, β étant un opérateur de multiplication par une suite sommable. Cela résulte immédiatement de ceci : <u>Si</u> (x'_i) <u>est une suite équicontinue dans</u> E', (y_i) <u>une suite extraite d'une partie bornée convexe cerclée</u> B <u>de</u> F <u>telle que</u> F_B <u>soit complet, enfin</u> (λ_i) <u>une suite sommable, alors la série</u> $\sum \lambda_i x'_i \otimes y_i$ <u>converge absolument dans</u> $L_b(E,F)$ <u>vers une application nucléaire de</u> E <u>dans</u> F. <u>Réciproquement toute application nucléaire de</u> E <u>dans</u> F <u>peut s'obtenir ainsi</u>, et on peut y supposer même que x'_i tend vers 0 dans E' fort et même dans un espace E'_A (A partie équicontinue convexe cerclée de E) et que y_i tend vers 0 dans F et même dans un espace F_B, B étant une partie compacte convexe cerclée de F. La première assertion est immédiate, car la série envisagée converge absolument dans un espace $E'_A \hat{\otimes} F_B$, donc à fortiori dans $L(\widehat{E_{A^0}},F_B)$, et à fortiori dans $L_b(E,F)$. La deuxième assertion résulte de la définition et du th. 1, 1°.- Signalons aussi que la classe des applications nucléaires de E dans F ne dépend, E étant donné, que de la famille des parties bornées de F, ou aussi de la famille des parties compactes convexes cerclées de F.

Une application nucléaire de E dans F est évidemment une application de Fredholm, mais la réciproque n'est bien entendu pas vraie. Un opérateur de Fredholm peut ne pas être continu ; d'ailleurs la classe des opérateurs de Fredholm de E dans F ne dépend que du dual de E (et non de la topologie de E elle-même), et de la famille des parties bornées de F (ou aussi de la famille des parties compactes convexes cerclées de F, comme il résultera immédiatement de ce qu'on va dire à l'instant). Mais si u est une application de Fredholm de E dans F, elle provient (en vertu du th. 1 corollaire 1) d'un élément d'un espace $E'_A \hat{\otimes} F_B$, où A est une partie compacte convexe cerclée (pas forcément équicontinue) de E'_b, B une partie compacte convexe cerclée de F. Par suite, si T_o est une topologie localement convexe sur E comprise entre $\mathcal{T}(E,E')$ et la topologie $\gamma(E,E')$ de la convergence uniforme sur les parties compactes convexes cerclées de E'_b, u est une application nucléaire, dans F, de E muni de T_o ; et réciproquement toute application nucléaire de E muni de T_o dans F, est une application de Fredholm de E dans F. Par suite, le dual de E pour T_o étant encore E', on voit que : une application de Fredholm est faiblement continue. Et : si toute partie compacte convexe cerclée de E' est équicontinue, en particulier si E est quasi-tonnelé, alors toute application de Fredholm de E est déjà nucléaire (et à fortiori continue).

Les opérateurs de Fredholm de E dans E forment le domaine naturel de la théorie de Fredholm développée en détail dans [11]. Dans le travail présent, nous aurons l'occasion de parler surtout de la catégorie plus restreinte des opérateurs nucléaires. Nous nous bornons pour l'instant à quelques propriétés élémentaires.

Nous utiliserons, sans référence, le résultat suivant : Soient E,F,G des espaces localement convexes, u une application linéaire de E dans F, v une application linéaire de F dans G. Si l'un des opérateurs u,v est un opérateur de Fredholm (resp. nucléaire), l'autre faiblement continu (resp. continu) alors $v \circ u$ est un opérateur de Fredholm (resp. nucléaire). Si E,F,G sont des espaces de Banach, on a alors

$$\|v \circ u\|_1 \leqslant \|v\|_1 \, \|u\| \quad \text{ou} \quad \|v \circ u\| \leqslant \|v\| \, \|u\|_1$$

(suivant que c'est v ou u qui est supposé nucléaire).

La démonstration est immédiate. Ce qui précède montre qu'on peut se borner à ne retenir que l'énoncé relatif au cas où u ou v est <u>nucléaire</u> (l'autre cas se ramenant à celui-ci), puis au cas où E,F,G sont des espaces de Banach. Dans ce cas, supposant par exemple que u provient d'un élément u_0 de $E' \hat{\otimes} F$, $v \circ u$ sera l'opérateur défini par l'élément $(1 \otimes v).u_0$ de $E' \hat{\otimes} G$, d'où aussitôt le résultat voulu.

Soient E et F deux espaces de Banach, soit $\alpha \in E' \otimes F$, et soit $\beta \in F'' \hat{\otimes} E'$ l'image de α par le composé de la symétrie $E' \hat{\otimes} F \rightarrow F \hat{\otimes} E'$ et l'application $F \hat{\otimes} E' \rightarrow F'' \hat{\otimes} E'$ produit tensoriel des applications canoniques. Alors, $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F',E')$ désignant les opérateurs nucléaires définis par α et β, on a ${}^t u = v$. Il suffit, par raison de continuité, de le vérifier pour $\alpha = x' \otimes y$, $(x' \in E', y \in F)$ où c'est trivial. Comme les deux applications $E' \hat{\otimes} F \rightarrow F \hat{\otimes} E'$ et $F \hat{\otimes} E' \rightarrow F'' \hat{\otimes} E'$ sont des isométries (pour la deuxième, voir § 1, n° 2, prop. 4, cor. 3) on voit que <u>si</u> u <u>est une application nucléaire d'un Banach</u> E <u>dans un autre</u> F, <u>alors sa transposée est nucléaire et a une norme-trace au plus égale</u>. Réciproquement, soit u une application linéaire continue de E dans F (E et F espaces de Banach) telle que ${}^t u = v$ soit nucléaire, donc provient d'un $\alpha \in F'' \hat{\otimes} E'$, si nous pouvons prouver que l'on a en fait $\alpha \in F \hat{\otimes} E'$, il s'ensuivra, d'après ce qui précède, que u est identique à l'application nucléaire définie par l'image ${}^t\alpha$ de α dans $E' \hat{\otimes} F$ par symétrie (car elle a même transposée v), et est donc une application nucléaire de norme-trace $\leq \|\alpha\|_1$, donc aussi au plus égale à $\|{}^t u\|_1$. $F \hat{\otimes} E'$ étant un sous-espace normé complet, donc fermé, de $F'' \hat{\otimes} E'$, il suffit de montrer qu'une forme linéaire continue A sur $F'' \hat{\otimes} E'$, nulle sur $F \hat{\otimes} E'$, est nulle sur α.

Or A s'identifie à une application linéaire continue de F'' dans E'', nulle sur F, et on a (formule 12 bis) :

$$\langle \alpha, A \rangle = \operatorname{Tr} \beta \qquad \beta = (A \otimes 1).\alpha \in E'' \hat{\otimes} E'$$

<u>Si alors nous supposons l'application canonique</u> $E'' \hat{\otimes} E' \rightarrow L(E',E')$

biunivoque, il suffit de montrer que l'opérateur nucléaire $\widetilde{\beta} \in L(E',E')$ défini par β est nul. Or on a ${}^t\widetilde{\beta} = A\,{}^t\widetilde{\alpha}$ comme on vérifie trivialement à partir de $\alpha = y'' \otimes x'$ ($y'' \in F''$, $x' \in E'$) - indépendamment des hypothèses spéciales sur le α et A intervenant ici. Ici $\widetilde{\alpha} = v$ est un opérateur de F' dans E' transposé d'un opérateur u de E dans F, compact parce que v est compact. Donc ${}^t\widetilde{\alpha} = {}^tv$ est le bitransposé de l'opérateur compact u de E dans F, et applique donc E'' dans F. Comme A s'annule sur F par hypothèse, on a bien ${}^t\widetilde{\beta} = A\,{}^t\widetilde{\alpha} = 0$, d'où $\widetilde{\beta} = 0$. L'hypothèse auxiliaire qu'il a fallu faire sur E peut se remplacer par une hypothèse analogue sur F, grâce à un raisonnement symétrique : $F''' \hat{\otimes} F'' \longrightarrow L(F'',F'')$ doit être biunivoque. On a par là prouvé la partie métrique de la

PROPOSITION 15. - 1. Soient E,F, deux espaces localement convexes, u une application de Fredholm de E dans F, alors ${}^tu$ est une application nucléaire de F'_b dans E'_b (et même de F'_c dans E'_b, où F'_c désigne F' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes convexes cerclées de F).

2. Soient E et F deux espaces de Banach. Supposons que l'application linéaire naturelle de $E'' \hat{\otimes} E'$ dans $L(E',E')$, ou l'application linéaire naturelle de $F''' \hat{\otimes} F''$ dans $L(F'',F'')$ soit biunivoque. Pour qu'une application linéaire continue u de E dans F soit nucléaire, il faut et il suffit que ${}^tu$ le soit, et alors u et ${}^tu$ ont même norme-trace.

Il ne reste plus qu'à prouver la première partie de la proposition 15. Mais d'après les généralités sur les opérateurs de Fredholm et opérateurs nucléaires, u se met sous forme du composé d'une séquence d'opérateurs linéaires $E \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\beta} F_1 \xrightarrow{\gamma} F$, E_1 et F_1 étant des espaces de Banach, α faiblement continue, β nucléaire, γ compacte. On a donc ${}^tu = {}^t\alpha\,{}^t\beta\,{}^t\gamma$, et ${}^t\gamma$ est continue de F'_c dans E'_1, ${}^t\beta$ nucléaire d'après ce qui a été vu dans le cas des espaces de Banach, enfin ${}^t\alpha$ continue de E'_1 dans E' fort, ce qui prouve que ${}^tu$ est nucléaire.

PROPOSITION 16. - *Soient* E, G *deux espaces localement convexes*, F *un sous-espace vectoriel fermé de* E.

1. *Toute application nucléaire de* F *dans* G *est restriction d'une application nucléaire de* E *dans* G. *Si* M *est un ensemble d'applications nucléaires de* F *dans* G, *contenu dans l'ensemble des applications définies par les éléments de la boule unité de* $F'_A \widehat{\otimes} G_B$, *où* A *est une partie équicontinue convexe cerclée de* F', B *une partie bornée convexe cerclée telle que* G_B *soit complet, alors* M *est l'ensemble des restrictions d'un ensemble* M_o *d'applications nucléaires de* E *dans* G, *contenu dans l'ensemble d'opérateurs défini par la boule unité d'un espace* $E'_{A_o} \widehat{\otimes} G_B$, *où* A_o *est encore une partie équicontinue convexe cerclée de* E' (*en particulier*, M_o *est un ensemble équicontinu d'applications de* E *dans* F).

2. *Supposons que toute partie compacte convexe cerclée dans* E/F *soit contenue dans l'image canonique d'une partie bornée convexe cerclée complète de* E. *Alors toute application nucléaire de* G *dans* E/F *peut s'obtenir par passage au quotient à partir d'une application nucléaire de* G *dans* E.

Démonstration. - La première assertion dans 1° est évidemment contenue dans la seconde. Dans cette dernière, on peut évidemment supposer que A est faiblement fermé ; on sait que A est l'image canonique d'une partie équicontinue convexe cerclée faiblement compacte A_o de E' (cela résulte aussitôt du th. de Hahn-Banach), et on a par suite une application linéaire continue de E'_{A_o} sur F'_A. Comme l'application naturelle de $E'_{A_o} \widehat{\otimes} G_B$ dans $F'_A \widehat{\otimes} G_B$ est alors un homomorphisme du premier espace sur le second (prop. 3, 2°) l'assertion voulue suit aussitôt. 2° se démontre de la même façon. (Ce dernier énoncé pourrait évidemment se préciser comme 1°).

Remarque 9. Soient E et F deux espaces localement convexes, u une application nucléaire de E dans F, M un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $u(M) = \{0\}$, N un sous-espace vectoriel fermé de F tel que $u(E) \subset N$. Même si E et F sont des espaces de Banach réflexifs, il se peut que l'opérateur de E/M dans F, ou de E dans N, défini par l'application nucléaire u, ne soit pas nucléaire. Par ex. Soit E un espace de Banach réflexif (p.ex. ℓ^p, avec $1 < p < 2$) admettant un sous-espace vectoriel fermé F sans supplémentaire topologique, alors l'application naturelle $F \hat{\otimes} F' \to E \hat{\otimes} F'$ n'est pas un isomorphisme topologique (prop. 4, corollaire 2), donc son image n'est pas fermée (th. des isomorphismes de Banach), il existe donc $u \in E \hat{\otimes} F'$ adhérente à l'image de $F \hat{\otimes} F'$ mais non contenue dans cette image. L'application nucléaire de F dans E définie par u applique alors manifestement F dans F, mais n'est pas une application nucléaire de F dans F, si on suppose que l'application canonique de $E \otimes F'$ dans L(F,E) est biunivoque (ce qui est le cas p. ex. pour $E = \ell^p$, comme on s'en convainc très facilement ; voir de façon générale §5, prop. 36, corollaire, 3°), car s'il provenait d'un élément de $F \hat{\otimes} F'$, l'image de cet élément dans $E \hat{\otimes} F'$ serait u puisqu'elle définirait le même opérateur que u.- En prenant le transposé ${}^t u$, on obtient une application nucléaire de E' dans F' qui s'annule sur le sous-espace F^o de E', tel que l'application de E/F^o dans F' qu'elle définit ne soit pas nucléaire.

Bien entendu, ces ennuis disparaissent dès que dans la situation générale envisagée plus haut, M resp. N admet un supplémentaire topologique. Voir aussi Chap. 2, § 1, th. 5.

Autres topologies sur $E \otimes F$.

E et F étant deux espaces localement convexes, une topologie localement convexe T sur $E \otimes F$ est dite compatible avec la structure de produit tensoriel de $E \otimes F$ si elle satisfait aux deux conditions:

1. L'application bilinéaire naturelle de $E \times F$ dans $E \otimes F$ muni de T est séparément continue.

2. Si $x' \in E'$, $y' \in F'$, alors la forme linéaire $x' \otimes y'$ sur $E \otimes F$ muni de T est continue, et, quand x' et y' parcourent une partie équicontinue de E' et de F' respectivement, $x' \otimes y'$ parcourt un ensemble équicontinu de formes linéaires.

1. signifie que T est moins fine que la topologie T_o du produit tensoriel topologique <u>inductif</u> de E et F (i.e. que l'application identique de $E \otimes F$ muni de T_o dans $E \otimes F$ muni de T est continue). 2. signifie que T est plus fine que la topologie T_2 induite sur $E \otimes F$ par $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$. T_o et T_2 sont donc respectivement la topologie la plus fine et la moins fine parmi les topologies sur $E \otimes F$ compatibles avec la structure de produit tensoriel.

DÉFINITION 5. - <u>Soient</u> E, F <u>deux espaces localement convexes</u>. <u>On désigne par</u> $E \hat{\hat{\otimes}} F$ <u>l'espace complété de</u> $E \otimes F$ <u>pour la topologie induite par</u> $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ (<u>topologie de la convergence bi-équicontinue</u>). <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont des espaces de Banach</u>, $E \hat{\hat{\otimes}} F$ <u>sera muni de la norme induite par</u> $B(E', F')$ (<u>notée</u> $\|u\|$ <u>suivant l'usage</u>).

Si E et F, sont complets, donc $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ complet (voir Introduction III, 6), $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est canoniquement isomorphe à un sous-espace fermé de $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$. Il résulte du lemme 2 (§ 1, n° 1) que les applications linéaires de E' dans F qui correspondent aux éléments de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ appliquent les parties équicontinues de E' dans des parties relativement compactes de F ; réciproquement, dans tous les cas connus, toute application linéaire continue de E'_s dans F_s qui transforme les parties équicontinues de E' en des parties relativement compactes de F, est élément de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ (voir § 5).

<u>Exemples 1</u>. Soit M un espace localement compact, $\mathcal{C}_o(M)$ l'espace des fonctions continues sur M "nulles à l'infini" muni de la norme de la

convergence uniforme, E un espace localement convexe quelconque. Alors il est immédiat que $\mathcal{C}_0(M) \otimes E$ s'identifie à l'espace des fonctions sur M, à valeurs dans E, qui sont de la forme $f(t) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_i(t) a_i$, où $\varphi_i \in \mathcal{C}_0(M), a_i \in E$. La topologie induite par $\mathcal{C}_0(M) \hat{\hat{\otimes}} E$ est la topologie de la convergence uniforme dans l'espace $\mathcal{C}_0(M,E)$ des fonctions continues sur M à valeurs dans E (vérification immédiate). Si donc E est complet, $\mathcal{C}_0(M) \hat{\hat{\otimes}} E$ s'identifie à $\mathcal{C}_0(M,E)$, car ce dernier espace est complet et $\mathcal{C}_0(M) \otimes E$ y est dense, comme il est bien connu. A la fonction vectorielle continue f correspond l'application linéaire de E' dans $\mathcal{C}_0(M)$, qui a tout $x' \in E'$ fait correspondre la fonction scalaire $\langle f(t), x' \rangle$, ou encore l'application linéaire du dual $\mathcal{M}^1(M)$ de $\mathcal{C}_0(M)$ dans E qui, à toute mesure de Radon bornée $\mu \in \mathcal{M}^1(M)$, fait correspondre l'intégrale $\int f d\mu$ (par définition même de l'intégrale vectorielle).– Notons que si E est aussi un espace de Banach, l'identification précédente de $\mathcal{C}_0(M) \hat{\hat{\otimes}} E$ à $\mathcal{C}_0(M,E)$ conserve les normes naturelles ; en particulier, si $E = \mathcal{C}_0(N)$, où N est un autre espace localement compact, alors on a un isomorphisme d'espaces normés $\mathcal{C}_0(M) \hat{\hat{\otimes}} \mathcal{C}_0(N)$ et $\mathcal{C}_0(M \times N)$. Prenant pour M l'espace des entiers naturels muni de la topologie discrète, pour E un espace localement convexe complet quelconque on voit, en notant comme d'habitude c_0 l'espace $\mathcal{C}_0(M)$ (espace des suites scalaires tendant vers zéro) que $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ s'identifie à l'espace des suites dans E qui tendent vers zéro, muni de la topologie de la convergence uniforme, cette identification conservant les normes naturelles quand E est un espace de Banach.

2. Soit E un espace localement convexe complet quelconque, déterminons $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} E$. Pour ceci, notons d'abord que cet espace s'identifie bien à l'espace des applications compactes et faiblement continues de ℓ^∞ dans E, ou, ce qui revient au même par transposition, à l'espace des applications linéaires faiblement continues de E' dans ℓ^1 qui transforment les parties équicontinues en

parties relativement compactes (voir [13], lemme 2). Il suffit de montrer que si u est une telle application, elle est adhérente dans $L_e(E', \ell^1)$ à $E \otimes \ell^1$, ce qui résulte aussitôt du fait que dans ℓ^1, l'application identique peut s'approcher, pour la convergence compacte, par des applications linéaires continues de rang fini (prendre par exemple la suite des opérateurs φ_n, "section au rang n" ; pour plus de généralité, voir les considérations du § 5). D'ailleurs, comme les parties faiblement compactes de ℓ^1 sont fortement compactes, toute application faiblement continue de E' dans ℓ^1 transforme les parties équicontinues en parties relativement compactes, et provient donc d'un élément de $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} E$. Donc, par transposition, toute application linéaire faiblement continue de ℓ^∞ dans E est compacte (th. d'Orlicz), et provient d'un élément de $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} E$. Faisons correspondre à une telle application u la suite $(x_i) = (u.e_i)$ des images des éléments de la "base canonique" (e_i) de ℓ^∞ ; comme la suite des e_i est totale dans ℓ^∞ il est immédiat que u est réciproquement défini par la donnée de (x_i). Je dis que (E étant un espace localement convexe complet quelconque), $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} E$ s'identifie exactement à l'espace des suites sommables dans E (ou encore à l'espace des applications linéaires faiblement continues de ℓ^∞ dans E). En effet, si (x_i) correspond à l'application linéaire faiblement continue u, écrivons : $1 = \lim_I .\text{faible} \sum_{i \in I} e_i$, où la limite est prise suivant le filtre des sections dans l'ensemble des parties finies de l'ensemble des indices i ; comme les sommes partielles finies $\sum_{i \in I} e_i$ restent bornées dans ℓ^∞, et que u est faiblement continue et compacte, on obtient $u.1 = \lim \sum_{i \in I} x_i$, ce qui signifie que la famille (x_i) est sommable vers u.1. Réciproquement, si (x_i) est une suite sommable dans E, montrons que pour tout $(\lambda_i) \in \ell^\infty$, la suite $(\lambda_i x_i)$ est encore sommable ; alors il sera immédiat que l'application $(\lambda_i) \to \sum_i \lambda_i x_i$ de ℓ^∞ dans E sera une application linéaire faiblement continue, à laquelle correspond évidemment la suite (x_i). Il faut donc montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, et toute semi-norme continue $\|x\|$ sur E, il existe un $n > 0$ tel que pour tout ensemble fini J d'indices $j \geqslant n$, on ait $\|\sum_{i \in J} \lambda_i x_i\| \leqslant \varepsilon$. On peut supposer les λ_i réels, et majorés en module par 1. On sait alors que pour tout J fini donné, $(\lambda_j)_{j \in J}$ est une combinaison convexe de familles $(\mu_j)_{j \in J}$, où $\mu_j = \pm 1$ pour tout j. Il suffit par suite de choisir n tel que, pour tout J tel que ci-dessus, et toute $(\mu_j)_{j \in J}$ avec $\mu_j = \pm 1$, on ait $\|\sum_{j \in J} \mu_j x_j\| \leqslant \varepsilon$. Il suffit aussi pour ceci que l'on ait $\|\sum_{j \in J'} x_j\| \leqslant \varepsilon/2$ pour tout ensemble fini J' d'indices $> n$. Il est en effet possible de choisir n de cette façon, puisque (x_i) est sommable, ce qui achève la démonstration.- Remarquons aussi que, ℓ^∞ étant le bidual de c_0, les applications linéaires faiblement continues de ℓ^∞ dans l'espace complet E correspondent biunivoquement aux applications linéaires faiblement compactes de c_0 dans E (applications qui, ici, sont même compactes), ce qui donne encore une autre interprétation de $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} E$.

Au § suivant, nous ferons une étude détaillée des éléments du dual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$.

Soient E_i, F_i $(i = 1,2)$ des espaces localement convexes, u_i une application linéaire continue de E_i dans F_i, $(i = 1,2)$; alors l'application $u_1 \otimes u_2$ de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$ est évidemment continue pour les topologies induites par $E_1 \hat{\hat{\otimes}} E_2$ et $F_1 \hat{\hat{\otimes}} F_2$, donc se prolonge par continuité à ces derniers espaces, en une application que l'on pourra noter encore

$u_1 \otimes u_2$, ou $u_1 \hat{\hat{\otimes}} u_2$ quand il y a lieu d'éviter des confusions. (On pourra alors noter $u_1 \hat{\otimes} u_2$, resp. $u_1 \bar{\otimes} u_2$, le prolongement de l'opérateur produit tensoriel algébrique $u_1 \otimes u_2$ aux produits tensoriels topologiques projectifs, resp. inductifs, complétés). Relativement à la notion d'isomorphisme et d'homomorphisme topologique sur, $u_1 \hat{\hat{\otimes}} u_2$ a un comportement inverse de celui du produit tensoriel $u_1 \hat{\otimes} u_2$. Il est immédiat en effet que le produit tensoriel $u_1 \hat{\hat{\otimes}} u_2$ de deux isomorphismes topologiques est un isomorphisme topologique, tandis qu'en général, si u_1 et u_2 sont des homomorphismes topologiques <u>sur</u>, $u_1 \hat{\hat{\otimes}} u_2$ n'est pas un homomorphisme topologique (comparer avec les prop. 3 et 4, relatives à $u_1 \hat{\otimes} u_2$). On prévoit donc que dans le cas où les deux produits tensoriels $E_1 \hat{\otimes} E_2$ et $E_1 \hat{\hat{\otimes}} E_2$ coïncident en tant qu'espaces vectoriels topologiques (ce qui pratiquement signifie que E_1 ou E_2 est nucléaire - voir Chap. 2, § 2, définition 6 -) le symbolisme tensoriel sera particulièrement maniable.

Si T est une topologie sur $E \otimes F$ compatible avec la structure de produit tensoriel, son dual est contenu dans le dual $\mathcal{B}(E,F)$ pour T_0, (c'est donc un espace de formes bilinéaires séparément continues) et contient le dual pour T_2 ; il n'est à priori soumis à aucune autre restriction. Les seules topologies outre celles envisagées précédemment pouvant avoir quelque intérêt semblent être celles qui satisfont à la condition [18] :

3. Pour toute $A \in \mathcal{B}(E,F)$ appartenant au dual de $E \otimes F$ muni de T, et pour toute partie M séparément équicontinue de $\mathcal{B}(F'_b,F)$, l'ensemble des UA, pour $U \in M$, est une partie équicontinue du dual de $E \otimes F$ muni de T ; et condition symétrique pour toute partie séparément équicontinue de $\mathcal{B}(E'_b,E)$. (Bien entendu, UA

18. C'est là un analogue topologique de la notion (métrique) de "uniform cross-norm" de Schatten.

désigne l'application de E dans F' qu'on obtient en identifiant A à une application linéaire de E dans F', U à une application linéaire de F' dans F'). Pratiquement cette condition suppose E et F tonnelés, pour que l'application linéaire de E dans F'_b ou de F dans E'_b définie par une $A \in \mathcal{L}(E,F)$ soit continue.

PROPOSITION 17. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces localement convexes tonnelés</u>, T <u>une topologie sur</u> $E \otimes F$ <u>compatible avec la structure de produit tensoriel et satisfaisant à la condition</u> 3, <u>ci-dessus</u>, $E \overset{(T)}{\otimes} F$ <u>le complété de</u> $E \otimes F$ <u>pour</u> T. <u>Pour toute</u> $A \in \mathcal{L}(E,F)$, <u>pour que la forme linéaire sur</u> $E \otimes F$ <u>qu'elle définit soit continue pour</u> T, <u>il faut et il suffit que l'application</u> $u \longrightarrow u \circ {}^tA$ <u>de</u> $E \otimes F$ <u>muni de</u> T <u>dans</u> $E'_b \bar{\otimes} F$ <u>soit continue, et se prolonge donc par continuité à</u> $E \overset{(T)}{\otimes} F$. <u>On a alors, pour toute</u> $u \in E \overset{(T)}{\otimes} F$

$$\langle u,A\rangle = \mathrm{Tr}.u \circ {}^tA$$

La démonstration est immédiate : Si l'application envisagée est continue, comme pour $u \in E \otimes F$, on a évidemment $\langle u,A\rangle = \mathrm{Tr}.u \circ {}^tA$ on a là une forme linéaire continue sur $E \otimes F$ muni de T, et la formule précédente reste vraie pour tout $u \in E \overset{(T)}{\otimes} F$ par prolongement par continuité. Réciproquement, si A est dans le dual de $E \otimes F$ muni de T, alors $u \longrightarrow u \circ {}^tA$ est une application linéaire continue de $E \otimes F$ muni de T dans $F'_b \bar{\otimes} F$; cela signifie en effet que pour tout ensemble équicontinu M de formes linéaires sur $F'_b \bar{\otimes} F$ - c'est-à-dire une partie séparément équicontinue de $\mathcal{L}(F'_b,F)$ - l'ensemble des formes linéaires $\langle u \circ {}^tA, U\rangle$ sur $E \otimes F$ muni de T est équicontinu quand U parcourt M. Comme on a $\langle u \circ {}^tA, U\rangle = \langle u, UA\rangle$, ce n'est autre que la première partie de la condition 3°.

<u>Remarque</u> 10. - 1° Notons que si E, F, $E \overset{(T)}{\otimes} F$ sont du type $(\mathcal{F})$, F normable, l'application naturelle de $F' \hat{\otimes} F$ dans L(F,F) biunivoque, alors on peut remplacer la condition de la prop. 17, pour que A

soit une forme linéaire continue sur $E \otimes F$ muni de T, par la suivante, moins stricte en apparence : <u>Pour tout</u> $u \in E \overset{(T)}{\otimes} F$, <u>l'application</u> $\tilde{u} \circ {}^tA$ <u>de</u> F <u>dans</u> F <u>est une application de Fredhólm</u>. En effet, $\tilde{u} \circ {}^tA$ s'identifie alors à un élément de $F' \widehat{\otimes} F$, et tout revient à montrer que l'application $u \longrightarrow \tilde{u} \circ {}^tA$ de $E \overset{(T)}{\otimes} F$ dans $F' \widehat{\otimes} F'$ est continue. Mais comme ces deux derniers espaces sont du type $(\mathcal{F})$, cela résulte aussitôt du "théorème du graphe fermé" de Banach.

2° De la Proposition 17 on tire aussitôt la conclusion suivante : <u>Si l'application linéaire naturelle de</u> $F' \bar{\otimes} F$ <u>dans</u> $\mathcal{L}(F'',F')$ <u>est biunivoque, il en est de même de l'application linéaire naturelle de</u> $E \overset{(T)}{\otimes} F$ <u>dans</u> $\mathcal{L}(E'_s,F'_s)$. <u>En effet, si l'image</u> $\tilde{u}$ de $u \in E \overset{(T)}{\otimes} F$ est nulle, alors on a pour tout $A \in \mathcal{L}(E,F)$ dans le dual de $E \overset{(T)}{\otimes} F$: $\tilde{u} \circ {}^tA = 0$ d'où $u \circ {}^tA = 0$, d'où enfin $\langle u,A \rangle = \mathrm{Tr}.u \circ {}^tA = 0$, ce qui établit notre assertion.

3° Quand E et F sont tonnelés, il est facile de s'assurer que la condition 3° est satisfaite pour T quand T est l'une des topologies T_1, T_0, T_2 (produit tensoriel projectif, produit tensoriel inductif, topologie de la convergence bi-équicontinue).

§ 4. SUR LA DUALITÉ DANS LES ESPACES DE FORMES BILINÉAIRES ET D'APPLICATIONS LINÉAIRES.

FORMES BILINÉAIRES ET APPLICATIONS LINÉAIRES INTÉGRALES.

1. <u>Sur les formes linéaires continues sur certains espaces de formes bilinéaires ou de fonctions linéaires</u>.

PROPOSITION 18. - <u>Soient</u> E, F <u>deux espaces localement convexes</u>, <u>soit</u> $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathcal{C}$) <u>un ensemble filtrant croissant de parties faiblement compactes de</u> E (resp. F), <u>soit</u> H <u>un espace vectoriel de formes bilinéaires sur</u> $E \times F$ <u>tel que pour tout</u> $u \in H$, $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathcal{C}$, <u>la restriction de</u> u <u>à</u>

$A \times B$ soit continue pour le produit des topologies faibles. Munissons H de la topologie de la $\mathfrak{S}$ - $\mathfrak{T}$ -convergence. Pour tout $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$, et toute mesure de Radon μ sur l'espace compact $A \times B$ (muni du produit des topologies faibles), la formule

$$(13) \qquad \langle u, v_\mu \rangle = \int u(x,y) d\mu(x,y)$$

définit une forme linéaire continue v_μ sur H, et si μ parcourt un ensemble borné de mesures de Radon sur $A \times B$, v_μ parcourt une partie équicontinue du dual de H. Réciproquement, toute forme linéaire continue sur H, tout ensemble équicontinu de formes linéaires sur H, peuvent s'obtenir ainsi.

2. Soit $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$, et soit W le voisinage de 0 dans H, formé des u tels que $|u(x,y)| \leqslant 1$ pour $x \in A$, $y \in B$. Alors les formes linéaires sur H, majorées par 1 en module sur W (i.e. qui appartiennent au polaire W^o de W dans H'), sont exactement les formes du type v_μ, où μ est une mesure de norme $\leqslant 1$ sur $A \times B$. Si l'enveloppe convexe faiblement fermée de A (resp. B) est identique à son enveloppe convexe cerclée faiblement fermée (en particulier si A et B sont stables par multiplication par des scalaires de norme 1), on peut dans l'énoncé précédent se borner aux mesures positives sur $A \times B$.

Démonstration. - Tout d'abord, A, B et μ étant donnés, le deuxième membre de (13) a bien un sens puisque la fonction $u(x,y)$ sur $A \times B$ est continue, et si u appartient au voisinage $W(A,B)$ de 0 dans H, ensemble des u tels que $|u(x,y)| \leqslant 1$ pour $x \in A$, $y \in B$, et si $\|\mu\|_1 \leqslant 1$, le deuxième membre est majoré par 1 en module, d'où résulte la partie directe de la prop. 18. Réciproquement, une partie équicontinue de H' est contenue (à une homothétie près) dans le polaire d'un ensemble $W = W(A,B)$; or ce dernier est l'image réciproque de la boule unité de l'espace $\mathscr{C}(A \times B)$ des fonctions continues sur $A \times B$ par l'application linéaire continue naturelle φ de H dans cet espace, d'où s'ensuit que le polaire de W est exactement l'image par ${}^t\varphi$ de la boule unité du dual de $\mathcal{C}(A \times B)$, i.e. précisément l'ensemble des formes v_μ, où μ parcourt l'ensemble des mesures de Radon de norme $\leqslant 1$ sur $A \times B$.

Ce raisonnement prouve en même temps la partie 2 de la proposition sauf dans le cas où nous affirmons que μ peut être prise positive. Soit alors, pour tout $(x,y) \in A \times B$, $\varepsilon_{x,y}$ la mesure sur $A \times B$ "masse + 1 au point (x,y) ", posons $v_{x,y} = v_{\varepsilon_{x,y}}$, c'est donc la forme $u \longrightarrow u(x,y)$ sur H. W est le polaire de l'ensemble des $v_{x,y}$, donc le polaire de W est l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée de l'ensemble des $v_{x,y}$, où $(x,y) \in A \times B$; il en résulte facilement, en vertu de l'hypothèse faite sur A et B, que c'est aussi l'enveloppe convexe faiblement fermée de l'ensemble des $v_{x,y}$. L'application $(x,y) \longrightarrow v_{x,y}$ de $A \times B$ dans H' étant faiblement continue, il suit d'une proposition élémentaire bien connue que cette enveloppe convexe faiblement cerclée n'est autre que l'ensemble des intégrales faibles $\int_K v_{x,y} d\mu(x,y)$, où μ parcourt l'ensemble des mesures positives de norme $= 1$ sur le compact $K = A \times B$, ce qui achève de prouver la proposition 18. (Le fait général que nous venons d'invoquer est une conséquence facile du fait classique que l'ensemble des mesures positives de norme = 1 sur l'espace compact K est l'enveloppe convexe faiblement fermée - pour la dualité avec $\mathcal{C}(K)$ - de l'ensemble des masses ponctuelles + 1 sur K).

PROPOSITION 19. - <u>Soient</u> E, F <u>deux espaces localement convexes</u>, $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties faiblement compactes de</u> E <u>recouvrant</u> E, H <u>un espace vectoriel d'applications linéaires de</u> E <u>dans</u> F, <u>dont les restrictions aux</u> $A \in \mathfrak{S}$ <u>sont continues pour la topologie sur</u> A <u>induite par la topologie faible</u>. <u>Munissons</u> H <u>de la topologie de la</u> $\mathfrak{S}$<u>-convergence</u>. <u>Pour qu'une partie</u> M <u>de</u> H <u>soit faiblement relativement compacte</u>, <u>il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient vérifiées</u> :

a. M est borné, i.e. pour tout $A \in \mathfrak{S}$, l'ensemble $M(A) = \bigcup_{u \in M} u(A)$ est borné.

b. Pour tout $x \in E$, l'ensemble $M(x)$ est une partie faiblement relativement compacte de F.

c. Toute application de E dans F qui est limite simple d'applications éléments de M, est dans H.

La nécessité des conditions est évidente. Pour prouver la suffisance, remarquons que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, toute partie équicontinue et faiblement compacte B de F' et tout $u \in H$, la fonction $f_u(x,y') = \langle u.x, y' \rangle$ sur $A \times B$ est continue (c'est ce qu'exprime l'hypothèse que les $u \in H$ ont des restrictions à A, muni de la topologie faible, continues). Il en résulte que H s'identifie de façon naturelle à un sous-espace vectoriel topologique du produit vectoriel topologique P des espaces $\mathscr{C}(A \times B)$ (espace des fonctions scalaires continues sur l'espace compact produit topologique de A faible et de B faible). L'adhérence de M dans P est contenue dans H en vertu de b. et c., qui impliquent que M est une partie relativement compacte de H pour la topologie de la convergence simple dans l'espace de toutes les applications de E dans F_s (th. de Tychonoff). Il suffit donc de prouver que M est faiblement relativement compact dans P, i.e. que ses projections sur les espaces facteurs le sont, i.e. que pour tout (A,B), l'ensemble M' des fonctions $f_u(x,y')$ sur $A \times B$ (avec $u \in M$) est faiblement relativement compact dans $\mathscr{C}(A \times B)$. Il suffit pour cela de vérifier que M' est borné dans $\mathscr{C}(A \times B)$ et relativement compact pour la topologie de la convergence simple ([14], th. 5). Mais cela est évident, a. impliquant que M' est borné, et b. et c. que M est relativement compact dans H pour la topologie de la convergence simple de l'espace des applications de E dans F_s, donc que M' est relativement compact dans $\mathcal{C}(A \times B)$ pour la convergence simple, puisque l'application naturelle de H dans $\mathcal{C}(A \times B)$ est continue pour les topologies qu'on vient d'envisager - Remarquons que la condition a. de l'énoncé est conséquence de b. si on suppose les $A \in \mathfrak{S}$ convexes cerclés, puisqu'ils sont toujours *complets* (car faiblement compacts)

COROLLAIRE 1. - *Soit* E *un espace localement convexe tonnelé*, $\mathfrak{S}$ *un ensemble de parties précompactes de* E *recouvrant* E, F *un espace localement convexe*. *Pour que* L(E,F) *soit réflexif* (*resp. du type* $(\mathcal{M})$) *pour la topologie de la* $\mathfrak{S}$*-convergence, il faut et il suffit que* F *le soit*.

La nécessité résulte du fait que F est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de L(E,F) (immédiat). Pour voir que la condition est suffisante, soit d'abord $\hat{E}$ la réunion des adhérences dans le complété de E des $A \in \mathfrak{S}$, il est immédiat (F étant réflexif, donc quasi-complet) que L(E,F) muni de la $\mathfrak{S}$-convergence s'identifie à $L(\hat{E},F)$ muni de la $\hat{\mathfrak{S}}$-convergence, où $\hat{\mathfrak{S}}$ est l'ensemble des adhérences dans $\hat{E}$ des $A \in \mathfrak{S}$. Comme $\hat{E}$ est manifestement tonnelé si E l'est, on est ainsi ramené au cas où les $A \in \mathfrak{S}$ sont compacts. On est alors sous les conditions générales d'application de la prop. 19, et on voit aussitôt que toute partie bornée M de L(E,F) satisfait aux conditions a., b., c., de l'énoncé, c. résultant du fait que M est équicontinu (E étant tonnelé). Si F est même du type $(\mathcal{M})$ il résulte immédiatement du théorème d'Ascoli que L(E,F) est du type $(\mathcal{M})$ pour la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence.

COROLLAIRE 2. - *Soit* E *un espace localement convexe tonnelé*, $\mathfrak{S}$ *un ensemble de parties faiblement compactes de* E *recouvrant* E, F *un espace du type* $(\mathcal{M})$. *Alors* L(E,F) *est réflexif pour la topologie de la* $\mathfrak{S}$*-convergence*.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 19.

Dans la suite de ce n°, nous introduisons systématiquement une propriété de certaines parties d'un espace localement convexe (th. 3 et définition 6), à cause de sa liaison avec un théorème de dualité très général (th. 6), dont les premières conséquences seront développées au n° suivant.

THÉORÈME 3. - Soient E un espace localement convexe, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées convexes cerclées de E telles que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, E_A soit complet. Soit K une partie faiblement compacte de E dont l'enveloppe convexe cerclée fermée K_0 est faiblement compacte (voir note 14 page 45). Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

a. Pour tout espace compact M muni d'une mesure positive μ, toute application linéaire continue α de $L^1(\mu)$ dans E_{K_0} induit une application de Fredholm de $L^\infty(\mu)$ dans un espace convenable E_A, avec $A \in \mathfrak{S}$.

b. Pour tout M, μ, α, comme dans a., il existe un $A \in \mathfrak{S}$, et une application bornée et fortement mesurable f de M dans E_A telle que pour toute $\varphi \in L^1(\mu)$ on ait $\alpha.\varphi = \int \varphi f d\mu$ (intégrale dans E_A).

c. Pour tout espace compact M, muni d'une mesure $\mu \geqslant 0$, et toute application scalairement mesurable f de M dans E telle que $f(M) \subset K_0$, il existe un $A \in \mathfrak{S}$ et une application fortement mesurable de M dans E_A qui est scalairement presque partout égale à f.

d. Pour toute mesure positive μ sur l'espace compact faible K, il existe un $A \in \mathfrak{S}$ et une suite de parties K_i de K compactes dans E_A et dont la réunion est bornée dans E_A, telles que μ soit portée par la réunion des K_i.

e. Pour toute mesure positive sur K, l'application $\varphi \to \int \varphi(x) x d\mu(x)$ de $L^1(\mu)$ dans E induit une application de Fredholm de $L^\infty(\mu)$ dans un espace E_A ($A \in \mathfrak{S}$) convenable.

Démonstration. - L'équivalence de a. et b. résulte de la première partie du

LEMME 9. - Soit M un espace compact muni d'une mesure positive μ, α une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans un espace de Banach E. Pour que α induise une application de Fredholm α_0 de $L^\infty(\mu)$, il faut et il suffit qu'il existe une application fortement mesurable et bornée f de M dans E telle que $\alpha.\varphi = \int \varphi f d\mu$ pour toute $\varphi \in L^1(\mu)$. Supposons $\|\mu\|_1 = 1$, alors la norme-trace de α_0 est égale à $\int \|f(t)\| \, d\mu(t)$, donc au plus égale à $\|\alpha\|$.

Si α est donnée par une f comme dans l'énoncé, f sera à fortiori une application absolument sommable de M dans E, donc s'identifie à un élément u de $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ de norme égale à $\|f\|_1$ (th. 2). $L^\infty(\mu)$ étant le dual de $L^1(\mu)$, u définit une application de Fredholm de $L^\infty(\mu)$ dans E ayant une norme-trace égale à $\|f\|_1$, application dont on vérifie immédiatement qu'elle n'est autre que l'application induite par α. Réciproquement, si α_0 est une application de Fredholm, i.e. provient d'un élément u de $(L^\infty(\mu))' \hat{\otimes} E$, il provient même d'un élément de $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$, car α_0 est faiblement continue, et on sait qu'il existe une projection continue p du bidual de $L^1(\mu)$ sur $L^1(\mu)$ [19] - il suffit donc de prendre $f = (p \otimes 1).u$.

---

19. Le fait qu'il existe bien une projection de norme 1 du bidual de $L^1(\mu)$ sur $L^1(\mu)$ est une conséquence facile de [16], mais peut aussi se voir très élémentairement ainsi : Tout d'abord, comme l'a remarqué J. Dixmier, tout espace de Banach E', dual d'un espace de Banach E, possède la propriété qu'il existe une projection de norme 1 de son bidual sur cet espace (il suffit, à tout élément du bidual de E', i.e. à une forme linéaire continue sur E", de faire correspondre la restriction de cette forme à E, qui est un élément de E'). D'autre part, si F est un espace de Banach qui satisfait à la propriété envisagée, il est immédiat que tout sous-espace G de F tel qu'il existe une projection de norme 1 de E sur G satisfait à la même propriété. Mais l'espace $\mathcal{M}^1(M)$ des mesures de Radon bornées sur l'espace localement compact M est un dual d'espace de Banach (savoir de l'espace $\mathcal{C}_0(M)$ des fonctions continues sur M "nulles à l'infini"), $L^1(\mu)$

Identifions f à une application absolument sommable de M dans E (th. 2) ; alors α_0 n'est autre que l'application $\varphi \to \int \varphi f d\mu$. Cette application étant continue pour la topologie induite par $L^1(\mu)$, on sait (voir Introduction V) que f doit être bornée, et qu'on a $\alpha.\varphi = \int \varphi f d\mu$ pour toute $\varphi \in L^1(\mu)$.

b. implique c., car avec les notations de c., considérons l'application linéaire $\alpha.\varphi = \int \varphi f d\mu$ de $L^1(\mu)$ dans E, le deuxième membre étant une intégrale faible dans E dont l'existence est garantie par la faible compacité de K_0 (voir Introduction V). D'après la condition b., il existe une application fortement mesurable et bornée g de M dans un espace E_A ($A \in \mathfrak{S}$) convenable, telle que l'on ait $\alpha.\varphi = \int \varphi g d\mu$. Il en résulte immédiatement que f et g sont scalairement presque partout égales.

c. implique d. En effet, si μ est une mesure positive sur K, considérons l'application identique de K dans E, par hypothèse cette application est scalairement presque partout égale à une application fortement mesurable et bornée f de K dans un espace E_A ($A \in \mathfrak{S}$) convenable. Par définition de la mesurabilité forte, il existe donc une suite de compacts $K_i \subset K$ tels que μ soit portée par la réunion des K_i, et que la restriction de f à K_i soit une application continue de K_i dans E_A. On peut évidemment supposer que la restriction μ_i de μ à K_i a pour support K_i. Alors, de $f(x) = x$ scalairement presque partout sur K_i, on conclut aussitôt, les deux membres étant des fonctions faiblement continues, que $f(x) = x$ sur K_i. Donc l'application identique de K_i faible dans E_A est continue, donc K_i est une partie compacte de E_A, enfin la réunion des K_i est bien bornée dans E_A puisque f est bornée.

d. implique e. En effet, il est immédiat moyennant d. que l'applica-

---

s'identifie à un sous espace normé de $\mathcal{M}^1(M)$, et il existe une projection naturelle de norme 1 de $\mathcal{M}^1(M)$ sur $L^1(\mu)$ (savoir celle qui, à toute mesure ν, fait correspondre sa "composante suivant μ", i.e. sa partie non singulière dans la décomposition de ν par rapport à μ).

tion identique de K dans E est scalairement p.p. égale à une application fortement mesurable et bornée de K dans un espace E_A ($A \in \mathfrak{S}$) convenable, et à fortiori provient d'un élément de $L^1(\mu) \hat{\otimes} E_A$, d'où aussitôt la conclusion.

e. implique a. (ce qui achèvera de prouver le th. 3). Soit $\mathcal{M}(K)$ l'espace des mesures de Radon sur l'espace compact faible K, considérons l'application $\beta(\nu) = \int x d\nu(x)$ de $\mathcal{M}(K)$ dans E (l'intégrale faible existe en vertu de la faible compacité de K_o). Cette application est faiblement continue ($\mathcal{M}(K)$ étant considéré comme le dual de l'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues sur K) par définition même de l'intégrale faible, d'où résulte aussitôt que β applique la boule unité de $\mathcal{M}(K)$ <u>sur</u> l'enveloppe convexe cerclée fermée K_o de K, de sorte que E_{K_o} s'identifie à un espace quotient de $\mathcal{M}(K)$ par un sous-espace vectoriel faiblement fermé. Si donc α est une application linéaire continue d'un espace $L^1(\mu)$ dans E_{K_o}, d'après une propriété fondamentale de $L^1(\mu)$ (voir les remarques qui suivent le th. 2, corollaire 3), il suit que α est de la forme $\varphi \rightarrow \int x d\nu_\varphi(x)$ où $\varphi \longrightarrow \nu_\varphi$ est une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans $\mathcal{M}(K)$. Il est facile de voir qu'il existe alors une mesure positive ν sur K telle que l'on ait $|\nu_\varphi| \leqslant \nu$ quand φ est dans la boule unité de $L^\infty(\mu)$: on applique par exemple la proposition 10, 1°, en remarquant que $\mathcal{M}(K)$ est isomorphe, avec sa structure latticielle, à un espace $L^1(\rho)$ construit sur une mesure ρ convenable (voir [16]). Donc les ν_φ, pour $\varphi \in L^\infty(\mu)$, s'identifient à des éléments de $L^\infty(\nu)$. L'application α_o de $L^\infty(\mu)$ dans E induite par α apparaît donc comme composée d'une application linéaire continue de $L^\infty(\mu)$ dans $L^\infty(\nu)$ et de l'application $\psi \rightarrow \int x\psi(x) d\nu(x)$ de $L^\infty(\nu)$ dans E ; application qui en vertu de l'hypothèse e., est une application de Fredholm de $L^\infty(\nu)$ dans un espace E_A ($A \in \mathfrak{S}$) convenable. Il en est donc de même de α_o, ce qui prouve notre assertion.

DÉFINITION 6. - _Soit_ E _un espace localement convexe_, $\mathfrak{S}$ _un ensemble de parties bornées convexes cerclées de_ E _telles que pour tout_ $A \in \mathfrak{S}$, E_A _soit complet. Une partie_ K _de_ E _est dite posséder la propriété de Philipps_ (_en abrégé_, _la_ "_propriété_ Φ ") _par rapport à_ $\mathfrak{S}$, _si son enveloppe convexe cerclée est faiblement compacte_, _et si elle satisfait aux conditions équivalentes du th._ 3. _Si_ $\mathfrak{S}$ _est l'ensemble de toutes les parties bornées convexes cerclées_ A _de_ E _telles que_ E_A _soit complet_, _on dit que_ K _possède la_ "_propriété_ Φ " (_sans spécifier_ $\mathfrak{S}$).

Il revient donc au même de dire que K possède la propriété Φ relativement à $\mathfrak{S}$, où que son enveloppe convexe cerclée fermée K_0 la possède. Mais si K est fermé, la vérification du premier fait peut être plus facile grâce aux critères d. et e. du th. 3 faisant intervenir directement K et non son enveloppe convexe cerclée fermée.

THÉORÈME 4 (Philipps). - _Soit_ E _un espace du type_ ($\mathcal{F}$). _Alors toute partie faiblement compacte_ K _de_ E _possède la propriété_ Φ.

En effet, une variante du th. de Dunford-Pettis, dûe à R.S.Philipps [25], nous apprend que la condition b. de th. 3 est alors vérifiée. Donnons ici une version simplifiée de la démonstration. Tout d'abord, en vertu du th. de Krein-Šmulian, on peut supposer K convexe cerclé (voir note 14 page 45). Si alors α est une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans E_K, alors α transforme toute partie faiblement compacte de $L^1(\mu)$ en une partie compacte de E (th. dû encore essentiellement à Dunford-Pettis [28] ; pour une démonstration simple de la forme générale utilisée ici, voir p. ex. [13], th. 1). En particulier la boule unité de $L^\infty(\mu)$ est transformée en une partie compacte, donc séparable, de E, d'où résulte, $L^\infty(\mu)$ étant dense dans $L^1(\mu)$, que α applique $L^1(\mu)$ dans un sous-espace séparable de E, de sorte qu'on peut supposer E séparable. Alors il existe une suite faiblement dense dans E', de sorte que K est métrisable pour la topologie faible. Considérons E_K comme le dual de l'espace de Banach

$F = \widehat{E'_{K^0}}$, F est séparable puisque la boule unité de son dual est faiblement métrisable. Donc α, considéré comme une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans F', peut d'après le th. de Dunford-Pettis classique (voir [5]) se représenter par une application faiblement mesurable et bornée f de M dans F'. f est aussi une application faiblement mesurable de M dans E, donc fortement mesurable puisque E est un espace $(\mathcal{F})$ séparable, et on a manifestement $\alpha.\varphi = \int \varphi f d\mu$ pour toute $\varphi \in L^1(\mu)$. Enfin, il est facile de voir que f est aussi une application fortement mesurable et bornée de M dans un espace E_A, où A est une partie bornée convexe cerclée fermée convenable de E, ce qui achèvera la démonstration. On peut aussi se ramener dès le début au cas où E est un espace de Banach, grâce au lemme élémentaire suivant ayant son intérêt propre :

LEMME 10. - <u>Soit</u> E <u>un espace du type</u> $(\mathcal{F})$, A <u>une partie faiblement compacte de</u> E. <u>Il existe une partie bornée convexe cerclée fermée</u> B <u>de</u> E <u>telle que</u> A <u>soit une partie faiblement compacte de</u> E_B.

On note d'abord que l'on peut supposer A convexe cerclé (th. de Krein-Šmulian). A étant borné, on sait qu'il existe alors une partie bornée convexe cerclée fermée $B \supset A$ de E telle que les topologies induites sur A par E et par E_B soient les mêmes ([9], § 3, n° 1). Il résulte alors aussitôt de [9], § 3, lemme 8, que B satisfait à la condition voulue.

Donnons en passant la conséquence suivante du th. 4 :

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> E <u>un espace du type</u> $(\mathcal{F})$ <u>réflexif</u>, <u>M un espace localement compact</u>, <u>muni d'une mesure positive</u> μ, f <u>une application scalairement mesurable de</u> M <u>dans</u> E. <u>Alors il existe une application fortement mesurable</u> (voir note 16 page 64) g <u>de</u> M <u>dans</u> E <u>qui est scalairement localement presque partout égale à</u> f (i.e. <u>telle que pour tout</u> $x' \in E'$, <u>on ait</u> $\langle f(t),x'\rangle = \langle g(t),x'\rangle$ loc.p.p.).

Le lemme de Godement (Introduction V, lemme B) nous ramène aussitôt à prouver le th. 5 dans le cas où M est lui-même compact. E' admet une suite fondamentale (A_n) de parties équicontinues, donc en vertu de Introduction V, lemme A, 1°, on peut poser $\varphi_n = \operatorname{Sup}_{x' \in A_n} |f_{x'}|$, φ_n est une classe de fonctions numériques mesurables, dont nous prenons un représentant $t \longrightarrow \varphi_n(t)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier n, on peut trouver un compact $M_n \subset M$ tel que $\mu(M \cap \complement M_n) \leqslant \varepsilon/2^n$, et que $\varphi_n(t)$ soit bornée sur M_n. Prenant $K = \bigcap M_n$, on aura $\mu(M \cap \complement K) \leqslant \varepsilon$, et toute φ_n est <u>bornée</u> sur K. On est alors manifestement ramené à prouver le th. 5 pour K au lieu de M, car M est, à un ensemble négligeable près, réunion d'une suite de compacts tels que K. Alors, par construction, pour tout $x' \in E'$, on a $f_{x'} \in L^\infty(\mu)$ et $f_{x'}$ parcourt une partie bornée de $L^\infty(\mu)$ quand x' parcourt une partie équicontinue de E'. Par suite, pour toute $\varphi \in L^1(\mu)$, la forme linéaire $x' \longrightarrow \langle \varphi, f_{x'} \rangle$ sur E' est bornée sur les parties équicontinues de E', d'où résulte, E étant réflexif, qu'elle provient d'un élément de E ([9], th.7), qui n'est évidemment autre que $u.\varphi = \int \varphi f d\mu$. De plus, il est immédiat que l'application $\varphi \longrightarrow u.\varphi$ de $L^1(\mu)$ dans E est continue, donc faiblement compacte puisque E est réflexif. En vertu du th. 4, elle provient donc d'une application fortement mesurable et bornée g de M dans E, par la formule $u.\varphi = \int \varphi g d\mu$. Donc $\int \varphi g d\mu = \int \varphi f d\mu$ pour toute $f \in L^1(\mu)$, d'où résulte aussitôt que f et g coïncident scalairement p.p.

D'autres exemples d'ensemble ayant la propriété Φ sont donnés par la

PROPOSITION 20. - 1. <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach dont le dual soit fortement séparable</u>, <u>considérons son dual faible</u> E'_s. <u>Alors la boule unité de</u> E'_s <u>possède la propriété</u> Φ.

2. <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe muni d'un ensemble</u> $\mathfrak{S}$ <u>de parties bornées convexes cerclées</u> A <u>telles que les espaces</u> E_A <u>soient complets</u>, <u>et soit</u> u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans un espace localement convexe</u> F. <u>Si</u> K <u>est une partie de</u> E <u>qui possède la propriété</u> Φ <u>relativement à</u> $\mathfrak{S}$, <u>alors</u> u(K) <u>possède la propriété</u> Φ

relativement à $u(\mathfrak{S})$.

3. Soit K une partie faiblement compacte d'un espace localement convexe E, dont l'enveloppe convexe cerclée fermée est faiblement compacte et qui est réunion d'une suite de parties K_i de E ayant la propriété Φ relativement à un même ensemble borné convexe cerclé A tel que E_A soit complet. Alors K a la propriété Φ relativement à A.

Démonstration. - 1. Il est bien connu que toute application scalairement mesurable f d'un espace localement compact M muni d'une mesure μ dans E', est même fortement mesurable, d'où la conclusion en vertu du critère c. du th. 3.

2. On notera d'abord que si A est une partie bornée convexe cerclée de E telle que E_A soit complet, et si $B = u(A)$, alors F_B est complet, car isomorphe à un quotient de E_A. Pour prouver maintenant que $u(K)$ a la propriété Φ relativement à $u(\mathfrak{S})$ on prend cette propriété par exemple sous la forme d. du th. 3, et on applique le fait bien connu que toute mesure sur $u(K)$ est l'image par u (considéré comme une application du compact K sur le compact $u(K)$) d'une mesure sur K : comme l'application linéaire $f \to f \circ u$ de $\mathscr{C}(u(K))$ dans $\mathscr{C}(K)$ est une isométrie, sa transposée est en effet un homomorphisme du dual du second espace sur le dual du premier.

3. Résulte immédiatement du critère d. du th. 3.

Signalons le corollaire trivial de la prop. 20, 3° :

COROLLAIRE. - Soit E un espace localement convexe, A une partie bornée convexe cerclée complète de E, (x_i) une suite faiblement convergente dans E contenue dans A. Alors (x_i) possède la propriété Φ par rapport à A.

Il suffit de vérifier que l'enveloppe convexe cerclée fermée de la suite (x_i) est faiblement compacte, ce qui résulte en effet du théorème de Krein-Šmulian.

L'intérêt de la définition 6, au point de vue du travail actuel, réside dans le

THÉORÈME 6. - Soit E un espace localement convexe muni d'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées convexes cerclées A telles que E_A soit complet, soit K une partie bornée fermée de E, K_0 son enveloppe convexe cerclée fermée.

1. Pour que K satisfasse à la propriété Φ relativement à $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition suivante :

f. Quel que soit l'espace localement convexe F muni d'un ensemble filtrant croissant $\mathcal{C}$ de parties faiblement compactes convexes cerclées, si H est un espace vectoriel de formes bilinéaires séparément continues sur $E \times F$, tel que pour tout $u \in H$ et $B \in \mathcal{C}$, la restriction de u au produit $K \times B$ (muni du produit des topologies faibles) soit continue ; alors sur H munie de la topologie de la K-$\mathcal{C}$-convergence (pas nécessairement séparée), toute forme linéaire continue provient d'un élément d'un espace $E_A \hat{\otimes} F_B$, où $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathcal{C}$.

2. Supposons que tout $A \in \mathfrak{S}$ contienne K_0, et que K_0 satisfasse à la propriété Φ relativement à $\mathfrak{S}$. Soient F, $\mathcal{C}$, H comme dans l'énoncé de la condition f. ci-dessus. Soit v une forme linéaire continue sur H, majorée par 1 en module sur le voisinage V de 0 formé des $u \in H$ tels que $|u(x,y)| \leqslant 1$ pour $x \in K_0$, $y \in B$, où $B \in \mathcal{C}$ est donné. Alors il existe un $A \in \mathfrak{S}$ tel que v provienne de la boule unité de $E_A \hat{\otimes} F_B$.

Démonstration. - Bien entendu, par forme linéaire définie par un élément u de $E_A \hat{\otimes} F_B$, nous entendons la forme restriction à H de la forme sur $\mathcal{L}(E,F)$ définie par l'image canonique de u dans $E \bar{\otimes} F$. Supposons d'abord que la condition f. soit vérifiée. Prenons d'abord F = corps des scalaires, $H = B(E,F) = E'$ muni de la topologie de la K-convergence, identique à la topologie de la K_0-convergence. Par hypothèse, toute forme linéaire sur E' continue pour cette topologie provient d'un élément d'un espace $E_A \hat{\otimes} F = E_A$, donc d'un élément de E, ce qui signifie en vertu du th. des bipolaires, que K_o est faiblement compact. Prouvons maintenant que la condition a. du th. 3 est vérifiée. Avec les notations de cette condition, il est évidemment loisible de supposer que M est "l'espace de Kakutani" attaché à μ, i.e. que $L^\infty(\mu)$ s'identifie à l'espace $\mathcal{C}(M)$ des fonctions continues sur M [16]. Soient $F = (L^\infty(\mu))'$ muni de la topologie faible de dual de $L^\infty(\mu)$, $\mathcal{C}$ l'ensemble réduit à un seul élément B, boule unité de $(L^\infty(\mu))'$, $H = E' \otimes F' = E' \otimes L^\infty(\mu)$, et considérons la forme linéaire v sur H définie par l'application α_o de $L^\infty(\mu)$ dans E, restriction de l'application donnée α de $L^1(\mu)$ dans E_{K_o}. Prouvons que v est continue pour la K_o-B-convergence. Pour cela, M étant un espace de Kakutani, on note que α est donnée par une application faiblement continue et bornée f de M dans K_o par la formule $\alpha.\varphi = \int \varphi f d\mu$, on a donc, pour $x' \in E'$, $\varphi \in L^\infty(\mu)$:

$$v(x' \otimes \varphi) = \langle x', \alpha.\varphi\rangle = \left\langle \int \varphi f d\mu, x'\right\rangle = \int \langle f(t) \otimes \varepsilon_t, x' \otimes \varphi\rangle \, d\mu(t)$$

où pour tout $t \in M$, ε_t désigne la forme linéaire $f \to f(t)$ sur $\mathcal{C}(M) = L^\infty(\mu)$

On conclut, pour tout $u \in E' \otimes L^\infty(\mu)$:

$$v(u) = \int \langle f(t) \otimes \varepsilon_t, u\rangle \, d\mu(t) = \int u(f(t), \varepsilon_t) \, d\mu(t)$$

ce qui prouve bien que v est borné sur l'ensemble V des $u \in H$ tels que $|u(x,y)| \leqslant 1$ pour $x \in K_o$, $y \in B$, donc une forme continue pour la K_o-B-convergence. Par hypothèse, v est donnée par un élément d'un espace $E_A \hat{\otimes} F_B$, où $A \in \mathfrak{S}$, d'où résulte bien que α est une application de Fredholm de $L^\infty(\mu)$ dans E_A : on a bien prouvé la condition a.

Réciproquement, supposons que K_o satisfasse à la condition Φ, prouvons que la condition f. est vérifiée. Avec les notations de l'énoncé de cette condition, on peut supposer évidemment que v est majoré par 1 en module sur l'ensemble V des $u \in H$ tels que $|u(x,y)| \leqslant 1$ pour $x \in A_o$, $y \in B$, où $B \in \mathcal{C}$ est donné. Lorsque $K_o \subset A$ pour tout $A \subset \mathfrak{S}$, notre démonstration impliquera en même temps la partie 2° du th. 6.- D'après la prop. 18, il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ sur $K_o \times B$, de norme $\leqslant 1$, telle que l'on ait

$$\langle v, u \rangle = \int u(x,y) d\mu(x,y)$$

pour tout $u \in H$. Considérons l'application $f_o(x,y) = x$ de $M = K_o \times B$ dans K_o, elle est faiblement continue, donc d'après l'hypothèse et le th. 3, critère c., scalairement presque partout égale à une application fortement mesurable et bornée f de M dans un espace E_A ($A \in \mathfrak{S}$) convenable. D'ailleurs, f_o étant faiblement continue et f fortement mesurable, on voit même que f_o et f sont égales presque partout; il suffit en effet d'appliquer le critère de Lusin pour f et de remarquer que f_o et f sont identiques sur toute partie compacte M_o de M telle que f ait une restriction continue à M_o et que la restriction de μ à M_o ait pour support M_o. Interprétons f comme un élément de $E_A \hat{\otimes} L^1(\mu)$ (th. 2) - c'est évidemment un élément de la boule unité si $K_o \subset A$. Considérons l'application $\alpha.\varphi = \int y\varphi(x,y) d\mu(x,y)$ de $L^1(\mu)$ dans F_B (dont l'existence est garantie par la faible compacité de B dans F), et posons $\tilde{f} = (1 \otimes \alpha).f$; on a donc $\tilde{f} \in E_A \hat{\otimes} F_B$, et comme $\|\alpha\| \leqslant 1$, on a $\|\tilde{f}\|_1 \leqslant 1$ si $\|f\|_1 \leqslant 1$. Tout revient à vérifier que la forme linéaire $\tilde{v}$ sur H définie par $\tilde{f}$ est identique à v. Or soit $u \in H$, $\langle \tilde{v}, u \rangle$ est le produit scalaire de la forme bilinéaire $u_1(x,\varphi) = u(x,\alpha.\varphi)$ sur $E_A \times L^1(\mu)$ définie par u, avec $f \in E_A \hat{\otimes} L^1(\mu)$. Or, de façon explicite $u_1(x,\varphi) = \langle x, {}^t u.\alpha\varphi \rangle = \langle x, \int \varphi(x,y)\, {}^t u.y d\mu(x,y) \rangle$, donc u_1 est la forme bilinéaire définie par l'application faiblement mesurable et bornée $(x,y) \longrightarrow {}^t u.y$ de M dans $(E_A)'$, et on a par suite $\langle f, u_1 \rangle = \int \langle f(x,y), {}^t u.y \rangle d\mu(x,y)$, d'où, puisque $f(x,y) = x$ p.p., $\langle f, u_1 \rangle = \int u(x,y) d\mu(x,y) = \langle y, u \rangle$, ce qui achève la démonstration.

2. Application à divers théorèmes de dualité.

Les applications les plus importantes du th. 6 sont contenues dans le cas particulier suivant :

THÉORÈME 7. - Soient E, F deux espaces localement convexes, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées convexes cerclées A de E telles que les *espaces E_A soient complets,* $\mathfrak{T}$ *un ensemble filtrant croissant de parties faiblement compactes convexes cerclées de F. Soit* $\mathfrak{S}_0$ *un ensemble filtrant croissant de parties de* E *tel que pour tout* $A_0 \in \mathfrak{S}_0$ *existe un* $A \in \mathfrak{S}$ *tel que* A_0 *soit une partie faiblement compacte de* E_A. *Soit enfin* H *un espace vectoriel de formes bilinéaires séparément continues sur* $E \times F$ *tel que pour* $u \in H$, $A_0 \in \mathfrak{S}_0$, $B \in \mathfrak{T}$, *la restriction de* u *à* $A_0 \times B$ *soit continue pour le produit des topologies faibles. Munissons* H *de la topologie de la* $\mathfrak{S}_0$-$\mathfrak{T}$*-convergence.*

Alors toute forme linéaire continue v *sur* H *provient d'un espace* $E_A \hat{\otimes} F_B$, *où* $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{T}$; i.e. *est de la forme* $v = \sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$, *où* $(\lambda_i) \in \ell^1$, *et où* (x_i) (*resp.* (y_i)) *est une suite extraite d'un* $A \in \mathfrak{S}$ (*resp. d'un* $B \in \mathfrak{T}$).

Démonstration. - $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{T}$ étant supposés filtrants croissants, on peut supposer v majorée par 1 en module sur l'ensemble des $u \in H$ tels que $|u(x,y)| \leqslant 1$ pour tout $x \in A_0$, $y \in B$, où $A_0 \in \mathfrak{S}_0$ et $B \in \mathfrak{T}$ sont donnés. Donc v est continue pour la topologie de la A_0-B-convergence. Il suffit alors d'appliquer le th. 6, compte tenu du fait que les $A_0 \in \mathfrak{S}_0$ ont la propriété Φ relativement à $\mathfrak{S}$ (th. 4). On fera attention qu'en général la réciproque du th. 7 est fausse, i.e. que la forme linéaire définie par un élément d'un espace $E_A \hat{\otimes} F_B$ n'est pas toujours continue. La réciproque est vraie dans les cas les plus importants. Notons tout de suite le corollaire suivant, bien plus élémentaire, et suffisant pour la plupart des applications que nous envisagerons du th. 7 :

COROLLAIRE. - *Soient* E, F *deux espaces localement convexes,* $\mathfrak{S}$ (*resp.* $\mathfrak{T}$) *un ensemble filtrant croissant de parties faiblement compactes convexes cerclées de* E (*resp.* F). *Soit* $\mathfrak{S}_0$ *l'ensemble des parties de* E *qui sont compactes dans un espace* E_A *où* $A \in \mathfrak{S}$, *soit de même* $\mathfrak{T}_0$ *l'ensemble des parties de* F *qui sont compactes dans quelque espace* F_B *avec* $B \in \mathfrak{T}$.

Considérons sur $\mathcal{L}(E,F)$ les topologies localement convexes suivantes : la topologie T_0 de la $\mathfrak{S}_0$- $\mathcal{T}_0$-convergence, la topologie T de la $\mathfrak{S}_0$-$\mathcal{T}$-convergence, la topologie T' de la $\mathfrak{S}$- $\mathcal{T}_0$-convergence, enfin la topologie T_1 borne supérieure des deux dernières. Alors T_0, T, T', T_1 donnent toutes le même dual, qui est l'ensemble des formes linéaires sur H du type $v = \sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$, où (x_i) est une suite extraite d'un $A \in \mathfrak{S}$, (y_i) une suite extraite d'un $B \in \mathcal{T}$, enfin $(\lambda_i) \in \ell^1$.

Cet énoncé résulte bien du th. 7, car à priori on a $T_0 \leqslant T$, $T' \leqslant T_1$, il suffit donc de montrer que toute forme linéaire continue pour T_1 est de la forme indiquée $\sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$ (car il est évident qu'une telle forme est déjà continue pour T_0, puisqu'on peut supposer que (x_i) - (resp. (y_i) - tend vers zéro dans E_A - resp. F_B). Or, une forme linéaire continue pour T_1 est la somme de deux formes linéaires, l'une continue pour T, l'autre continue pour T', et à chacune de ces formes le th. 7 est directement applicable ; car pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, les restrictions de u aux ensembles $A_0 \times B$, où $A_0 \in \mathfrak{S}_0$ et $B \in \mathcal{T}$, ou aux ensembles $A \times B_0$, ou $A \in \mathfrak{S}$ et $B_0 \in \mathcal{T}_0$, sont évidemment continues.- Ce corollaire pourrait se démontrer directement sans difficulté grâce au lemme suivant :

LEMME 12. - Soit E un espace du type $(\mathcal{F})$, K une partie compacte de E. Il existe une suite (x_i) dans E tendant vers zéro, dont l'enveloppe convexe cerclée fermée contient K, et une partie compacte convexe cerclée $K' \supset K$ de E telle que K soit une partie compacte de $E_{K'}$.

La première assertion du lemme est contenue implicitement dans la démonstration du th. 5 de [7], mais peut aussi se démontrer directement par un raisonnement plus simple (enfin, c'est aussi un corollaire du th. 1 en prenant F = corps des scalaires !). D'autre part, il est bien connu ("première propriété de dénombrabilité de Mackey") qu'il existe, pour la suite (x_i) tendant vers zéro, une suite (α_i) de nombres >0 tendant vers zéro, telle que la suite $(\frac{1}{\alpha_i} x_i)$ tende encore vers zéro. Si alors K' désigne l'enveloppe convexe cerclée fermée de cette dernière suite, K' est compact, et (x_i) tend vers zéro dans $E_{K'}$, donc son enveloppe convexe cerclée fermée dans $E_{K'}$ est compacte dans $E_{K'}$, donc dans E, et comme elle est dense dans K, elle est identique à K.

Les propositions 21 à 25 qui suivent ne font usage que du corollaire du th. 7 et du lemme précédent.

PROPOSITION 21. - Soient E et F deux espaces du type $(\mathcal{F})$. Alors sur B(E,F), la topologie T_0 de la convergence bicompacte, la topologie T de la convergence uniforme sur les produits d'un compact de E par un faiblement compact de F, la topologie T' de la convergence uniforme sur les produits d'un faiblement compact de E par un compact de F, enfin la topologie T_1 borne supérieure des deux dernières, donnent toutes le même dual $E \hat{\otimes} F$.

C'est un cas particulier immédiat du corollaire du th. 7, compte tenu du lemme 12 : on prend pour $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathcal{C}$) l'ensemble de toutes les parties faiblement compactes convexes cerclées de E (resp. F), alors $\mathfrak{S}_0$ et $\mathcal{C}_0$ sont l'ensemble de toutes les parties compactes de E et F. Il serait d'ailleurs aussi facile de déduire la proposition 21 du th. 1, corollaire 1, et du lemme 4 du § 1, n°3.

Appliquant un théorème fin de Banach, mis sous sa forme achevée dans [7], th. 5, on trouve le

COROLLAIRE 1. - Avec les notations de la prop. 21, pour une partie convexe de B(E,F), il revient au même d'être fermée pour l'une quelconque des topologies T_0, T, T', T_1, ou la topologie faible du dual de $E \hat{\otimes} F$, ou enfin que son intersection avec toute partie faiblement compacte de ce dual soit faiblement compacte.

D'ailleurs, on peut, à cette intersection, appliquer le même corollaire , et se borner à prouver qu'elle est fermée pour la topologie la plus fine T_1.- On a précisé par là un résultat prouvé par Dixmier dans le cas des espaces de Hilbert ([8], th. 6). Conjuguant avec un classique théorème de von Neumann, on obtient la précision suivante de [8], th. 8 :

COROLLAIRE 2. - *Soit* H *un espace de Hilbert*, A *une sous-algèbre auto-adjointe de* L(H,H). *Soit* T_1 *la topologie sur* L(H,H) *borne supérieure de la topologie de la convergence compacte, et de la topologie qu'on en déduit* (*par transport de structure*) *par l'application* $A \longrightarrow A^*$. *Pour que* A *soit faiblement fermé* (i.e. *fermé dans* $L_s(H,H_s)$), *il suffit qu'elle soit fermée pour* T_1, *et même que son intersection avec la boule unité de* L(H,H) *soit fermée pour* T_1.

En effet, le th. 8 de [8] dit précisément que l'adhérence faible de A est identique à son adhérence pour la topologie faible définie par $H' \hat{\otimes} H$.

PROPOSITION 22. - *Soit* E *un espace du type* $(\mathcal{F})$, F *un espace du type* $(\mathcal{DF})$; *alors le dual de* L(E,F), *pour la topologie de la convergence compacte, s'identifie à un espace quotient de* $E \hat{\otimes} F'_b$.

Il suffit en effet de plonger L(E,F) dans $\mathcal{L}(E,F'_s)$ et d'appliquer le corollaire du th. 7, en faisant $\mathfrak{S}$ = ensemble des parties compactes convexes cerclées de E, $\mathcal{C}$ = ensemble des parties équicontinues convexes cerclées fermées de F'_s. Le lemme 12 nous assure que $\mathfrak{S}_0$ est aussi l'ensemble des parties compactes de E, et comme E et F'_b sont du type $(\mathcal{F})$, les formes linéaires sur L(E,F) données par des séries comme dans l'énoncé du corollaire du th. 7 sont précisément celles qui proviennent d'éléments du produit $E \hat{\otimes} F'_b$.- Signalons le cas particulier analogue : *Soient* E *et* F *deux espaces du type* $(\mathcal{DF})$, *alors sur* $\mathcal{L}(E'_s, F'_s)$, *la topologie* T_0 *de la convergence bicompacte sur* $E'_b \times F'_b$, *et la topologie* T_1 *de la convergence uniforme sur les produits d'une partie fortement compacte de* E'_b *par une partie équicontinue de* F', *ou d'une partie équicontinue de* E' *par une partie fortement compacte de* F', *donnent le même dual, qui* *s'identifie à un espace quotient de* $E'_b \hat{\otimes} F'_b$.

PROPOSITION 23. - *Avec les notations du corollaire du th. 7, en supposant que* $\mathfrak{S}_0$ *et* $\mathfrak{T}_0$ *recouvrent* E *et* F, *soit* H *un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{B}(E,F)$, M *une partie de* H.

1. *Pour que* M *soit faiblement relativement compact (pour la topologie faible associée à l'une quelconque des topologies* T_0, T, T', T_1) *il faut et il suffit que* M *soit borné, que pour tout* $x \in E$, *l'ensemble* M(x) *des* u(x) *avec* $u \in M$ (*où* u *est interprété comme une application linéaire de* E *dans* F') *soit faiblement relativement compact dans* F', *et que toute forme bilinéaire sur* $E \times F$ *qui est limite simple d'applications éléments de* M, *soit dans* H.

2. *Si* M *est une partie bornée de* $\mathcal{B}_s(E,F)$, *alors les topologies suivantes sur* M, *ainsi que les structures uniformes correspondantes, sont identiques* :

a. *Topologie de la convergence simple sur* $E \times F$.

b. *Topologie induite par* T_0 ($\mathfrak{S}_0$-$\mathfrak{T}_0$-*convergence*).

c. *Topologie induite par la topologie faible associée à l'une quelconque des topologies* T_0, T, T', T_1. (On comparera cette proposition avec la prop. 19 du n°1).

Démonstration. - Démontrons d'abord 2. Les topologies faibles associées aux topologies T_0, T, T', T_1 sont identiques en vertu du corollaire du th. 7, de sorte qu'on peut se borner à considérer T_0. La topologie b. est alors plus fine que c., et évidemment c. est plus fine que a., reste à prouver que a. est plus fine que b. Pour ceci, il suffit manifestement de vérifier que pour tout $A_0 \in \mathfrak{S}_0$ et $B_0 \in \mathfrak{T}_0$, l'ensemble des fonctions continues u(x,y) (où $u \in M$) sur le compact $A_0 \times B_0$ est une partie relativement compacte de l'espace $\mathcal{C}(A_0 \times B_0)$ de toutes les fonctions continues sur $A_0 \times B_0$. Comme c'est déjà une partie bornée, il suffit de montrer qu'elle est équicontinue (th. d'Ascoli). Or soient $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathcal{T}$ tels que A_o soit compact dans E_A, B_o compact dans F_B. M est un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $E_A \times F_B$, et à fortiori un ensemble équicontinu de fonctions sur $A_o \times B_o$.– 1. en résulte facilement, car les conditions énoncées pour que M soit faiblement relativement compact sont évidemment nécessaires. Et elles sont suffisantes, car elles impliquent évidemment que M est relativement compact dans H pour la topologie de la convergence simple sur $E \times F$ (grâce au th. de Tychonoff ou du critère des ultra-filtres), et de 2. résulte alors que l'adhérence de M dans H pour cette topologie est aussi compacte pour la topologie faible de H (associée à l'une quelconque des topologies T_o etc.).– Voici une variante souvent utile de la proposition 23 :

PROPOSITION 24. – ("Théorème de Montel-Vitali")
Soit E un espace de Schwartz ([9], §3, définition 5), F un espace localement convexe, M une partie bornée de $L_e(E'_\tau, F)$.

1. Pour toute partie équicontinue A de E', l'ensemble des restrictions des $u \in M$ à A faible est équicontinu. Et si E est quasi-complet, toute application de E dans F qui est limite dans $L_s(E'_\tau, F_s)$ d'applications éléments de M, appartient à $L_e(E'_\tau, F)$.

2. Sur M, les topologies suivantes sont identiques, ainsi que les structures uniformes correspondantes :

a. Topologie induite par $L_e(E'_\tau, F_s)$.

b. Topologie induite par $L_s(E'_\tau, F_s)$.

c. Topologie induite par la topologie faible de l'espace vectoriel topologique $L_e(E'_\tau, F)$.

3. Supposons E quasi-complet. Pour que M soit une partie faiblement compacte (resp. relativement compacte) de l'espace vectoriel topologique $L_e(E'_\tau, F)$, il faut et il suffit que M soit

<u>borné et que pour tout</u> $x' \in E'$, <u>l'ensemble</u> $M(x')$ <u>des</u> $u(x')$ <u>avec</u> $u \in M$ <u>soit une partie relativement faiblement compacte</u> (<u>resp. relativement compacte</u>) <u>de</u> F.

Démonstration. - 1. Par définition des espaces de Schwartz, on peut supposer A compact dans un espace E'_B, où B est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E'. Comme M définit évidemment un ensemble équicontinu d'applications linéaires de E'_B dans F, l'ensemble des restrictions des $u \in M$ à A est à fortiori équicontinu (noter que sur A, la topologie induite par la topologie faible est évidemment identique à la topologie induite par E'_B). Soit Φ un filtre sur M tel que pour tout $x' \in E'$, $u(x')$ tende faiblement dans F vers une limite $u_o(x')$ suivant le filtre Φ. u_o est évidemment linéaire, et la convergence est uniforme sur les parties équicontinues de E', d'après ce qui précède (car l'ensemble des restrictions des $u \in M$ à la partie équicontinue B de E' est à fortiori équicontinu quand sur F on envisage la topologie faible). Prouvons que $u_o \in L(E'_\tau, F)$, i.e. que pour tout $y' \in F'$, la forme linéaire $x' \rightarrow \langle u_o(x'), y' \rangle$ sur E' appartient à E. En effet, $\langle u_o(x'), y' \rangle = \lim_{\Phi} \langle u(x'), y' \rangle$, la forme linéaire considérée est donc limite, <u>uniforme sur les parties équicontinues de</u> E', d'un certain filtre dans E, qui est d'ailleurs manifestement porté par une partie <u>bornée</u> de E (savoir l'ensemble des formes $x' \rightarrow \langle u(x'), y' \rangle$, où u parcourt M). E étant quasi-complet, la conclusion voulue en résulte.

2. est un cas particulier de la prop. 23, lorsqu'on identifie $L_e(E'_\tau, F)$ à l'espace $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$. Avec les notations de cette proposition, si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties équicontinues convexes cerclées faiblement fermées de E', le fait que E soit un

espace de Schwartz signifie précisément que $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}$.

Enfin, 3. résulte aussitôt de la conjonction de 1. et 2. pour le critère de faible compacité. Le critère de compacité résulte aussitôt de 1. grâce au théorème d'Ascoli.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> E <u>un espace de Schwartz quasi-complet</u>, F <u>un espace localement convexe quelconque</u>. <u>Pour que</u> $L_e(E'_\tau, F)$ <u>soit réflexif</u> (<u>resp. du type</u> $(\mathcal{M})$), <u>il faut et il suffit que</u> F <u>le soit</u>.

La suffisance résulte immédiatement de la prop. 24, 3°. La nécessité résulte du fait que F est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de $L_e(E'_\tau, F)$, comme on voit en décomposant E en somme directe d'une droite et d'un hyperplan fermé.

Soit maintenant E un espace localement convexe tel que pour tout voisinage convexe cerclé fermé U de 0 dans E en existe un autre V tel que l'application linéaire naturelle de E_V dans E_U soit faiblement compacte (voir [9], § 3, lemme 9.). Si alors F est un espace localement convexe quelconque, le th. 7 implique que le dual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ s'identifie à un espace quotient du sous-espace de $E'_b \bar{\otimes} F_b$ formé des noyaux de Fredholm provenant d'espaces $E'_A \hat{\otimes} F'_B$ où A (resp. B) est une partie équicontinue de E' (resp. F'). $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est en effet le complété de $E \otimes F$ pour la topologie induite par $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$. Dans tous les cas connus, un tel noyau de Fredholm est nul si la forme linéaire sur $E \otimes F$ qu'il définit est nulle (voir "Problème de biunivocité" du § 1, n° 1) et dans des cas fréquents, la topologie forte du dual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est même identique à la topologie induite par $E'_b \bar{\otimes} F'_b$. Alors le bidual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ sera identique au dual $\mathcal{L}_e(E'_b, F'_b)$ de $E'_b \bar{\otimes} F'_b$ (cet isomorphisme conservant les topologies, comme on vérifie facilement). Voici un résultat plus précis danscette voie :

PROPOSITION 25. - <u>Soit</u> E <u>un espace de Schwartz</u> ([9], § 3, définition 5), F un espace localement convexe quelconque. Supposons $E' \otimes E$ dense dans $L_b(E,E)$ (ce qui est le cas dans tous les cas connus, voir § 5). Posons $L = L_e(E'_b, F)$, $\Lambda = L_e(E'_b, F'')$. Alors $E \otimes F$ (resp. $E \otimes F''$) est dense dans L (resp. Λ), qui s'identifie donc à $E \hat{\hat{\otimes}} F$ (resp. $E \hat{\hat{\otimes}} F''$) si E et F (resp. E et F'') sont complets.- Soit L'^* l'espace des formes linéaires sur L' qui sont bornées sur les parties équicontinues de L', munissons L'^* de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de L' (qui en fait un espace localement oonvexe contenant L comme sous-espace vectoriel topologique).

1. L' est identique à l'ensemble des formes linéaires sur L définies par les éléments d'espaces $E'_A \hat{\otimes} F'_B$, où A (resp. B) est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E' (resp. F'). Si $u \in E'_A \hat{\otimes} F'_B$, alors la forme linéaire sur Λ qu'elle définit ne dépend que de l'élément de L' défini par u : il en résulte un accouplement entre Λ et L'. Cet accouplement est obtenu par un isomorphisme vectoriel-topologique de Λ dans L'^*.

2. Supposons E quasi-complet. Si nous identifions Λ à un sous espace vectoriel de L'^* comme ci-dessus, on a

$$E \otimes F'' \subset L'' \subset \Lambda \subset L'^*$$

en particulier L'' est un sous-espace dense de Λ. Si donc L'' est complet, on a $L'' = \Lambda$. Il en est ainsi en particulier si E et F sont du type $(\mathcal{F})$.

Démonstration. - Montrons que $E \otimes F$ est dense dans $L_e(E'_b, F)$; il en sera de même évidemment de $E \otimes F''$ dans $L_e(E'_b, F'')$. Soit $u \in L_e(E'_b, F)$, A une partie équicontinue de E'_b, V un voisinage de 0 dans F, il faut trouver $v \in E \otimes F$ tel que $vx' - ux' \in V$ pour $x' \in A$. Or il existe un $w \in E \otimes E'$ tel que $wx' - x' \in u^{-1}(V)$ pour $x' \in A$, en vertu de l'hypothèse que l'application identique de E

dans E est adhérente à $E' \otimes E$ dans $L_b(E,E)$, donc l'application identique dans E' est adhérente à $E \otimes E'$ dans $L_e(E'_b, E'_b)$. Il suffit donc de prendre $v = u \circ w$.- La caractérisation de L' donnée dans 1. a été déjà signalée plus haut dans un cas plus général, et résulte déjà ici du corollaire du th. 7. Prouvons que si $u \in E'_A \hat{\otimes} F'_B$, la forme linéaire $\tilde{u}$ qu'il définit sur Λ ne dépend que de l'élément de L' défini par u. Comme cette forme linéaire sur Λ est évidemment continue, et que $E \otimes F''$ est dense dans Λ, il suffit de prouver que $\langle x \otimes y, \tilde{u} \rangle$, pour $x \in E$, $y \in F''$, est connu quand on connait $\tilde{u}$ sur L. Or $y \longrightarrow \langle x \otimes y, \tilde{u} \rangle$ est une forme linéaire sur F" continue pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de F'_B, car u provient aussi d'un élément u_0 d'un espace $E'_A \hat{\otimes} F_K$ où K est une partie compacte convexe cerclée de F'_B (th. 1) ; comme F est dense dans F" pour cette topologie, il en résulte que $\langle x \otimes y, \tilde{u} \rangle$ est connu pour tout $y \in F''$ dès que c'est connu pour $y \in F$, d'où la conclusion voulue.- On a donc défini un accouplement naturel entre Λ et L'. Pour tout $v \in \Lambda$, la forme linéaire $u \longrightarrow \langle v,u \rangle$ sur L' est bornée sur les parties équicontinues ; en effet une partie équicontinue M de L' est contenue dans le polaire d'un voisinage V(A,B) de O dans L, où $v \in V(A,B) \Longleftrightarrow |v(x',y')| \leqslant 1$ pour $x' \in A$, $y' \in B$. Si alors A' est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E', contenant A, telle que A soit compact dans $E'_{A'}$, il résulte du th. 6, 2° que tout $u \in M$ provient de la boule unité de l'espace $E'_{A'} \hat{\otimes} F'_B$, et il est immédiat que les produits scalaires avec v des éléments de L' provenant de la boule unité de $E'_{A'} \hat{\otimes} F'_B$ restent bornés. Donc l'accouplement entre Λ et L' est bien défini par une application linéaire $v \longrightarrow \tilde{v}$ de Λ dans L'*. Le raisonnement qui précède montre que cette application est continue (car avec les notations précédentes, $|v(x',y')| \leq 1$ pour $x' \in A'$, $y' \in B$, implique déjà $|\langle v,u\rangle| \leq 1$ pour tout $u \in M$). Il est évident que l'application inverse est continue, car la topologie de Λ est la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles du type $A \otimes B$, où A (resp. B) est une partie équicontinue de E' (resp. F'), or $A \otimes B$ est manifestement une partie équicontinue de L'.

2. Supposons E quasi-complet, donc réflexif. Alors $L'' \subset \Lambda$, ou, ce qui revient au même, toute partie bornée de L est faiblement relativement compacte dans Λ ("faiblement" référant à la dualité avec L'). En effet, soit F''_γ l'espace F'' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties de F' compactes dans quelque espace F'_B, où B est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de F'. On a encore, abstraction faite des topologies, $\Lambda = L_e(E'_b, F''_\gamma)$, or le dual de $L_e(E'_b, F''_\gamma)$ est précisément L', comme on voit en appliquant 1. à cet espace. Nous devons donc seulement montrer que toute partie bornée de L est faiblement relativement compacte dans $L_e(E'_b, F''_\gamma)$, ce qui résulte immédiatement de la prop. 23, 3°. D'autre part, il est immédiat que l'on a $E \otimes F'' \subset L''$, car si $x \in E$, $y \in F''$, y est faiblement adhérent dans F'' à une partie bornée A de F'', et il en résulte aussitôt que $x \otimes y$ est faiblement adhérent dans le dual algébrique de L' à la partie bornée $\{x\} \otimes A$ de L. En vertu de 1., L'' est donc dense dans Λ. Or si E et F sont du type $(\mathcal{F})$, alors L est manifestement du type $(\mathcal{F})$, donc son bidual est complet ([9], th. 1, corollaire 3) de sorte que dans ce cas on a $L'' = \Lambda$.– Notons d'ailleurs qu'il en serait de même si E et F étaient du type $(\mathcal{DF})$, et complets, si on savait que le dual fort de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est du type $(\mathcal{F})$, i.e. que sa topologie est la topologie d'espace $(\mathcal{F})$ d'un espace quotient de $E' \hat{\otimes} F'$.

Remarquons que la condition d'approximation exigée pour E dans l'énoncé de la prop. 25 est satisfaite si E est nucléaire (voir chap. 2, § 2, th. 6). Les propositions 23 et 24 forment les généralisations naturelles de [10], § 7, th. 7 et 8, démontrés ici de façon plus simple et naturelle.

Un résultat essentiellement analogue à la prop. 25, mais de nature métrique, est le

THÉORÈME 8. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach</u>. <u>On suppose</u> E <u>réflexif</u>, <u>ou son dual fort séparable</u>. <u>Supposons de plus l'application canonique de</u> $E' \hat{\otimes} F'$ <u>dans</u> $B(E,F)$ <u>biunivoque</u>. <u>Alors l'espace</u> $E \hat{\hat{\otimes}} F$ (<u>adhérence de</u> $E \otimes F$ <u>dans l'espace normé</u> $B(E',F')$) <u>est identique à l'ensemble des formes bilinéaires compactes et faiblement séparément continues sur</u> $E' \times F'$ (i.e. <u>s'identifie à l'espace des applications linéaires compactes et faiblement continues de</u> E' <u>dans</u> F). <u>Son dual s'identifie avec sa norme à l'espace</u> $E' \hat{\otimes} F'$; <u>donc son bidual s'identifie avec sa norme à</u> $B(E',F')$.

Soit H l'espace des formes bilinéaires compactes et faiblement séparément continues sur $E' \times F'$, muni de la norme induite par $B(E',F')$ qui en fait un espace de Banach. On a une application linéaire naturelle de $E' \hat{\otimes} F'$ dans H', de norme ≤ 1, et qui est biunivoque en vertu de l'hypothèse (car si $u \in E' \hat{\otimes} F'$ définit une forme linéaire nulle sur H, il définit à fortiori une forme linéaire nulle sur $E \otimes F$). Réciproquement, comme la boule unité faible de E' jouit de la propriété de Philipps (n° 1, th. 4 et prop. 20, 1°) il résulte du th. 6, 2° que toute forme linéaire continue de norme ≤ 1 sur H provient d'un élément de la boule unité de $E' \hat{\otimes} F'$ (on prend pour $\mathfrak{S}$ - resp. $\mathcal{T}$ - l'ensemble réduit à l'unique élément, boule unité de E' - resp. F' -, la condition de continuité du th. 6 se vérifie facilement grâce au fait que les $u \in H$ sont compacts), ce qui prouve que le dual de H s'identifie avec sa norme à $E' \hat{\otimes} F'$; comme $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est un sous-espace normé fermé de H, et que par hypothèse toute forme linéaire continue $u \in E' \hat{\otimes} F'$ sur H qui s'annule sur $E \otimes F$ est nulle, on a $E \hat{\hat{\otimes}} F = H$, ce qui achève la démonstration.- Le th. 8 généralise un résultat de Dixmier [8], relatif aux seuls espaces de Hilbert. Rappelons que l'application linéaire canonique de $E' \hat{\otimes} F'$ dans $B(E,F)$ est biunivoque chaque fois que l'application linéaire naturelle de $E'' \hat{\otimes} E'$ dans $L(E',E')$ ou de $F'' \hat{\otimes} F'$ dans $L(F',F')$ est biunivoque (§ 3, n°3, remarque 10, 2° ; voir aussi § 5, n°1).

COROLLAIRE. - <u>Sous les conditions du th.</u> 8, <u>l'intersection de la boule unité</u> B <u>de</u> $B(E',F')$ <u>avec</u> $E \otimes F$ <u>est dense dans</u> B <u>pour la topologie faible du dual de</u> $E' \hat{\otimes} F'$.

En effet, on sait que la boule unité du bidual d'un espace de Banach H est l'adhérence faible de la boule unité de H.

PROPOSITION 26. - <u>Soit</u> E <u>un espace du type</u> $(\mathcal{F})$, F <u>un espace localement convexe</u>, L <u>l'espace des applications linéaires de</u> E <u>dans</u> F <u>qui transforment les parties faiblement compactes de</u> E <u>en des parties compactes de</u> F. <u>Alors sur</u> L <u>la topologie de la convergence compacte</u>, <u>et la topologie de la convergence</u> "<u>faiblement compacte</u>" <u>donnent le même dual</u>. <u>Si</u> F <u>est du type</u> $(\mathcal{DF})$, <u>ce dual s'identifie à un espace quotient de</u> $E \hat{\otimes} F'_b$.

Le dual de L pour l'une ou l'autre des deux topologies est donné par le th. 7, compte tenu du lemme 10 et du th. de Krein-Šmulian (l'enveloppe convexe cerclée fermée d'une partie faiblement compacte de E est faiblement compacte) ; la restriction dans la définition est destinée à assurer que pour tout $u \in L$, toute partie faiblement compacte A de E et toute partie équicontinue B de F', la fonction $\langle ux,y' \rangle$ sur $A \times B$ muni du produit des topologies faibles soit continue. On trouve que (pour l'une ou l'autre des deux topologies), toute forme linéaire continue sur H provient d'un élément d'un espace $E_A \hat{\otimes} F'_B$, où A est une partie bornée convexe cerclée fermée de E, B une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de F' ; on peut même supposer A compact (th. 1) et il en résulte que réciproquement, tout élément d'un espace $E_A \hat{\otimes} F'_B$ définit une forme linéaire sur H continue pour la moins fine des deux topologies envisagées. On trouve bien le même dual, et si F est du type $(\mathcal{DF})$, donc F'_b du type $(\mathcal{F})$, ce dual est l'ensemble des formes linéaires définies sur L par les éléments de $E \hat{\otimes} F'_b$ (appliquer encore le th. 1).

On sait que si E est l'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues sur un espace compact K, et F un espace quasi-complet, faiblement complet pour les suites, alors toute application linéaire continue de E dans F est faiblement compacte ([13], th. 6) et transforme donc les parties faiblement compactes de $\mathcal{C}(K)$ en des parties compactes ([13], th. 1), on obtient donc le

COROLLAIRE. - _Soit_ K _un espace compact_, _posons_ $E = \mathcal{C}(K)$, _soit_ F _un espace localement convexe quasi complet qui est faiblement complet pour les suites_ (p. ex. _un espace réflexif_, _ou un espace du type_ $L^1(\mu)$). _Alors sur_ L(E,F), _la topologie de la convergence compacte et la topologie de la convergence faiblement compacte donnent le même dual_.

De tels énoncés semblent devoir être utiles pour certaines propriétés d'approximation, car l'adhérence d'une partie convexe d'un espace localement convexe ne dépend que de son dual. Nous verrons une application intéressante avec le th. 15 du § 5.

3. _Formes bilinéaires et applications linéaires intégrales : Propriétés fondamentales._

PROPOSITION 27. - _Soient_ E, F _deux espaces localement convexes_ (_resp. normés_) v _une forme bilinéaire séparément continue sur_ $E \times F$. _Les conditions suivantes sont équivalentes_ :

a. $u \longrightarrow \langle u,v \rangle$ _est une forme linéaire sur_ $E \otimes F$ _continue pour la topologie induite par_ $E \hat{\hat{\otimes}} F$, i.e. _pour la topologie de la convergence bi-équicontinue sur_ $E' \times F'$ (_resp._ $u \longrightarrow \langle u,v \rangle$ _est une forme linéaire de norme_ ≤ 1

pour la norme sur $E \otimes F$ induite par $E \hat{\hat{\otimes}} F$).

b. v est contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée dans $\mathscr{L}_s(E,F)$ d'un ensemble $M \otimes N$, où M est une partie équicontinue de E', N une partie équicontinue de F' (resp. M la boule unité de E', N la boule unité de F').

c. Il existe une mesure μ sur l'espace produit d'une partie équicontinue faiblement compacte M de E' par une partie équicontinue faiblement compacte N de F', (resp. une mesure μ de norme $\leqslant 1$ sur le produit de la boule unité de E' par la boule unité de F', muni de la topologie produit des topologies faibles), telle que l'on ait la formule

$$(12) \qquad v = \int_{M \times N} x' \otimes y' \, d\mu(x',y')$$

(intégrale faible dans $\mathscr{L}(E,F)$, mis en dualité avec $E \otimes F$).

d. Il existe un espace compact X muni d'une mesure positive μ (resp. et de norme $\leqslant 1$), une application linéaire continue α de E dans $L^\infty(\mu)$, une application linéaire continue β de F dans $L^\infty(\mu)$ (resp. et α et β de norme $\leqslant 1$) tels que l'on ait $v(x,y) = \langle \alpha\, x, \beta\, y \rangle$ pour tout $x \in E$, $y \in F$.

De plus, on peut supposer dans c. que μ est positive. Si E et F sont normés, et si M_o, N_o sont des parties faiblement compactes de E', F' respectivement dont l'enveloppe convexe faiblement fermée soit la boule unité M resp. N, on peut remplacer, dans les énoncés b. et c., M par M_o et N par N_o, et il reste loisible de supposer μ positive. Si on ne suppose plus μ positive, il suffit que M, N soient l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée de M_o, N_o.

Démonstration. - Nous supposons d'emblée E, F normés. Dans le cas général, le raisonnement fait vaudra tel quel, et d'ailleurs le cas général est un corollaire à peu près immédiat du cas des espaces normés. Nous faisons la démonstration de la forme la plus forte de l'énoncé, relative à la donnée des parties M_0, N_0. L'équivalence des conditions a.b. et c. (b. et c. éventuellement amendés comme indiqué dans la fin de l'énoncé) est un cas particulier de la prop. 18, 2° (n° 1), obtenu en remplaçant dans cette proposition E par E'_s, F par F'_s, H par $E \otimes F$, $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathcal{T}$) étant réduit à l'unique élément M_0 (resp. N_0). Ces conditions impliquent de plus d. : on peut, pour le voir, supposer que $M_0 = M$, $N_0 = N$, donc v donnée par une mesure positive μ sur $K = M \times N$, de norme $\leqslant 1$; on prendra alors pour αx la fonction $(x',y') \to \langle x,x' \rangle$ sur $K = M \times N$, pour βy la fonction $(x',y') \to \langle y,y' \rangle$ sur $K = M \times N$.- Enfin, montrons que d. implique c. Pour cela, il suffit manifestement de prouver que la forme bilinéaire sur $L^\infty(\mu) \times L^\infty(\mu)$ donnée par $v(f,g) = \int fg d\mu$ est de la forme (12). Or, il résulte d'un théorème classique de Kakutani [16] qu'il existe un espace compact $\widetilde{M}$ muni d'une mesure $\widetilde{\mu}$, et un isomorphisme $f \longrightarrow \widetilde{f}$ de l'algèbre normée complète $L^\infty(\mu)$ sur l'algèbre $\mathcal{C}(M)$ des fonctions continues sur M, tels que l'on ait $\int f d\mu = \int \widetilde{f} d\widetilde{\mu}$. On peut donc supposer à priori que $\mathcal{C}(M) = L^\infty(\mu)$. Identifiant alors de la manière usuelle M à une partie faiblement compacte de la boule unité du dual de $\mathcal{C}(M)$, et appelant ν la mesure de norme $\leqslant 1$ sur $M \times M$ définie par $\langle F, \nu \rangle = \int F(t,t) d\mu(t)$, on voit aussitôt que $v = \int_{M \times M} s \otimes t \, d\nu(s,t)$ ce qui achève la démonstration de la prop. 27.

DÉFINITION 7. - Soient E, F, G trois espaces localement convexes.

1. Une forme bilinéaire v sur $E \times F$ est dite intégrale si elle satisfait à l'une des conditions équivalentes a. à d. de la proposition 27. En particulier, le dual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ (voir définition 4, § 3, n°3) s'identifie à l'espace $J(E,F)$ des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$. Si E et F sont des espaces de Banach, $J(E,F)$ sera muni de la norme de dual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$, appelée norme intégrale et notée $\|v\|_J$.

2. Une application linéaire v de E dans G est dite intégrale si la

forme bilinéaire sur $E \times G'_b$ qui lui correspond est intégrale. Si E et F sont des espaces de Banach, on appelle encore norme intégrale de v, et on note $\|v\|_I$, la norme intégrale de la forme bilinéaire intégrale sur $E \times G'$ définie par v.

Dans tous les cas connus, si E et F sont des espaces de Banach, l'application linéaire naturelle de $E \hat{\otimes} F'$ dans $J(E,F)$ est un isomorphisme du premier espace normé dans le second (voir § 5, n° 2), c'est pourquoi nous employons pour la norme intégrale la notation $\|v\|_I$ voisine de la notation $\|v\|_1$ de la norme-trace.- Le critère d. de la proposition 27 prend pour les applications linéaires intégrales la forme suivante : si v est une application linéaire de l'espace de Banach E dans l'espace de Banach F, v est intégrale, avec une norme intégrale $\leqslant 1$, si et seulement si l'application de E dans F" qu'elle définit peut s'obtenir en composant une application linéaire de norme $\leqslant 1$ de E dans un espace $L^\infty(\mu)$ construit sur une mesure positive de norme $\leqslant 1$ convenable, l'application identique de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\mu)$, et enfin une application linéaire de norme $\leqslant 1$ de $L^1(\mu)$ dans F". Le critère b. de la proposition 27 donne de même facilement : L'application linéaire v de E dans F est intégrale et de norme intégrale $\leqslant 1$, si et seulement si elle est adhérente dans $L_s(E,F_s)$ à l'enveloppe convexe cerclée des $x' \otimes y$, avec $x' \in E'$, $y \in F$, $\|x'\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, ou encore adhérente à l'ensemble des opérateurs nucléaires de norme-trace $\leqslant 1$ (il faut seulement noter que l'adhérence faible dans F" de la boule unité de F est la boule unité de F").

Exemples. Toute forme bilinéaire sur $E \times F$, définie par un élément d'un espace $E'_A \hat{\otimes} F'_B$ où A (resp. B) est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E' (resp. F') est intégrale (conséquence immédiate du critère c. de la prop. 27). Donc toute application nucléaire de E dans G est intégrale. La réciproque n'est pas vraie, puisque si μ est une mesure positive sur un espace compact, l'application identique de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\mu)$ est intégrale, mais n'est en général pas même compacte. Si $E = \mathcal{C}(M)$, $F = \mathcal{C}(N)$, où M et N sont deux espaces compacts, on a vu que $\mathcal{C}(M) \hat{\hat{\otimes}} \mathcal{C}(N)$ s'identifie à l'espace $\mathcal{C}(M\times N)$ des fonctions continues sur $M\times N$ (§ 3, n°2), donc l'espace des formes bilinéaires intégrales sur $\mathcal{C}(M)\times \mathcal{C}(N)$ s'identifie avec sa norme à l'espace des mesures de Radon sur l'espace $M\times N$. Pour une généralisation à F quelconque, et d'autres exemples, voir n°4. D'autres exemples sont inclus dans la prop. 30, 1°, plus bas.

Notons les faits suivants, dont la démonstration est immédiate : <u>Soient</u> E_i, F_i $(i = 1,2)$ <u>des espaces localement convexes</u>, φ_i <u>une application linéaire continue de</u> E_i <u>dans</u> F_i, u <u>une forme bilinéaire intégrale sur</u> $F_1\times F_2$; <u>alors</u> $v(x_1,x_2) = u(\varphi_1 x_1, \varphi_2 x_2)$ <u>est une forme bilinéaire intégrale sur</u> $E_1\times E_2$, <u>et si les</u> E_i, F_i <u>sont des espaces de Banach</u>, <u>on a</u> $\|v\|_\int \leqslant \|\varphi_1\|\,\|\varphi_2\|\,\|u\|_\int$. <u>Soient</u> E, F, G <u>trois espaces localement convexes</u>, u (<u>resp.</u> v) <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F (<u>resp.</u> <u>de</u> F <u>dans</u> G) ; <u>si</u> u <u>ou</u> v <u>est intégrale alors</u> $v\circ u$ <u>est intégrale</u>, <u>et si</u> E, F, G <u>sont des espaces de Banach</u>, <u>on a</u> $\|v\circ u\|_\int \leqslant \|u\|_\int \|v\|$ <u>ou</u> $\|v\circ u\|_\int \leqslant \|u\|\,\|v\|_\int$.

PROPOSITION 28. - <u>Soient</u> E, F, <u>deux espaces localement convexes</u>.

1. <u>Soit</u> u <u>une forme bilinéaire continue sur</u> $E\times F$, $\bar{u}$ <u>son prolongement canonique à</u> $E''\times F$; <u>pour que</u> u <u>soit intégrale il faut et il suffit que</u> $\bar{u}$ <u>le soit</u>, <u>et si</u> E, F, <u>sont des espaces de Banach</u>, <u>on a alors</u> $\|\bar{u}\|_\int = \|u\|_\int$.

2. <u>Soit</u> u <u>une forme bilinéaire sur</u> $E\times F$. <u>Si</u> u <u>est intégrale</u>, <u>l'application linéaire</u> $\tilde{u}$ <u>de</u> E <u>dans</u> F'_b <u>qu'elle définit est intégrale</u>, <u>et la réciproque est vraie si</u> F <u>est quasi-tonnelé</u>. <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont des espaces de Banach</u>, <u>on a</u> $\|\tilde{u}\|_\int = \|u\|_\int$.

Démonstration.1 - Si $\bar{u}$ est intégrale, il en est évidemment de même de u, qui a alors une norme intégrale au plus égale dans le cas des espaces de Banach (voir les remarques précédant la proposition 28). La réciproque, et l'inégalité inverse dans le cas des espaces de Banach, se voient immédiatement en utilisant le critère d. de la prop. 27 ; avec les notations de ce critère, $\bar{u}$ s'obtient à partir des prolongements canoniques $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ de α et β à E'' et F'', par la même formule que celle qui donne u à l'aide de α et β.

2. Ce qui précède montre que si u est intégral, son prolongement à $E \times F''$ est intégral, à fortiori son prolongement à $E \times F''_b$, où F''_b est le dual fort de F'_b, est intégral (la topologie de F''_b étant plus fine que la topologie naturelle de F''), et la réciproque est évidemment vraie si ces deux topologies sont identiques, i.e. si F est quasi-tonnelé ; et d'après 1, si E et F sont des espaces de Banach, la norme intégrale de u et celle de son prolongement à $E \times F''$ sont les mêmes. En vertu des définitions, tout ceci n'est autre que l'assertion de la prop. 28, 2° - Signalons le corollaire suivant, non trivial à priori :

COROLLAIRE. - *Soit* E *et* F *des espaces de Banach, considérons* $E \hat{\hat{\otimes}} F$ *et* $E'' \hat{\hat{\otimes}} F''$ *comme des sous-espaces vectoriels normés de* $B(E',F')$. *Alors la boule unité de* $E \hat{\hat{\otimes}} F$ *est dense dans la boule unité de* $E'' \hat{\hat{\otimes}} F''$ *pour la topologie de la convergence simple*.

En effet, une forme bilinéaire intégrale u sur $E \times F$ définit une forme bilinéaire intégrale sur $E'' \times F$, qui définit elle-même une forme bilinéaire intégrale sur $E'' \times F''$. En mettant ainsi $E'' \hat{\hat{\otimes}} F''$ en dualité avec l'espace $J(E,F)$ des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$, on a même le résultat, plus fort que le corollaire : *la boule unité de* $E \hat{\hat{\otimes}} F$ *est dense dans la boule unité de* $E'' \hat{\hat{\otimes}} F''$ *pour la dualité avec* $J(E,F)$. *D'après le* théorème des bipolaires, cela équivaut en effet au fait que toute $u \in J(E,F)$ a même norme intégrale, en tant que forme bilinéaire sur $E \times F$ ou sur $E'' \times F''$. Notons d'ailleurs qu'en vertu du th. 7 le corollaire précédant implique facilement que la boule unité de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est dense dans la boule unité de $E'' \hat{\hat{\otimes}} F''$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles $A \times B$, où A (resp. B) est une partie de E' (resp. F')

compacte pour $\sigma(E',E'')$ (resp. $\sigma(F',F'')$). (Commencer par utiliser l'immédiat lemme 17 du § 5, n° 2).

PROPOSITION 29. - *Soient* E, F *deux espaces localement convexes*, E_1 (*resp.* F_1) *un sous-espace vectoriel topologique de* E (*resp.* F). *Alors toute forme bilinéaire intégrale sur* $E_1 \times F_1$ *est la restriction d'une forme bilinéaire intégrale sur* $E \times F$, *qu'on peut prendre de norme intégrale égale si* E *et* F *sont normés*.

Cela résulte aussitôt du fait que les formes bilinéaires intégrales sur un produit $G \times H$ s'identifient aux formes linéaires continues sur $G \hat{\otimes} H$, et que $E_1 \hat{\otimes} F_1$ est un sous-espace vectoriel topologique (resp. normé) de $E \hat{\hat{\otimes}} F$; il suffit donc d'appliquer le théorème de prolongement de Hahn-Banach.- On comparera avec la prop. 16 du § 3, n° 2.

L'étude des formes bilinéaires intégrales et des applications linéaires intégrales se ramène essentiellement au cas où les espaces entrant en jeu sont des espaces de Banach, grâce au

LEMME 13. - 1. *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes*, v *une forme bilinéaire intégrale sur* $E \times F$. *Alors il existe un voisinage convexe cerclé fermé* U (*resp.* V) *de* 0 *dans* E (*resp.* F) *tels que* v *provienne d'une forme bilinéaire intégrale sur* $\widehat{E_U} \times \widehat{F_V}$.

2. *Soient* E *et* G *deux espaces localement convexes*, v *une application linéaire intégrale de* E *dans* G. *Alors il existe un voisinage convexe cerclé* V *de* 0 *dans* E *et une partie bornée convexe cerclée* B *de* G, *tels que* v *provienne d'une application intégrale de* $\widehat{E_V}$ *dans le complété* $\widehat{G_B}$ *de* G_B.

Démonstration. - 1. est immédiat, p. ex. en prenant le critère c. de la prop. 27. Nous prendrons encore ce critère pour prouver 2. v est défini à l'aide d'une mesure μ sur un espace $A \times M$, où A (resp. M) est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement compacte de E' (resp. de G'', dual de G'_b). Notons qu'une partie équicontinue du dual G'' de G'_b est contenue dans l'adhérence faible $\bar{B}$ dans G" d'une partie bornée convexe cerclée fermée B de G. La bitransposée φ'' de l'application identique φ de G_B dans G (obtenue en prolongeant φ par continuité faible en une application linéaire de $(G_B)''$ dans G") applique alors manifestement la boule unité B_o de $(G_B)''$ sur $\bar{B}$, B_o étant faiblement compact. On a donc une application continue naturelle f de $A \times B_o$ sur $A \times \bar{B}$, donc la mesure μ sur $A \times \bar{B}$ est l'image par f d'une mesure ν sur $A \times B_o$. ν définit une application linéaire intégrale w de $\widehat{E_{A^\circ}}$ dans $(G_B)''$, et il est immédiat que $v = \varphi'' \circ w$. Il s'ensuit que w applique le sous-espace dense E_{A° de $\widehat{E_{A^\circ}}$ dans G_B, donc applique $\widehat{E_{A^\circ}}$ dans le complété de G_B.

THÉORÈME 9. - <u>Soient</u> E, F, <u>deux espaces localement convexes</u>, F <u>quasi-complet</u>, v <u>une application linéaire intégrale de</u> E <u>dans</u> F.

1. v <u>transforme un voisinage de</u> 0 <u>convenable</u> V <u>en une partie relativement faiblement compacte de</u> F.

2. v <u>transforme toute partie faiblement compacte de</u> E <u>en une partie compacte de</u> F.

3. <u>Si</u> w <u>est une application linéaire de</u> F <u>dans un espace localement convexe</u> G, <u>transformant les parties bornées en des parties faiblement relativement compactes</u>, <u>alors</u> $w \circ v$ <u>est une application compacte</u>.

(Ce résultat est démontré par une méthode différente dans [13], th. 8).

Démonstration. - Le lemme 13 nous ramène aussitôt au cas où E, F sont des espaces de Banach. Comme nous l'avons dit après la définition 7, l'application v de E dans F" qui correspond à v est de la forme $\gamma\varphi\alpha$, où α est une application linéaire continue de E dans un espace $L^\infty(\mu)$ construit sur une mesure μ sur un espace compact, γ une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans F", enfin φ l'application identique de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\mu)$. On est alors aussitôt ramené au cas où v est lui-même l'application identique de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\mu)$. (Sous les conditions de 3., on notera que l'application $w \circ v$ sera identique à $w'' \gamma\varphi\alpha$, où w'' applique F'' <u>dans</u> G, car w est faiblement compacte, donc $w_1 = w''\gamma$ est une application de $L^1(\mu)$ <u>dans</u> G, et il suffit de prouver que $w_1\varphi\alpha$ est une application compacte). Or :

1. la boule unité de $L^\infty(\mu)$ est une partie faiblement compacte de $L^1(\mu)$ (car elle est même compacte pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$ de $L^\infty(\mu)$) ;

2. toute partie faiblement compacte dans l'espace de Banach $L^\infty(\mu)$ (i.e. compacte pour la topologie faible définie par le dual de l'espace de Banach $L^\infty(\mu)$) est compacte dans $L^1(\mu)$, car on sait qu'une application linéaire faiblement compacte de $L^\infty(\mu)$ dans un espace localement convexe quelconque transforme les parties faiblement compactes en des parties compactes ([13], th. 1) ;

3. toute application linéaire faiblement compacte de $L^1(\mu)$ dans un espace localement convexe quelconque G transforme les parties faiblement compactes de $L^1(\mu)$, et en particulier la boule unité de $L^\infty(\mu)$, en une partie compacte de G (th. de Dunford-Pettis [28] ; voir [13] th. 1 pour sa forme générale).

COROLLAIRE. - <u>Une application linéaire intégrale d'un espace localement convexe</u> E <u>dans un autre</u> F <u>est compacte si</u> F <u>est réflexif ou si</u> E <u>est un espace de Banach réflexif</u>.

Remarquons qu'il serait facile de déduire le th. 9 du théorème qui va suivre, et qui le dépasse en fait de beaucoup :

THÉORÈME 10. - <u>Soit</u> E, F, G, <u>trois espaces localement convexes</u>, u <u>une application linéaire de</u> E <u>dans</u> F, v <u>une application linéaire de</u> F <u>dans</u> G.

1. <u>Supposons que</u> G <u>est du type</u> $(\mathcal{F})$, <u>que</u> u <u>est intégrale et que</u> v <u>transforme les parties bornées de</u> F <u>en des parties faiblement relativement compactes de</u> G. <u>Alors</u> $v \circ u$ <u>est une application nucléaire de</u> E <u>dans</u> G. <u>Si</u> E, F, G <u>sont des espaces de Banach</u>, <u>on a</u> $\|v \circ u\|_1 \leqslant \|v\| \, \|u\|_{\mathit{I}}$.

2. Supposons que E est du type $(\mathcal{DF})$, que u transforme les parties bornées de E en des parties faiblement relativement compactes de F, et que v est intégrale. Alors $v \circ u$ est une application nucléaire de E dans G". Si E, F, G sont des espaces de Banach, on a $\|v \circ u\|_1 \leqslant \|v\|_I \|u\|$, où le premier nombre désigne la norme-trace de $v \circ u$ en tant qu'application nucléaire de E dans G" (comparer prop. 15, § 3, n° 2).

Le th. 10 est un cas particulier du

LEMME 14. - Soient E, F, G trois espaces localement convexes, u une application linéaire continue de E dans F, v une application linéaire continue de F dans G.

1. Si u est une application de type intégral, et si v applique les parties bornées de F en des parties de G ayant la propriété Φ (n° 1, définition 6), alors $v \circ u$ est une application nucléaire. Si E, F, G sont des espaces de Banach, on a $\|v \circ u\|_1 \leqslant \|u\|_I \|v\|$.

2. Si ${}^t u$ applique les parties équicontinues de F' en des parties de E'_s ayant la propriété Φ, et si v est de type intégral, alors $v \circ u$ est une application nucléaire de E dans G". Si E, F, G sont des espaces de Banach, on a $\|v \circ u\|_1 \leqslant \|u\| \|v\|_I$, où le premier membre désigne la norme-trace de $v \circ u$ en tant qu'application de E dans G".

Que le th. 10 soit bien un cas particulier du lemme précédent résulte du fait qu'une partie faiblement compacte d'un espace du type $(\mathcal{F})$ possède la propriété Φ (th. 4). On remarquera, dans la deuxième partie du th. 10, que le dual de E est du type $(\mathcal{F})$, et que si u transforme les parties bornées de E en des parties faiblement relativement compactes de F, ${}^t u$ transforme les parties équicontinues de F' en des parties de E', relativement compactes pour $\sigma(E',E")$ (voir [13], lemme 1).

Démonstration du lemme 14. - 1. En vertu du lemme 13, on peut supposer que E et F sont des espaces de Banach. Alors u, en tant qu'application de E dans F", est de la forme $\gamma\varphi\alpha$, où α est une application linéaire continue de E dans un espace $L^\infty(\mu)$ construit sur une mesure μ sur un espace compact, γ une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans F", enfin φ l'application identique de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\mu)$. Comme v applique la boule unité de F dans une partie convexe cerclée fermée A de G ayant la propriété Φ, et en particulier faiblement compacte, sa bitransposée v" applique la boule unité de F" dans A. On a donc $v \circ u = \gamma_1 \varphi \alpha$, ou $\gamma_1 = v''\gamma$ est une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans G_A. En vertu du critère a. du th. 3 (n° 1), il s'ensuit que $\gamma_1 \varphi$ est une application nucléaire de $L^\infty(\mu)$ dans G, donc $v \circ u = (\gamma_1 \varphi)\alpha$ est une application nucléaire de E dans G. Si E, F, G sont des espaces de Banach, alors on peut supposer que $\|\mu\|_1 \leqslant 1$, $\|\alpha\| \leqslant \|u\|_J$, $\|\gamma\| \leqslant 1$ (prop. 27), d'où s'ensuit $\|\gamma_1\| = \|v''\gamma\| \leqslant \|v\|$. En vertu du lemme 9, comme γ_1 induit une application de Fredholm de $L^\infty(\mu)$ on a $\|\gamma_1 \varphi\|_1 \leqslant \|\gamma_1\| \leqslant \|v\|$, d'où $\|v \circ u\|_1 = \|(\gamma_1 \varphi)\alpha\|_1 \leqslant \|\gamma_1 \varphi\|_1 \leqslant \|v\| \|u\|_J$.

2. résulte aussitôt de 1. par transposition.

COROLLAIRE 1. - Soient E, F, G trois espaces localement convexes, G quasi-complet, u une application linéaire intégrale de E dans F, v une application linéaire intégrale de F dans G. Alors $v \circ u$ est une application nucléaire de E dans G.

On applique d'abord le lemme 13 pour se ramener au cas où G est un espace de Banach ; v est alors une application faiblement compacte (th. 9 1°) d'où la conclusion en vertu du th. 10, 1°.

COROLLAIRE 2. - Une application linéaire intégrale de E dans F est une application nucléaire si F est un espace $(\mathcal{F})$ réflexif, et une application nucléaire de E dans F" si E est un espace $(\mathcal{DF})$ réflexif.

COROLLAIRE 3. - Toute application linéaire intégrale d'un espace de Banach E dont le dual fort est séparable, dans un espace localement convexe quasi-complet F, est une application nucléaire de E dans F". Toute application linéaire intégrale d'un espace localement convexe E dans un espace de Banach F séparable, isomorphe au dual fort d'un espace de Banach H, est nucléaire.

Pour la première assertion, on considère u comme composé de l'application identique de E dans E et de u, et on applique le lemme 14, 2°, en tenant compte de la prop. 20, 2°. Pour la deuxième assertion on considère u comme composé de l'application u de E dans H'_s et de l'application identique de H'_s dans H'_s, et on applique le lemme 14, 1°, en tenant compte toujours de la prop. 20 2° : comme u est aussi une application intégrale de E dans H'_s, il s'ensuit que u est même une application nucléaire de E dans H'_s, donc aussi de E dans F (voir définition 4 du § 3).

COROLLAIRE 4. - Soit E un espace du type $(\mathcal{DF})$, complet. Alors tout élément u de $\ell^1 \hat{\otimes} E$ est un noyau de Fredholm (i.e. - th. 2 - toute suite absolument sommable dans E est absolument sommable dans un espace E_A, où A est une partie bornée convexe cerclée fermée de E).

En effet, en vertu de la prop. 5, 2°, et du critère b. de la prop. 27, l'application linéaire $\tilde{u}$ de c_0 dans E définie par u est intégrale, c'est donc une application nucléaire de c_0 dans E" d'après le corollaire 3. Par suite, il existe une partie bornée convexe cerclée fermée A de E" telle que u soit une application nucléaire de c_0 dans $(E")_A$, donc définie par un élément de $\ell^1 \hat{\otimes} (E")_A$, i.e. une suite absolument sommable dans $(E")_A$. Cette suite est aussi contenue dans E, donc absolument sommable dans E_B, où $B = A \cap E$, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 30. - 1. Soient E et F deux espaces du type $(\mathcal{F})$ et soit $u \in E'_b \hat{\otimes} F'_b$. Alors la forme bilinéaire sur $E \times F$ définie par u est intégrale.

2. Soient E et F deux espaces localement

convex-es. Supposons que E admette un système fondamental de voisinages convexes cerclés U de 0 tels que l'application canonique de $(E_U)' \hat{\otimes} E_U$ dans $L(E_U, E_U)$ soit biunivoque. Soit u une forme bilinéaire intégrale sur $E \times F$, alors u provient d'un élément de $E'_b \hat{\otimes} F'_\tau$.

Démonstration. - 1. résulte immédiatement de la prop. 5, 2°, (§ 1, n° 3) et du critère b. de la prop. 27. 2. En vertu du lemme 13, 1°, on se ramène immédiatement au cas où E et F sont des espaces de Banach, et où E est donc tel que l'application linéaire canonique de $E' \hat{\otimes} E$ dans $L(E, E)$ est biunivoque. Pour tout voisinage cerclé convexe V de 0 dans F'_τ, l'application canonique φ_V de F' dans $\widehat{F'_V}$ est faiblement compacte ([13], lemme 1) d'où résulte que si on regarde u comme une application de type intégral de E dans F', $\varphi_V \circ u$ est une application de Fredholm de E dans F'_V, (th. 10, 1°) donç provient d'un élément u_V de $E' \hat{\otimes} F'_V$. Cet élément est uniquement déterminé grâce à l'hypothèse sur E (voir § 3, n° 3, remarque 10, 2°) d'où suit aussitôt que pour un voisinage convexe cerclé W de 0 dans F' tel que $W \subset V$, u_V est l'image de u_W par l'application linéaire naturelle de $E' \hat{\otimes} F'_W$ dans $E' \hat{\otimes} F'_V$. Posons $G = E' \hat{\otimes} F'_\tau$, et soit, pour tout V comme ci-dessus, V' le voisinage de 0 dans G image réciproque de la boule unité de $E' \hat{\otimes} F'_V$ par l'application linéaire naturelle de G dans cet espace. Alors ce dernier s'identifie à $\widehat{G_{V'}}$, et les V' forment un système fondamental de voisinages de 0 dans G (Voir prop. 2, 2°). Comme G est complet, il en résulte qu'il existe un $v \in G$ tel que pour tout V, l'image canonique de v dans $\widehat{G_{V'}}$, soit précisément u_V (voir p. ex. [10], lemme du § 6, n° 2). Il est alors immédiat que v définit précisément la forme u donnée, ce qui prouve la prop. 30.

COROLLAIRE 1. - Soient E et F deux espaces du type $(\mathcal{F})$, on suppose que F est réflexif et que E satisfait à la condition énoncée dans la prop. 30, 2°. Alors les formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$ sont exactement celles définies par des éléments de $E'_b \hat{\otimes} F'_b$. Les applications intégrales de E dans F'_b sont identiques aux applications à trace de E dans F'_b.

La seconde assertion n'est qu'une autre formulation de la première, en vertu des définitions. La première assertion est obtenue aussitôt en conjuguant les deux parties de la prop. 30, puisqu'ici $F'_\tau = F'_b$.

COROLLAIRE 2. - Soit M un espace localement compact muni d'une mesure positive μ, E un espace $(\mathcal{F})$ réflexif, E' son dual fort. Alors $L^1(\mu) \hat{\otimes} E' = L^1_{E'}(\mu)$ s'identifie à l'espace des applications intégrales de E dans $L^1(\mu)$.

En vertu du th. 2 corollaire 2, l'application naturelle de $L^1 \hat{\otimes} E'$ dans $L(E,L^1)$ est biunivoque, et en vertu de la prop. 30, 1°, l'application définie par un élément de $L^1 \hat{\otimes} E'$ est une application intégrale de E dans L^1. Réciproquement, soit u une application intégrale de E dans L^1, en vertu de la prop. 30, 2°, u provient d'un élément v de $(L^1)'' \hat{\otimes} E'$. Or on sait qu'il existe une projection continue de $(L^1)''$ sur L^1 (voir note 19 page 101), on constate alors aussitôt que u provient aussi de l'élément $w = (p \otimes 1).\, v$ de $L^1 \hat{\otimes} E'$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 11. - Sous les conditions du corollaire 2 précédent, on voit que toute application faiblement mesurable f de M dans une partie équicontinue de E', définit une application linéaire continue naturelle de E dans $L^\infty(\mu)$, donc une application intégrale de E dans $L^1(\mu)$ (prop. 27), donc (corollaire 2 de la prop. 30) un élément u_f de $L^1(\mu) \hat{\otimes} E'$. Cependant, même si E est du type $(\mathcal{M})$ cet élément u_f de $L^1(\mu) \hat{\otimes} E'$ peut ne pas appartenir à l'image canonique d'aucun espace $L^1(\mu) \hat{\otimes} E'_A$, où A est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E'. Cela nous donne donc une application intégrale d'un espace E du type $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{M})$ dans L^1, qui n'est pas nucléaire, et en transposant on obtient une application intégrale de L^∞ dans un espace E' du type $(\mathcal{DF})$ et $(\mathcal{M})$, qui n'est pas nucléaire, de sorte que dans le th. 10, les restrictions imposées aux espaces entrant en jeu sont bien nécessaires.- Si u_f appartenait à un espace $L^1 \otimes E'_A$, il faudrait que f soit scalairement presque partout égale à une application absolument sommable, et à fortiori fortement mesurable, de M dans E'_A, donc même presque partout égale à une telle application si on suppose E séparable. Mais prenons p. ex. pour E l'espace échelonné, envisagé d'abord par G. Köthe [19], et qui nous a déjà servi dans [9], §2, exemple 3, espace construit sur l'ensemble d'indices $N \times N$ (N, ensemble des entiers > 0), défini par la suite des suites doubles $a^n = (a^n_{ij})$, où $a^n_{ij} = j^n$ si $i < n$, $a^n_{ij} = i^n$ si $i \geq n$. Soit A^n la partie équicontinue de E' formée des suites doubles majorées en module par a^n, les A^n et leurs homothétiques forment une suite fondamentale de parties équicontinues convexes cerclées faiblement fermées de E'. Soit g une application scalairement mesurable et bornée de l'intervalle $M = (0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue, dans le dual ℓ^∞ de ℓ^1, telle que g ne soit pas fortement mesurable (il est bien connu qu'une telle g existe). Posons $g(t) = (g_i(t))$, et soit f l'application de M dans E'_{A^o} définie par $f(t) = (f_{ij}(t))$, où $f_{ij}(t) = g_i(t)$. C'est manifestement une application bornée et scalairement mesurable dans le dual $E'_{A^\bullet}$ de $\widehat{E_V}$, où V est le polaire de $A^\bullet$ dans E (il suffit de noter que $\widehat{E_V}$ est précisément isomorphe à l'espace des suites sommables sur $N \times N$, et que la somme d'une série convergente de fonctions mesurables est mesurable). Cependant, pour aucun entier $n \geqslant 0$, f n'est fortement mesurable de M dans E'_{A^n}, car l'application de M dans ℓ^∞ qu'on obtient en composant f avec l'application linéaire continue $(\xi_{ij}) \to (\xi_{nj})$ de E'_{A^n} dans ℓ^∞, n'est autre que g, qui n'est pas fortement mesurable.

Remarque 12. - On vient de voir que dans l'énoncé de la première ou de la seconde partie du th. 10, une condition restrictive sur G resp. E était bien nécessaire. Cependant, il est manifeste que la conclusion dans la première partie reste valable si u est une application de F dans G transformant toute partie bornée A de F en une partie de G qui est faiblement relativement compacte dans quelque espace G_B où B est une partie convexe cerclée de G telle que G_B soit complet. Ainsi, il suffit pour la validité du corollaire 2 du th. 10, que F soit le dual d'un espace réflexif quasi-normable ([9], § 3, définition 4) et que v transforme les parties bornées de E en des parties équicontinues de F ([9], § 3, th. 11). On voit de même, par transposition : Supposons E réflexif et quasi-normable, ou plus généralement que pour tout voisinage convexe cerclé V de 0 dans E existe un voisinage convexe cerclé $U \subset V$ de 0 dans E tel que l'application linéaire naturelle de E_U dans E_V, soit faiblement compacte (voir [9], § 3, lemme 9) ; alors toute application intégrale de E dans un espace quasi-complet F est une application nucléaire de E dans F".- Ce qui précède permet de prouver facilement le résultat, déjà signalé dans la remarque 5, que si E est un espace du type $(\mathcal{F})$ ayant la propriété qu'on vient d'envisager, F un espace du type $(\mathcal{F})$ quelconque, alors tout élément de $E'_b \hat{\otimes} F'_b$ provient d'un élément d'un espace $E'_A \hat{\otimes} F'_B$, où A (resp. B) est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E' (resp. F') - pourvu que l'on sache l'application canonique de $E'_b \hat{\otimes} F'_b$ dans $B(E,F)$ biunivoque, ce qui est pratiquement toujours le cas.

Application à la définition d'un accouplement remarquable.-

Soient E et F deux espaces de Banach, considérons les sous-espaces $\Gamma(E',F')$ et $E \hat{\otimes} F$ de $B(E',F')$, définis respectivement comme espace des formes bilinéaires faiblement compactes (voir note 4 page 26) sur $E' \times F'$ et comme l'adhérence de $E \otimes F$ dans $B(E',F')$,- munis tous deux de la norme induite qui en fait des espaces de Banach. Soit $J(E,F)$ l'espace des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$, c'est le dual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$. Si $B \in \Gamma(E',F')$, $A \in J(E,F)$, prolongeons de la façon usuelle (continuité faible) l'opérateur de E dans F' défini par A, on obtient une application intégrale de E'' dans F' ayant même norme intégrale que A (prop. 28), et que nous notons encore A. Si ${}^tB$ désigne l'opérateur faiblement compact de F' dans l'espace de Banach E'', défini par B, alors $A \circ {}^tB$ est un opérateur nucléaire dans F' tel que $\|A \circ {}^tB\|_1 \leqslant \|A\|_{\int} \|B\|$ (th. 10). Si donc l'application canonique de $F'' \hat{\otimes} F'$ dans $L(F',F')$ est biunivoque, on peut considérer $A \circ {}^tB$ comme un élément de $F'' \hat{\otimes} F'$, et poser par suite

$$(14) \qquad \langle B,A \rangle = \operatorname{Tr} A \circ {}^tB$$

ce qui définit un accouplement naturel entre $J(E,F)$ et $\Gamma(E',F')$. En vertu de l'inégalité écrite plus haut, on a

$$|\langle B,A \rangle| \leqslant \|B\| \|A\|_{\int}$$

donc la forme linéaire $\widetilde{B}$ sur $J(E,F)$ définie par B est de norme $\leqslant \|B\|$. On a aussi $\|B\| \leqslant \|\widetilde{B}\|$, car $\|B\| = \sup_{\|x'\| \leqslant 1, \|y'\| \leqslant 1} |B(x'y')|$, or on a manifestement $B(x',y') = \langle \widetilde{B}, x' \otimes y' \rangle$ (où $x' \otimes y'$ est regardé comme un élément de $J(E,F)$) d'où $|B(x',y')| \leqslant \|\widetilde{B}\|$ puisque $\|x' \otimes y'\|_{\int} \leqslant \|x'\| \|y'\|$, d'où enfin $\|B\| \leqslant \|\widetilde{B}\|$.- De même, si l'application canonique de $E'' \hat{\otimes} E'$ dans $L(E',E')$ est biunivoque, on définit un accouplement naturel analogue entre $J(E,F)$ et $\Gamma(E',F')$ par la formule

$$(14 \text{ bis}) \qquad \langle B,A \rangle = \operatorname{Tr.} {}^tA \circ B$$

Par suite

PROPOSITION 31. - Soient E et F deux espaces de Banach, on suppose l'application $F'' \hat{\otimes} F' \to L(F',F')$ biunivoque (resp. l'application $E'' \hat{\otimes} E' \to L(E',E')$ biunivoque). Alors la formule (14) (resp. (14 bis)) définit un isomorphe d'espace normé de l'espace $\Gamma(E',F')$ des formes bilinéaires faiblement compactes sur $E' \times F'$, dans le bidual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$, i.e. dans le dual de l'espace $J(E,F)$ des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$.

COROLLAIRE 1. - Sous les conditions de la prop. 30, toute forme bilinéaire faiblement compacte sur $E' \times F'$, de norme ≤ 1, est limite simple d'applications de norme ≤ 1 éléments de $E \otimes F$.

En effet, la boule unité de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est faiblement dense dans la boule unité du bidual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$, donc à fortiori, en vertu de la prop. 31, dans la boule unité de $\Gamma(E',F')$ pour la dualité envisagée avec $J(E,F)$, d'où à fortiori le corollaire 1. Bien entendu, on peut aussi remplacer la oonvergence simple par la convergence bicompacte (qui donne en effet le dual $E' \hat{\otimes} F'$).

COROLLAIRE 2. - Soient E et F deux espaces de Banach, A une application linéaire faiblement compacte de E dans F, de norme ≤ 1. On suppose que l'applioation $F'' \hat{\otimes} F' \to L(F',F')$ ou l'application $E''' \hat{\otimes} E'' \to L(E'',E'')$ est biunivoque. Alors A est limite uniforme sur tout compact d'applications linéaires de rang fini et de norme ≤ 1.

On considère A comme un élément de $\Gamma(E'',F') = \Gamma(G',F')$, où $G = E'$, et on applique le corollaire 1, qui prouve en particulier que A est adhérent à l'ensemble M des opérateurs de rang fini et de norme ≤ 1 de E dans F, pour la topologie faible définie par $E \hat{\otimes} F'$, donc aussi pour la topologie de la convergence compacte qui donne $E \hat{\otimes} F'$ pour dual (prop. 22)

4. Les applications linéaires intégrales dans un espace L^1.

THÉORÈME 11. - Soit M un espace localement compact muni d'une mesure positive μ, E un espace localement convexe, u une application linéaire de

E dans $L^1(\mu)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a. u est une application intégrale.

b. Il existe un voisinage V de 0 dans E tel que u(V) soit une partie de $L^1(\mu)$ bornée au sens latticiel (i.e. il existe un élément positif h de $L^1(\mu)$ tel que $|ux| \leq h$ pour tout $x \in V$). Si E est un espace de Banach, et si $h = \sup_{\|x\| \leq 1} |ux|$, alors $\|h\|_1 = \|u\|_{\int}$.

c. (Si E est séparable, ou si $L^1(\mu)$ est séparable). Il existe un voisinage convexe cerclé V de 0 dans E, et une application scalairement mesurable $t \to f(t)$ de M dans le dual E'_V de $\widehat{E_V}$, telle que $\|f(t)\|$ soit une fonction sommable de t, et que pour tout $x \in E$, ux soit la classe dans $L^1(\mu)$ de la fonction $t \to \langle x, f(t) \rangle$. Si E est un espace de Banach, on peut, avec les notations de b., supposer que $\|f(t)\| = h(t)$ pour tout $t \in M$.

d. (Si E est du type $(\mathcal{F})$). Pour toute partie compacte convexe cerclée K de E, l'application de E_K dans $L^1(\mu)$ induite par u est intégrale.

Démonstration. - Pour prouver l'équivalence de a., b., c., on peut manifestement supposer que E est un espace de Banach.

a. implique b.- Supposons u intégrale, donc composée d'une application linéaire continue α de E dans un espace $L^\infty(\mu')$ construit sur une mesure μ' de norme ≤ 1 sur un espace compact, de l'application identique φ de $L^\infty(\mu')$ dans $L^1(\mu')$, et d'une application linéaire continue γ de $L^1(\mu')$ dans le bidual de $L^1(\mu)$; on peut supposer $\|\alpha\| \leq \|u\|_{\int}$, $\|\gamma\| \leq 1$ (voir prop. 27, critère d.). Comme u applique en fait E dans $L^1(\mu)$ et non seulement dans le bidual de celui-ci, et qu'il existe une projection p de norme 1 de ce bidual sur $L^1(\mu)$ (voir note 19 page 101), on peut supposer, en remplaçant au besoin γ par $p \circ \gamma$, que γ est même une application linéaire de norme ≤ 1 de $L^1(\mu')$ dans $L^1(\mu)$. Alors, en vertu de la prop. 9 (§ 2, n° 2), γ applique la boule unité de $L^\infty(\mu')$ (qui est une partie latticiellement bornée de $L^1(\mu')$) en une partie de $L^1(\mu)$ dont tous les éléments sont majorés en valeur absolue par une $h_0 \in L^1(\mu)$ telle que

$\|h_0\|_1 \leq \|\gamma\| \int 1 \, d\mu' \leq 1$. A fortiori les ux, avec $\|x\| \leq 1$, sont majorés en valeur absolue par une $h \in L^1(\mu)$ telle que $\|h\|_1 \leq \|u\|_J$ (savoir $h = \|\alpha\| h_0$).

b. implique a. h étant comme dans l'énoncé b., soit $d\nu = h d\mu$, alors $L^1(\nu)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel normé de $L^1(\mu)$, et u applique la boule unité de E dans la boule unité de $L^\infty(\nu)$. Il suit, en vertu de la prop. 27, critère d., que u est de type intégral, et qu'on a $\|u\|_J \leq \|\nu\|_1 = \|h\|_1$. Compte tenu de l'inégalité inverse obtenue plus haut, on a donc bien $\|u\|_J = \|h\|_1$.

b. équivaut à c. Que c. implique b. est trivial. Pour prouver la réciproque, on se ramène d'abord immédiatement au cas où u applique la boule unité de E dans la boule unité de $L^\infty(\mu)$ et où $h \equiv 1$, (en introduisant comme ci-dessus la mesure $d\nu = h d\mu$). Considérons alors u comme une application linéaire continue de E dans $L^\infty(\mu)$, et sa transposée ${}^t u$ comme une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans E'. Il résulte alors des hypothèses faites (E ou $L^1(\mu)$ séparable) que l'on est dans les conditions d'application du théorème de Dunford-Pettis [5], donc u est donnée par une application scalairement mesurable f de M dans la boule unité de E'. Il est alors immédiat que u n'est autre que l'application $x \rightarrow f_x$ de E dans $L^\infty(\mu)$, où pour tout $x \in E$, f_x désigne la classe de la fonction $t \rightarrow \langle x, f(t) \rangle$. De plus, on a $h = \sup_{\|x\| \leq 1} |f_x|$, et comme $h \equiv 1$, on a $\|f(t)\| \leq h(t)$ pour tout t. Le lemme A de l'Introduction V donne alors même $\|f(t)\| = h(t)$ p.p., de sorte qu'on peut même supposer $\|f(t)\| = h(t)$ pour tout t.

c. équivaut à d. Que a. implique d. est trivial, il suffit donc de prouver que d. implique b. Soit (V_n) une suite fondamentale de voisinages de 0 dans E, et supposons que aucun des $u(V_n)$ n'est latticiellement borné. Grâce à la caractérisation classique des parties latticiellement bornées de $L^1(\mu)$ rappelée dans Introduction V, on peut alors trouver une partie finie K_n de V_n telle que, en posant $f_n = \sup_{x \in K_n} |ux|$, on ait $\|f_n\|_1 \geqslant n$. Mais alors $K = \bigcup K_n$ est une partie relativement compacte de E, et u(K) ne peut manifestement pas être latticiellement borné, de sorte que l'on ne peut avoir d., ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. - <u>Une application linéaire intégrale d'un espace localement convexe</u> E <u>dans un espace</u> $L^1(\mu)$, <u>transforme toute suite de Cauchy faible en une suite latticiellement bornée qui converge</u> p.p.

En effet, en se restreignant au sous-espace vectoriel engendré par les x_i, on peut supposer E séparable, et appliquer alors le critère c du th. 11, qui donne aussitôt le résultat.- Plus généralement, ce corollaire permet de montrer que si u est une application linéaire intégrale d'un espace localement convexe E dans un autre F, u transforme toute suite de Cauchy faible dans E en une suite dans F appartenant au produit tensoriel complété $c \hat{\otimes} F$, où c est l'espace de Banach des suites scalaires qui tendent vers une limite. Si F est du type $L^1(\mu)$, ce n'est autre que le corollaire précédent, et on se ramène aisément à ce cas dans le cas général, en faisant usage comme d'habitude du critère d. de la prop. 27. Une démonstration directe plus simple ferait usage du lemme 14 et de la prop. 20, corollaire.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> M <u>un espace localement compact muni d'une mesure positive</u> μ, E <u>un espace du type</u> $(\mathcal{F})$ <u>séparable</u>. <u>Alors</u>, <u>tout élément</u> u <u>de</u> $L^1_{E'}(\mu) = L^1(\mu) \hat{\otimes} E'$ <u>est donné par une application absolument sommable de</u> M <u>dans</u> E' (<u>alors qu'à priori</u>, $L^1_{E'}(\mu)$ <u>est seulement le complété de l'espace des applications absolument sommables de</u> M <u>dans</u> E').

En effet, interprétons u comme une application linéaire de E dans $L^1(\mu)$, il résulte de la prop. 5, 2°, que u est intégrale donc en vertu du th. 11, critère c., peut se représenter par une application scalairement mesurable f de M dans le dual E'_{V^0} d'un espace E_V, où V est un voisinage

convexe cerclé de 0 dans E. Montrons que f est absolument sommable, donc que pour toute partie bornée convexe cerclée A de E, l'application g de M dans l'espace de Banach E'_{A^0} définie par f est absolument sommable. Il suffit de montrer que g est fortement mesurable, car alors, en vertu du th. 11, c., on aura automatiquement $\int \|g(t)\| \, d\mu(t) < +\infty$. Soit donc K une partie compacte de M et soit $\varepsilon > 0$, il faut trouver une partie compacte K_1 de K telle que $\mu(K \cap \complement K_1) \leqslant \varepsilon$, et que la restriction de g à K_1 soit continue. Du fait que l'application induite par u sur E_A est définie par un élément de $L^1(\mu) \hat{\otimes} E'_{A^0}$, i.e. par une application absolument sommable h de M dans E'_{A^0}, il résulte qu'il existe une partie compacte K_1 de K telle que $\mu(K \cap \complement K_1) < \varepsilon$, et que la restriction de h à K_1 soit continue. Soit (x_i) une suite dense dans A. En rap etissant K_1, on peut supposer que l'on a $\langle x_i, h(t) \rangle = \langle x_i, g(t) \rangle$ pour tout i pour tout $t \in K_1$ (h et g étant scalairement p.p. égales) ; je dis qu'alors la restriction de g à K_1 est aussi continue. En effet, pour tout $t_0 \in K_1$ et $\alpha > 0$, existe un voisinage U de t_0 dans K_1 tel que $\|h(t) - h(t_0)\| \leqslant \alpha$ pour tout $t \in U$, i.e.
$\langle x, h(t) - h(t_0) \rangle \leqslant \alpha$ pour $t \in U$, $x \in A$, d'où pour tout i :
$|\langle x_i, g(t) - g(t_0) \rangle| \leqslant \alpha$ (pour $t \in U$). Cette inégalité subsiste si x_i est remplacé par un $x \in A$ quelconque, puisque les x_i sont denses dans A, et on a donc $\|g(t) - g(t_0)\| \leqslant \alpha$ pour $t \in V$. Il en résulte bien que la restriction de g à K_1 est continue, ce qui achève de prouver le corollaire.

Une variante du th. 11 est la

PROPOSITION 32. - <u>Soient</u> M <u>un espace localement compact</u>, $\mathcal{C}_0(M)$ <u>l'espace des fonctions sur</u> M <u>continues et "nulles à l'infini", muni de la norme uniforme</u>, E <u>un espace de Banach</u>, u <u>une application linéaire continue de</u> $\mathcal{C}_0(M)$ <u>dans</u> E' ("<u>mesure vectorielle bornée sur</u> M, <u>à valeurs dans</u> E' "). <u>On suppose vérifiée l'une des hypothèses suivantes</u> : M <u>est métrisable et dénombrable à l'infini</u>, <u>ou plus généralement</u>, <u>pour toute mesure bornée</u> μ <u>sur</u> M, $L^1(\mu)$ <u>est séparable</u> ; <u>ou</u> E <u>est séparable</u>. <u>Sous ces condi-</u>

tions, pour que u soit une application linéaire intégrale (nous dirons alors aussi que u est une "mesure vectorielle intégrale") il faut et il suffit qu'il existe une mesure positive bornée μ sur M, une application scalairement μ-mesurable et bornée f de M dans E' tels qu'on ait

$$u.\varphi = \int \varphi f \, d\mu$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_0(M)$.- Soit alors pour tout $x \in E$, f_x la classe dans $L^1(\mu)$ de la fonction $t \rightarrow \langle x, f(t) \rangle$, soit $h = \sup_{\|x\| \leq 1} |f_x|$. On a alors $\|u\|_I = \|h\|_1$. On peut choisir le couple (μ, f) tel que $h \equiv 1$, alors μ est par là uniquement déterminé, et f est déterminé scalairement p.p., donc p.p. si E est séparable ; on a alors $\|u\|_I = \|\mu\|_1$, et on peut choisir f telle que $\|f(t)\| = 1$ pour tout t.

Démonstration. - Supposons que u est intégrale. Alors ${}^t u$ est une application intégrale de E dans l'espace $\mathcal{M}^1(M)$ des mesures bornées sur M. Or $\mathcal{M}^1(M)$ est, avec sa norme et sa structure latticielle, isomorphe à un espace $L^1(\nu)$, comme il est bien connu (c'est une conséquence immédiate de [16], mais peut se voir bien plus élémentairement). Par suite (th. 11), ${}^t u$ transforme la boule unité de E en une partie latticiellement bornée de $\mathcal{M}^1(M)$. Posons $\mu = \sup_{\|x\| \leq 1} |{}^t ux|$ (où pour $\nu \in \mathcal{M}^1(M)$, on désigne par $|\nu|$ la mesure positive "variation absolue" de ν). Alors ${}^t u$ est une application linéaire de E dans $L^1(\mu)$ (identifié de la façon usuelle à un sous-espace vectoriel normé de $\mathcal{M}^1(M)$), et même dans la boule unité de $L^\infty(\mu)$, et on a, en notant f_x l'élément de $L^1(\mu)$ qui correspond à ${}^t ux$: $\sup_{\|x\| \leq 1} |f_x| = 1$. Du th. 11, critère b., il résulte que ${}^t u$ est aussi une application linéaire intégrale de E dans $L^1(\mu)$, donc (critère o.) donnée par une application scalairement mesurable f de M dans E' telle que $\|f(t)\| = 1$ pour tout $t \in M$. L'application $\varphi \rightarrow \int \varphi f \, d\mu$ de $\mathcal{C}_0(M)$ dans E' a alors manifestement pour transposée l'application $x \rightarrow f_x$, donc est précisément u.- Soit réciproquement μ une mesure positive bornée sur M, f une application bornée et scalairement μ-mesurable de M dans E', tels que $u\varphi = \int \varphi f d\mu$ pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_0(M)$; alors ${}^t u$ est l'application $x \longrightarrow f_x$ de E dans $\mathcal{M}^1(M)$ (les f_x étant comme d'habitude identifiés aux mesures $f_x d\mu$). Cette application est intégrale en tant qu'application de E dans $L^1(\mu)$ (th. 11, b.) donc à fortiori en tant qu'application de E dans $\mathcal{M}^1(M)$. Comme il existe une projection classique de norme 1 de $\mathcal{M}^1(M)$ sur $L^1(\mu)$ (voir note 19 page 101), il s'ensuit aussitôt que la norme intégrale de ${}^t u$, en tant qu'application de E dans $L^1(\mu)$ ou dans $\mathcal{M}^1(M)$, est la même. D'après le th. 11, c., si $h = \operatorname{Sup}_{\|x\| \leq 1} |f_x|$, cette norme est égale à $\|h\|_1$, donc égale à $\|\mu\|_1$ si $h \equiv 1$. Mais cette norme est aussi la norme intégrale de la forme bilinéaire de type intégral sur $\mathcal{C}_0(M) \times E$ définie par ${}^t u$, donc aussi la norme intégrale de u (prop. 28), ce qui établit les égalités de norme envisagées dans la prop. 32. D'autre part, si μ est donné, f est évidemment déterminée scalairement p.p. par la donnée de u. Soit μ_x la mesure sur M donnée par $d\mu_x = f_x d\mu$, on a $\mu_x = {}^t u x$, et $\operatorname{Sup}_{\|x\| \leq 1} |\mu_x|$ est la mesure $h d\mu$, d'où suit que si $h \equiv 1$, μ est entièrement déterminé par $\mu = \operatorname{Sup}_{\|x\| \leq 1} |{}^t u x|$

De la proposition 32, il est immédiat de tirer une proposition analogue quand E est un espace localement convexe arbitraire, ou lorsque $\mathcal{C}_0(M)$ est remplacé par l'espace $\mathcal{C}(M)$ de <u>toutes</u> les fonctions continues sur M, muni de la topologie de la convergence compacte. Rappelons que la prop. 32 n'est autre que la détermination du dual de l'espace $\mathcal{C}_0(M,E) = \mathcal{C}_0(M) \hat{\otimes} E$ des applications continues de M dans E "nulles à l'infini", muni de la norme uniforme.

<u>Remarque</u> 13. - La condition c. du th. 11 est encore équivalente aux conditions a. et b. si M est un "espace de Kakutani" pour la mesure μ, ou si E est lui-même un espace du type $L^1(\nu)$ ou un sous-espace normé d'un tel espace. Il suffit de reprendre la démonstration du fait que b. implique c., en faisant usage dans le

deuxième cas du corollaire 5 du th. 2. La conclusion subsiste encore si E est isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique du produit d'une famille d'espaces $L^1(\nu_i)$ construits sur des mesures ν_i sur des espaces localement compacts M_i (on se ramène aussitôt au cas précédent) - par exemple si E est un espace "échelonné" de Köthe [18] dans le cas général qui correspondrait à l'article [6]. Enfin, la conclusion subsiste encore si pour tout voisinage convexe cerclé V de 0 dans E, en existe un autre $U \subset V$ tel que l'application naturelle de E_U dans E_V, soit faiblement compacte. Dans ce cas en effet toute application linéaire intégrale de E dans $L^1(\mu)$ (ou même dans un espace quasi-complet quelconque) est nucléaire (voir remarque 12 du n° 3), et est par suite même donnée par une application <u>absolument sommable</u> de M dans un espace E'_A, où A est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E' (voir prop. 9 du § 2, n° 2).- Ces remarques pourraient s'appliquer aussi pour élargir les conditions de la prop. 32, où à la place de l'hypothèse envisagée sur E, on peut aussi supposer que E est isomorphe à un sous-espace vectoriel normé d'un espace $L^1(\nu)$, ou que E est réflexif.

5. <u>La situation d'isomorphie et le théorème de Dvoretzky-Rogers</u>.

LEMME 15. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces du type</u> ($\mathcal{F}$). <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a. <u>l'application linéaire canonique de</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>dans</u> $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ <u>est un isomorphisme topologique</u>.

b. <u>l'application linéaire canonique de</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>dans</u> $E \hat{\hat{\otimes}} F$ <u>est biunivoque et sur</u>.

c. <u>Toute forme bilinéaire continue sur</u> $E \times F$ <u>est intégrale</u>.

Démonstration. - Comme $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est par définition l'adhérence de $E \otimes F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$, a. équivaut au fait que l'application canonique de $E \hat{\otimes} F$

dans $E \hat{\hat{\otimes}} F$ soit un isomorphisme vectoriel topologique du premier espace sur le second. Cela équivaut à b., grâce au th. des isomorphismes de Banach. Enfin, en vertu de l'interprétation des duals de $E \hat{\otimes} F$ et $E \hat{\hat{\otimes}} F$, c. signifie que l'application de $E \hat{\otimes} F$ dans $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est un isomorphisme faible, il est bien connu, $E \hat{\otimes} F$ et $E \hat{\hat{\otimes}} F$ étant métrisables, que cela équivaut au fait que ce soit un isomorphisme fort ([7], prop. 21), donc un isomorphisme *sur* puisque l'image de $E \hat{\otimes} F$ dans $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est dense, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 12. - (Dvoretzky-Rogers [29]). *Si* E *est un espace de Banach dans lequel toute suite sommable est absolument sommable*, E *est de dimension finie*.

Les suites absolument sommables dans E s'identifient aux éléments de $\ell^1 \hat{\otimes} E$ (th. 2, 2), les suites strictement sommables aux éléments de $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} E$ (§ 3, n° 3, exemple 2) ; en particulier l'application $\ell^1 \hat{\otimes} E \to$ $\to \ell^1 \hat{\hat{\otimes}} E$ est biunivoque. L'hypothèse du th. 12 signifie que cette application est une application de $\ell^1 \hat{\otimes} E$ *sur* $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} E$, de sorte qu'on est dans les conditions d'application du lemme 15. Nous donnons alors un énoncé en apparence plus fort :

LEMME 16. - *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach*, *on suppose que* F *admet un espace quotient isomorphe* (*comme espace vectoriel topologique*) *à* ℓ^1. *Si l'application canonique de* $F \hat{\otimes} E$ *dans* $F \hat{\hat{\otimes}} E$ *est un isomorphisme vectoriel-topologique*, *alors* E *est de dimension finie*.

(On pourrait se ramener en fait, immédiatement au cas où $F = \ell^1$, car il est bien connu que l'hypothèse implique que ℓ^1 est isomorphe à un facteur direct de F. L'énoncé précédent a l'avantage de s'appliquer directement quand F est de dimension infinie et du type $F = L^1(\mu)$ ou $F = \mathcal{M}^1(M)$).

Démonstration. - Identifions ℓ^1 à un espace quotient de F ; les applications linéaires continues de ℓ^1 dans E' correspondent biunivoquement aux suites bornées dans E' : à une application linéaire u correspond la suite des images par u des éléments e_i de la "base canonique" de ℓ^1, et à la suite bornée (x_i') correspond l'application linéaire $(\lambda_i) \rightarrow \sum_i \lambda_i x_i'$ de ℓ^1 dans E'. Une telle application du quotient ℓ^1 de F définit une application linéaire continue de F dans E', qui est intégrale par hypothèse (lemme 15, critère c.), donc applique la boule unité dans une partie de E' relativement compacte pour $\sigma(E',E'')$ (th. 9, 1°). Comme la suite (x_i') est contenue à une homothétie près dans l'image de la boule unité de F, il s'ensuit qu'elle est relativement compacte pour $\sigma(E',E'')$. Il résulte alors du théorème d'Eberlein que la boule unité de E' est compacte pour $\sigma(E',E'')$ i.e. que E' est réflexif. Mais une application de type intégral de F dans un espace de Banach réflexif est compacte (th. 10, corollaire 2), donc le raisonnement précédent prouve aussi que toute suite bornée dans E' est relativement compacte. Donc la boule unité de E' est compacte, d'où résulte que E', donc aussi E, est de dimension finie.- Ce raisonnement prouve plus généralement que, lorsque E est un espace du type $(\mathcal{F})$ (non nécessairement normable) tel que toute suite strictement sommable y soit absolument sommable, alors E est un espace de Schwartz ([9], §3, définition 5). Nous verrons au chap. 2, §2, th. 8, qu'alors E est même "nucléaire", et réciproquement.

Soit (E,F) un couple de deux espaces de Banach satisfaisant aux conditions du lemme 15, i.e. tels que $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F$. Alors les duals forts B(E,F) et J(E,F) de ces espaces sont identiques. Supposons que la topologie induite sur $E' \otimes F'$ par l'espace J(E,F) des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$ soit identique à la topologie induite par $E' \hat{\otimes} F'$ (ce qui est vrai dans tous les cas connus - voir § 5, n° 2) ; i.e. que $E' \hat{\otimes} F'$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de J(E,F). Alors, sous les conditions actuelles, $E' \hat{\otimes} F'$ s'identifie même à un sous-espace vectoriel topologique de B(E,F), ou encore de B(E'',F''), (car B(E,F) se plonge canoniquement dans $B(E'',F'')$). Dans ce cas, E' et F' donnent lieu eux aussi à la situation d'isomorphie du lemme 15. Pour avoir un énoncé plus élégant, ne faisant plus intervenir de condition peut-être surabondante, introduisons, pour tout couple de deux espaces de Banach, E, F, l'espace $E \mathbin{\widetilde{\otimes}} F$, complété de $E \otimes F$ pour la norme induite par l'espace $J(E',F')$ (norme du dual de $E' \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F'$) ; cet espace coïncide en fait avec $E \mathbin{\hat{\otimes}} F$ dans tous les cas connus. Le dual de $E \mathbin{\widetilde{\otimes}} F$ s'identifie manifestement, avec sa norme, au sous-espace $B_0(E,F)$ de $B(E,F)$ engendré par l'adhérence faible de la boule unité de $E' \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F'$ dans $B(E,F)$ (th. des bipolaires). Il existe une application linéaire continue naturelle de $E \mathbin{\widetilde{\otimes}} F$ dans $E \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F$, manifestement biunivoque, et dire que c'est un isomorphisme de $E \mathbin{\widetilde{\otimes}} F$ *sur* $E \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F$ (au sens purement algébrique, ou au sens topologique, cela revient au même en vertu du th. des isomorphismes de Banach), signifie aussi qu'on a $B_0(E,F) = J(E,F)$. Or $J(E,F)$ est canoniquement isomorphe à un sous-espace vectoriel normé de $J(E'',F'')$ (prop. 28), donc sous les hypothèses précédentes, comme $E' \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F'$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de $B_0(E,F)$, il s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de $J(E'',F'')$ donc exactement à $E' \mathbin{\hat{\otimes}} F'$. Réciproquement, si $E' \mathbin{\widetilde{\otimes}} F' = E' \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F'$, on a d'après ce qui précède $E'' \mathbin{\widetilde{\otimes}} F'' = E'' \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F''$. Or on prouve aussitôt (comme dans le corollaire 3 de la prop. 4) que l'application naturelle $E \mathbin{\widetilde{\otimes}} F \to E'' \mathbin{\widetilde{\otimes}} F''$ est un isomorphisme d'espace normé ; il en est de même de l'application naturelle $E \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F \to E'' \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F''$, d'où résulte que l'application naturelle $E \mathbin{\widetilde{\otimes}} F \to E \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F$ est un isomorphisme topologique. Ainsi, *pour que* $E \mathbin{\widetilde{\otimes}} F = E \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F$, *il faut et il suffit que* $E' \mathbin{\widetilde{\otimes}} F' = E' \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F'$. Bien entendu, il suffit pour cela que l'on ait $E \mathbin{\hat{\otimes}} F = E \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F$, ou même seulement que l'application canonique $E \mathbin{\hat{\otimes}} F \to E \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F$ soit une application du premier espace *sur* le second. Notons encore que le lemme 16 aurait pu s'énoncer sous la forme : *Si* $E \mathbin{\widetilde{\otimes}} F = E \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} F$, *et si* F *admet un espace quotient isomorphe à* ℓ^1, *alors* E *est de dimension finie*. En effet, la démonstration donnée subsiste telle quelle, moyennant le fait que l'on a évidemment $B_0(\ell^1, E) = B(\ell^1, E)$. Des réflexions précédentes, on déduit le résultat suivant (qu'il aurait été possible d'obtenir plus rapidement, mais de façon moins compréhensive, par application directe du th. 12) :

PROPOSITION 33. - *Soient* E, F *deux espaces de Banach*. *On suppose* F *isomorphe en tant qu'espace vectoriel topologique*, *à un espace* $\mathcal{C}_0(M)$ (*où* M *est un espace localement compact infini*), *ou que* F *contient un sous-espace vectoriel topologique isomorphe à* $\mathcal{C}_0(M)$. *Si l'application linéaire canonique de* $F \hat{\otimes} E$ *dans* $F \hat{\hat{\otimes}} E$ *est une application sur*, *alors* E *est de dimension finie*.

En effet, l'hypothèse faite implique à fortiori $F \tilde{\otimes} E = F \hat{\hat{\otimes}} E$, d'où d'après ce qui précède $F' \tilde{\otimes} E' = F' \hat{\hat{\otimes}} E'$. Or F' contient un espace quotient isomorphe au dual de $\mathcal{C}_0(M)$, i.e. à l'espace $\mathcal{M}^1(M)$ des mesures bornées sur M, et il est immédiat que $\mathcal{M}^1(M)$ contient un espace quotient isomorphe à ℓ^1 (prendre une suite de points distincts s_i de K, et l'espace vectoriel fortement fermé engendré par les mesures "masse + 1 au point s_i" ; c'est un facteur direct de $\mathcal{M}^1(K)$, donc isomorphe à un espace quotient de $\mathcal{M}^1(K)$). Le lemme 16, sous la forme renforcée donnée plus haut, implique donc que E' est de dimension finie, donc E est de dimension finie La prop. 32 est surtout intéressante pour le cas où $F = c_0$ (espace des suites qui tendent vers zéro) : si E est un espace de Banach, les suites dans E tendant vers zéro, qui s'identifient à des éléments de $c_0 \hat{\otimes} E$ (qu'il serait d'ailleurs possible de caractériser de diverses autres façons, en s'inspirant de la remarque qui suit le corollaire 1 du th. 11) forment un sous-espace vectoriel remarquable de l'espace $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ de toutes les suites dans E qui tendent vers zéro, et ce sous-espace est distinct de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ si E est de dimension infinie.

PROPOSITION 34. - *Soit* u *une application linéaire intégrale d'un espace localement convexe* F *dans un autre* E, *et soit* (y_i) *une suite* *strictement sommable dans* F. *Alors* (uy_i) *est une suite absolument sommable dans* E. *Si* F *et* E *sont des espaces de Banach on a* $\|(u(y_i))\|_1 \leqslant \|u\|_f \, \|(y_i)\|$ (*où* $\|(y_i)\|$ *est la norme de la suite* (y_i) *dans* $\ell^1 \widehat{\widehat{\otimes}} F$).

En effet, on est ramené aussitôt au cas où E et F sont des espaces de Banach. Identifiant (y_i) (resp. (uy_i)) à l'application linéaire compacte de c_0 qu'elle définit, il résulte du th. 10, 2°, que la deuxième est une application nucléaire de c_0 dans E", de norme-trace $\leqslant k = \|u\|_f \, \|(y_i)\|$ donc provient d'un élément de $\ell^1 \widehat{\otimes} E''$ de norme $\leqslant k$, d'où $\sum_i \|uy_i\| \leqslant k$, d'où enfin la conclusion voulue.

COROLLAIRE 1. - *Si* E *et* F *sont deux espaces du type* ($\mathcal{F}$) *tels que* $E \widehat{\otimes} F = E \widehat{\widehat{\otimes}} F$, *alors toute application linéaire continue* u *de* E *dans* F' *transforme toute suite strictement sommable dans* E *en une suite absolument sommable dans* F'.

(En effet, u est alors une application intégrale en vertu du lemme 15). Compte tenu du th. 12, on obtient alors le

COROLLAIRE 2. - *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach, tels que* E *soit isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique de* F' ; *alors l'application linéaire canonique de* $E \widehat{\otimes} F$ *dans* $E \widehat{\widehat{\otimes}} F$ *n'est un isomorphe topologique que si* E *est de dimension finie. En particulier, soit* G *un espace de Banach* ; E *un sous-espace vectoriel de dimension infinie, alors on n'a pas* $E \widehat{\otimes} G' = E \widehat{\widehat{\otimes}} G'$.

En particulier :

COROLLAIRE 3. - *Soit* G *un espace de Banach*, E *un sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie, supposons que l'application canonique* $E \widehat{\otimes} G' \rightarrow E \widehat{\widehat{\otimes}} G'$ *soit biunivoque. Alors il existe une application linéaire compacte de* G *dans* E *qui ne soit pas une application de Fredholm.*

Les résultats de ce numéro font penser que si E et F sont deux espaces de Banach, la situation d'isomorphie $E \widehat{\otimes} F = E \widehat{\widehat{\otimes}} F$ ne peut se présenter que si E ou F est de dimension finie, ce qui constituerait, dans le cadre des espaces de Banach, la véritable généralisation du th. de Dvoretsky-Rogers. La reformulation adéquate de ce problème pour les espaces localement convexes généraux est envisagé dans le Chap. 2, § 2, n° 1, remarque 8.

6. Formes bilinéaires et applications linéaires semi-intégrales.

Dans ce n°, nous utilisons les propriétés simples des espaces c_0, ℓ^1, ou $L^1(\mu)$, $L^\infty(\mu)$, pour l'étude des espaces de Banach généraux (nous espérons réussir prochainement un travail systématique dans cet ordre d'idées). Le lecteur se rendra compte que la propriété fondamentale qui intervient ici est le corollaire 3 du th. 2 et sa variante signalée en même temps. Nous aurons à utiliser le fait bien connu : Tout espace de Banach est isomorphe avec sa norme à un espace quotient d'un espace $L^1(\mu)$, et même d'un espace $\ell^1(I)$ construit sur un ensemble d'indices I convenable. (Il suffit de prendre pour I n'importe quelle partie $\{x_i\}$ de E dont l'enveloppe convexe cerclée fermée est la boule unité, et de considérer l'homomorphisme métrique $(\lambda_i) \longrightarrow \sum_i \lambda_i x_i$ de $\ell^1(I)$ sur E).

Enfin nous aurons besoin du fait suivant, qui résulte d'une proposition générale : Soit E un espace de Banach, alors l'application linéaire canonique de $c_0 \hat{\otimes} E'$ dans l'espace $J(\ell^1, E)$ des formes bilinéaires intégrales sur $\ell^1 \times E$ est un isomorphisme d'espaces normés. Nous ne donnons pas ici la démonstration fort facile de ce cas particulier, et nous nous contentons de renvoyer à la proposition générale, § 5, n° 2, prop. 41, corollaire 1, 3°, où la propriété très générale de c_0 qui intervient réellement est bien mise en évidence.

Pour abréger certains énoncés, nous dirons qu'une partie A d'un espace localement convexe E est une partie semi-intégrale [20] si elle est

---

20. Pour être cohérente avec la définition 8 plus bas, nous devrions dire "semi-intégrale à gauche" ; il y aurait alors à distinguer aussi les

contenue dans l'image de la boule unité d'un espace de Banach G par une application intégrale u de G dans E. Si E est un espace de Banach, on dit que A a une norme semi-intégrale $\leq$ M, si on peut ci-dessus choisir G, u tels que $\|u\|_I \leq M$. Par exemple, le th. 11 nous apprend que les parties semi-intégrales d'un espace $L^1(\mu)$ sont exactement les parties latticiellement bornées, et nous donne l'expression exacte de la norme semi-intégrale d'une telle partie de $L^1(\mu)$.

THÉORÈME 13. - Soient E et F deux espaces du type $(\mathcal{F})$, u une forme bilinéaire continue sur $E \times F$, interprétée comme une application linéaire continue de E dans F'.

1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a. u transforme un voisinage convenable V de 0 dans E en une partie semi-intégrale de F'.

b. Quelle que soit la partie compacte K de E, u(K) est une partie semi-intégrale de F'.

c. L'application linéaire $1 \otimes u$ de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ dans $c_0 \hat{\hat{\otimes}} F'$ applique le premier espace dans $c_0 \hat{\otimes} F'$.

d. L'application linéaire $1 \otimes {}^t u$ de $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} F$ dans $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} E'$ applique le premier espace dans $\ell^1 \hat{\otimes} E'$ (i.e. ${}^t u$ transforme les suites strictement sommables dans F en des suites absolument sommables dans E').

2. Supposons que E et F sont des espaces de Banach. Alors on obtient des conditions équivalentes a_1, b_1, c_1, d_1, en supposant dans les énoncés a., b. ci-dessus que V est la boule unité de E, que K est contenu dans V, et que la norme semi-intégrale de la partie de F' obtenue est ≤ 1 ; dans l'énoncé c. que $1 \otimes u$ est une application linéaire de norme ≤ 1 de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E'$ dans $c_0 \hat{\otimes} F'$; et enfin dans d. que $1 \otimes {}^t u$ est une application de norme

---

parties "semi-intégrales à droite", i.e. les parties dont l'enveloppe convexe cerclée A est telle que l'application identique de E_A dans E soit

$\leqslant 1$ de $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} F$ dans $\ell^1 \hat{\otimes} E'$. Enfin, soit φ un homomorphisme métrique d'un espace $L^1 = L^1(\mu)$ sur E (i.e. un homomorphisme identifiant E à un espace quotient normé de L^1). Alors les conditions a_1, b_1, c_1, d_1, sont équivalentes à e_1: $u \circ \varphi$ est une application intégrale de L^1 dans F', ayant une norme intégrale $\leqslant 1$.

Signalons que même si E et F sont des espaces de Banach réflexifs, les conditions envisagées sur u n'impliquent pas que u soit de type intégral [21]. Dans ce cas, en effet, cela signifierait que u est même nucléaire (th. 10, corollaire 2), or nous avons vu (remarque 9, § 3, n° 2) qu'il existe une application nucléaire v d'un espace de Banach réflexif G dans un autre F', s'annulant sur un sous-espace fermé H, qui n'induise pas une application nucléaire de G/H = E dans F' ; or, cette application de E satisfait manifestement à la condition a. du th. 13.

Démonstration du th. 13. - Nous commençons par prouver 2°. Il est d'abord trivial que a_1 implique b_1.

b_1 implique c_1. Soit en effet v un élément de la boule unité de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ i.e. une suite (x_i) dans la boule unité de E, tendant vers 0. D'après b_1, la suite (ux_i) est contenue dans l'image de la boule unité d'un espace de Banach G par une application linéaire de type intégral α, telle que $\|\alpha\|_I \leqslant 1$. Il existe une suite (z_i) dans G, telle que $\|z_i\| \leqslant 1$ et $\alpha z_i = ux_i$ pour tout i. Si w est l'application linéaire de ℓ^1 dans G qui correspond à (z_i) on a manifestement $uv = \alpha w$. Comme w est une application linéaire de norme $\leqslant 1$, et α une application linéaire intégrale de norme intégrale $\leqslant 1$, αw est une application de norme intégrale $\leqslant 1$, donc uv s'i-

semi-intégrale à droite.

21. Le fait que dans le th. 11 (resp. le th. 13) on puisse caractériser les applications intégrales de l'espace de Banach E dans $L^1(\mu)$ (resp. de $L^1(\mu)$ dans E) par des propriétés de l'image de la boule unité, est tout à fait exceptionnel, et lié directement à la propriété exprimée dans le corollaire 3 du th. 2.

dentifie à un élément de la boule unité de $J(\ell^1, F)$. D'autre part, uv n'est autre que $(1 \otimes u).v$, et lorsque $v \in c_0 \otimes E$, on a $(1 \otimes u).v \in c_0 \otimes F' \subset c_0 \hat{\otimes} F'$. Comme $c_0 \hat{\otimes} F'$ est un sous-espace vectoriel normé de $J(\ell^1, F)$, il suit bien par continuité que $1 \otimes u$ est une application de norme ≤ 1 de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ dans $c_0 \hat{\otimes} F'$.

c_1 implique a_1. Pour cela, considérons E comme un espace quotient normé d'un espace $\ell^1(I)$ construit sur un certain ensemble d'indices I, grâce à un homomorphisme métrique φ de $\ell^1(I)$ sur E. Il suffit de prouver que $u\varphi$ est une application intégrale de $\ell^1(I)$ dans F' ayant une norme intégrale ≤ 1. On s'aperçoit aussitôt que $u\varphi$ satisfait à l'hypothèse c_1, de sorte qu'on peut remplacer E par $\ell^1(I)$. Pour toute partie finie J de I considérons $\ell^1(J)$ comme un sous-espace vectoriel normé de $E = \ell^1(I)$, soit p_J la projection naturelle de $\ell^1(I)$ sur $\ell^1(J)$. $\ell^1(J)$ est évidemment isomorphe à un sous-espace ℓ^1 tel qu'il existe une projection q_J de norme ≤ 1 de ℓ^1 sur ce sous-espace, continue pour la topologie faible de dual de c_0 ; q_J est une application linéaire de ℓ^1 dans E, provenant de la boule unité de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$, donc , en vertu de c_1, uq_J est une application nucléaire de norme-trace ≤ 1 de ℓ^1 dans F', donc sa restriction de $\ell^1(J)$ est de norme-trace ≤ 1, d'où résulte enfin que uq_J est une application nucléaire de norme-trace ≤ 1 de $\ell^1(I)$ dans F', donc définit un élément α_J de la boule unité du dual de $\ell^1(I) \hat{\hat{\otimes}} F$. Quand J varie suivant le filtre des sections croissantes, α_J a donc une valeur d'adhérence faible α dans la boule unité de ce dual. α s'identifie à une application linéaire intégrale de $\ell^1(I)$ dans F', de norme intégrale ≤ 1, application qui coïncide évidemment avec u sur les $\ell^1(J)$, donc identique à u.- Ce qui précède montre l'équivalence des conditions a_1, b_1, c_1.

e_1 équivaut à a_1. Il est d'abord trivial que e_1 implique a_1. La réciproque équivaut au fait suivant : Si u est une application linéaire de $L^1 = L^1(\mu)$ dans F' telle que l'image de la boule unité soit contenue dans l'image de la boule unité d'un espace de Banach G par une application linéaire intégrale α telle que $\|\alpha\|'_1 \leq 1$, alors u est une application intégrale de norme intégrale ≤ 1. En effet, soit H le noyau de α, et soit α_1 l'application linéaire de G/H dans F' définie par α par passage au quotient, on aura évidemment $u = \alpha_1 u_1$, où u_1 est une application linéaire de norme ≤ 1 de L^1 dans G/H. D'après le corollaire 3 du th. 2 (§ 2), on a, en considérant l'application linéaire $\bar{u}_1$ de L^1 dans $(G/H)''$ définie par u_1 : $\bar{u}_1 = \psi u_2$, où u_2 est une application linéaire de norme ≤ 1 de L^1 dans G'', et où ψ est l'application linéaire canonique de G'' sur $(G/H)''$. Soit $\bar{\alpha}$ (resp. $\bar{\alpha}_1$) le prolongement naturel par continuité faible de α (resp. α_1) en une application de G'' (resp. $(G/H)''$) dans F', $\bar{\alpha}$ est encore une application de norme intégrale ≤ 1 (prop. 28). De $u = \alpha_1 u_1$, on tire $u = \bar{\alpha}_1 \bar{u}_1$, d'où, compte tenu de $\bar{u}_1 = \psi u_2$: $u = \bar{\alpha}_1 \psi u_2 = \bar{\alpha} u_2$. Il en résulte bien que u est une application intégrale de L^1 dans F', de norme intégrale $\leq \|\alpha\|'_1 \, \|u_0\| \leq 1$.- La démonstration du th. 13, 2°, sera achevée quand nous aurons prouvé que

d_1 équivaut à a_1. Cette assertion signifie manifestement ceci :

COROLLAIRE. - _Soit_ F _un espace de Banach_, A _une partie de son dual_. _Pour que_ A _soit contenu dans l'image de la boule unité d'un espace de Banach_ G _par une application linéaire intégrale_ α, _telle que_ $\|\alpha\|'_1 \leq 1$, _il faut et il suffit que pour toute suite strictement sommable_ (y_i) _dans_ F, _correspondant à une application linéaire de norme_ ≤ 1 _de_ c_0 _dans_ F, _on ait_ : $\sum_i \sup_{x \in A} |\langle y_i , x \rangle| \leq 1$.

Prouvons donc ce corollaire. Que la condition soit nécessaire n'est autre que la partie "métrique" de la prop. 34 (si A est l'image de la boule unité de G par α, l'inégalité énoncée n'est autre que $\sum_i \|{}^t\alpha y_i\| \leq 1$). Pour la suffisance, nous revenons au problème initial, et prouvons directement que d_1 implique c_1. Comme $U = 1 \otimes {}^t u$ est une application linéaire de norme ≤ 1 de $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} F$ dans $\ell^1 \hat{\otimes} E'$, sa transposée ${}^tU$ est une application linéaire de norme ≤ 1 de $B(\ell^1, E')$ dans l'espace $J(\ell^1, F)$ des formes bilinéaires de type intégral sur $\ell^1 \times F$. On vérifie aussitôt que ${}^tU$ fait correspondre à tout élément de $B(\ell^1, E')$, s'identifiant à une application linéaire continue v de ℓ^1 dans E, l'application uv de ℓ^1 dans F'. Par suite, ${}^tU$ applique $c_0 \otimes E$ dans $c_0 \otimes F'$, donc l'adhérence $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ de $c_0 \otimes E \subset B(\ell^1, E')$ dans l'adhérence de $c_0 \otimes F' \subset J(\ell^1, F')$, i.e. dans $c_0 \hat{\otimes} F'$; et l'application de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ dans $c_0 \hat{\otimes} F'$ ainsi obtenue est de norme ≤ 1. L'application de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ dans $c_0 \hat{\otimes} F'$ qui s'en déduit n'est d'ailleurs autre manifestement que $1 \otimes u$, ce qui achève la démonstration du fait que d_1 implique c_1.

Prouvons maintenant la première partie du th. 11. Il est trivial que a. implique b., et on prouve que b. implique c. en procédant comme plus haut pour prouver que b_1 implique c_1. Nous prouvons tout de suite que c. implique a., d'où l'équivalence des conditions a., b., c. Enfin, pour prouver que d. est équivalent à ces conditions, il suffit de nouveau de procéder comme dans 2°.-

Preuve que c. implique a. On a une application linéaire $U = 1 \otimes u$ de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ dans $c_0 \hat{\otimes} F'$. Comme $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ est du type $(\mathcal{F})$, $c_0 \hat{\otimes} F'$ du type $(\mathcal{DF})$ et complet, et qu'enfin U est continue quand on munit $c_0 \hat{\otimes} F'$ de la topologie induite par $c_0 \hat{\hat{\otimes}} F'$, il suit du th. A de l'Introduction, IV, 4, que U applique un voisinage convenable W de 0 dans $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ dans une partie bornée M de $c_0 \hat{\otimes} F'$. On peut supposer que W est défini, à partir d'un voisinage convexe cerclé fermé V de 0 dans E, comme l'ensemble des $v \in c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ qui appliquent la boule unité de ℓ^1 dans V, i.e. qui, interprétées comme suites dans E, sont contenues dans V. D'autre part, on peut supposer que M est identique à l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble $A \otimes B$, où A est la boule unité de c_0, et où B est une partie bornée convexe cerclée faiblement fermée de F' (prop. 5, 2°). Alors tout élément de M définit une application linéaire intégrale, de norme intégrale $\leqslant 1$, de $\mathcal{L}^1$ dans le dual $F_1' = (F')_B$ de l'espace de Banach $F_1 = F_{B^0}$. Du fait que $U(W) \subset M$, résulte aussitôt que $u(V) \subset B$, donc u définit une application linéaire u_1 de norme $\leqslant 1$ de l'espace de Banach $E_1 = E_V$ dans $F_1' = F_B'$. De même, posant $H = c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$, $L = c_0 \hat{\otimes} F'$, U définit une application linéaire U_1 de norme $\leqslant 1$ de $\widehat{H_W}$ dans L_M, donc aussi de H_W dans l'espace $J(\mathcal{L}^1, F_1)$ des applications linéaires intégrales de $\mathcal{L}^1$ dans F_1'. D'autre part, on vérifie immédiatement que $\widehat{H_W}$ s'identifie à $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E_1$, et que U_1 (considéré comme une application linéaire de norme $\leqslant 1$ de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E_1$ dans $J(\mathcal{L}^1, F_1)$), est donnée précisément par $U_1(v) = u \circ v$ pour tout $v \in c_0 \hat{\hat{\otimes}} E_1$. Comme U_1 applique donc $c_0 \otimes E_1$ dans $c_0 \otimes F'$, il s'ensuit par continuité que U_1 applique $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E_1$ dans l'adhérence $c_0 \hat{\otimes} F_1'$ de $c_0 \otimes F_1' \subset J(\mathcal{L}^1, F_1)$. L'application de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E_1$ dans $c_0 \hat{\otimes} F_1'$ définie par U_1 n'est d'ailleurs autre que $1 \otimes u_1$. Par suite, le th. 13, 2° s'applique, l'image de la boule unité de E_1 par u_1 est contenue dans l'image de la boule unité d'un espace de Banach G par une application linéaire intégrale α de G dans F_1'. Comme $F_1' = F_B'$, α est aussi une application intégrale de G dans F', et l'image de la boule unité de G contient alors $u(V)$, ce qui achève la démonstration.

DÉFINITION 8. - <u>Soient</u> E, F, G <u>des espaces de Banach</u> .

1. <u>Soit</u> u <u>une forme bilinéaire continue sur</u> $E \times F$, u <u>est dite semi-intégrale à gauche</u>, <u>si elle satisfait aux conditions équivalentes</u> a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 <u>du th</u>. 13, 2°. <u>On appelle alors</u> "<u>norme semi-intégrale à gauche</u>" <u>du</u> u <u>la norme de l'application</u> $1 \otimes u$ <u>considérée comme une application de</u> $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ <u>dans</u> $c_0 \hat{\otimes} F'$ (<u>qui est donc aussi la norme de l'application</u> $1 \otimes {}^t u$ <u>de</u> $\mathcal{L}^1 \otimes E$ <u>dans</u> $\mathcal{L}^1 \hat{\otimes} E'$, <u>ou la norme intégrale de l'application</u> $u\varphi$ <u>de</u> $L^1(\mu)$ <u>dans</u> F', <u>quand</u> φ <u>est un homomorphisme métrique de</u> $L^1(\mu)$ <u>sur</u> E).- u <u>est dite semi-intégrale à droite</u>, <u>si la forme</u> $v(y,x) = u(x,y)$ <u>sur</u> $F \times E$ <u>est semi-intégrale à gauche</u>. <u>On appelle alors norme semi-intégrale à</u>

droite de u la norme semi-intégrale à gauche de v.– u est dite semi-intégrale, si elle est semi-intégrale à gauche ou semi-intégrale à droite.

2. *Soit u une application linéaire continue de E dans G, u est dite semi-intégrale à gauche (resp. à droite) si la forme bilinéaire sur $E \times G'$ définie par u est semi-intégrale à gauche (resp. à droite). Alors la norme semi-intégrale à gauche (resp. à droite) de cette forme bilinéaire, est appelée la norme semi-intégrale à gauche (resp. à droite) de u. u est dite semi-intégrale, si u est semi-intégrale à gauche ou semi-intégrale à droite.*

Les formes bilinéaires semi-intégrales à gauche sur $E \times F$ forment un espace vectoriel qui s'identifie avec sa "norme semi-intégrale à gauche" au sous-espace de l'espace normé $J(L^1, F)$ des formes bilinéaires intégrales sur $L^1 \times F$, formé des formes $v(x,y)$ qui s'annulent quand x appartient au noyau de l'homomorphisme métrique donné φ de L^1 sur E. Il est immédiat que si u est une forme bilinéaire continue sur $E \times F$, il revient au même de dire que u est semi-intégrale à gauche, ou que l'application linéaire de E dans F' qui lui correspond est semi-intégrale à gauche, ou que l'application ${}^t u$ de F dans E' qui lui correspond est semi-intégrale à droite ; et alors toutes les normes correspondantes sont égales (conséquence immédiate de la prop. 28). Cela signifie aussi que l'application linéaire de L^1 dans F' définie par u, ou que l'application linéaire de F dans le dual L^∞ de L^1 définie par ${}^t u$, est intégrale. Signalons encore que le th. 9 implique aussitôt qu'une application linéaire semi-intégrale est faiblement compacte.

On peut définir, si E et F sont deux espaces localement convexes quelconques, les formes bilinéaires semi-intégrales à gauche sur $E \times F$ comme les formes provenant d'une forme bilinéaire semi-intégrale à gauche sur quelque espace $\widehat{E_U} \times \widehat{F_V}$, où U (resp. V) est un voisinage convexe cerclé de 0 dans E (resp. F), et on peut développer les variantes de cette définition comme ci-dessus. Si E et F sont du type $(\mathcal{F})$, on retrouve la situation envisagée dans le th. 13, 1°. Mais nous n'insisterons pas sur cette terminologie dans le cas général.- Je donnerai ailleurs une étude "métrique" détaillée de diverses variantes de la notion de forme bilinéaire semi-intégrale et de certaines classes remarquables de formes bilinéaires et de produits tensoriels topologiques liées à cette notion. Dans ce n°, nous nous bornons à établir le résultat suivant, qui nous sera utile au chap.2, §2 (notons d'ailleurs que nous ne nous servons ici que du critère e_1, qui pourrait servir comme définition, de sorte que le th. 13 joue dans ce premier chapitre un rôle purement platonique) :

THÉORÈME 14. - *Soient* E, F, G *trois espaces de Banach, soit* u *une application semi-intégrale gauche de* E *dans* F, v *une application semi-intégrale gauche de* F *dans* G, *alors* vu *est une application nucléaire de* E *dans* G, *dont la norme-trace est au plus égale au produit des normes semi-intégrales gauches de* u *et* v. *L'énoncé analogue est valable si on remplace le mot "gauche" par "droite".*

Nous nous servirons du lemme suivant, ayant son intérêt propre :

LEMME 17. - *Soit* u *une application semi-intégrale gauche d'un espace de Banach* E *dans un autre* F, *ayant une norme semi-intégrale gauche* ≤ 1. *Alors, on peut trouver un espace compact muni d'une mesure positive* μ *de norme* ≤ 1, *une application linéaire* α *de norme* ≤ 1 *de* E *dans* $L^2(\mu)$ *et une application linéaire* γ *de norme* ≤ 1 *de* $L^1(\mu)$ *dans* F", *tels que l'on ait* $u = \gamma\varphi\alpha$, *où* φ *est l'application identique de* $L^2(\mu)$ *dans* $L^1(\mu)$.

Par transposition, ce lemme résulte du

COROLLAIRE. - *Soit* u *une application semi-intégrale droite d'un espace de Banach* E *dans un autre* F, *de norme semi-intégrale droite* ≤ 1. *Alors on peut trouver un espace compact muni d'une mesure positive* μ *de norme* ≤ 1, *une application linéaire* α *de norme* ≤ 1 *de* E *dans* $L^\infty(\mu)$ *et une application linéaire* γ *de norme* ≤ 1 *de* $L^2(\mu)$ *dans* F, *tels que l'on ait*

$u = \gamma\varphi\alpha$, <u>où</u> φ <u>est l'application identique de</u> $L^{\infty}(\mu)$ <u>dans</u> $L^2(\mu)$.

Prouvons ce corollaire. F est un sous-espace normé d'un espace de Banach G tel que u, considéré comme application de E dans G, soit intégrale de norme intégrale ≤ 1, et peut donc se mettre sous la forme de composé d'une séquence d'opérateurs

$$E \xrightarrow{\alpha} L^{\infty}(\mu) \longrightarrow L^1(\mu) \xrightarrow{\gamma_1} G''$$

où μ est comme dans l'énoncé du corollaire, et $\|\alpha\| \leq 1$, $\|\gamma_1\| \leq 1$, la flèche du milieu désignant l'application identique. Considérant l'espace $L^2(\mu)$ intermédiaire entre $L^{\infty}(\mu)$ et $L^1(\mu)$, on obtient aussi u comme composé de

$$E \xrightarrow{\alpha} L^{\infty}(\mu) \xrightarrow{\varphi} L^2(\mu) \xrightarrow{\gamma_2} G''$$

la flèche du milieu désignant encore l'application identique, et $\|\gamma_2\| \leq 1$. Soit $w = \varphi\alpha$ le composé $E \longrightarrow L^2(\mu)$, comme $\gamma_2 w$ applique en fait E dans $F \subset G''$, on a $w(E) \subset \gamma_2^{-1}(F)$, or $\gamma_2^{-1}(F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$, soit p l'opérateur de projection orthogonale sur ce sous-espace. On aura donc $w = pw$, d'où $u = \gamma_2 pw$. Il suffit maintenant de poser $\gamma = \gamma_2 p$ pour satisfaire aux conditions du corollaire 1.

Prouvons maintenant le théorème 14. Plaçons nous d'abord dans le cas d'opérateurs semi-intégraux gauches. Appliquant le lemme 17 à u, on peut mettre vu sous forme du composé d'une séquence d'opérateurs

$$E \longrightarrow L^2(\mu) \longrightarrow L^1(\mu) \longrightarrow F'' \xrightarrow{v''} G$$

(noter que v étant faiblement compact, v" applique F" <u>dans</u> G). Comme v est semi-intégral gauche, il s'ensuit immédiatement qu'il en est de même de v", donc le composé $L^1(\mu) \longrightarrow F'' \longrightarrow G$ est intégral, donc induit une application intégrale de $L^2(\mu)$. Comme L^2 est réflexif, c'est même une application nucléaire de L^2 dans G" (th. 10, corollaire 2) donc aussi de L^2 dans G (§ 3, n° 2, prop. 15). Par suite vu est aussi une application nucléaire de E dans G.

Si u et v sont semi-intégrales droites, on applique le corollaire du lemme 17 à v pour écrire vu comme composé d'une séquence

$$E \longrightarrow F \longrightarrow L^{\infty} \longrightarrow L^{2} \longrightarrow G$$

Comme u est semi-intégral droite, le composé $E \longrightarrow L^{\infty}$ est intégral, donc l'application correspondante $E \longrightarrow L^{2}$ est même nucléaire (th. 10, 1°) d'où résulte enfin que vu est nucléaire.

Enfin, ces raisonnements donnent aussi immédiatement les inégalités sur les normes affirmées dans l'énoncé du théorème 14.

§ 5. LES PROBLÈMES ET LES PROPRIÉTÉS D'APPROXIMATION

1. Le problème d'approximation large.

Ce § est consacré au "Problème de biunivocité" signalé au §1, n° 1, et quelques problèmes étroitement liés à celui-ci, problème qui réapparaissent continuellement dans tout ce travail (et qui, pour n'avoir pas été mentionnés dans [21] , ne s'en trouvent pas moins évidemment à l'origine des questions que se pose R. Schatten dans le Chapitre 3 de son livre). Les réflexions qui suivent montrent de façon précise comment ces problèmes peuvent se ramener à deux conjectures (dont l'une d'ailleurs implique l'autre). Si l'un de ces problèmes se trouvait résolu par la négative, on aura du même coup une réponse négative à des questions intéressantes d'aspect assez divers ; mais nos réflexions donneront encore des résultats effectifs pour chaque espace vectoriel ou chaque couple de deux espaces vectoriels, en particulier des critères permettant d'affirmer que les conjectures envisagées sont du moins vraies dans tels ou tels cas assez étendus.- Dans les deux premiers numéros, nous examinons séparément les deux conjectures en question. Dans le n° 3, nous traitons, à titre d'exemple, divers cas particuliers empruntés à des situations classiques de l'Analyse. Pour simplifier, nous mettrons dans tout ceci l'accent principal sur les espaces de Banach.

PROPOSITION 35. - Soit E un espace localement convexe. Les hypothèses suivantes sur E sont équivalentes :

(A) ("Condition d'approximation") L'application identique de E dans E est adhérente à $E' \otimes E$ dans $L_c(E,E)$, i.e. pour toute partie précompacte $K \subset E$, et tout voisinage V de 0 dans E, existe un endomorphisme continu u de rang fini de E tel que $ux - x \in V$ pour tout $x \in K$.

(A_1) $E' \otimes E$ est dense dans $L_c(E,E)$, i.e. toute application linéaire continue de E dans E peut s'approcher uniformément sur toute partie précompacte par des applications linéaires continues de rang fini.

(A_2) Pour tout espace localement convexe F, $E' \otimes F$ est dense dans $L_c(E,F)$

(A_3) Pour tout espace localement convexe F, $F' \otimes E$ est dense dans $L_c(F,E)$.

Si E est un espace de Banach, ces conditions équivalent aux conditions suivantes :

(A_4) Pour tout espace de Banach F, $F \hat{\otimes} E$ s'identifie à l'espace des applications linéaires compactes et faiblement continues de F' dans E.

(A_5) Pour tout espace de Banach F, toute application linéaire compacte u de F dans E est adhérente à $F' \otimes E$ dans l'espace normé $L(F,E)$.

(B) ("Condition de biunivocité") Toute $u \in E' \hat{\otimes} E$ dont l'image canonique dans $L(E,E)$ est nulle a une trace nulle.

(B_1) L'application linéaire canonique de $E' \hat{\otimes} E$ dans $L(E,E)$ est biunivoque.

(B_2) Quel que soit l'espace de Banach F, l'application linéaire canonique de $F \hat{\otimes} E$ dans $B(F',E')$ est biunivoque.

Démonstration. - Evidemment (A_2) et (A_3) impliquent chacun (A_1), qui implique lui-même (A). Montrons que (A) implique à son tour (A_2) et (A_3). Prouvons le par exemple pour (A_3), soit donc u une application linéaire continue de F dans E, K une partie précompacte de F, V un voisinage de 0 dans E, il faut trouver une application linéaire continue de rang fini v de F dans E telle que $vy - uy \in V$ pour tout $y \in K$. On prendra $v = wu$ où

$w \in E' \otimes E$ est telle que $wx - x \in V$ pour $x \in u(K)$; une telle w existe en vertu de l'hypothèse (A), $u(K)$ étant précompact, et $v = wu$ satisfait à la condition voulue. On prouve de façon toute analogue que (A) implique (A'_3).

Supposons maintenant pour simplifier que E soit un espace de Banach, bien que les démonstrations qui suivent sont en fait bien plus générales. Il est évident que (A) implique (A_4), i.e. que pour tout espace de Banach F, toute application linéaire compacte et faiblement continue de F' dans E est adhérente à $F \otimes E$ dans l'espace normé $L(F,E)$: il suffit de procéder comme dans la démonstration de (A) $\longrightarrow$ (A_3). (A_4) implique (A_5) : si en effet u est une application linéaire compacte de F dans E, u se prolonge en une application linéaire compacte et faiblement continue de F" dans E, et il suffit alors d'appliquer (A_4) à F'. Prouvons maintenant que (A_5) implique (A), ce qui prouvera l'équivalence des conditions (A), (A_1)....(A_5). Soit donc K_0 une partie compacte, et $\varepsilon > 0$, on cherche un $v \in E' \otimes E$ tel que $\|vx - x\| \leq \varepsilon$ pour $x \in K_0$. Soit K une partie compacte convexe cerclée telle que K_0 soit compacte dans E_K (lemme 12), soit u l'application identique de E_K dans E. En vertu de (A_5), u est adhérente à $E_K' \otimes E$ dans l'espace normé $L(E_K,E)$, et à fortiori pour la topologie de la convergence compacte. Or l'image ${}^t u(E')$ de E' par le transposé ${}^t u$ est faiblement dense dans le dual de E_K (car u est biunivoque), donc dense pour la topologie de la convergence compacte, d'où suit que ${}^t u(E') \otimes E$ est dense dans $E_K' \otimes E$ pour la topologie induite par $L_c(E_K,E)$, donc dense dans $L_c(E_K,E)$. Or, les éléments de ${}^t u(E') \otimes E$ sont les applications de la forme vu, où $v \in E' \otimes E$. Il existe donc un $v \in E' \otimes E$ tel que $\|vux - ux\| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in K_0$, i.e. $\|vx - x\| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in K_0$, ce que nous voulions trouver.

(A) signifie aussi que toute forme linéaire continue sur $L_c(E,E)$ qui s'annule sur $E' \otimes E$ s'annule sur l'identité $1 \in L_c(E,E)$. Mais en vertu de la proposition 22, le dual de $L_c(E,E)$ s'identifie à un espace quotient de $E \hat{\otimes} E'$, et dire qu'une $u \in E \otimes E'$ définit une forme linéaire s'annulant sur

$E' \otimes E$ (resp. sur 1) signifie que u définit un endomorphisme de E nul (resp. que la trace de u est nulle), d'où l'équivalence des conditions (A) et (B). D'autre part, il est trivial que (B_2) implique (B_1) et que (B_1) implique (B), il reste à prouver que (B) implique (B_2). Soit donc $u \in E \hat{\otimes} F$ tel que l'application $\tilde{u}$ de E' dans F qu'elle définit soit nulle, prouvons que $u = 0$, i.e. que $\langle u, A\rangle = 0$ pour tout $A \in B(E,F)$. Désignons par ${}^tA$ l'application linéaire de F dans E' définie par A, on a $\langle u, A\rangle = \mathrm{Tr}.v$, où $v = (1 \otimes {}^tA).u \in E \hat{\otimes} E'$. En vertu de la condition (B), il suffit donc de prouver que l'élément $\tilde{v} \in L(E,E)$ défini par v est nul. Or, on a évidemment $\tilde{v} = {}^t\tilde{u}\, A$ (où A est considéré comme une application de E dans F'), d'où résulte bien $\tilde{v} = 0$.

DÉFINITION 9. - <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe</u>. <u>On dit que</u> E <u>satisfait à la condition d'approximation</u>, <u>si la condition</u> (A) <u>de la prop</u>. 35 (<u>ou l'une des conditions équivalentes</u>) <u>est vérifiée</u>.

PROPOSITION 36. - <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach</u>.

1. <u>Si</u> E' <u>satisfait à la condition d'approximation</u>, E <u>y satisfait aussi</u>.

2. <u>Pour que</u> E' <u>satisfasse à la condition d'approximation</u>, <u>il faut et il suffit que</u> E <u>satisfasse à la condition suivante</u> :

(A') <u>Pour tout espace de Banach</u> F, <u>toute application linéaire compacte de</u> E <u>dans</u> F <u>est adhérente à</u> $E' \otimes F$ <u>dans l'espace normé</u> L(E,F).

Démonstration. - 1. est facile quand on prend la condition d'approximation sous la forme de la condition (B_1) de la prop. 35. En effet, l'application linéaire canonique de $E' \hat{\otimes} E$ dans $E' \hat{\otimes} E''$ est biunivoque (prop. 4, corollaire 3), et si $u \in E' \hat{\otimes} E$, et qu'on désigne par $\tilde{u}$ l'opérateur dans E qu'il définit, par v l'image canonique de u dans $E' \hat{\otimes} E''$, ${}^t\tilde{u}$ est manifestement égal à l'opérateur dans E' défini par l'élément de $E'' \hat{\otimes} E'$ qui correspond à $v \in E' \hat{\otimes} E''$. Si donc $\tilde{u}$, donc ${}^t\tilde{u}$, est nul, v est nul puisque E' satisfait à la condition (B_1), d'où $u = 0$, ce qui prouve que E satisfait à

(B_1).

2. Supposons que $G = E'$ satisfasse à la condition d'approximation, soit u une application linéaire compacte de E dans l'espace de Banach F, il faut prouver que u est adhérente à $E' \otimes F$ au sens de la norme, ou ce qui revient au même, que l'application linéaire compacte et faiblement continue ${}^t u$ de F' dans $G = E'$ est adhérente à $F \otimes G$ au sens de la norme. Or, ceci n'est autre que la condition (A_3) de la prop. 35.- Inversement, supposons que E satisfasse à la condition (A'), prouvons que E' satisfait à la condition d'approximation sous la forme de la condition (A_5) de la prop. 35. Soit u une application linéaire compacte de l'espace de Banach F dans E', il faut montrer que u est adhérente au sens de la norme à $F' \otimes E'$, ou, ce qui revient au même, que ${}^t u$, considéré comme une application linéaire compacte de E dans F', est adhérente à $E' \otimes F'$ au sens de la norme. Cela est bien vrai en effet en vertu de la condition (A').

COROLLAIRE des prop. 35 et 36. - Soient E et F deux espaces localement convexes, que pour simplifier nous supposons être des espaces de Banach dans 2., 3., 4.

1. Pour que toute application linéaire continue de E dans F soit limite, pour la topologie de la convergence précompacte, d'applications linéaires continues de rang fini, il suffit que E ou F satisfasse à la condition d'approximation.

2. Pour que toute application linéaire compacte de E dans F soit limite dans l'espace normé L(E,F) d'applications linéaires continues de rang fini, il suffit que F ou E' satisfasse à la condition d'approximation

3. Pour que l'application naturelle de $E \hat{\otimes} F$ dans B(E',F') soit biunivoque, il suffit que E ou F satisfasse à la condition d'approximation.

4. Pour que $E \hat{\hat{\otimes}} F$ soit identique à l'espace des applications linéaires compactes et faiblement continues de E' dans F, il suffit que E ou F satisfasse à la condition d'approximation.

Ce corollaire est immédiat.

Le lemme qui suit permet souvent, dans les questions qui précèdent, de se ramener aux espaces de Banach :

LEMME 19. - Soit E un espace localement convexe ayant un système fondamental (V_i) de voisinage convexes cerclés de 0 tels que les espaces $\widehat{E_{V_i}}$ satisfassent à la condition d'approximation. Alors E satisfait à la condition d'approximation. Si E est complet et si F est un espace localement convexe complet quelconque, alors l'application linéaire naturelle de $E \hat{\otimes} F$ dans $\mathcal{B}(E'_s, F'_s)$ est biunivoque.

Démonstration. - Soit K une partie précompacte de E, montrons que pour tout V_i, existe un $u \in E' \otimes E$ tel que $(u - 1)(K) \subset V_i$. Comme $\widehat{E_{V_i}} = F$ satisfait à la condition d'approximation, $F' \otimes F$ est dense dans L(F,F) pour la topologie de la convergence compacte. Soit F_0 l'image de E par l'application canonique φ de E dans F, F_0 est dense dans F, d'où résulte aussitôt que $F' \otimes F_0$ est dense dans $L_c(F,F)$. Les $v \in F' \otimes F_0$ sont d'ailleurs les opérateurs de la forme φw, où $w \in F' \otimes E$. Comme $\varphi(K)$ est une partie précompacte de F, il existe un $v \in F' \otimes F_0$ tel que $(v - 1)\varphi(K) \subset \overline{\varphi(V_i)}$. On a $v = \varphi w$, où $w \in F' \otimes E$, posons $u = w\varphi$. Alors u satisfait à la condition voulue $(u - 1)(K) \subset V_i$, soit $\varphi(u - 1)(K) \subset \overline{\varphi(V_i)}$, car on a bien $(v - 1)\varphi(K) \subset \overline{\varphi(V_i)}$.

Supposons maintenant E complet, F un espace localement convexe complet quelconque, montrons que l'application naturelle de $E \otimes F$ dans $\mathcal{B}(E'_s, F'_s)$ est biunivoque. Cela signifie aussi que $E' \otimes F'$ est dense dans B(E,F) pour la topologie faible définie par $E \hat{\otimes} F$. Soit donc $u \in B(E,F)$, u provient d'une forme bilinéaire continue sur un espace $\widehat{E_{V_i}} \times \widehat{F_W}$, où W est un voisinage convexe cerclé de 0 dans F, et il est immédiat de prouver que cette dernière forme est adhérente à $E_1' \otimes F_1'$ dans l'espace $B(E_1, F_1)$ pour la topologie faible définie par $E_1 \hat{\otimes} F_1$ (où on pose $E_1 = \widehat{E_{V_i}}$, $F_1 = \widehat{F_W}$) ; or cela résulte en effet de ce que E_1 satisfait à la condition d'approximation, mise sous la forme de la condition (B_1).

COROLLAIRE. - _Soit_ E _un espace localement convexe, isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique du produit vectoriel-topologique d'une famille d'espace de Hilbert. Alors_ E _satisfait à la condition d'approximation, et si_ E _est complet, pour tout espace localement convexe complet_ F, _l'application naturelle de_ $E \hat{\otimes} F$ _dans_ $\mathcal{L}(E'_s, F'_s)$ _est biunivoque_.

Il est en effet immédiat que E admet alors un système fondamental (V_i) de voisinages convexes cerclés de 0 tels que les espaces $\widehat{E_{V_i}}$ soient des espaces de Hilbert, de sorte que le lemme 19 s'applique.

"PROPOSITION" 37. - _Toutes les conjectures qui suivent sont équivalentes_.

(a) _Pour tout couple_ (E,F) _de deux espaces localement convexes complets l'application linéaire naturelle de_ $E \hat{\otimes} F$ _dans_ $\mathcal{L}(E'_s, F'_s)$ _est biunivoque_.

(b) _Pour tout couple_ (E,F) _de deux espaces localement convexes_, $E' \otimes F'$ _est dense dans_ B(E,F) _pour la topologie faible définie par_ $E \hat{\otimes} F$.

(c) _Tout espace localement convexe_ E _satisfait à la condition d'approximation_. (Définition 9).

(d) _Pour tout couple_ (E,F) _de deux espaces localement convexes_ E, F, _et tout ensemble_ $\mathfrak{S}$ _de parties bornées de_ E, _toute application linéaire continue de_ E _dans_ F _transformant les_ $A \in \mathfrak{S}$ _en des parties précompactes de_ F, _est limite pour la_ $\mathfrak{S}$_-convergence d'applications linéaires continues de rang fini_ [22].

(e) _Pour tout espace localement convexe_ E, _et tout noyau de Fredholm_

22. La réciproque est incluse dans le lemme 2 du § 1, n° 1.

u dans $E' \bar{\otimes} E$ (§ 3, n° 2, définition 4) définissant un opérateur de Fredholm $\tilde{u}$ nul, on a $\mathrm{Tr}.u = 0$.

(f) Pour tout espace compact X muni d'une mesure μ, et toute fonction continue $K(x,y)$ sur $X \times X$ telle que $K \circ K = 0$ (où le premier membre est le produit de composition de Volterra) on a Trace $K = 0$ (où on pose Trace $K = \int K(x,x)d\mu(x)$).

(g) Pour tout couple de deux espaces compacts X et Y, et toute fonction continue $f(x,y)$ sur $E \times F$, f est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions de la forme $(x,y) \to f(x,b)f(a,y)$ (où $a \in X$, $b \in Y$).

On obtient des conjectures (a'), (b'), (c'), (e') (resp. (a"), (b"), (c"), (e"), équivalentes aux précédentes en astreignant les espaces E, F envisagés à être des espaces de Banach (resp. en astreignant E à être isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de l'espace c_0, et F à être son dual). On obtient encore une conjecture $(f^1_{X,\mu})$ équivalente en supposant dans l'énoncé de (f) que X et μ ont été fixés une fois pour toutes pourvu que μ ne soit pas la somme d'une suite de masses ponctuelles ; et une conjecture équivalente $(g^1_{X,Y})$ en supposant dans l'énoncé de (g) que X et Y ont été fixés une fois pour toutes, pourvu que X et Y soient infinis. Enfin, les variantes suivantes des énoncés (f) et (g) définissent encore des conjectures équivalentes aux précédentes :

(f") Pour tout $u \in \ell^1 \otimes c_0$, $u^2 = 0$ implique $\mathrm{Tr}.u = 0$.

(g") Pour toute suite double (a_{ij}) qui tend vers zéro à l'infini [23] (a_{ij}) est limite uniforme de suites doubles, combinaisons linéaires de suites doubles du type $(a_{i\alpha}a_{\beta j})$ (α et β étant des indices arbitraires).

Démonstration. - Il est immédiat que, pour tout couple donné de deux espaces localement convexes E, F, les conjectures (a) et (b) sont équi-

---

23. Nous dirons de façon générale qu'une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ de nombres complexes, définie sur un ensemble discret A d'indices, tend vers une limite "à l'infini", si elle tend vers cette limite suivant le filtre des

valentes, d'où aussitôt les équivalences (a)$\Longleftrightarrow$(b), (a')$\Longleftrightarrow$(b'), (a")$\Longleftrightarrow$(b"). D'autre part, on a (b')$\Longrightarrow$(b) comme on voit aussitôt, en considérant pour tout $u \in B(E,F)$ un voisinage convexe cerclé U (resp. V) de 0 dans E (resp. F) tels que $|u(x,y)| \leq 1$ pour tout $x \in U$, $y \in V$, et en appliquant la conjecture (b') au couple $(\widehat{E_U}, \widehat{F_V})$. Donc (a), (b), (a'), (b') sont équivalentes. D'autre part, en vertu de la prop. 35, on voit que les conjectures (a'), (b'), (c'), (e'), d'une part, et les conjectures (a"), (b"), (c"), (e") d'autre part, sont équivalentes entre elles, désignons les respectivement par (A') et (A"). Nous avons vu que (a) et (b) sont aussi équivalentes à (A'), montrons qu'il en est de même de (c) et (d). (d) implique évidemment (c) en vertu de la définition 9, mais (c) implique (d), comme on voit par le même raisonnement immédiat qui a prouvé que (A) implique (A_3) dans la prop. 35. Comme (c) implique (c') = (A'), il suffit de prouver que (c') implique (c), ce qui est en effet contenu dans le lemme 19.

Nous prouvons maintenant les implications (e")$\Longrightarrow$(f")$\Longrightarrow$(e). Cela prouvera, puisque (e)$\Longrightarrow$(e')$\Longrightarrow$(e"), que les conditions (e), (e'), (e"), (f") sont équivalentes, donc aussi équivalentes à (A') = (e') et à (A") = (e"). Si alors nous désignons par (A) cette conjecture, (A) sera équivalente à chacune des conjectures (a), (b), (c), (d), (e), et leurs variantes (a'), (a") ..., ainsi qu'à (f").

(f") implique (e). Soit $u = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes x_i$ un noyau de Fredholm dans $E' \overline{\otimes} E$ (E espace localement convexe), tel que l'opérateur $\tilde{u}$ qu'il définit soit nul, où (x_i) est une suite bornée dans E, (x'_i) une suite équicontinue de E' tendant vers 0, enfin $(\lambda_i) \in \ell^1$. Posons $a_i(j) = \lambda_i \langle x_i, x'_j \rangle$, alors pour i fixé, soit a_i la suite $j \to a_i(j)$, on a $a_i \in c_0$ et la suite des a_i est une suite absolument sommable dans c_0, et s'identifie donc à

---

complémentaires des parties finies de A.

un élément de $\ell^1 \hat{\otimes} c_0$, soit v. Si $\tilde{u} = 0$, on a en particulier $\langle ux_\alpha, x'_\beta\rangle = 0$ pour tout couple d'indices α, β, d'où en multipliant cette relation par λ_α et explicitant : $\sum_i a_\alpha(i)a_i(\beta) = 0$ pour tout α, β, i.e. $v^2 = 0$. D'après la conjecture (f''), il s'ensuit Tr.v = 0, or Tr.v = $\sum a_i(i) = \sum \lambda_i \langle x_i, x'_i\rangle$, d'où Tr.u = 0.

(e'') implique (f''). Soit $v = (a_{ij})$ une matrice infinie s'identifiant à un élément de $\ell^1 \hat{\otimes} c_0$, i.e. à un opérateur de Fredholm dans c_0; supposons $v^2 = 0$, nous voulons prouver Tr.v = 0. Soit E le sous-espace vectoriel fermé de c_0 engendré par l'image de c_0 par v, où encore par les $a_i = (a_{ij})_{j \geqslant 0} \in c_0$. Soit e'_i la restriction à E de la i.ème forme coordonnée sur c_0, considérons l'élément de $E' \hat{\otimes} E$ donné par $u = \sum_i e'_i \otimes a_i$. L'opérateur dans E qu'il définit n'est autre que la restriction de v à E, donc est nul puisque $v^2 = 0$. La conjecture (e'') donne donc Tr.u = 0, or Tr.u = $\sum_i \langle a_i, e'_i\rangle = \sum_i a_{ii} =$ Tr.v, d'où bien Tr.v = 0.

Nous allons maintenant prouver les implications

(g'')$\Longrightarrow$(f'')$\Longrightarrow$(A)$\Longrightarrow$(g)$\Longrightarrow$(f), ($f^1_{X,\mu}$)$\Longrightarrow$(f''), et ($g^1_{X,Y}$)$\Longrightarrow$ (g''). Comme on a évidemment (f)$\Longrightarrow$($f^1_{X,\mu}$) et (g)$\Longrightarrow$($g^1_{X,Y}$), il suivra aussitôt que toutes les conjectures (f), ($f^1_{X,\mu}$), (f''), (g), ($g^1_{X,Y}$), (g''), (A) sont équivalentes, et la prop. 37 sera prouvée. On sait déjà que (f'')$\Longrightarrow$(A) (et même que ces deux conjectures sont équivalentes).

(g'')$\Longrightarrow$(f'') et (g)$\Longrightarrow$(f). Prouvons p. ex. (g)$\Longrightarrow$(f), l'autre implication se prouve de façon identique. Soit K(x,y) une fonction continue sur $X \times X$ telle que $K \circ K = 0$, i.e. telle que $\int K(x,\xi)K(\xi,y)d\mu(\xi) = 0$ pour tout $(x,y) \in X \times X$, prouvons que Trace K = 0, i.e. $\int K(\xi,\xi)d\mu(\xi) = 0$. En effet, en vertu de (g), la fonction K(x,y) est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions $K_{a,b}(x,y) = K(x,b)K(a,y)$, et pour chacune de ces fonctions on a $\int K_{a,b}(\xi,\xi)d\mu(\xi) = 0$ par hypothèse, d'où la conclusion.

($g^1_{X,Y}$)$\Longrightarrow$ (g''). Soit (U_i) une suite infinie d'ouverts non vides disjoints deux à deux dans X, et soit, pour tout i, φ_i une fonction continue positive et $\leqslant 1$ sur X, ayant son support dans U_i, et s_i un élément de U_i, tels que $\varphi_i(s_i) = 1$. Soient (V_j) (ψ_j), (t_j) des données analogues relatives à Y. Soit enfin (a_{ij}) une suite double tendant vers 0 à l'infini, nous voulons démontrer pour cette suite la conjecture (g").

$\sum_{ij} a_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y)$ est une série convergente en chaque point $(x,y) \in X \times Y$ (car tous ses termes sauf un au plus sont nuls pour un (x,y) donné), et sa somme f(x,y) est évidemment une fonction continue de (x,y) (grâce au fait que (a_{ij}) tend vers 0 à l'infini). Soit $\varepsilon > 0$; par hypothèse, il existe des $a_\alpha \in X$, $b_\alpha \in Y$, et des scalaires λ_α $(1 \leqslant \alpha \leqslant n)$ tels que

$|f(x,y) - \sum_\alpha \lambda_\alpha f(x,b_\alpha) f(a_\alpha,y)| \leqslant \varepsilon$ pour tout x,y. On peut supposer que chaque a_α est dans un ouvert $U_{i(\alpha)}$, chaque b_α dans un ouvert $V_{j(\alpha)}$ (autrement le terme correspondant de la somme ci-dessus serait nul). Faisons $x = s_i$, $y = t_j$, alors

$$f(a_\alpha,t_j) = a_{i(\alpha),j}\varphi_{i(\alpha)}(a_\alpha)\psi_j(t_j)$$

$$f(s_i,b_\alpha) = a_{i,j(\alpha)}\varphi_i(s_i)\psi_{j(\alpha)}(b_\alpha)$$

d'où, comme $\varphi_i(s_i) = \psi_j(t_j) = 1$, $f(s_i,t_j) = a_{ij}$:

$$|a_{ij} - \sum_\alpha \mu_\alpha a_{i,j(\alpha)} a_{i(\alpha),j}| \leqslant \varepsilon$$

où on pose $\mu_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_{i(\alpha)}(a_\alpha)\psi_{j(\alpha)}(b_\alpha)$. Il en résulte bien que la suite double se laisse approcher uniformément par ces combinaisons linéaires de suites doubles de la forme $a_{i,j(\alpha)}a_{i(\alpha),j}$.

$(f_{X,\mu}) \Longrightarrow (f")$. Considérons un $u \in \ell^1 \hat{\otimes} c_0$ tel que $u^2 = 0$, on peut le représenter par une matrice $(\lambda_i a_{ij})$, où $(\lambda_i) \in \ell^1$ et où a_{ij} tend vers zéro quand (i,j) tend vers l'infini ; $u^2 = 0$ signifie que

$\sum_\alpha \lambda_\alpha a_{i\alpha} a_{\alpha j} = 0$ pour tout (i,j) (à condition de supposer $\lambda_i > 0$ pour tout i, ce qui est possible). Nous voulons prouver que $\mathrm{Tr}.u = \sum_\alpha \lambda_\alpha a_{\alpha\alpha}$ est nul. Posons $\mu = \mu_0 + \nu$, où μ_0 est la somme d'une suite de masses discrètes, et où tout point de X est de mesure nulle pour ν. On a $\nu \neq 0$, et on peut même supposer que $\int d\nu = 1$, et $\sum_\alpha \lambda_\alpha < 1$. Nous admettrons comme connu qu'il existe alors une suite d'ouverts $U_i \subset X$, disjoints deux à deux, tels que $\nu(U_i) > \lambda_i$ pour tout i (la démonstration dans le cas général ne relève que d'une technique très élémentaire, et d'ailleurs dans les cas usuels notre assertion est triviale). A fortiori on aura $\mu(U_i) > \lambda_i$ pour tout i. Soit, pour tout i, f_i une fonction positive ≤ 1 sur X, ayant un support contenu dans U_i, et telle que $\int f_i d\mu = \lambda_i$; posons $\varphi_i = \sqrt{f_i}$, et $f(s,t) = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi_i(s)\varphi_j(t)$, f est manifestement une fonction continue sur $X \times X$, et son itérée $f^{(2)}(s,t)$ est égale, comme on voit aussitôt, à $\sum_{i\,j} b_{ij}\varphi_i(s)\varphi_j(t)$, où $b_{ij} = \sum a_{i\alpha}\, a_{\alpha j} \int \varphi_\alpha^2(\xi)d\mu(\xi) = \sum_\alpha \lambda_\alpha a_{i\alpha}a_{\alpha j} = 0$, d'où $f^{(2)} = 0$. Par hypothèse on peut en conclure $\int f(\xi,\xi)d\mu(\xi) = 0$, ce qui s'écrit aussi $\sum \lambda_\alpha a_{\alpha\alpha} = 0$, c.q.f.d.

(A)$\Longrightarrow$(g). Nous prendrons (A) sous la forme de la conjecture (c). Avec les notations de l'énoncé (g), f définit une application continue $s \longrightarrow \tilde{s}$ de X dans l'espace $\mathcal{C}(Y)$ des fonctions continues sur Y, donnée par $\tilde{s}(t) = f(s,t)$. Soit E le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}(Y)$ engendré par les $\tilde{s}$, soit K l'image de X par $s \longrightarrow \tilde{s}$. C'est une partie compacte de E, donc en vertu de la conjecture (c), il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $u \in E' \otimes E$ tel que $\|ux - x\| \leq \varepsilon$ pour $x \in K$. On peut même supposer $u \in E'_0 \otimes E$, où E'_0 est le sous-espace vectoriel de E' engendré par les images naturelles $\tilde{t}$ des $t \in Y$ dans E' ($\tilde{t}$ est la restriction à E de la forme linéaire continue $\varphi \longrightarrow \varphi(t)$ sur $\mathcal{C}(Y)$), car E'_0 est faiblement dense dans E', donc dense pour la topologie de la convergence compacte. On aura donc $u = \sum_{1 \leq \alpha \leq n} \lambda_\alpha \tilde{t}_\alpha \otimes \tilde{s}_\alpha$, d'où pour $s \in X$, $t \in Y$: $|\langle u\tilde{s}, \tilde{t}\rangle - \langle \tilde{s}, \tilde{t}\rangle| \leq \varepsilon$ soit

$$\left|\sum_\alpha \lambda_\alpha \langle \tilde{s}, \tilde{t}_\alpha\rangle \langle \tilde{s}_\alpha, \tilde{t}\rangle - \langle \tilde{s}, \tilde{t}\rangle\right| < \varepsilon, \text{ ou enfin}$$

$$\left|\sum_\alpha \lambda_\alpha f(s,t_\alpha) f(s_\alpha,t) - f(s,t)\right| \leq \varepsilon.$$

ε étant arbitraire, la démonstration est ainsi achevée.

Remarque 14. – La question de la validité de la conjecture (f") (la plus faible de toutes en apparence, et aussi la plus "concrète"), devrait être abordable. Signalons que si $A = (a_{ij}) \in \ell^1 \hat{\otimes} c_0$, et si on pose $\lambda_i = \sup_j |a_{ij}|$ (donc $(\lambda_i) \in \ell^1$), alors la conjecture (f") est valable chaque fois que $\sum_i \lambda_i^{2/3} < +\infty$ (i.e. si alors $A^2 = 0$, on aura Tr. $A = 0$). Par le raisonnement qui a prouvé que (e") implique (f"), on se ramène à prouver ce qui suit : Soient E et F deux espaces localement convexes, u un noyau de Fredholm dans $E \overline{\otimes} F$ de la forme $u = \sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$, où $(\lambda_i) \in \ell^{2/3}$, et où (x_i) (resp. (y_i)) est une suite extraite d'une partie bornée convexe cerclée A (resp. B) de E (resp. F) telle que E_A (resp. F_B) soit complet. Si alors l'opérateur de Fredholm de E' dans F défini par u est nul, u est nul. Or, ce dernier énoncé n'est autre que le corollaire 3 du th. 4, Chap. 2, § 1.

Notons encore qu'il n'est pas difficile, en utilisant les résultats du chap. 2, § 1, de prouver que la conjecture (g) est vérifiée chaque fois que X est un cube de $\mathbb{R}^n$ et que $f(x,y)$ est un nombre suffisant de fois continûment différentiable par rapport à x, les dérivées étant continues en x,y (l'ordre de différentiabilité nécessaire dépendant de n).

Remarque 15. – On peut se demander si la conjecture (f") implique que pour tout espace localement convexe E, et tout noyau de Fredholm $u \in E' \overline{\otimes} E$, définissant un opérateur de Fredholm $\tilde{u}$, $\tilde{u}^2 = 0$ implique encore Tr.$\tilde{u} = 0$? (En vertu de la formulation équivalente (f), c'est du moins vrai si u est un opérateur intégral défini par un noyau continu). De façon générale, de $\tilde{u}^k = 0$ pourra-t-on conclure Tr.$\tilde{u} = 0$ comme dans le cas de la dimension finie ? En reprenant la démonstration des implications (f")$\Longrightarrow$(e) et (e") $\Longrightarrow$ (f"), il n'est pas difficile de voir que cette dernière conjecture équivaut exactement à la suivante : Si u est un opérateur de Fredholm dans c_0, $u^{k+1} = 0$ implique-t-il Tr.u = 0 ? Je ne sais pas ramener ce problème à la conjecture (f"). Mais signalons dans cet ordre d'idées le résultat suivant :

PROPOSITION 38. - <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach complexe, et soit</u> $u \in E' \hat{\otimes} E$, <u>soit</u> $\tilde{u}$ <u>l'opérateur défini par</u> u. <u>Les conditions suivantes sur</u> u <u>sont équivalentes</u> :

a. u <u>est topologiquement nilpotent dans l'algèbre normée complète</u> $E' \hat{\otimes} E$, i.e. <u>on a</u> $\lim_n (\|u^n\|_1)^{1/n} = 0$

b. $\tilde{u}$ <u>est topologiquement nilpotent dans l'algèbre normée complète</u> L(E,E).

c. <u>Il n'existe pas de</u> $x \in E$ <u>et de scalaire</u> λ <u>non nuls tels que</u> $\tilde{u}x = \lambda x$.

d. $Tr.u^n = 0$ <u>pour tout entier</u> $n \geqslant 2$.

Démonstration. - Notons d'abord que $E' \hat{\otimes} E$ est bien muni d'une structure d'algèbre normée complète naturelle. D'après la théorie générale des algèbres normées [30], un élément d'une algèbre normée complète est topologiquement nilpotent si et seulement si son <u>spectre</u> [24] est réduit à zéro. Or, le spectre de u dans $E' \hat{\otimes} E$ et celui de $\tilde{u}$ dans L(E,E) sont les mêmes ([11], chap. 1, prop. 6), de sorte que a. et b. sont équivalents. D'après la théorie de Riesz, c. est équivalent au fait que le spectre de $\tilde{u}$ dans L(E,E) est réduit à zéro, i.e. à b. Enfin c. équivaut à d. en vertu du corollaire 5 du th. 4, Chap. 2, § 1. Ce même corollaire donne une condi-

24. Rappelons que le <u>spectre</u> d'un élément x d'une algèbre avec unité $\mathcal{A}$ est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $u - \lambda 1$ ne soit pas inversible. Si $\mathcal{A}$ n'a pas d'unité, on considère l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ obtenue par "adjonction d'une unité", et par définition le spectre de u dans $\mathcal{A}$ est le spectre

tion assez générale pour que les conditions précédentes impliquent $\mathrm{Tr}.u = 0$ (il suffit que u soit un "noyau de puissance 2/3 sommable"). Il n'est pas exclu que dans tous les cas, on ait $\mathrm{Tr}.u = 0$ si u est topologiquement nilpotent.

2. Le Problème d'approximation métrique.

LEMME 20. - *Soient E et F deux espaces de Banach. Considérons, sur L(E,F) la topologie T_0 induite par $L_s(E,F_s)$; la topologie T'_0 de la convergence simple ; la topologie T de la convergence compacte ; la topologie T' induite par $L_{\mathfrak{S}}(E,F_c)$, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties faiblement compactes de E, et où F_c désigne l'espace F muni de la topologie de la convergence compacte du dual de F' ; enfin la topologie T_1 borne supérieure de T et T'. Soit A une partie bornée convexe de L(E,F). Alors les adhérences de A pour toutes ces topologies sont identiques.*

Démonstration. - On a évidemment $T_0 \leqslant T'_0 \leqslant T$, $T' \leqslant T_1$, il suffit de prouver que l'adhérence de A pour T_0 est identique à son adhérence pour T_1. Or, il est bien connu et immédiat par application du théorème de Hahn-Banach, que T_0 et T'_0 donnent le même dual pour L(E,F) (savoir $E \otimes F'$) de sorte que, A étant *convexe*, son adhérence pour T_0 et T'_0 est la même. D'autre part, A étant un ensemble *équicontinu* d'applications de E dans F, son adhérence pour T'_0 est identique à son adhérence pour T. Enfin, T, T', T_1 donnent de nouveau le même dual pour L(E,F), savoir $E \hat{\otimes} F'$ (voir § 4, th. 7) de sorte que, A étant *convexe*, son adhérence pour ces topologies est la même.

DÉFINITION 10. - *Soit E un espace de Banach. On dit que E satisfait à la condition d'approximation métrique, s'il satisfait à la condition :*

($\mathfrak{A}$) *L'application identique de E dans lui-même est adhérente dans L(E,E) à l'ensemble B_0 des endomorphismes de rang fini et de norme $\leqslant 1$ de*

---

de u dans $\hat{\mathfrak{A}}$.

E, pour la topologie T de la convergence compacte (ou aussi pour l'une quelconque des topologies mentionnées dans le lemme 20).

Bien entendu, cette condition implique la condition d'approximation (définition 9).

PROPOSITION 39. - Soit E un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes.

($\mathcal{A}$) E satisfait à la condition d'approximation métrique.

($\mathcal{A}_1$) La boule unité de L(E,E) est l'adhérence, pour la topologie de la convergence compacte, de l'ensemble des opérateurs de rang fini qu'elle contient.

($\mathcal{A}_2$) Pour tout espace de Banach F, la boule unité de L(E,F) est l'adhérence, pour la topologie de la convergence compacte, de l'ensemble des opérateurs de rang fini qu'elle contient.

($\mathcal{A}_3$) Pour tout espace de Banach F, la boule unité de L(F,E) est l'adhérence, pour la topologie de la convergence compacte, de l'ensemble des opérateurs de rang fini qu'elle contient.

($\mathcal{B}_1$) L'application linéaire canonique de $E \hat{\otimes} E'$ dans l'espace J(E',E) des formes bilinéaires intégrales sur $E' \times E$ est un isomorphisme normé du premier espace dans le second.

($\mathcal{B}_2$) Pour tout espace de Banach F, l'application linéaire canonique de $E \hat{\otimes} F$ dans l'espace J(E',F') des formes bilinéaires intégrales sur $E' \times F'$ est un isomorphisme normé du premier espace dans le second.

Bien entendu, dans l'énoncé de ($\mathcal{A}_1$), ($\mathcal{A}_2$), ($\mathcal{A}_3$), on peut remplacer la topologie de la convergence compacte par n'importe laquelle des topologies mentionnées dans le lemme 20.

Démonstration de la prop. 39. - Il est évident que ($\mathcal{A}_2$) et ($\mathcal{A}_3$) impliquent chacun ($\mathcal{A}_1$), qui implique ($\mathcal{A}$). D'autre part, la preuve que ($\mathcal{A}$) à son tour implique ($\mathcal{A}_1$) et ($\mathcal{A}_2$) est immédiate (voir la partie correspondante de la démonstration de la prop. 35), donc les quatre conditions $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_3)$ sont équivalentes.

Soit maintenant F un autre espace de Banach. Sur $E \otimes F$, la norme induite par $E \hat{\otimes} F$ donne pour boule unité le polaire de la boule unité de $B(E,F)$ et la norme induite par $J(E',F')$ donne pour boule unité le polaire de la boule unité de $E' \hat{\hat{\otimes}} F'$; d'après le th. des bipolaires, ces deux normes sur $E \otimes F$ coïncident si et seulement si la boule unité de $E' \hat{\hat{\otimes}} F'$ est dense dans la boule unité de $B(E,F)$ pour la topologie de la convergence simple. Pour ceci, il suffit manifestement que la condition $(\mathcal{A}_2)$ soit satisfaite (il suffit alors d'y remplacer F par F'), donc $(\mathcal{A}_2)$ implique $(\mathcal{B}_2)$. Comme $J(E',E)$ se plonge isométriquement dans $J(E',E'')$ (prop. 28), $(\mathcal{B}_2)$ implique $(\mathcal{B}_1)$. prouvons enfin que $(\mathcal{B}_1)$ implique $(\mathcal{A}_1)$, ce qui achèvera la démonstration de la prop. 39. En remplaçant, dans le raisonnement qui précède, F par E', on voit que la boule unité de $L(E,F)$ est contenue dans l'adhérence, dans $B_s(E,E')$, de la boule unité de $E' \hat{\hat{\otimes}} E''$, d'où la condition $(\mathcal{A})$ grâce au lemme 20.

PROPOSITION 40. - <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach</u>. <u>Si</u> E' <u>satisfait à la condition d'approximation métrique</u>, <u>il en est de même de</u> E. <u>Pour que</u> E' <u>satisfasse à la condition d'approximation métrique</u>, <u>il faut et il suffit que pour tout espace de Banach</u> F, <u>l'application linéaire canonique de</u> $E' \hat{\otimes} F'$ <u>dans l'espace</u> $J(E,F)$ <u>des formes bilinéaires intégrales sur</u> $E \times F$ <u>soit un isomorphisme normé du premier espace dans le second</u>.

Démonstration. - Si E' satisfait à la condition d'approximation métrique, considérons le diagramme (évidemment commutatif) d'applications canoniques

$$\begin{array}{ccc} E' \hat{\otimes} E'' & \longrightarrow & J(E'',E') \\ \uparrow & & \uparrow \\ E' \hat{\otimes} E & \longrightarrow & J(E\ ,E') \end{array}$$

L'hypothèse signifie que la première application horizontale est un isomorphisme normé. D'autre part, les deux applications verticales sont des isomorphismes normés (prop. 4, corollaire 4, et prop. 28) il s'ensuit aussitôt que la deuxième application horizontale est un isomorphisme normé, i.e. que E satisfait à la condition d'approximation métrique (prise sous la forme de la condition $(\mathcal{A}_1)$ de la prop. 39). Si E' satisfait à la condition d'approximation métrique, et si F est un espace de Banach quelconque, comme $J(E,F)$ se plonge isométriquement dans $J(E'',F'')$ (prop. 28), l'application canonique de $E' \hat{\otimes} F'$ dans $J(E,F)$ est une isométrie en vertu de la condition $(\mathcal{A}_2)$ de la prop. 39, appliquée à E', F'. Réciproquement, s'il en est ainsi pour F = E', E' satisfait à la condition d'approximation métrique, en vertu du critère $(\mathcal{B}_1)$ de la prop. 39.

Résumons la signification pratique de la condition d'approximation métrique :

COROLLAIRE 1. - *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach*.

1. *Pour que la boule unité de* $L(E,F)$ *soit l'adhérence, pour la topologie de la convergence compacte, de l'ensemble des opérateurs de rang fini qu'elle contient, il suffit que* E *ou* F *satisfasse à la condition d'approximation métrique*.

2. *Pour que l'application linéaire canonique de* $E \hat{\otimes} F$ *dans* $J(E',F')$ *soit une isométrie, il suffit que* E *ou* F *satisfasse à la condition d'approximation métrique*.

3. *Pour que l'application linéaire canonique de* $E' \hat{\otimes} F'$ *dans* $J(E,F)$ *soit une isométrie, il suffit que* E' *ou* F' *satisfasse à la condition d'approximation métrique*.

COROLLAIRE 2. - *Soit* E *un espace de Banach réflexif. Si* E *satisfait à la condition d'approximation* (*définition* 9), *il satisfait même à la condition d'approximation métrique. Et pour qu'il soit ainsi, il faut et il suffit que* E' *satisfasse à la condition d'approximation*.

Cela résulte immédiatement de la prop. 40 et du th. 8, § 4 : pour tout espace de Banach F, les conditions de ce théorème sont vérifiées, l'application canonique de $E' \hat{\otimes} F'$ dans $B(E,F)$ est en effet biunivoque, car E' satisfait aussi à la condition d'approximation (prop. 36, 1°) ; donc $E' \hat{\otimes} F'$ s'identifie avec sa norme à $J(E,F)$, par suite le critère de la prop. 40 est vérifié.

Je ne connais pas d'exemple d'espace de Banach qui ne possède pas la propriété d'approximation métrique. La conjecture que tout espace de Banach possède cette propriété entraîne la conjecture étudiée dans la "proposition" 37. On pourrait alors lui donner au moins trois formultations équivalentes, analogues aux conjectures (a), (b), (c), de la "proposition" 37. Mais je ne sais plus ramener ce problème à un problème ne faisant intervenir que les seuls sous-espaces de c_0, comme dans la "proposition" 37.- On pourrait aussi considérer une variante purement topologique de la propriété d'approximation métrique, qui serait : il existe une partie équicontinue de $L(E,E)$ formée d'applications linéaires de rang fini auquel l'application identique est adhérente pour la convergence compacte. Si E est un espace de Banach, B la boule unité de $L(E,E)$, posons $B_0 = B \cap (E' \otimes E)$, soit $\overline{B_0}$ l'adhérence de B_0 pour la topologie de la convergence compacte, soit enfin M le plus petit nombre (s'il existe) tel que $1 \in M.B_0$. Il est facile de s'assurer que si on peut trouver des espaces de Banach avec M arbitrairement grand, on peut aussi trouver un espace de Banach pour lequel un tel M n'existe pas, i.e. qui ne satisfait pas à la variante affaiblie de la propriété d'approximation métrique envisagée plus haut.

Donnons encore un résultat positif, variante du corollaire 2 de la prop. 40, ainsi que des corollaires de la prop. 28 et du th. 8.

THÉORÈME 15. - <u>Soient</u> E, F, G <u>trois espaces de Banach</u>, u <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F, v <u>une application linéaire continue de</u> F <u>dans</u> G. <u>On suppose que l'une des deux applications</u> u, v <u>est faiblement</u>

compacte, et l'autre limite uniforme sur tout compact d'applications linéaires continues de rang fini. Alors $w = vu$ est limite, uniforme sur tout compact, d'applications linéaires de rang fini et de norme $\leq \|w\|$.

Démonstration. - Supposons par exemple que ce soit u qui est faiblement compact. On peut évidemment supposer que l'on a $\|w\| = 1$. Si A est la boule unité de E, B la boule unité de G, B la boule unité de G, on aura donc $u(A) \subset \bar{v}^1(B)$. En remplaçant au besoin la norme de F par une norme équivalente (ce qui ne change rien aux hypothèses, purement topologiques, ni à la conclusion, qui ne fait pas intervenir F), on peut supposer que la boule unité de F est comprise entre u(A) et u(B). Pour cela, U étant la boule unité donnée de F, on peut supposer d'abord, que $U \supset u(A)$, puis on remplace U par $U_1 = U \cap \bar{v}^1(B)$. Sous ces conditions, on a $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$, $\|w\| = 1$, et il suffit donc de prouver que l'on peut approcher w, uniformément sur tout compact, par des applications linéaires de rang fini et de norme $\leq \|u\| \cdot \|v\|$. Considérons l'espace de Banach $E \tilde{\otimes} G'$, adhérence de $E \otimes G'$ dans l'espace $J(E',G)$ des formes bilinéaires intégrales sur $E' \times G$; c'est aussi le complété de $E \otimes G'$ pour la norme polaire de la boule unité de $E' \hat{\hat{\otimes}} G$, et la boule unité de son dual est donc l'adhérence, pour la convergence simple, de la boule unité de $E' \hat{\hat{\otimes}} G$ dans $B(E,G')$. Si $\alpha \in E \tilde{\otimes} G'$ est interprété comme une application intégrale de G dans E, alors $u\alpha$ est une application de Fredholm de G dans F, de norme-trace $\leq \|u\| . \|\alpha\|_1$ (th. 10 1°), i.e. un élément de $F \hat{\otimes} G'/I$, où I est le noyau de l'application linéaire naturelle de $F \hat{\otimes} G'$ sur l'espace des applications de Fredholm de G dans F. Donc u définit une application linéaire $\alpha \longrightarrow \varphi(\alpha) = u \circ \alpha$, de norme $\leq \|u\|$, de $E \tilde{\otimes} G'$ dans $F \hat{\otimes} G'/I$. La transposée de cette application est une application linéaire, de norme $\leq \|u\|$, du dual de $F \hat{\otimes} G'/I$,-qui est l'orthogonal $B_0(F,G')$ de I dans le dual $B(F,G')$ de $F \hat{\otimes} G'$,-dans le dual de $E \tilde{\otimes} G'$. Or, I étant l'orthogonal de $F' \otimes G$ dans $F \hat{\otimes} G'$, son orthogonal $B_0(F,G')$ est l'adhérence faible de $F' \otimes G$ dans $B(F,G')$, pour la dualité avec $F \hat{\otimes} G'$. D'autre part v, interprété comme un élément de $B(F,G')$ appartient à cet espace $B_0(F,G')$ par hypothèse (le dual de $L_c(F,G)$ étant $F \hat{\otimes} G'$ – prop. 22 –). Par suite, ${}^t\varphi.\alpha$ est un élément du dual de $E \tilde{\otimes} G'$, de norme $\leq \|u\| \, \|v\|$. D'où la conclusion voulue, grâce à la caractérisation du dual de $E \tilde{\otimes} G'$ – car on vérifie immédiatement que $\varphi.v$ n'est autre que $v \circ u$.

On trouve une amélioration du corollaire 2 de la prop. 31 :

COROLLAIRE 1. – *Soient E et F deux espaces de Banach, dont l'un au moins satisfasse à la condition d'approximation* (définition 9, n° 1). *Alors toute application linéaire faiblement compacte u de E dans F est limite uniforme sur tout compact, d'applications linéaires de rang fini et de norme $\leq \|u\|$.*

Il suffit en effet de prendre, dans le th. 15, pour v l'application identique de E sur E ou de E sur F. On prouve de même :

COROLLAIRE 2. – *Soient E, G des espaces de Banach, F un espace localement convexe, u une application linéaire continue de E dans F, adhérente à $E' \otimes F$ pour la convergence compacte, v une application linéaire faiblement compacte de F dans G. Alors $w = v \circ u$ est limite, uniforme sur tout compact, d'applications linéaires de rang fini et de norme $\leq \|w\|$ de E dans G.*

On est en effet immédiatement ramené au cas où F est un espace de Banach, en considérant l'image réciproque V par v de la boule unité de G, et remplaçant F par l'espace de Banach $\hat{F}_V$.– En particulier :

COROLLAIRE 3. – *Soient E, G deux espaces de Banach, F un espace localement convexe isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique du produit vectoriel topologique d'une famille d'espaces de Hilbert. Soit u une application linéaire continue de E dans F, v une application linéaire continue de F dans G. Alors $w = v \circ u$ est limite, uniforme sur tout compact, d'applications linéaires de rang fini et de norme $\leq \|w\|$ de E dans G.*

On est en effet immédiatement ramené au cas où F est un espace de Hilbert, car F admet un système fondamental de voisinages convexes cerclés V de 0 tels que $\widehat{F_V}$ soit un espace de Hilbert. Alors v est évidemment faiblement compacte, et u adhérente à $E' \otimes F$ pour la topologie de la convergence compacte (puisque l'espace de Hilbert F satisfait à la condition d'approximation), de sorte qu'on est dans les conditions du th. 15.

L'intérêt du th. 15 est qu'il permet (comme le th. 8) de déduire d'hypothèses purement vectorielles-topologiques, et de vérification facile le plus souvent, des conclusions métriques (qui resteront donc valables lorsqu'on remplace les normes des espaces envisagés par des normes équivalentes).

3. Exemples.

La proposition qui suit est connue (voir p. ex. [25]) :

PROPOSITION 41. - 1. Soit M un espace topologique, soit $\mathcal{C}^{\infty}(M)$ l'espace des fonctions continues et bornées sur M, muni de la norme uniforme. $\mathcal{C}^{\infty}(M)$ jouit de la propriété d'approximation métrique ainsi que son dual, son bidual, etc.

2. Soit M un espace localement compact muni d'une mesure positive μ, et soit $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $L^p(\mu)$ jouit de la propriété d'approximation métrique, ainsi que son dual, bidual, etc.

Démonstration. - Il est bien connu que $\mathcal{C}^{\infty}(M)$ est isomorphe avec sa norme à l'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues sur un certain espace compact K, ce qui nous ramène à M compact. Alors le dual de $\mathcal{C}(M)$ est l'espace $\mathcal{M}^1(M)$ des mesures de Radon sur M, qui est isomorphe avec sa norme à un espace $L^1(\mu)$ (voir p. ex. [16]). Son bidual est donc isomorphe à un espace $L^{\infty}(\mu)$, qui est lui-même isomorphe, comme il est bien connu, à un espace $\mathcal{C}(K')$, où K' est un espace compact convenable. Tenant compte de la prop. 40, les deux parties de la prop. 41 seront prouvées si nous montrons qu'un espace $L^p(\mu)$ possède la propriété d'approximation métrique, pour $1 \leq p < +\infty$. Soient $f_1, \dots f_n$ n éléments de $L^p(\mu) = L^p$, et soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe un endomorphisme de rang fini et de norme ≤ 1 de L^p tel que $\|uf_i - f_i\|_p \leq \varepsilon$ pour tout i. Soit K un compact contenu dans M tel que $\int_{\complement K} |f_i(t)|^p d\mu(t) \leq \varepsilon/2$ pour tout i, et tel que chaque f_i soit bornée sur K. Si $\mu(K) = 0$, on prend $u = 0$. Sinon, pour $\alpha > 0$ donné, soit (K_j) une partition de K en un nombre fini d'ensembles mesurables de mesure > 0 tels que l'oscillation de chaque f_i dans K_j soit $\leq \alpha$. Soit φ_j la fonction caractéristique de K_j, et posons

$$u.f = \sum_j \left(\frac{1}{\mu(K_j)} \int f\varphi_j d\mu\right)\varphi_j$$

pour toute $f \in L^p$. On a défini par là un endomorphisme u de rang fini de L^p. On laisse au lecteur la vérification du fait que u est de norme ≤ 1, et que pour tout i on a

$$\|uf_k - f_k\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha(\mu(K))^{1/p}$$

Prenant α assez petit dans ce qui précède, u satisfait à la condition voulue.

PROPOSITION 42. - <u>Soit</u> G <u>un groupe compact</u>, μ <u>sa mesure de Haar</u> (voir [27]), E <u>un espace de Banach</u>, $s \longrightarrow U_s$ <u>une représentation continue de</u> G <u>dans</u> $L_s(E, E_s)$, <u>telle que</u> $\|U_s\| = 1$ <u>pour tout</u> s. <u>On suppose que pour tout caractère</u> χ <u>sur</u> G, <u>l'opérateur de composition</u> $U_\chi = \int U_s \chi(s) d\mu(s)$ <u>est de rang fini</u>. <u>Alors</u> E <u>satisfait à la condition d'approximation métrique</u>.

Démonstration. - Posons $L^1 = L^1(\mu)$, et pour toute $f \in L^1$, posons $U_f = \int U_s f(s) d\mu(s)$. On a $\|U_f\| \leq \|f\|_1$, donc l'application linéaire $f \longrightarrow U_f$ de L^1 dans $L(E, E)$ est de norme ≤ 1. Il est bien connu que l'application identique de E dans E est limite dans $L_s(E, E)$ d'applications du type U_f, où $\|F\|_1 \leq 1$. D'autre part, le th. de Peter-Weyl nous apprend que les combinaisons linéaires de translatées de caractères sont denses dans L^1, de sorte qu'on peut supposer que les f envisagées ci-dessus sont des combinaisons linéaires de translatéès de caractères. Comme les U_χ, où χ est un caractère, sont supposés de rang fini, il en est alors de même des U_f envisagés, ce qui prouve la prop. 42.

COROLLAIRE 1. - Sous les conditions de la prop. 42, si F est un sous-espace vectoriel fermé de E invariant par G, F et E/F satisfont à la condition d'approximation métrique.

Ils satisfont en effet manifestement aux mêmes hypothèses que E.

COROLLAIRE 2. - Soit G un groupe compact, E un espace de Banach dont les éléments sont des fonctions sommables sur G, ou des distributions sur G si G est un groupe de Lie. On suppose E et sa norme invariante par translation à gauche, et la représentation correspondante de G dans $L_s(E,E_s)$ continue. Alors E satisfait à la condition d'approximation métrique.

En effet, ici les opérateurs U_χ sont manifestement de rang fini.

COROLLAIRE 3. - Soit G un groupe de Lie compact, μ sa mesure de Haar. Soit $1 \leq p < +\infty$, et soit n un entier > 0. Désignons par $\mathcal{E}^{(n)}_{L^p}$ l'espace des distributions sur G qui sont dans L^p ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq n$. Muni d'une norme compatible avec sa topologie naturelle d'espace normable complet, et invariante par translation, $\mathcal{E}^{(n)}_{L^p}$ possède la propriété d'approximation métrique. Il est d'ailleurs inutile que la norme soit invariante par translation si $1 < p < +\infty$.

On laisse au lecteur, le soin d'expliciter la définition de l'espace normable complet $\mathcal{E}^{(n)}_{L^p}$, et de s'assurer qu'il existe des normes compatibles avec la topologie et invariantes par translation, et qu'enfin la représentation de G dans $L_s(E,E)$ (où $E = \mathcal{E}^{(n)}_{L^p}$) par les translations à gauche est bien continue, de sorte que le corollaire 2 peut s'appliquer. (Noter d'ailleurs que si dans la prop. 42, on supprime l'hypothèse $\|U_s\| = 1$, il est facile de voir qu'on peut trouver sur E une norme équivalente à la norme donnée et qui soit invariante sous G ; pour cette nouvelle norme, E jouira donc de la propriété d'approximation métrique). La première assertion du corollaire 3 est alors un cas particulier du corollaire 2. La deuxième assertion résulte du fait que pour $1 < p < +\infty$, l'espace E est réflexif, de sorte qu'il suffit d'appliquer le corollaire 2 de la proposition 40.- Remarquons que pour $p = +\infty$, il faut remplacer dans l'énoncé du corollaire 3, $\mathcal{E}^{(n)}_{L^\infty}$ par l'espace $\mathcal{E}^{(n)}$ des fonctions n fois continûment différentiables sur G, et on obtiendra le même résultat.

A titre d'application du th. 15, donnons encore la

PROPOSITION 43. - *Soit* E *un espace de Banach formé de distributions sur* R^d (d *entier* >0), *satisfaisant aux conditions suivantes* :

a. E *contient l'espace* $(\mathcal{D})$ *des fonctions indéfiniment différentiables à support compact, l'application identique de* $(\mathcal{D})$ *dans* E *est continue*.

b. E *est invariant ainsi que sa norme par les opérateurs de translation* U_s, *et l'application* $s \longrightarrow U_s$ *de* R^d *dans* $L_s(E,E_s)$ *est continue*.

c. E *est stable par multiplication par les* $\varphi \in (\mathcal{D})$. *Si pour toute* $\varphi \in (\mathcal{D})$, *on désigne par* u_φ *l'opérateur de multiplication* $f \longrightarrow \varphi f$ *qu'elle définit dans* E, *on suppose que les* u_φ *tels que* $\|u_\varphi\| \leqslant 1$ *approchent l'application identique de* E *dans* E *pour la topologie de* $L_s(E,E_s)$.

Sous ces conditions, E *satisfait à la condition d'approximation métrique*.

Notons que la condition c. se vérifie le plus souvent sous la forme suivante : Si $\varphi \in (\mathcal{D})$ est telle que $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ pour tout t, $\varphi(t) = 1$ pour $|t| \leqslant r$, et si pour tout indice de dérivation α, d'ordre $|\alpha| > 0$, on a $\|D^\alpha \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon_{|\alpha|}$, où (ε_i) est une suite donnée de nombres >0, alors u_φ a une norme dépassant arbitrairement peu 1, et diffère arbitrairement peu de l'identité sur des éléments $x_1, \dots x_n$ de E donnée, pourvu que r soit assez grand et la suite (ε_i) assez petite (il est d'ailleurs connu que, r et la suite des (ε_i) étant donnés arbitrairement, il existe une $\varphi \in (\mathcal{D})$

satisfaisant aux conditions ci-dessus). Désignons p. ex., pour $1 \leq p \leq +\infty$, et pour un entier n donnés, par $\mathcal{E}^{(n)}_{L^p}$ l'espace des distributions sur R^d qui sont dans L^p ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq n$, muni de la norme $\|f\| = \sup_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha f\|_p$, évidemment invariante par translation. Si $p = +\infty$, désignons par $\mathcal{E}^{(n)}_0$ le sous espace de $\mathcal{E}^{(n)}_{L^\infty}$ adhérence de $(\mathcal{D})$. Posons $E_p = \mathcal{E}^{(n)}_{L^p}$ pour $1 \leq p < +\infty$ et $E_p = \mathcal{E}^{(n)}_0$ pour $p = +\infty$. Alors les conditions a. et b. de l'énoncé de la prop. 43 sont trivialement vérifiées. La condition c. se vérifie immédiatement par la méthode ci-dessus. Il suffit ici d'imposer $\varphi(t) = 1$ pour $|t| \leq r$ et $\|D^\alpha \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ pour $|\alpha| \leq n$.

Démonstration de la prop. 49. - Pour tout $r > 0$, soit E_r le sous-espace de E formé des éléments ayant leur support dans rB, où B est la boule unité dans R^d. De la condition c. il résulte immédiatement qu'il suffit de prouver que l'application identique de E_r dans E est adhérente, pour la topologie de la convergence compacte, à l'ensemble des applications linéaires de rang fini et de norme ≤ 1 de E_r dans E; D'autre part, on conclut de b., par un raisonnement bien connu, que l'application identique de E dans E est limite, pour la convergence compacte, d'opérations de composition $f \longrightarrow U_\varphi f = \varphi * f$, où φ est une fonction $\in (\mathcal{D})$ ayant son support dans B, et $\|U_\varphi\| \leq 1$. A fortiori l'application identique de E_r dans E est-elle limite, pour la convergence compacte, des opérateurs restrictions V_φ des U_φ à E_r, opérateurs qui sont encore de norme ≤ 1. Il suffit par suite de prouver qu'un tel V_φ est limite, pour la convergence compacte, d'opérateurs de rang fini et de norme ≤ 1. Soit F l'espace des $\psi \in (\mathcal{D})$ ayant leur support dans $(r + 1)$ B. V_φ applique E_r dans F, d'où $V_\varphi = \beta \circ \alpha$, où α est l'application de E_r dans F induite par V_φ, et où β est l'application identique de F dans E (condition c.). F est isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique du produit vectoriel-topologique d'une suite d'espaces de Hilbert (c'est implicitement contenu dans [22], tome 1, page 86, démonstration du th. 23). Il suffit maintenant d'appliquer le th. 15, corollaire 3.

<u>Remarque</u> 16. - 1. Dans la proposition 43, on peut manifestement remplacer R^d par n'importe quel groupe de Lie.

2. Nous nous sommes bornés dans ce n° à la propriété d'approximation métrique, relative à des espaces de Banach. Les mêmes méthodes prouveraient p. ex. la condition d'approximation de la définition 9 pour des espaces localement convexes plus généraux soumis à des conditions analogues aux précédentes mais purement topologiques.

3. J'ignore si les espaces $\mathcal{E}^{(n)}_{L^\infty}$ (non séparables !) définis après l'énoncé de la prop. 43 jouissent de la propriété d'approximation métrique ou même seulement de la propriété d'approximation. De même, si F est un sous-espace vectoriel fermé de E = $\mathcal{E}^{(n)}_{L^p}$, invariant par translation, il n'est pas certain que F ou E/F jouisse de la propriété d'approximation. Les questions analogues sont ouvertes p. ex. pour les sous-espaces vectoriels fermés invariants par translation des espaces $\ell^p(\mathcal{Z})$ construits sur le groupe additif $\mathcal{Z}$ des entiers rationnels. (Ici il est bien certain que ni les méthodes de régularisation, ni les méthodes de "troncage" ne peuvent rien donner).

Nous aurons besoin au Chap. 2 du résultat suivant :

PROPOSITION 44. - <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe</u>, M <u>une partie de</u> E <u>contenue dans l'image de la boule unité d'un espace de Banach par une application de Fredholm</u>. <u>Alors, quelle que soit l'application linéaire continue</u> A <u>de</u> E <u>dans un espace localement convexe</u> F, A <u>peut s'approcher uniformément sur</u> M <u>par des applications linéaires continues de rang fini</u>.

Il suffit évidemment de prouver que si M est l'image de la boule unité d'un espace de Banach G par une application de Fredholm u, alors l'application identique de E dans lui-même peut s'approcher, uniformément, sur M, par des applications linéaires continues de rang fini. Posons $u = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes y_i$, où $(\lambda_i) \in \ell^1$, $\lambda_i \geqslant 0$, (x'_i) suite extraite de la boule unité de G, (y_i) suite extraite d'une partie compacte convexe cerclée K de E. Soit v l'application de ℓ^2, dans E_K définie par $v((\xi_i)) = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\xi_i y_i$, et soit K' la partie de ℓ^2 formée des (ξ_i) tels que $|\xi_i| \leqslant \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i. C'est manifestement une partie compacte de ℓ^2, et M est contenu dans l'image de K' par v.

Soit H le noyau de v, v induit une application linéaire continue <u>biunivoque</u> w de <u>l'espace de Hilbert</u> ℓ^2/H dans E et M est contenu dans l'image par w d'une partie compacte de ℓ^2/H. Il suffit alors d'appliquer le

LEMME 21. - <u>Soient</u> E, F, <u>deux espaces localement convexes</u>, A <u>une application linéaire continue biunivoque de</u> E <u>dans</u> F. <u>Si</u> K <u>est une partie compacte convexe cerclée de</u> E <u>telle que l'application identique de</u> E <u>dans lui-même puisse s'approcher</u>, <u>uniformément sur</u> K, <u>par des applications linéaires continues de rang fini</u>, <u>alors</u> A(K) <u>jouit de la propriété correspondante dans</u> F.

Démonstration. - $E' \otimes E$ est dense par hypothèse dans L(E,E) pour la topologie de la K-convergence. Or, A étant biunivoque, $E'_0 = {}^t A(F')$ est faiblement dense dans E', donc aussi dense dans E' pour la topologie de la K-convergence (K étant compact convexe cerclé), d'où s'ensuit aussitôt que $E'_0 \otimes E$ est dense dans $E' \otimes E$ pour la topologie de la K-convergence. D'ailleurs, les $u \in E'_0 \otimes E$ sont les opérateurs de la forme wA, où $w \in F' \otimes E$. Soit maintenant V un voisinage de 0 dans F, montrons qu'il existe un $v \in F' \otimes F$ tel que $vy - y \in V$ pour $y \in A(K)$. Soit d'abord $u \in E'_0 \otimes E$ tel que $(u - 1)(K) \subset \overset{-1}{A}(V)$. On aura u = wA, où $w \in F' \otimes E$, posons v = Aw, il est manifeste que v satisfait à la condition voulue, i.e. que $(vA - A)(K) \subset V$, puisqu'on a vA = Au, et $Au - A = A(u - 1)$, $(u - 1)(K) \subset \overset{-1}{A}(V)$.

APPENDIX TO CHAPTER I*

M. J. Dieudonné vient d'attirer mon attention sur une démonstration incorrecte de ce mémoire. Il s'agit du lemme 13, 2° (chapitre I, paragraphe 4, n° 3, pages 130–131): avec les notations de la démonstration de ce lemme, il ne sera pas vrai en général que φ'' est injective, et pour cela la conclusion de la dernière phrase de la démonstration, affirmant que w applique E_{A0} dans G_B, est injustifiée. Ci-dessous, je vais esquisser un contre-exemple, prouvant que la conclusion du lemme 13, 2° est en effet fausse. Tout ce qu'on peut dire, comme conséquence immédiate de la première partie du lemme par exemple, c'est que toute application intégrale d'un espace localement convexe E dans un autre G provient d'une application intégrale d'un espace $\widehat{E_V}$ dans G (V étant un voisinage convexe cerclé convenable de O dans E); ou encore peut, en tant qu'application de E dans G″, s'obtenir en factorisant en $E \to E_1 \to G_1 \to G''$, où toutes les applications linéaires sont continues, celle du milieu étant intégrale, et les espaces E_1 et G_1 étant des espaces de Banach (si on veut, des espaces L^∞ et L^1 respectivement). Mais comme nous verrons, on ne peut dans cet énoncé se dispenser de faire intervenir le bidual G″. Signalons cependant que le rôle de ce lemme 13 (et en particulier de sa deuxième partie fausse) était de pure commodité, pour nous épargner une fois pour toutes plusieurs passages fastidieux aux biduals. Aucun énoncé ultérieur dans la démonstration duquel nous avons fait appel à ce lemme n'a besoin de rectification. Ces énoncés sont le théorème 9, le lemma 14 (qui implique le th. 10) et son corollaire; enfin nous référons aussi au lemme 13, 2° dans la démonstration du théorème 6 du chapitre II, paragraphe 2. Pour le théorème 9, on note que sa troisième partie est contenue par exemple dans le théorème 10, 1°; pour les deux premières, on note d'abord que, une fois qu'elles sont prouvées dans le cas des espaces de Banach, la version correcte du lemme 13 nous prouvera que ν transforme un

* Reprinted from Annales de l'Institut Fourier, Tome, VI, pages 117–120, published by the Université de Grenoble, 1956.

voisinage convenable de 0 dans E en une partie faiblement relativement compacte de l'espace localement convexe F'' ("faible" signifiant ici la topologie faible associée à la topologie "naturelle" de F'', i.e., celle de la convergence équicontinue sur F'), et que ν transforme les parties faiblement compactes de E en des parties relativement compactes de F'' (toujours muni de sa topologie "naturelle"). Comme F est quasi-complet, donc ses parties convexes cerclées et fermées sont fermées aussi dans F'' (tant pour sa topologie naturelle, que pour la topologie faible associée) il s'ensuit que pour une partie de F, il revient au même d'être faiblement relativement compacte (resp. relativement compacte) dans F, ou dans F'', d'où aussitôt la conclusion voulue. Dans la démonstration du lemme 14, 1°, on peut encore factoriser comme indiqué plus haut u en $E \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{j} F_1 \xrightarrow{k} F''$; mais ν transformant toute partie bornée de F en une partie de G ayant la propriété Φ, et à fortiori faiblement compacte, ν'' transformera les parties équicontinues de F'' en des parties de G (et non seulement G''), ayant encore la propriété Φ; comme on peut supposer que k transforme la boule unité de F_1 en une partie équicontinue, il s'ensuit que $\nu''k$ transforme la boule unité de F_1 en une partie de G ayant la propriété Φ. Remplaçant E par E_1, F par F_1, ν par $\nu''k$, on est bien ramené au cas où les espaces E, F sont des espaces de Banach. Quant au corollaire 1 du lemma 14, il résulte aussi tout de suite de la conjonction du th. 9, 1° et du lemme 14, 1°. Enfin, dans la première partie de la démonstration du théorème 6 du chapitre 2, nous ne nous référons qu'en apparence à la deuxième partie du lemme 13, car l'espace dans lequel on applique E étant un dual, c'est la première partie du lemme 13 qui intervient réellement ici.

Je profiterai aussi de l'occasion pour signaler que je me réfère plusieurs fois, notamment au chapitre II, paragraphe 1, à un article "La théorie de Fredholm" (à paraître dans Summa Mathematicae Brasiliensis; cette référence est notée [11] dans mon mémoire), pour certaines propriétés fines des valeurs propres des opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert. M'étant aperçu ensuite que ces résultats étaient connus déjà, [essentiellement contenus dans: H. Weyl, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 35, 408–401 (1949)] j'ai renoncé à les faire figurer dans l'article en question, contrairement à mon intention première, de sorte que les références que j'y avais faites deviennent inadéquates.

Voici enfin le contre-exemple promis au début. Soit M un espace de Banach, F un sous-espace vectoriel fortement ferme de M' dont la boule unité soit faiblement dense dans celle de M', enfin u une application linéaire d'un espace de Banach E dans F, intégrale en tant qu'application dans M' mais non en tant qu'application dans F. (On va prouver plus bas qu'on peut trouver une telle situation, même avec E réflexif.) Soit G l'espace F muni de la topologie $\tau(F, M)$ induite par $\tau(M', M)$, donc le dual de G est M, les parties bornées de G sont celles qui sont bornées dans M' i. e., bornées dans F au sens de la norme, donc la topologie forte du dual de G est la topologie normée de M. Comme u définit une forme bilinéaire intégrale sur $E \times M$, u est une application intégrale de E dans G. Cependant, u n'est pas une application intégrals de E dans un espace G_B (B étant une partie bornée convexe cerclée convenable de G) car (G et F ayant les mêmes parties bornées) u serait aussi intégrale en tant qu'application de E dans F, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il reste à prouver qu'on peut trouver M, F, E, u comme indiqués. Nous admettrons pour ceci le fait élémentaire suivant (non publié): Soit Q un espace de Banach, P un sous-espace de Banach, alors les conditions suivantes (prises d'ailleurs parmi une vingtaine de conditions équivalentes du même genre) sont équivalentes: a. P'' est facteur direct dans Q'' (ou encore: P^0 est facteur direct dans Q'); b. Pour tout espace de Banach E (qu'on peut supposer aussi restreint à être réflexif et séparable par exemple), toute application intégrale de E dans Q telle que $u(E) \subset P$, est une application intégrale de E dans P. Ceci admis, prenons $M = l^1$, et prenons pour F un sous-espace vectoriel fortement ferme de $M' \subset l^\infty$ contenant c_0 (de sorte que sa boule unité sera bien faiblement dense dans celle de M'). Il faut montrer seulement qu'on peut choisir F de telle façon que F'' ne soit pas facteur direct dans le bidual de l^∞. Posant $R = l^\infty/c_0$, il suffit de prendre l'image réciproque dans l^∞ d'un sous-espace de R dont le bidual n'est pas facteur direct dans le bidual de R. Or R est isomorphe à un espace $C(K)$ des fonctions continues sur un espace compact infini K (K est le complémentaire, dans le compactifié de Stone-Čech de l'ensemble N des entiers naturels, de ce même ensemble N).

Comme bien connu, tout espace de Banach séparable est isomorphe à un sous-espace d'un tel $C(K)$, qui contient en particulier, par exemple, un espace de Hilbert de dimension infinie. Ce dernier est identique à son bidual, et comme il est bien connu n'est pas isomorphe à un facteur direct d'un espace $C(K)$; il répond donc à la question.

Je profite de l'occasion pour signaler une affirmation erronée de l'article: "Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$", Can. Journal of Math., vol. 5, pp. 129–173 (1953). Il s'agit du lemme 4 de la page 144, affirmant que l'espace $\epsilon^{(m)}$ des fonctions m fois continûment différentiables sur un ouvert ou un cube compact de R^n, muni de sa topologie naturelle, est isomorphe à un facteur direct de l'espace des fonctions continues sur un espace localement compact convenable. La démonstration est manifestement erronée, les g_p construites ne satisfaisant pas aux conditions voulues; il en est encore de même de la démonstration donnée en note de bas de page, car (avec les notations de cette note) il n'est pas vrai que $\epsilon^{(m)}(K, \epsilon^{(m)}(K_0))$ s'identifie à $\epsilon^{(m)}(K \times K_0)$. En fait, j'ai démontré que pour un cube K de dimension ≥ 2, $\epsilon^{(m)}(K)$ ni même son bidual ne peut être isomorphe à un facteur direct de l'espace de fonctions continues sur un compact convenable. (Pas de démonstration ici.) De ce fait, la prop. 7 de l'article cité reste non démontrée. Le résultat faux du lemme 5 est mentionné à diverses reprises dans des travaux ultérieurs, comme mon mémoire aux "Memoirs" cité dans le titre, et est donné en exercice dans mon cours d'Espaces Vectoriels Topologiques (São Paulo, 1953–1954), où il ne figure pas dans les Errata. Cependant en aucun endroit il ne figure dans la démonstration d'une proposition autre que celle signalée plus haut.

Table des matières

CHAPITRE II

ESPACES NUCLÉAIRES

§ 1. CLASSES REMARQUABLES D'OPÉRATEURS DE FREDHOLM ET DE PARTIES DANS UN ESPACE LOCALEMENT CONVEXE.

Ce § donne des résultats fins, s'appuyant essentiellement sur [11]. Il n'est pas indispensable pour le reste de ce travail, sauf pour le §2, n° 4, mais permettrait de simplifier certaines démonstrations.

1. Opérateurs de puissance p.ème sommable.

DÉFINITION 1. - Soient E, F, G des espaces localement convexes, et soit $0 < p \leq 1$.

1. Un élément de $G \bar{\otimes} F$ est appelé "noyau de Fredholm de puissance p.ème sommable", s'il est de la forme $\sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$, où $(\lambda_i) \in \ell^p$, et où (x_i) (resp. (y_i)) est une suite extraite d'une partie bornée convexe cerclée A (resp. B) de G (resp. F) telle que G_A (resp. F_B) soit complet. L'ensemble de ces opérateurs est noté $G \overset{(p)}{\otimes} F$.

2. Une application linéaire de E dans F est dite de puissance p.ème sommable, si elle provient d'un noyau de Fredholm de puissance p.ème sommable dans $E'_b \bar{\otimes} F$. L'ensemble de ces opérateurs est noté $L^{(p)}(E,F)$.

Si p = 1, on retrouve les notions de noyau de Fredholm et d'opérateur de Fredholm (Chap. I, §3, définition 4). Il y a lieu ici de répéter des remarques analogues, notamment la suivante : Si u est un opérateur de puissance p.ème sommable de E dans F, il existe dans E une partie V, polaire d'une partie compacte convexe cerclée de E'_b, et dans F une partie compacte convexe cerclée A, telles que u provienne d'une application de puissance p.ème sommable de $\widehat{E_V}$ dans F_A. Pour le voir, il suffit de remarquer que dans la définition 1, 1°, on peut supposer que (x_i) (resp. (y_i)) tend vers zéro dans G_A (resp. F_B), en mettant au besoin λ_i sous la forme

$\lambda_i = \lambda_i' \rho_i$, où $(\lambda_i') \in \ell^p$, $(\rho_i) \in c_o$, et en écrivant $u = \sum_i \lambda_i' \, a_i \otimes b_i$, où $a_i = \sqrt{\rho_i}\, x_i$, $b_i = \sqrt{\rho_i}\, y_i$.- Aussi, dans la plupart des propriétés que nous verrons par la suite, le passage des espaces localement convexes généraux aux espaces de Banach est-il immédiat . Mais à cause des applications, notamment aux espaces nucléaires, il importe de donner des énoncés tout à fait généraux.

$E \overset{(p)}{\otimes} F$ est un sous-espace vectoriel de $E \widetilde{\otimes} F$, et en général distinct de $E \widetilde{\otimes} F$ si $p < 1$, comme on s'en convainc facilement sur des exemples (grâce aux propriétés spéciales des éléments de $E \widetilde{\otimes} F$ qu'on verra plus bas). Il suit, en vertu de la définition de $E \widetilde{\otimes} F$, qu'on ne peut alors mettre sur $E \overset{(p)}{\otimes} F$ une topologie localement convexe séparée qui le rende complet, et pour laquelle l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \overset{(p)}{\otimes} F$ soit séparément continue. <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont du type</u> $(\mathcal{F})$, <u>nous allons néanmoins munir</u> $E \overset{(p)}{\otimes} F$ <u>d'une topologie</u>, <u>non localement convexe en général</u>, <u>qui en fera un espace vectoriel topologique métrisable complet</u>, $E \otimes F$ <u>sera partout dense dans</u> $E \overset{(p)}{\otimes} F$. Tout d'abord, si E et F sont normés, on considère sur $E \overset{(p)}{\otimes} F$ la fonction

$$(1) \qquad S_p(u) = \mathrm{Inf}\Big(\sum_i |\lambda_i|^p\Big)$$

le Inf étant étendu à toutes les représentations de u sous la forme $u = \sum \lambda_i x_i \otimes y_i$, avec $\|x_i\| \leqslant 1$, $\|y_i\| \leqslant 1$. Cette fonction jouit manifestement des propriétés d'une "distance à l'origine" pour une métrique invariante dans le groupe abélien $E \overset{(p)}{\otimes} F$ ([4], page 36), en vertu des deux premières des relations

$$(2) \qquad S_p(u+v) \leqslant S_p(u) + S_p(v)\,, \quad S_p(-u) = S_p(u)$$
$$S_p(\lambda u) = |\lambda|^p S_p(u)$$

La dernière relation prouve que pour $p < 1$, S_p n'est pas une norme, mais ces relations permettent cependant de prouver aisément que la topologie sur $E \overset{(p)}{\otimes} F$ définie par la métrique $S_p(u-v)$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel. $E \overset{(p)}{\otimes} F$ est complet pour cette topologie, car il est trivial que toute série absolument convergente d'éléments de $E \overset{(p)}{\otimes} F$ est convergente dans $E \overset{(p)}{\otimes} F$. Enfin, il est aussi trivial que $E \otimes F$ est dense.

Si E et F sont des espaces du type $(\mathcal{F})$ non nécessairement normables, ayant respectivement la suite fondamentale (p_α) et (q_α) de semi-normes continues, on définit sur $E \overset{(p)}{\otimes} F$ une topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel par la famille des "écarts à l'origine"

$$S_p^{(\alpha)}(u) = S_p(\varphi_\alpha . u)$$

où φ_α est l'application linéaire naturelle de $E \overset{(p)}{\otimes} F$ dans $E_\alpha \overset{(p)}{\otimes} F_\alpha$ (E_α, resp. F_α, étant l'espace de Banach associé à la semi-norme p_α, resp. q_α). Cette topologie est évidemment indépendante de la suite fondamentale de semi-normes choisie dans E ou F. Elle est métrisable, et $E \otimes F$ est manifestement dense dans $E \overset{(p)}{\otimes} F$. Enfin, $E \overset{(p)}{\otimes} F$ est complet. Pour le voir, on montre, en procédant comme dans le début de la démonstration du th. 1 du Chap. I, §2, n°1, que $E \overset{(p)}{\otimes} F$ s'identifie à un espace quotient d'un espace $\ell^p(I)$ construit sur un ensemble d'indices convenable. Il est bien connu que ce dernier espace est métrisable et complet pour sa topologie naturelle, or il est bien connu qu'un groupe quotient d'un groupe abélien topologique métrisable et complet est métrisable et complet, ([4], page 37).- D'ailleurs, la démonstration du th. 1 du Chap. I a été construite de façon à se transposer sans modification au cas présent, de sorte qu'on a le

THÉORÈME 1. - *Soient* E *et* F *deux espaces du type* $(\mathcal{F})$, *et soit* $0 < p \leq 1$. *Tout élément u de* $E \overset{(p)}{\otimes} F$ *est somme d'une série absolument convergente*

$$u = \sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$$

où $(\lambda_i) \in \ell^p$, *où* (x_i) *est une suite tendant vers zéro dans* E, (y_i) *une suite tendant vers zéro dans* F. *Si* u *parcourt un compact de* $E \overset{(p)}{\otimes} F$, *on peut* choisir les suites (x_i) et (y_i) fixes, et faire parcourir à (λ_i) une partie compacte de ℓ^p. Si de plus u parcourt une suite convergente dans $E \overset{(p)}{\otimes} F$, on peut supposer que l'élément (λ_i) de ℓ^p parcourt une suite convergente dans ℓ^p.

C'est dans le but d'obtenir ce résultat que les lemmes 5 et 6 du Chap. I ont été énoncés avec une si grande généralité. La dernière partie du th. 1 correspond à la remarque 4 du Chap. I.

Soit maintenant E un espace du type $(\mathcal{DF})$, F un espace du type $(\mathcal{F})$, alors $L^{(p)}(E,F)$ peut être considéré comme un espace quotient de $G \overset{(p)}{\otimes} F$, où $G = E'_b$, et sera muni de la topologie quotient de la topologie naturelle de $G \overset{(p)}{\otimes} F$ (qui en fait donc un espace vectoriel topologique, en général non localement convexe, métrisable et complet), et de la métrique quotient si E et F sont normés. Le th. 1 se transpose alors (grâce au lemme 6 du Chap. I, §2, n°1) de façon évidente à l'espace $L^{(p)}(E,F)$.

2. Ordre d'un opérateur, opérateurs d'ordre zéro.

DÉFINITION 2. - Soient E et F deux espaces localement convexes.

1. Soit u un noyau de Fredholm dans $E \hat{\otimes} F$. On appelle ordre de u la borne inférieure des p $(0 < p \leq 1)$ tels que u soit un noyau de Fredholm de puissance p.ème sommable (définition 1). L'ensemble des noyaux de Fredholm d'ordre $\leq p$ est noté $E \overset{[p]}{\otimes} F$.

2. Soit u une application de Fredholm de E dans F. On appelle ordre de u la borne inférieure des p $(0 < p \leq 1)$ tels que u soit de puissance p.ème sommable. L'ensemble des opérateurs de Fredholm d'ordre $\leq p$ de E dans F est noté $L^{[p]}(E,F)$.

Il est immédiat que $E \overset{[p]}{\otimes} F$ et $L^{[p]}(E,F)$ sont des espaces vectoriels.- Nous nous intéresserons surtout aux opérateurs d'ordre zéro, i.e. à ceux qui sont $\in L^{(p)}(E,F)$ pour tout $0 < p \leq 1$. Mais pour la démonstration des propriétés que nous avons en vue, le cas général ne coûte pas plus cher.

Soit $0 \leq p < 1$, et soit (λ_i) une suite de scalaires ayant un "exposant de convergence" $\leq p$, (x'_i) (resp. (y_i)) une suite extraite d'une partie compacte convexe cerclée de E'_b (resp. F). Alors $\sum_i \lambda_i x'_i \otimes y_i$ est un noyau de Fredholm d'ordre p. Malheureusement, la réciproque est très fausse en général, par exemple si E est un espace de Banach, F un espace $(\mathcal{DF})$ (p. ex. l'espace des suites à croissance lente, voir § 2, n° 4, remarque 11). Mais nous allons voir qu'elle est vraie si E et F sont des espaces de Banach, plus généralement, si E est du type $(\mathcal{DF})$ et F du type $(\mathcal{F})$.

Soient E et F deux espaces du type $(\mathcal{F})$, et soit $0 \leq p < 1$. $E \overset{[p]}{\otimes} F$ sera muni de la topologie borne supérieure des topologies induites par les $E \overset{(q)}{\otimes} F$, avec $p < q \leq 1$, topologie qui visiblement fait de $E \overset{[p]}{\otimes} F$ un espace vectoriel topologique métrisable et complet (non localement convexe en général). D'autre part, soit I un ensemble d'indices; on désigne aussi par $\ell^{[p]}(I)$ l'intersection des espaces $\ell^q(I)$ pour $p < q \leq 1$, muni de la topologie borne supérieure des topologies induites par ces $\ell^q(I)$. C'est donc un espace vectoriel topologique métrisable et complet, non localement convexe d'ailleurs si I est infini. Si I est l'ensemble des entiers >0, on note simplement $\ell^{[p]}$ au lieu de $\ell^{[p]}(I)$. Ceci posé, on a l'analogue suivant du th. 1 :

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces du type</u> $(\mathcal{F})$, <u>et soit</u> $0 \leq p < 1$. <u>Alors tout</u> $u \in E \overset{[p]}{\otimes} F$ (<u>noyau de Fredholm d'ordre</u> $\leq p$) <u>est de la forme</u>

$$u = \sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$$

<u>où</u> (λ_i) <u>est une suite de scalaires ayant un exposant de convergence</u> $\leq p$, <u>et où</u> (x_i) (<u>resp</u>. (y_i)) <u>est une suite tendant vers zéro dans</u> E (<u>resp</u>. F). <u>Si</u> u <u>parcourt une partie compacte de</u> $E \overset{[p]}{\otimes} F$, (<u>resp</u>. <u>une suite convergente dans</u> $E \overset{[p]}{\otimes} F$), <u>on peut supposer dans cette représentation que</u> (x_i) <u>et</u> (y_i) <u>sont fixes</u>, <u>et que</u> (λ_i) <u>parcourt une partie compacte de</u> $\ell^{[p]}$ (<u>resp</u>. <u>une</u>

suite convergente dans $\ell^{[p]}$).

Démonstration. - On procède encore exactement comme pour le th. 1 du Chap. I, §2, à cela près que la fin de cette démonstration (qui était nécessitée par un raffinement spécial de l'énoncé de ce théorème) est ici inutile. Toutefois, il nous faut utiliser ici une variante du lemme 5 du Chap. I, §2, savoir :

Soit (μ_α) $(\alpha = 1,2,\ldots)$ *une suite de suites positives telle que pour tout* i, *existe un* α *tel que* $\mu_\alpha(i) \neq 0$, *et soit* $0 \leqslant p < +\infty$. *Soit* Λ *l'espace des suites* $\lambda = (\lambda_i)$ *dont le produit par toute suite* μ_α *a un exposant de convergence* $\leqslant p$, *muni de la topologie borne supérieure des topologies induites par les espaces* Λ_q *avec* $q > p$, *où* Λ_q *est l'espace des suites* (λ_i) *dont le produit par tout* μ_α *est dans* ℓ^q, *muni de sa topologie naturelle* (définie au Chap. I, §2, lemme 5). *Soit enfin* K *une partie compacte de* Λ. *Alors il existe une suite* $i \longrightarrow \mu(i)$ *telle qu'on ait* $\lim_{i\to\infty} \mu_\alpha(i)/\mu(i) = 0$ *pour tout* α, *et telle que* K *soit une partie compacte de l'espace des suites dont le produit par la suite* μ *est dans* ℓ^p (muni de sa topologie naturelle, déduite de celle de ℓ^p par transport de structure).

Pour prouver ce résultat, on applique d'abord, pour tout entier $n > 0$, le lemme 5 du Chap. I, §2, pour $q = p + 1/n$, ce qui permet de trouver une suite $i \longrightarrow \nu_n(i)$ telle que $\lim_{i\to\infty} \mu_\alpha(i)/\nu_n(i) = 0$ pour tout α, et telle que K soit une partie compacte de l'espace des suites dont le produit par la suite ν_n soit dans $\ell^{p+1/n}$. Si alors $i \longrightarrow \mu(i)$ est une suite dominée par chacune des suites $i \longrightarrow \nu_n(i)$ (i.e. telle que pour tout n, on ait $\nu(i)/\nu_n(i) = O(1)$), mais telle qu'on ait encore $\lim_{i\to\infty} \mu_\alpha(i)/\mu(i) = 0$ pour tout α, alors cette suite répond à la question ; car pour tout n, K sera à fortiori compact dans l'espace des suites dont le produit par la suite μ est dans $\ell^{p+1/n}$, donc K est aussi compact dans l'intersection de ces espaces. Or cette suite μ se construit très facilement. Supposons la suite des suites $\mu_1, \mu_2, \ldots$ croissante, la suite des suites $\nu_1, \nu_2, \ldots$ décroissante, ce qui est évidemment loisible. Construisons alors la suite μ par récurrence, la prenant égale à la suite $(1,1 \ldots)$ jusqu'à un rang i_1 tel que $i \geqslant i_1$ implique $\mu_1(i)/\nu_1(i) \leqslant 1$, puis à partir du rang i_1+1 la prenant égale à $\nu_1(i)$ jusqu'à un rang $i_2 > i_1$ tel que $i \geqslant i_2$ implique $\mu_2(i)/\nu_2(i) \leqslant 1/2$; de façon générale, $\mu(i) = \nu_n(i)$ pour $i_n < i \leqslant i_{n+1}$, où i_{n+1} est tel que $i \geqslant i_{n+1}$ implique $\mu_{n+1}(i)/\nu_{n+1}(i) \leqslant 1/(n+1)$. Alors il est immédiat que la suite $i \longrightarrow \mu(i)$ est dominée par chacune des suites $i \longrightarrow \nu_n(i)$, (elle finit même par être majorée par chacune de ces suites), d'autre part, on a bien $\lim. \mu_\alpha(i)/\mu(i) = 0$ pour tout α. Car soit $n \geqslant \alpha$, si $i \geqslant i_n$, on a $\mu_\alpha(i)/\mu(i) \leqslant 1/n$, car on aura $i_m < i \leqslant i_{m+1}$ pour un $m \geqslant n$ convenable, d'où $\mu(i) = \nu_m(i)$, d'où $\mu_\alpha(i)/\mu(i) = \mu_\alpha(i)/\nu_m(i) \leqslant \mu_m(i)/\nu_m(i)$ $\leqslant 1/m \leqslant 1/n$, c.q.f.d.

COROLLAIRE. - Soient E et F deux espaces $(\mathcal{F})$, u un noyau de Fredholm d'ordre 0 dans $E \hat{\otimes} F$. Alors on a $u = \sum_i \lambda_i x_i' \otimes y_i$, où (x_i') (resp. (y_i)) est une suite convergeant vers zéro dans E'_b (resp. F), et où (λ_i) est une suite à décroissance rapide.

Rappelons qu'on appelle suite à décroissance rapide toute suite de scalaires dont le produit par toute suite $i \longrightarrow i^n$ reste bornée. Le corollaire résulte du fait bien connu que les suites dont l'exposant de convergence est zéro sont exactement celles qui, rangées par ordre de modules non croissants, deviennent à décroissance rapide.

Notons pour finir le fait trivial suivant, que nous utiliserons sans y référer explicitement : Soient E, F, G trois espaces localement convexes, soit u une application de Fredholm de E dans F de puissance p.ème sommable, soit v une application linéaire continue de F dans G (resp. G dans E). Alors vu (resp. uv) est un opérateur de Fredholm de puissance p.ème sommable, et si E, F, G sont des espaces de Banach, on a

$S_p(vu) \leqslant \|v\|^p S_p(u)$ (resp. $S_p(uv) \leqslant S_p(u)\|v\|^p$).

On en déduit immédiatement que l'énoncé analogue, quand u est d'ordre p, est valable.

3. Composés d'opérateurs de Fredholm.

La définition 1 du n°1 est une généralisation d'une définition posée pour l'espace de Hilbert dans [11], ou cette définition est envisagée pour $0 < p \leqslant +\infty$ (donc pas nécessairement pour $p \leqslant 1$). Si u est un opérateur compact dans un espace de Hilbert H, on désigne par $(\rho_i(u))$ la suite des valeurs propres de $|u| = (u^*u)^{1/2}$ rangées par ordre décroissant (et répétées suivant leurs multiplicités). Si $0 < p < +\infty$, un opérateur u dans H est dit de puissance p.ème sommable, s'il est compact et si $S_p(u) = \sum (\rho_i(u))^p < +\infty$. Rappelons alors le résultat suivant (voir p. ex. A. Horn, Proc. Nat. Acad, Sci. U.S.A., 36, 373-375 (1950)) : Soit H un espace de Hilbert, et soient $u \in L^{(p)}(H,H)$, $v \in L^{(q)}(H,H)$ (où p, q sont deux nombres $0 < p, q < +\infty$). Alors on a $uv \in L^r(H,H)$, où $1/r = 1/p + 1/q$, et on a "l'inégalité de Hölder"

$$(3) \qquad (S_r(uv))^{1/r} \leqslant (S_p(u))^{1/p}(S_q(v))^{1/q}$$

THÉORÈME 3. - Soit (E_i) $(i = 1,2,\dots n+1)$ une suite de n+1 espaces localement convexes, (p_i) $(i = 1,\dots n)$ une suite de n nombres $0 < p_i \leqslant 1$, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, soit $u_i \in L^{(p_i)}(E_i, E_{i+1})$ un opérateur de Fredholm de puissance p_i.ème sommable de E_i dans E_{i+1}. Alors $u = u_n u_{n-1} \dots u_1$ est un opérateur de puissance r.ème sommable, où r est donné par

$$(4) \qquad 1/r = \left(\sum_i 1/p_i\right) - (n+1)/2$$

Si les E_i sont des espaces de Banach, on a

$$(5) \qquad (S_r(u))^{1/r} \leqslant \prod_i (S_{p_i}(u_i))^{1/p_i}$$

Nous nous intéresserons surtout au

COROLLAIRE. - Le composé d'une séquence de n opérateurs de Fredholm est un opérateur de puissance $(2/(n-1))$.ème sommable, pour $n \geqslant 3$.

Pour prouver le th. 3, on est immédiatement ramené au cas où les E_i sont des espaces de Banach. Considérons d'abord, pour deux espaces de Banach quelconques, E et F, un $u \in L^{(p)}(E,F)$, où $0 < p \leq 1$. On a donc $u = \sum_i \lambda_i x_i' \otimes y_i$, où $(\lambda_i) \in \ell^p$, et où (x_i') (resp. (y_i)) est une suite bornée dans E' (resp. F). Alors u est le composé d'une séquence de trois opérateurs

$$E \xrightarrow[\alpha]{} \ell^2 \xrightarrow[\beta]{} \ell^2 \xrightarrow[\gamma]{} F$$

α étant défini par $(\alpha.x)_i = (\lambda_i)^{p/2} \langle x, x_i' \rangle$, γ par $\gamma((\xi_i)) = \sum_i (\lambda_i)^{p/2} \xi_i y_i$, enfin β étant l'opérateur de multiplication par la suite (λ_i^{1-p}). Soit α' une application linéaire continue de F dans ℓ^2, je dis que l'endomorphisme $(\alpha'\gamma)\beta$ de ℓ^2 est de puissance q.ème sommable, où $1/q = 1/p - 1/2$. En effet, il est immédiat que $\alpha'\gamma$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, car sa matrice, qui est $(\lambda_i^{p/2} a_{ij})$, avec $a_{ij} = (\alpha' y_i)_j$, est une suite double de carré sommable, car

$$\sum_{i,j} \lambda_i^p |a_{ij}|^2 = \sum_i \lambda_i^p \sum_j |a_{ij}|^2 = \sum_i \lambda_i^p \|\alpha' y_i\|_2^2 \leq M \sum_i \lambda_i^p < +\infty$$

D'autre part, β est de puissance $(p/(1-p))$.ème sommable, puisque $\beta = \sum_i \lambda_i^{1-p} e_i' \otimes e_i$ (où (e_i) est la "base canonique" de ℓ^2). Il suffit alors d'appliquer le résultat rappelé plus haut pour trouver que $\alpha'\gamma\beta$ est dans $L^{(q)}(\ell^2, \ell^2)$, où $1/q = 1/p - 1/2$. Revenant maintenant aux conditions du th. 3, on voit que le composé u des opérateurs u_i sera aussi le composé d'une séquence d'opérateurs :

$$E_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} \ell^2 \xrightarrow[\beta_1]{} \ell^2 \xrightarrow[\gamma_1]{} E_2 \xrightarrow[\alpha_2]{} \ell^2 \xrightarrow[\beta_2]{} \ell^2 \xrightarrow[\gamma_2]{} E_3 \to \cdots \ell^2 \xrightarrow[\beta_n]{} \ell^2 \xrightarrow[\gamma_n]{} E_n$$

ou encore, en effectuant les produits $v_1 = \alpha_2\gamma_1\beta_1, \ldots v_{n-1} = \alpha_n\gamma_{n-1}\beta_{n-1}$, u est le composé de la séquence

$$E_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} \ell^2 \xrightarrow[v_1]{} \ell^2 \xrightarrow[v_2]{} \ell^2 \to \cdots \xrightarrow[v_{n-1}]{} \ell^2 \xrightarrow[\beta_n]{} \ell^2 \xrightarrow[\gamma_n]{} E_n$$

Or, d'après ce qui précède, chaque v_i est dans $L^{(q_i)}(\ell^2, \ell^2)$, où

$1/q_i = 1/p_i - 1/2$, et β_n est dans $L^{(q_n)}(\ell^2, \ell^2)$, où $1/q_n = 1/p_n - 1$. D'après "l'inégalité de Hölder" rappelée plus haut, le composé des v_i et de β_n est alors dans $L^{(r)}(\ell^2, \ell^2)$, avec $1/r = \sum_i 1/q_i = \sum_i 1/p_i - (n+1)/2$, d'où la partie qualitative du th. 3. L'inégalité donnée dans l'énoncé résulte aussitôt de la démonstration précédente, à condition d'écrire partout les majorations naturelles des normes des opérateurs qui entrent en jeu.

Remarque 1. – Quand, dans l'énoncé du th. 3, on a $n = 2$, il se peut que dans la formule (4), on trouve un $r > 1$ (c'est le cas notamment si $p_1 = p_2 = 1$), alors le th. 3 ne donne aucun renseignement. Il semble très plausible que dans la formule (4), on doive pouvoir remplacer $-(n+1)/2$ par $-(n-1)/2$ (comparer avec le n° suivant, prop. 1), alors on aurait automatiquement, pour $n \geqslant 2$, l'inégalité $r \leqslant 2/3$. Pour prouver cette conjecture, on voit immédiatement qu'on peut se ramener au cas du produit de deux opérateurs. D'ailleurs, les opérateurs de puissance p.ème sommable d'un espace E dans un espace F sont manifestement les composés d'une séquence de trois applications linéaires continues

$$E \xrightarrow[\alpha]{} \ell^\infty \xrightarrow[\beta]{} \ell^1 \xrightarrow[\gamma]{} F$$

où $\alpha(x) = (\langle x, x'_i \rangle)$, $\gamma((\xi_i)) = \sum_i \xi_i x_i$, et où β est l'opérateur de multiplication par la suite (λ_i), opérateur qui est évidemment de puissance p.ème sommable. On voit donc que pour prouver la conjecture ci-dessus, il suffit de prouver que si u est le composé d'une séquence

$$\ell^\infty \xrightarrow[\beta]{} \ell^1 \xrightarrow[A]{} \ell^\infty \xrightarrow[\beta']{} \ell^1$$

où β et β' sont des opérateurs de multiplication par une suite de ℓ^p et de ℓ^q respectivement, et où A est une application linéaire continue quelconque, alors u est un opérateur de puissance r.ème sommable de ℓ^∞ dans ℓ^1, où $1/r = 1/p + 1/q - 1/2$. (Cela est vrai en tous cas si u est considéré comme un opérateur de ℓ^2 dans ℓ^2, voir n° 4, lemme 1). En termes "matriciels", cela signifie aussi qu'une suite double (a_{ij}), majorée en module par une suite double $(\lambda_i\mu_j)$, où $(\lambda_i)\in\ell^p$, et $(\mu_j)\in\ell^q$, $(0<p, q\leqslant 1)$, est un élément de $\ell^1 \overset{(r)}{\otimes} \ell^1$, r étant défini comme ci-dessus.

4. <u>Ordre du déterminant de Fredholm</u>. <u>Décroissance de la suite des valeurs propres</u>.

Nous avons défini dans [11] le <u>déterminant de Fredholm</u> det(1 - zu) d'un novau d'opérateur de Fredholm dans un espace localement convexe E. C'est une fonction entière

$$\det(1 - zu) = 1 - z\,\mathrm{Tr}.u + \dots + (-1)^n z^n \alpha_n(u) + \dots$$

dont les zéros sont exactement, avec les ordres de multiplicités correspondants, les inverses des valeurs propres non nulles de l'opérateur $\tilde{u}$ défini par u ([11], chap. I, §2, n°6). Si $u = \sum \lambda_i x'_i \otimes x_i$, où (x'_i) (resp. (x_i)) est une suite extraite d'une partie bornée convexe cerclée de E' (resp. F) engendrant un espace de Banach, et (λ_i) une suite sommable de scalaires, les coefficients $\alpha_n(u)$ précédents s'explicitent par

$$\text{(5 bis)} \qquad \alpha_n(u) = \sum_{i_1<\dots<i_n} \lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_n} \det(\langle x_{i_\alpha}, x'_{i_\beta}\rangle)_{1\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant n}$$

D'autre part, rappelons le résultat suivant (H. Weyl, Proc. Nat. Acad, Sci, U.S.A. 35, 40-411 (1949)) : <u>Soient</u> H <u>un espace de Hilbert</u>, $0<p<+\infty$, <u>et</u> $u\in L^{(p)}(H,H)$. <u>Alors le déterminant de Fredholm de</u> u <u>est d'ordre</u> $\leqslant p$, <u>et si</u> (z_i) <u>est la suite des valeurs propres de</u> u, (<u>répétées suivant leur multiplicité</u>,) <u>on a</u>

$$\text{(6)} \qquad \sum_i |z_i|^p \leqslant s_p(u)$$

<u>Si</u> $p\leqslant 1$, <u>alors le déterminant de Fredholm de</u> u <u>est de genre</u> 0.

LEMME 1. - <u>Soit</u> $A = (\mu_i c_{ij} \nu_j)$ <u>une matrice infinie</u>, <u>où</u> $\mu = (\mu_i)\in\ell^p$, $\nu = (\nu_j)\in\ell^q$, <u>et</u> $|c_{ij}|\leqslant 1$ <u>pour tout</u> i, j, <u>et où</u> p <u>et</u> q <u>sont des nombres</u>

$0<p,\ q\leq 2$. C'est donc une matrice de Hilbert-Schmidt, définissant un opérateur v dans ℓ^2. Soit r tel que $1/r = 1/p + 1/q - 1/2$. Alors v est un opérateur de puissance r.ème sommable, et

$$(S_r(v))^{1/r} \leq (S_p(\mu))^{1/p}(S_q(\nu))^{1/q}$$

Compte tenu du résultat rappelé au début, il en résulte le

COROLLAIRE. - Sous les conditions précédentes, si $r\leq 1$ (i.e. $1/p + 1/q \leq 3/2$), le déterminant de Fredholm de la matrice donnée est de genre zéro et d'ordre $\leq r$, et si (z_i) est la suite de ses valeurs propres (répétées chacune selon sa multiplicité), on a

$$\sum_i |z_i|^r \leq (S_p(\mu))^{r/p}(S_q(\nu))^{r/q}$$

Pour prouver le lemme 1, on écrit $A = BA_1C$, où B est la matrice diagonale $(\mu_i{}^{1-p/2}\,\delta_{ij})$, C la matrice diagonale $(\nu_j{}^{1-q/2}\,\delta_{ij})$, et A_1 la matrice de Hilbert-Schmidt $(\mu_i{}^{p/2}c_{ij}\nu_j{}^{q/2})$. On aura évidemment, en posant $p' = p/(1-p/2)$, $q' = q/(1-q/2)$:

$$S_{p'}(B) = S_p(\mu)\ ,\quad S_{q'}(C) = S_q(\nu)\ ,\quad S_2(A_1) \leq S_p(\mu)\ S_q(\nu)$$

d'où suit, en vertu de l'inégalité de Hölder pour opérateurs, rappelée au début du n°3, que si on pose

$$1/r = 1/p' + 1/q' + 1/2 = 1/p + 1/q - 1/2$$

alors $A = BA_1C$ est de puissance r.ème sommable, et on a

$$(S_r(A))^{1/r} \leq (S_p(\mu))^{1/p'}(S_q(\nu))^{1/q'}(S_p(\mu)S_q(\nu))^{1/2}$$

Le deuxième membre n'est autre que $(S_p(\mu))^{1/p}(S_q(\nu))^{1/q}$, c.q.f.d.

PROPOSITION 1. - Soient E et F deux espaces localement convexes, et $u\in E'\overset{(p)}{\otimes} F$, $v\in F'\overset{(q)}{\otimes} E$, où $0<p,\ q\leq 1$. Considérons le noyau composé $v\circ u\in E'\hat{\otimes} E$ (dont la définition est évidente). C'est un noyau de Fredholm dont le déterminant de Fredholm est d'ordre $\leq r$, où $1/r = 1/p + 1/q - 1$; et la suite (z_i) des valeurs propres de l'opérateur défini par $v\circ u$, (répétées chacune selon son ordre de multiplicité), est de puissance r.ème sommable. Si E et F sont des espaces de Banach, on a

$$\left(\sum_i |z_i|^r\right)^{1/r} \leq (S_p(u))^{1/p}(S_q(v))^{1/q}$$

Démonstration. - Posons comme d'habitude

$$u = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes y_i \qquad v = \sum_j \mu_j y'_j \otimes x_j$$

d'où $v \circ u = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \langle y_i, y'_j \rangle \; x'_i \otimes x_j = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes X_i$, avec $X_i = \sum_j \mu_j \langle y_i, y'_j \rangle x_j$. Ecrivant $v \circ u = \sum_i \sqrt{\lambda_i} x'_i \otimes \sqrt{\lambda_i} X_i$, on voit que le déterminant de Fredholm de $v \circ u$ est aussi le déterminant de Fredholm de la matrice $A = (A_{ij})$, où

$$A_{ij} = \langle \sqrt{\lambda_i} X_i \;,\; \sqrt{\lambda_j} x'_j \rangle = \sum_k \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \mu_k \langle y_i, y'_k \rangle \; \langle x_k, x'_j \rangle$$
$$= \sum_k \left(\sqrt{\lambda_j \mu_k} \langle x_k, x'_j \rangle \right) \left(\sqrt{\lambda_i \mu_k} \langle y_i \;,\; y'_k \rangle \right)$$

Posons $B_{ij} = \sqrt{\lambda_j \mu_i} \langle x_i, x'_j \rangle$, $C_{ij} = \sqrt{\lambda_i \mu_j} \; \langle y_i, y'_j \rangle$ on a alors la relation matricielle $A = C.B$. Or, C et B sont des matrices d'opérateurs de Hilbert-Schmidt dans ℓ^2 qui, d'après le lemme 1, sont de puissance r'.ème sommable, où $1/r' = 1/2p + 1/2q - 1/2$, donc, d'après l'inégalité de Hölder pour opérateurs, A est la matrice d'un opérateur de puissance r.ème sommable dans ℓ^2, où $1/r = 2/r' = 1/p + 1/q - 1$, donc l'ordre de son déterminant de Fredholm est $\leq r$, et on a $\sum |z_i|^r < +\infty$, et même $\left(\sum_i |z_i|^r\right)^{1/r} \leq (S_{r'}(B))^{1/r'}(S_{r'}(C))^{1/r'} \leq (S_p(\lambda)^{1/2p} S_q(\mu)^{1/2q})^2$ si $|\langle x_i, x'_j \rangle| \leq 1$, $|\langle y_i, y'_j \rangle| \leq 1$ (lemme 1), or le dernier membre est égal à $S_p(\lambda)^{1/p} S_q(\mu)^{1/q}$. Si E et F sont des espaces de Banach, on en déduit l'inégalité de la prop. 1, puisque $S_p(\lambda)$ et $S_q(\mu)$ peuvent être rendus arbitrairement voisins de $S_p(u)$ et $S_q(v)$. De plus, comme $r \leq 1$, $\det(1-zA)$ est de genre 0, donc :

COROLLAIRE 1. - <u>Sous les conditions de la prop. 1, le composé</u> $v \circ u$ <u>est un noyau de Fredholm dont le déterminant de Fredholm est d'ordre</u> ≤ 1 <u>et de genre zéro. En particulier, la suite de ses valeurs propres est sommable, et a pour somme</u> Tr. $v \circ u$.

Il suffit de se rappeler, pour la dernière assertion, la forme

$1 - z\ \mathrm{Tr}.\ v \circ u + \dots$ du déterminant de Fredholm de $v \circ u$ et le fait que les valeurs propres de $v \circ u$ sont les inverses des zéros du déterminant de Fredholm (bien entendu, on convient comme toujours de compter aussi bien les zéros que les valeurs propres selon leur ordre de multiplicité, nous ne le spécifierons plus).

COROLLAIRE 2. - Soient E, F, G trois espaces localement convexes, u (resp. v) un noyau de Fredholm dans $E' \widetilde{\otimes} F$ (resp. dans $F' \widetilde{\otimes} E$). Si l'opérateur de E dans G défini par le noyau de Fredholm $v \circ u$ est nul, alors ce noyau est nul.

Il faut montrer que pour tout $A \in \mathcal{L}(E'_b, E)$, on a $\langle v \circ u, A \rangle = 0$. Or le premier membre s'écrit, en posant $w = v \circ u$: $\langle w, A \rangle = \mathrm{Tr}.\ w \circ {}^tA$ (Chap. I, §3, n°2, formule 12 bis), où $w \circ {}^tA$ est un noyau de Fredholm dans $G'_b \widetilde{\otimes} G$. Ce noyau est composé de deux noyaux de Fredholm v et $u \circ {}^tA$, donc (corollaire 1) sa trace est la somme de ses valeurs propres. Or l'opérateur défini par ce noyau est $\widetilde{w} \circ {}^tA$, où $\widetilde{w}$ est l'opérateur défini par w, il est donc nul, et n'a pas de valeurs propres non nulles, d'où la conclusion.

THÉORÈME 4. - Soit E un espace localement convexe, et soit u un noyau de Fredholm de puissance p.ème sommable dans $E' \widetilde{\otimes} E$, où $0 < p \leq 1$. Alors le déterminant de Fredholm de u est une fonction entière d'ordre $\leq r$, où $1/r = 1/p - 1/2$, et de genre 0 si $p \leq 2/3$. La suite (z_i) des valeurs propres de u est de puissance r.ème sommable. Si E est un espace de Banach, alors

$$\left(\sum_i |z_i|^r\right)^{1/r} \leq (S_p(u))^{1/p}$$

Supposons comme d'habitude que $u = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes x_i$, où $(\lambda_i) \in \ell^p$, $\lambda_i \geq 0$, et où (x'_i) (resp. x_i)) est une suite extraite d'une partie compacte convexe cerclée de E'_b (resp. E). On a

$$f(z) = \det(1 + zu) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(u) z^n$$

où $\alpha_n(u) = \sum_{i_1<\cdots<i_n} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_n} \det(\langle x_{i_\alpha}, x'_{i_\beta}\rangle)_{1\leq\alpha,\,\beta\leq n}$

d'où, d'après la majoration de Hadamard du déterminant, en supposant $|\langle x_i, x'_j\rangle| \leq 1$ pour tout i, j :

$$|\alpha_n(u)| \leq n^{n/2}\,\alpha_n(\lambda)$$

ou
$$\alpha_n(\lambda) = \sum_{i_1<\cdots<i_n} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_n}$$

Or, la fonction $g(z) = \prod_i (1 + \lambda_i z)$ est d'ordre $\leq p$, et ses coefficients sont les $\alpha_n(\lambda)$, d'où pour ces coefficients, pour tout $q > p$, une majoration $\alpha_n(\lambda) \leq Mn^{-n/q}$, d'où

$$|\alpha_n(u)| \leq Mn^{-(1/q\,-\,1/2)n} = Mn^{-n/s}\ , \text{ où } 1/s = 1/q - 1/2$$

D'après un théorème classique de Hadamard, il suit que f(z) est d'ordre $\leq s$, donc d'ordre $\leq r$, où $1/r = 1/p - 1/2$, puisque $q > p$ était arbitraire, ce qui prouve notre assertion relative à l'ordre du déterminant de Fredholm. Pour l'assertion relative à la suite des valeurs propres, il suffit d'appliquer la prop. 1 au noyau u^2, dont la suite des valeurs propres est (z_i^2). Supposons enfin que u est un opérateur de puissance 2/3 sommable, alors avec les notations ci-dessus, on peut écrire aussi

$$u = \sum_i \sqrt{\lambda_i}\, x'_i \otimes \sqrt{\lambda_i}\, x_i$$

donc son déterminant de Fredholm est aussi le déterminant de Fredholm de la matrice $A = (a_{ij})$, où $a_{ij} = \sqrt{\lambda_i\lambda_j}\,\langle x_i, x'_j\rangle$. Comme $(\sqrt{\lambda_i}) \in \ell^{4/3}$, on peut appliquer à cette matrice le lemme 1, donc avec les notations de ce lemme on a $1/r = 3/4 + 3/4 - 1/2 = 1$, d'où $r \leq 1$. Donc (corollaire du lemme 1), le déterminant de Fredholm de A est de genre zéro.

COROLLAIRE 1. – <u>Le déterminant de Fredholm d'un noyau de Fredholm dans</u> $E'\hat{\otimes}E$ <u>est d'ordre</u> 2, <u>et la suite de ses valeurs propres est de carré sommable</u>.

COROLLAIRE 2. – <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe</u>, u <u>un noyau de Fredholm dans</u> $E'\hat{\otimes}E$. <u>Le déterminant de Fredholm de</u> u <u>est de la forme</u>

(7) $\det(1 - zu) = e^{-z\mathrm{Tr}.u} \prod_i (1 - zz_i)e^{zz_i}$

<u>le produit étant étendu aux valeurs propres non nulles de l'opérateur défini par</u> u. <u>En particulier</u>, <u>si</u> $\sum_i |z_i| < +\infty$, <u>on a</u>

$$\det(1 - zu) = e^{-\alpha z} \prod_i (1 - zz_i) \text{ où } \alpha = \mathrm{Tr}.u - \sum_i z_i$$

D'après le corollaire 1, et un théorème classique de Hadamard, on a

(8) $\det(1 - zu) = e^{Az+Bz^2} \prod_i (1 - zz_i)e^{zz_i}$

(le terme constant du polynôme qui est en exposant peut être pris nul, puisque pour $z = 0$ le premier membre est égal à 1). Changeant z en $-z$, et multipliant membre à membre les deux relations obtenues, il vient
$\det(1 - z^2u^2) = e^{2Bz} \prod_i (1 - z^2z_i^2)$, d'où, en posant $Z = z^2$, $U = u^2$:

$$\det(1 - ZU) = e^{2BZ} \prod_i (1 - Zz_i^2)$$

Mais d'après la prop. 1, le premier membre est une fonction entière d'ordre $\leq 2/3$, donc de genre zéro, d'où $B = 0$. D'autre part, développant alors le deuxième membre de (8) en fonction entière, on obtient $1 + Az + \ldots$, d'où $A = -\mathrm{Tr}.u$, ce qui achève de prouver le corollaire 2.

COROLLAIRE 3. - <u>Soient</u> E, F <u>deux espaces localement convexes</u>, <u>et soit</u> $0 < p \leq 2/3$. <u>Alors l'application linéaire canonique de</u> $E \overset{(p)}{\otimes} F$ <u>dans</u> $B(E'_b, F'_b)$ <u>est biunivoque</u>.

On procède comme pour le corollaire 2 de la prop. 1, en utilisant le fait que la trace d'un noyau de Fredholm de puissance p.ème sommable dans $F' \overline{\otimes} F$ est la somme de ses valeurs propres (puisque en vertu du th. 4 le déterminant de Fredholm est de genre zéro).

COROLLAIRE 4. - <u>Soit</u> u <u>un opérateur de puissance</u> 2/3 <u>sommable dans un espace localement convexe</u> E. <u>Alors on peut considérer le déterminant de Fredholm de</u> u, (<u>qui est le déterminant de Fredholm du seul noyau de Fredholm de puissance p.ème sommable dans</u> $E' \overline{\otimes} E$ <u>qui définisse l'opérateur</u> u - voir corollaire 3). <u>On a</u>

$$\det(1 - zu) = \prod_i (1 - zz_i)$$

le produit du second membre étant étendu aux valeurs propres non nulles z_i de u, suite qui est sommable. En particulier, on a

$$\mathrm{Tr}.u = \sum_i z_i$$

COROLLAIRE 5. - Soit E un espace localement convexe, u un noyau de Fredholm dans $E' \overline{\otimes} E$. Pour que u n'ait pas de valeurs propres non nulles, il faut et il suffit qu'on ait $\mathrm{Tr}.u^n = 0$ pour $n \geqslant 2$. Si alors u est de puissance 2/3 sommable, on a aussi $\mathrm{Tr}.u = 0$.

Comme $\det(1 - zu) = \exp.(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \mathrm{Tr}.u^n)$ pour $|z| \leq 1$, on aura, si $\mathrm{Tr}.u^n = 0$ pour $n \geqslant 2$: $\det(1 - zu) = \exp.(-z\mathrm{Tr}.u)$ pour $|z| \leq 1$, donc pour tout z par prolongement analytique, donc le déterminant de Fredholm n'a pas de zéros, et par suite u n'a pas de valeur propre non nulle. Réciproquement, si u n'a pas de valeur propre non nulle, et si $n \geqslant 2$, on a $u^n = u^{n-1}u$, donc u^n est le composé de deux noyaux de Fredholm, donc son déterminant de Fredholm est de genre zéro (prop. 1, corollaire 1), donc sa trace est la somme de ses valeurs propres. Comme u^n n'a pas de valeur propre non nulle, il suit bien que $\mathrm{Tr}.u^n = 0$. De même, si u est de puissance 2/3 sommable, sa trace est la somme de ses valeurs propres (corollaire 4) donc nulle.

COROLLAIRE 6. - Soit E un espace localement convexe, u un noyau de Fredholm d'ordre 0 (n°2, définition 2) dans $E' \overline{\otimes} E$. Alors la suite des valeurs propres de u, rangées par ordre de modules non croissants, est à décroissance rapide.

Remarque 2. - Il existe des opérateurs de Fredholm dont la suite des valeurs propres n'est dans ℓ^p pour aucun $p < 2$ (ce qui prouve que le th. 4, corollaire 1, ne peut être notablement amélioré). On prendra une fonction continue f sur le tore à une dimension T, dont la suite des coefficients de Fourrier ne soit de puissance p.ème sommable pour aucun $p < 2$ (voir [27]), et l'opérateur de composition par f dans l'espace de Banach C(T) des fonctions continues sur T (c'est bien un opérateur de Fredholm, comme il résulte par exemple de [11], §3, th. 1, cor. 3). Cela prouve aussi que la prop. 1 ne peut être notablement améliorée même si $p = q = 1$: prendre le carré de l'opérateur précédent.

On peut se demander si, dans le cas où la suite des valeurs propres est sommable, le déterminant de Fredholm est forcément de genre 0, ou, ce qui revient au même en vertu du th. 4, corollaire 2, si alors on a $\mathrm{Tr}.u = \sum z_i$ (où (z_i) est la suite des valeurs propres). En particulier, si u n'a pas de valeur propre non nulle, a-t-on $\mathrm{Tr}.u = 0$? Comparer avec le corollaire 5 du th. 4, et le Chap. I, §5, prop. 38.

<u>Remarque</u> 3. - La prop. 1 se généralise sans peine au composé d'une séquence quelconque d'opérateurs de Fredholm. On obtient un résultat qui serait un corollaire direct du th. 3 et du th. 4, si on pouvait donner du th. 3 la version améliorée signalée dans la remarque 1.

<u>Remarque</u> 4. - <u>Appelons</u> "<u>suite non ordonnée de nombres complexes</u>" toute fonction à valeurs entières $\geqslant 0$, définie sur le plan complexe privé de l'origine, ne prenant qu'une infinité dénombrable de fois au plus des valeurs non nulles. Toute suite ordinaire de nombres complexes définit de façon naturelle une "suite non ordonnée de nombres complexes". Si u est un opérateur compact dans un espace localement convexe, il lui correspond de façon naturelle "la suite non ordonnée des valeurs propres de u". Soit $0 < p < +\infty$, une suite non ordonnée de nombres complexes est dite de puissance p.ème sommable, si elle provient d'une suite ordinaire (z_i) de puissance p.ème sommable. On définit une distance d_p dans l'ensem-

ble des suites non ordonnées de puissance p.ème sommable, en posant $d_p(\alpha,\beta) = \operatorname{Inf}\|(\alpha_i) - (\beta_i)\|_p$, où (α_i) (resp. (β_i)) parcourt l'ensemble des éléments de ℓ^p qui définissent la suite non ordonnée α (resp. β). Il est immédiat de vérifier que les axiomes d'une distance sont vérifiés, et que l'espace métrique ainsi obtenu est complet. On l'appellera "espace des suites complexes non ordonnées de puissance p.ème sommable", et on le notera $\Sigma(p)$. L'intersection des espaces $\Sigma(q)$ pour $q>p$, où maintenant $0\leq p<+\infty$, est appelé "espace des suites non ordonnées d'ordre $\leq p$", et sera muni de la structure uniforme borne supérieure des structures uniformes induites par les espaces $\Sigma(q)$ avec $q>p$. C'est un espace uniforme métrisable complet comme on vérifie trivialement, que nous noterons $\Sigma[p]$.

Ceci dit, soit E un espace de Banach, et soit $0<p\leq 1$. Pour tout $u\in E'\overset{(p)}{\otimes}E$, soit $\hat{u}$ la suite non ordonnée des valeurs propres de u, on a (th. 4) $\hat{u}\in\Sigma(r)$, où $1/r = 1/p - 1/2$. On peut montrer que <u>l'application $u\longrightarrow\hat{u}$ de $E'\overset{(p)}{\otimes}E$ dans l'espace $\Sigma(r)$ des suites non ordonnées de puissance r.ème sommable est continue</u>. Voici le principe de la démonstration : il suffit de montrer que l'application $u\longrightarrow\hat{u}$ est continue pour les suites. On utilise alors le th.1 qui donne une représentation commode des suites convergentes dans $E'\overset{(p)}{\otimes}E$, ce qui permet facilement, comme dans la démonstration de la prop. 1, de se ramener à un résultat plus fin sur les espaces de Hilbert : Si H est un espace de Hilbert, l'application $u\longrightarrow\hat{u}$ de $H'\overset{(p)}{\otimes}H$ dans $\Sigma(p)$ est continue. D'ailleurs, du résultat que $u\longrightarrow\hat{u}$ est une application continue de $E'\overset{(p)}{\otimes}E$ dans $\Sigma(r)$ suit aussitôt : <u>L'application naturelle $u\longrightarrow\hat{u}$ de $E'\overset{[p]}{\otimes}E$ dans l'espace $\Sigma(r)$ des suites non ordonnées d'ordre $\leq r$, est continue</u>. En particulier, pour $p = 0$, on a $r = 0$, d'où un résultat intéressant sur les suites convergentes d'opérateurs de Fredholm d'ordre zéro.

5. Magnitude d'un ensemble.

DÉFINITION 3. - Soient E un espace localement convexe, A une partie bornée de E, B son enveloppe convexe cerclée, soit $0 < p \leq 1$. On dit que A est de magnitude p, si l'application linéaire naturelle de l'espace E_B dans E est de puissance p.ème sommable (définition 1). Un ensemble de magnitude 1 est dit ensemble nucléaire. On appelle ordre d'un ensemble nucléaire A, la borne inférieure des $p \leq 1$ tels que A soit de magnitude p.

Si nous supposons pour simplifier que E est quasi-complet ; dire que A est de magnitude p signifie qu'il existe une suite (x_i) bornée dans E, une suite (x'_i) de formes linéaires sur E_B, uniformément bornées sur B, et une suite $(\lambda_i) \in \ell^p$, telles que pour tout $x \in E_B$, on ait

$$x = \sum_i \lambda_i \langle x, x'_i \rangle x_i$$

On peut alors supposer que (x'_i) tend même vers 0 dans le dual fort de E_B, et que (x_i) tend vers 0 dans E. Si A est de magnitude p (resp. d'ordre $\leq p$) alors toute partie de A est de magnitude p (resp. d'ordre $\leq p$).

PROPOSITION 2. - Soient E et F deux espaces localement convexes, u une application linéaire continue de E dans F, et soit $0 < p \leq 1$. Pour que u soit de puissance p.ème sommable (resp. d'ordre $\leq p$), il suffit que u transforme un voisinage convenable de 0 dans E en une partie de F de magnitude p (resp. d'ordre $\leq p$).

Réciproquement, si u est une application de puissance p.ème sommable, et si u est biunivoque, ou plus généralement, si son noyau admet un supplémentaire topologique, alors u transforme un voisinage de zéro de E_τ en une partie de F de magnitude p. Quand u est de puissance p.ème sommable sans plus, et $p \leq 2/3$, alors u transforme un voisinage de 0 dans E_τ en une partie de F de magnitude r, où $1/r = 1/p - 1/2$.

Démonstration. - Elle est triviale, sauf la dernière affirmation, relative au cas où on suppose u de puissance p.ème sans plus, avec $p \leqslant 2/3$. On se ramène immédiatement au cas où E et F sont des espaces de Banach. Décomposons encore $u = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes y_i$ en produit de deux applications linéaires continues

$$E \xrightarrow{\alpha} \ell^2 \xrightarrow{\beta} F$$

où α est défini par $(\alpha.x)_i = \lambda_i^{p/2} \langle x, x'_i \rangle$, β par $\beta.(\xi_i) = \sum_i \lambda_i^{1-p/2} \xi_i y_i$ soit encore $\beta = \sum_i \lambda_i^{1-p/2} e'_i \otimes y_i$, où les e'_i sont les formes linéaires coordonnées sur ℓ^2. Comme $(\lambda_i^{1-p/2}) \in \ell^r$, où $1/r = 1/p - 1/2$, et que $r \leqslant 1$ (puisque $p \leqslant 2/3$), β est une application de puissance r.ème sommable de ℓ^2 dans F. Comme son noyau admet un supplémentaire topologique (comme tout sous-espace vectoriel fermé de ℓ^2!) on peut appliquer la première assertion de la prop. 2, 2°, d'où résulte aussitôt la conclusion voulue.

COROLLAIRE 1. - <u>Si</u> $0 < p \leqslant 2/3$, <u>l'enveloppe convexe cerclée d'un nombre fini d'ensembles de magnitude</u> p <u>dans</u> E <u>est de magnitude</u> r, <u>où</u> $1/r = 1/p - 1/2$. (<u>En particulier</u>, <u>l'enveloppe convexe cerclée d'un nombre fini d'ensembles d'ordre zéro est d'ordre zéro</u>).

COROLLAIRE 2. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces localement convexes</u>, <u>et soit</u> $0 < p \leqslant 2/3$. <u>Alors l'image d'une partie de</u> E <u>de magnitude</u> p <u>par une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F <u>est de magnitude</u> r, <u>où</u> $1/r = 1/p - 1/2$. <u>En particulier</u>, <u>l'image d'un ensemble d'ordre zéro est d'ordre zéro</u>.

On notera qu'il n'est pas vrai que si u est un opérateur de puissance p.ème sommable, d'un espace de Banach E dans un autre F pour fixer les idées, u transforme la boule unité de E en une partie de F de magnitude p, (même si E et F sont réflexifs, et p = 1). Cela signifierait en effet, en désignant par N le noyau de u, que l'application de E/N dans F définie par u est de puissance p.ème sommable. Or on a vu qu'en général il n'en est rien (Chap. I, §3, n°2, remarque 9). On voit de la même façon que si M est un sous-espace vectoriel fermé de F, une partie de M peut être de magnitude p dans F sans l'être dans N (prendre encore $p = 1$). Cependant, on a le

THÉORÈME 5. - *Soient* E, F *deux espaces localement convexes*, u *une application linéaire de puissance p.ème sommable de* E *dans* F, *où* $0 < p \leq 2/3$. *Soit* N *un sous-espace vectoriel fermé de* E *contenu dans le noyau de* u (*resp.* M *un sous-espace vectoriel fermé de* F *contenant* u(E)). *Alors l'application linéaire* v *de* E/N *dans* F (*resp. de* E *dans* M) *définie par* u *est de puissance r.ème sommable où* $1/r = 1/p - 1/2$.

Démonstration. - Envisageons d'abord l'application de E/N dans F définie par u. D'après la deuxième partie de la prop. 2, u transforme un voisinage de 0 pour $\tau(E,E')$ en une partie de F de magnitude r, où $1/r = 1/p - 1/2$, il en est donc de même de v, d'où la conclusion voulue en vertu de la première partie de la prop. 2 (compte tenu du fait que les applications de puissance r.ème sommable d'un espace E ne dépendent pas de la topologie de E, mais seulement de son dual). Supposons maintenant que v soit l'application de E dans M définie par u. Soit F'_c l'espace F' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes convexes cerclées de F. ${}^tu$ est évidemment une application de puissance p.ème sommable de F'_c dans E'_τ , s'annulant sur le polaire M^o de M, donc l'application v' de F'_c/M^o qui lui correspond est de puissance r.ème sommable, d'après ce qui précède. Comme le dual de F'_c/M^o est évidemment M, il suit que ${}^tv'$ est une application linéaire de puissance r.ème sommable de E dans M. Or il est immédiat que ${}^tv' = v$.

COROLLAIRE 1. - E, F, M *et* N *étant comme dans l'énoncé du th.* 5, *l'application de* E/N *dans* M *définie par* u *est de puissance r.ème sommable, où* $1/r = 1/p - 1$, *pourvu que* $r \leq 1$, i.e. $p \leq 1/2$.

Il suffit d'appliquer deux fois de suite le th. 5.

COROLLAIRE 2. - *Sous les conditions précédentes, si* u *est une appli-*

cation d'ordre zéro de E *dans* F, u *définit aussi une application d'ordre zéro de* E/N *dans* M.

COROLLAIRE 3. - *Si* M *est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace localement convexe* F, A *une partie de* M *qui est de magnitude* p *dans* F (*où* $0 < p \leq 2/3$), *alors* A *est de magnitude* r *dans* M, *où* $1/r = 1/p - 1/2$. *En particulier, si* A *est d'ordre zéro dans* F, *il est d'ordre* 0 *dans* M.

Un autre conséquence intéressante du th. 5 est la

PROPOSITION 3. - *Soit* E *un espace localement convexe*, F *un sous-espace vectoriel fermé*, u *un opérateur de puissance p.ème sommable dans* E *tel que* $u(F) \subset F$, *où* $0 < p \leq 1/2$. *Soient* r *et* s *tels que* $1/r = 1/p - 1/2$, $1/s = 1/p - 1$. *Alors* u *est de la forme*

$$u = \sum_i \lambda_i x_i' \otimes x_i + \sum_i \mu_i y_i' \otimes y_i$$

où $(\lambda_i) \in \ell^r$, $(\mu_i) \in \ell^s$, *où* (x_i') *et* (y_i') (*resp.* (x_i) *et* (y_i)) *sont deux suites extraites d'une partie compacte convexe cerclée de* E_b' (*resp.* E), *avec* $x_i \in F$, $y_i' \in F^0$.

Démonstration. - On peut trouver un voisinage convexe cerclé V de 0 dans E_τ tel que u provienne d'une application de puissance p.ème sommable de $\widehat{E_V}$ dans E; il suit, en posant $U = V \cap F$, que la restriction de u à F provient d'une application de puissance p.ème sommable de $\widehat{F_U}$ dans E. En vertu du th. 5, comme cette application applique $\widehat{F_U}$ dans F, c'est une application de puissance r.ème sommable de $\widehat{F_U}$ dans F, où $1/r = 1/p - 1/2$, donc de la forme $\sum_i \lambda_i z_i' \otimes x_i$, où $(\lambda_i) \in \ell^r$, et où (z_i') (resp. (x_i)) est une suite extraite d'une partie compacte convexe cerclée de $(\widehat{F_U})'$ (resp. de F). En vertu du th. de Hahn-Banach, les z_i', identifiés à des formes linéaires sur F, sont les restrictions d'une suite (x_i') de formes linéaires sur E, uniformément bornées sur V. Posons $v = u - \sum_i \lambda_i x_i' \otimes x_i$, c'est une application de E dans E de puissance r.ème sommable, s'annulant sur F. En vertu du th. 5, l'application de E/F dans E qu'elle définit est de puissance s.ème sommable, où $1/s = 1/r - 1/2 = 1/p - 1$, donc de la forme $\sum_i \mu_i y'_i \otimes y_i$, où $(\mu_i) \in \ell^s$, et où (y'_i) (resp. (y_i)) est une suite extraite d'une partie compacte convexe cerclée du dual fort de E/F (resp. de E). Comme le dual fort de E/F s'applique continûment dans le sous-espace F^o de E'_b, la conclusion voulue suit aussitôt.

COROLLAIRE. - Sous les conditions de la proposition 3, si u_1 (resp. u_2) désigne l'opérateur dans F (resp. dans E/F) défini par u, u_1 et u_2 sont des opérateurs de Fredholm. Supposons que $p \leq 2/5$, ou que E est un espace de Banach et que E, F, E/F satisfont à la condition d'approximation (Chap. I, §5, n°1, définition 9). Dans le premier cas, u, u_1 et u_2 sont de puissance $2/3$ sommable, donc dans tous les cas on peut prendre $\mathrm{Tr.}u$, $\mathrm{Tr}u_1$, $\mathrm{Tr.}u_2$ (voir corollaire 3 du th. 4). Alors on a

$$\mathrm{Tr.}u = \mathrm{Tr.}u_1 + \mathrm{Tr.}u_2$$

Ce corollaire résulte immédiatement de la décomposition donnée dans la prop. 3. D'ailleurs, sous les conditions du corollaire, en appliquant ce même corollaire aux itérés successifs de u et en appliquant la formule générale $\det(1 - zu) = \exp(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \mathrm{Tr.}u^n)$ (valable pour z assez petit), on conclut aussi

$$\det(1 - zu) = \det(1 - zu_1)\det(1 - zu_2)$$

J'ignore si le corollaire est vrai si on suppose seulement $p \leq 2/3$, ou si u est le composé de deux opérateurs de Fredholm.

PROPOSITION 4. - Soit E un espace localement convexe, quasi-complet pour simplifier.

1. Soit $0 < p \leq 1$, et soit A une partie de E de magnitude p. Alors A est contenu dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'une suite $(\lambda_i x_i)$, où (x_i) est une suite bornée dans E, et où $(\lambda_i) \in \ell^r$, avec $1/r = 1/p - 1$.

2. Soit (x_i) une suite bornée dans E, et soit $(\lambda_i) \in \ell^q$, où $0 < q \leq 1$. Alors l'enveloppe convexe cerclée fermée de la suite $(\lambda_i x_i)$ est de

magnitude p, où $1/p = 1/q - 1/2$

Démonstration. - 1. Supposant A convexe cerclé, on a pour $x \in F_A$: $x = \sum_i \mu_i \langle x, x'_i \rangle x_i$, où (x'_i) est une suite bornée de formes linéaires bornées sur F_A, (x_i) une suite bornée dans E, et $(\mu_i) \in \ell^p$. On peut supposer $\sum_i |\mu_i|^p \leq 1$ et $|\langle x, x'_i \rangle| \leq 1$ pour $x \in A$. On aura alors, pour $x \in A$: $x = \sum_i \xi_i y_i$, où $\xi_i = \mu_i{}^p \langle x, x'_i \rangle$, et $y_i = \mu_i^{1-p} x_i$. Comme $\sum_i |\xi_i| \leq 1$, x est dans l'enveloppe convexe cerclée fermée de la suite fixe (y_i), qui est bien du type annoncé (faire $\lambda_i = \mu_i^{1-p}$).

2. La deuxième partie est un corollaire de la prop. 2, car l'enveloppe convexe cerclée fermée de la suite $(\lambda_i x_i)$ est identique à l'ensemble des sommes $\sum_i \mu_i \lambda_i x_i$, où $\sum |\mu_i| \leq 1$, donc identique à l'image de la boule unité de ℓ^1 par l'application $u = \sum_i \lambda_i e'_i \otimes x_i$ (e'_i étant la i.ème forme coordonnée sur ℓ^1), application qui est de puissance q.ème sommable.

COROLLAIRE 1. - Soit A une partie de E de magnitude p, où $0 < p \leq 2/5$. Alors son enveloppe convexe cerclée fermée est de magnitude r, où $1/r = 1/p - 3/2$.

Il suffit d'appliquer successivement les deux parties de prop. 4

COROLLAIRE 2. - Soit E un espace du type $(\mathcal{F})$. Pour qu'une partie A de E soit d'ordre 0, il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'une suite à décroissance rapide dans E. En particulier, son enveloppe convexe cerclée fermée est d'ordre zéro.

Rappelons qu'une suite (x_i) dans un espace localement convexe E est dite "à déoroissance rapide", si pour toute semi-norme continue p sur E, la suite $(p(x_i))$ est à décroissance rapide ; et que si E est du type $(\mathcal{F})$, cela signifie aussi que cette suite est de la forme $(\lambda_i y_i)$, où (y_i) est une suite bornée dans E, et où (λ_i) est une suite de scalaires à décroissance rapide (comme on s'en convainc facilement en utilisant la "propriété de dénombrabilité de Mackey"). La partie directe du corollaire 2 résulte alors immédiatement du corollaire du th. 2 (n°2), la réciproque résulte de la prop. 4, 2°.

Remarque 5. - Dans la remarque 1 (n°1) nous posions une conjecture qui impliquait que le produit vu de deux opérateurs de Fredholm (u de E dans F, v de F dans G) est de puissance 2/3 sommable. En composant avec la prop. 3, il suivrait aussitôt que $v \circ u$ transforme un voisinage V de 0 dans E_τ convenable en une partie nucléaire A de G. Ce résultat est effectivement vrai, et peut se démontrer très élémentairement ainsi : on considère encore u comme composé de deux applications linéaires continues :

$$E \xrightarrow{\alpha} \ell^2 \xrightarrow{\beta} F,$$

de telle sorte qu'on est ramené au fait que l'application de Fredholm $v\beta$ de ℓ^2 transforme la boule unité de ℓ^2 en une partie nucléaire de F, ce qui résulte en effet aussitôt du fait que tout sous-espace vectoriel fermé de ℓ^2 admet un supplémentaire topologique (prop. 2, 2°).

6. Exemples.

La théorie des espaces nucléaires (voir §§ suivants) nous donnera un grand nombre d'exemples d'applications d'ordre zéro et d'ensembles d'ordre zéro (voir §2, n°4, th. 11, corollaires 1 et 2).

Les applications de Fredholm d'un espace localement convexe dans un espace $L^1(\mu)$, et les parties nucléaires de $L^1(\mu)$, ont été caractérisés très simplement au Chap. I, §2, prop. 9 et corollaire. Il est facile, par transposition, d'en déduire une caractérisation concrète des applications de Fredholm d'un espace C(K) (espace des fonctions continues sur l'espace compact K) dans un espace localement convexe quelconque (voir [11] , §3, th. 1, cor. 2).

En dehors du cadre des espaces nucléaires et des deux cas précédents, il ne semble pas y avoir de caractérisation simple des applications de Fredholm, ou des applications d'ordre 0, d'un espace localement convexe donné dans un autre, autres que les caractérisations générales obtenues aux numéros précédents. (Nous mettons à part le cas des applications d'un espace de Hilbert dans un autre, où toutes les classes d'opérateurs envisagés précédemment sont particulièrement bien connues - voir [11], Chap. 2). Dans la suite de ce numéro, nous nous bornons à établir que certaines applications linéaires, importantes en pratique, sont de puissance p.ème sommable. Ces résultats sont d'ailleurs sans doute bien connus, à la notation générale et commode développée précédemment près.

T^d désigne le tore à d dimensions, espace produit de d espaces identiques au tore à une dimension $T = R/Z$ (groupe quotient de la droite réelle par le groupe des entiers Z). Soit m un entier, E un espace localement convexe ; $\mathcal{E}^{(m)}(T^d,E)$ désigne l'espace des applications de T^d dans E qui sont m fois continûment différentiables, $\mathcal{E}^{(m)}_{L^p}(T^d,E)$ l'espace des applications de T^d dans E qui sont "m fois différentiables au sens de L^p" - où $0 \leq p \leq +\infty$ est donné -, ce qui signifie que pour tout $x' \in E'$, $\langle f(t),x'\rangle$ est une fonction sur T^d qui est dans L^p ainsi que ses distributions dérivées d'ordre $\leq m$, et que pour tout indice de dérivation α d'ordre $\leq m$, on a

$$D^\alpha \langle f(t), x'\rangle = \langle f_\alpha(t), x'\rangle$$

où $f_\alpha(t)$ est une application de T^d dans E qui est scalairement de puissance p.ème sommable.[1] On a donc

$$\mathcal{E}^{(m)}(T^d,E) \subset \mathcal{E}^{(m)}_{L^2}(T^d,E) \subset \mathcal{E}^{(m)}_{L^1}(T^d,E)$$

PROPOSITION 5. - 1. Soit f une application de T^d dans un espace localement convexe, quasi-complet E, ℓ fois différentiable au sens de L^1. Si m est un entier tel que $\ell > m + d$ (ce qui implique donc $\ell > d$), on a

$$(9) \qquad f = \sum_i \lambda_i \varphi_i \otimes a_i$$

où (a_i) est une suite bornée dans E, (φ_i) une suite bornée dans $\mathcal{E}^{(m)}(T^d)$, et où (λ_i) est une suite ayant un exposant de convergence $\leqslant r$, où

$$r = d/(\ell - m)$$

Par suite, on a, si $\ell > m + d$, $r = d/(\ell - m)$:

$$\mathcal{E}_{L^1}^{(\ell)}(T^d, E) \subset \mathcal{E}^{(m)}(T^d) \overset{[r]}{\otimes} E$$

2. Soit f une application de T^d dans un espace de Hilbert E, ℓ fois différentiable au sens de L^2. Alors, si m est un entier $\geqslant 0$ tel que $\ell > m + d/2$ (ce qui implique donc $\ell > d/2$), on a encore la formule (9) mais où r est donné par

$$1/r = 1/2 + (\ell - m)/d$$

Par suite on a, si $\ell > m + d/2$, $1/r = 1/2 + (\ell - m)/d$:

$$\mathcal{E}_{L^2}^{(\ell)}(T^d, E) \subset \mathcal{E}^{(m)}(T^d) \overset{[r]}{\otimes} E$$

Bien entendu, comme d'habitude, $\varphi \otimes a$ désigne la fonction $t \longrightarrow \varphi(t)a$. Les deux inclusions données dans l'énoncé sont justifiées si on identifie, comme il est toujours possible, $\mathcal{E}^{(m)}(T^d) \overset{(1)}{\otimes} E$ (donc son sous-espace $\mathcal{E}^{(m)}(T^d) \overset{[r]}{\otimes} E$) à un espace d'applications de T^d dans E.

Démonstration. - Nous utiliserons la transformation de Fourier. Soit Z^d l'ensemble des éléments de R^d à coordonnées entières, $n = (n_1, \dots, n_d)$ l'élément générique de Z^d, $|n|$ son module; soit e_n l'exponentielle $e_n(\xi) = \exp.(\sum_{\alpha=1}^{d} 2i\pi \xi_\alpha n_\alpha)$, considérée comme une fonction sur T^d. La série de Fourier de f est [2] :

---

1. Bien entendu, une fonction f à valeurs dans E est dite scalairement de puissance p.ème sommable, si pour tout $x' \in E'$, la fonction scalaire $\langle f(t); x' \rangle$ est de puissance p.ème sommable.

2. Bien entendu, les coefficients de Fourier de la fonction vectorielle f sont donnés par définition par $a_n = \int_{T^d} f(\xi) e_n(\xi) d\xi$. Si E est quasi-complet et f faiblement continue, ou si E est un espace de Banach réflexif (en particulier, dans les conditions envisagées dans la prop. 5), ces

$$f \approx \sum_n a_n \otimes e_n$$

La fonction $n \longrightarrow a_n$ (définie sur Z^d, à valeurs dans E) est telle que son produit par $(1 + |n|)^{\ell}$ reste borné, comme on voit en se ramenant immédiatement au cas scalaire, où cela résulte d'intégrations par parties classiques. Posons donc $b_n = (1 + |n|)^{\ell} a_n$, $\varphi_n = e_n/(1 + |n|)^m$, $\lambda_n = (1 + n)^{-(\ell - m)}$. On vérifie immédiatement que (φ_n) est une suite (multiple) bornée dans $\mathcal{E}^{(m)}(T^d)$; d'autre part l'exposant de convergence de la suite (λ_n) est $\leqslant r = d/(\ell - m) \leqslant 1$, et on aura manifestement $f = \sum_n \lambda_n \varphi_n \otimes b_n$.

2. se démontre de façon analogue, mais ici le produit $a_n(1 + n)^{\ell}$ est non seulement borné dans E, mais a même décroissance à l'infini qu'une transformée de Fourier (vectorielle) d'une fonction de carré sommable sur T^d à valeurs dans l'espace de Hilbert H, i.e. est elle-même de carré sommable, d'où aussitôt l'amélioration voulue de la conclusion de la première partie.

COROLLAIRE 1. - *Soit* f *une application d'un ouvert* U *de* R^d, *dans un espace localement convexe quasi-complet* E, ℓ *fois continûment différentiable, avec* $\ell > 3/2\ d$; *soit* K *un compact dans* U. *Alors l'enveloppe convexe cerclée fermée de* f(K) *est d'ordre* r, *où* $1/r = \ell/d - 1/2$. *Si* E *est un espace de Hilbert, il suffit que* ℓ/d, *et on peut prendre* $r = d/\ell$.

Recouvrons K par un nombre fini d'homothétiques K_α du cube I^d contenus dans U (où I est lintervalle compact (0,1)). Soit K'_α un autre cube homothétique à I^d, contenu dans U, tel que K_α soit intérieur à K', et soit ψ_α une fonction indéfiniment différentiable sur R^d égale à 1 sur K_α, à 0

---

intégrales représentent bien des éléments de E. Il est bien connu que la formule de Fourier-Plancherel vaut encore pour des fonctions de carré sommable à valeurs dans un espace de Hilbert.

dans $\complement K'_\alpha$. Posons $g_\alpha = \psi_\alpha f$. $f(K_\alpha)$ est contenu dans l'image de la boule unité de l'espace $\mathcal{M}(K_\alpha)$ des mesures de Radon sur K_α par une application linéaire faiblement continue $\sum_i \lambda_i \varphi_i \otimes a_i$ (où les φ_i sont des fonctions continues sur K_α interprétées comme des formes linéaires faiblement continues sur $\mathcal{M}(K_\alpha)$, dual de $C(K_\alpha)$) qui est d'ordre s, où $s = d/\ell$ (appliquer la prop. 5, 2° à la fonction g_α sur K'_α, qui y est la restriction d'une fonction d fois périodique et ℓ fois continûment différentiable sur R^d ; on fera $m = 0$ dans l'énoncé de la prop. 5). Si E est un espace de Hilbert, on peut même prendre s tel que $1/s = \ell/d + 1/2$ (prop. 5, 2°). Prenant la somme directe des $\mathcal{M}(K_\alpha)$, dual de la somme directe des $C(K_\alpha)$, on voit que $f(K)$ est contenu dans l'image de la boule unité du dual d'un espace de Banach par une application linéaire faiblement continue d'ordre s. Comme cette image est convexe, cerclée, et faiblement compacte, et à fortiori faiblement fermée, elle contient l'enveloppe convexe cerclée fermée de $f(K)$. Il suffit maintenant d'appliquer la prop. 3, 2° pour obtenir le corollaire 1. En particulier :

COROLLAIRE 2. - L'image d'une partie compacte K de R^d par une application indéfiniment différentiable d'un voisinage de K dans un espace localement convexe quasi-complet est d'ordre zéro.

COROLLAIRE 3. - Soit f une application ℓ fois différentiable au sens de L^1 de T^d dans un espace localement convexe quasi-complet E; soit m un entier $\geqslant 0$ tel que $\ell > m + d$, et considérons l'application linéaire naturelle u_f de l'espace de distributions $\mathcal{E}'^{(m)}(T^d)$ dual de $\mathcal{E}^{(m)}(T^d)$, dans E, définie par f :

$$u_f\, T = \int f(t) T_t\, dt$$

transposée de l'application linéaire v_f de E' dans $\mathcal{E}^{(m)}(T^d)$ définie par f :

$$(v_f x')(t) = \langle f(t), x' \rangle$$

u_f et v_f sont des applications linéaires d'ordre r, où $r = d/(\ell - m)$.

En effet, appliquant la prop. 5, 1°, la décomposition (9) de f implique une décomposition correspondante de u_f et v_f, qui donne le résultat voulu.

COROLLAIRE 4. - Soient ℓ, m deux entiers tels que $\ell > m + d$. Alors l'application identique de $\mathcal{E}'^{(m)}(T^d)$ dans $\mathcal{E}'^{(\ell)}(T^d)$ et l'application identique de $\mathcal{E}^{(\ell)}(T^d)$ dans $\mathcal{E}^{(m)}(T^d)$ sont d'ordre $\leq d/(\ell - m)$.

En effet, c'est là un cas particulier du corollaire 3, en prenant $E = \mathcal{E}'^{(\ell)}(T^d)$ muni de la topologie de la convergence compacte sur $\mathcal{E}^{(\ell)}(T^d)$, et $f(t)$ = masse + 1 au point t. Cette application est bien ℓ fois continûment différentiable, et l'application de $\mathcal{E}'^{(m)}(T^d)$ dans $\mathcal{E}'^{(\ell)}(T^d)$ qu'elle définit est l'identité. Il en est donc de même de l'application transposée.

Le corollaire 4 se complète par la

PROPOSITION 6. - Soient m, ℓ deux entiers ≥ 0, ℓ non nul. Alors l'application identique de $\mathcal{E}^{(m)}(T^d)$ dans $\mathcal{E}'^{(\ell)}(T^d)$ est une application de Fredholm. Si $m + \ell > d$, alors c'est même une application d'ordre $\leq d/(m+\ell)$.

Pour la première partie, on est ramené à prouver que l'application identique de $\mathcal{E}^{(0)}(T^d)$ dans $\mathcal{E}'^{(1)}(T^d)$ est une application de Fredholm. Par transposition, il suffit manifestement de prouver que l'application identique de $\mathcal{E}^{(1)}(T^d)$ dans $L^1(T^d)$ est une application de Fredholm. Or cette dernière est la composée de l'application identique de $\mathcal{E}^{(1)}(T^d)$ dans $\mathcal{E}^{(0)}(T^d) \subset L^\infty(T^d)$, qui est compacte comme il est bien connu (critère d'Ascoli), et de l'application identique de L^∞ dans L^1, qui est de "type intégral" (Chap. I, §4, prop. 27 et définition 7), donc elle est une application de Fredholm en vertu du th. 10 du Chap. I. Supposons maintenant $\ell + m > d$, nous écrivons pour toute $f \in \mathcal{E}^{(m)}(T^d)$ son développement de Fourier $f = \sum_n a_n(f) e_n$. Quand f parcourt la boule unité de $\mathcal{E}^{(m)}(T^d)$,

$(1+|n|)^m a_n(f)$ reste uniformément borné ; et d'autre part pour n variable $(1+|n|)^{\ell} e_n$ reste borné dans $\mathcal{E}'^{(\ell)}(T^d)$, car son produit scalaire par toute $g \in \mathcal{E}^{(\ell)}(T^d)$ est $(1+|n|)^{\ell} a_n(g)$, qui reste borné. Si donc on pose $\langle f, x'_n \rangle = (1+|n|)^m a_n(f)$, $y_n = (1+|n|)^{\ell} e_n$, alors les x'_n forment une suite bornée dans le dual de $\mathcal{E}^{(m)}(T^d)$, les y_n une suite bornée dans $\mathcal{E}'^{(\ell)}(T^d)$, et on aura pour toute $f \in \mathcal{E}^{(m)}(T^d)$:

$$f = \sum_n \lambda_n \langle f, x'_n \rangle y_n \qquad \text{où } \lambda_n = (1+n)^{-\ell-m} \quad .$$

La prop. 6 en résulte aussitôt. Bien entendu, on aurait pu démontrer directement le corollaire 4 de la prop. 5 de cette manière.

§ 2. THÉORIE INTERNE DES ESPACES NUCLÉAIRES

1. Définition et caractérisations des espaces nucléaires.

DÉFINITION 4. - Un espace localement convexe séparé est dit nucléaire, si quel que soit l'espace localement convexe séparé F, l'application linéaire naturelle de $E \otimes F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ est un isomorphisme topologique du premier espace dans le second (quand $E \otimes F$ est muni de sa topologie de produit tensoriel projectif - Chap. I, définition 2).

THÉORÈME 6. - Soit E un espace localement convexe. Les hypothèses suivantes sont équivalentes.

a. E est nucléaire.

a. bis. Les conditions de la définition 4 sont satisfaites quand on y suppose que F est un espace de Banach.

b. Quelle que soit la partie équicontinue convexe cerclée A de E', il existe une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée B telle que A soit une partie nucléaire de E'_B, i.e. telle que l'application identique de E'_A dans E'_B soit nucléaire (Chap. I, §3, n° 2, définition 4).

c. Pour tout voisinage convexe cerclé V de 0 dans E, l'application canonique de E dans $\hat{E}_V$ est nucléaire.

S'il en est ainsi, alors pour tout espace localement convexe F, $E \otimes F$

<u>est dense dans</u> $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s)$, <u>et si</u> E <u>et</u> F <u>sont complets</u>, <u>l'application linéaire canonique de</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>dans</u> $\mathcal{L}_e(E'_s,F'_s)$ <u>est un isomorphisme vectoriel topologique du premier espace sur le second</u>.

<u>Remarque</u> 6. - Notons d'ailleurs que si E est quasi-tonnelé, plus généralement, si toute partie compacte convexe cerclée de E'_b est équicontinue, on peut remplacer l'énoncé b. par l'énoncé plus court : b. bis. <u>Toute partie équicontinue</u> A <u>de</u> E' <u>est nucléaire dans</u> E'_b. (Voir §1, n°5, définition 3). En effet, b. implique trivialement b. bis. de toutes façons, et b. bis. implique que pour toute partie équicontinue convexe cerclée $A \subset E'$, existe une partie <u>compacte</u> convexe cerclée B de E' telle que $B \supset A$, et que l'application identique $E'_A \longrightarrow E'_B$ soit nucléaire (voir Chap. I, §3, n°2, texte suivant la définition 4), et en vertu de l'hypothèse sur E, B sera équicontinu, ce qui prouve b. Cette substitution peut se faire en particulier si E est métrisable, ou du type $(\mathcal{DF})$. b bis. signifie aussi que toute application linéaire u d'un espace de Banach F dans E'_b transformant la boule unité en une partie équicontinue (i.e. qui est simplement continue, lorsqu'on suppose E quasi-tonnelé) est nucléaire. (On peut en effet dans b bis. supposer E'_A complet, et alors l'équivalence des deux énoncés se voit en posant d'une part $F = E'_A$, et en considérant d'autre part u comme le composé $F \longrightarrow E'_A \longrightarrow E'$, où A est l'image de la boule unité de F par u). Notons que, dans tous les cas, la condition c. est équivalente à la condition c bis. <u>Toute application linéaire continue de</u> E <u>dans un espace de Banach est nucléaire</u>. En effet c bis. implique trivialement c., et la réciproque se voit en remarquant que toute application linéaire continue u de E dans un espace de Banach F est la composée de deux applications linéaires continues $E \longrightarrow \hat{E}_V \longrightarrow F$. (où V est p. ex. l'image inverse par u de la boule unité de F).

Démonstration du th. 6. - Dire que E est nucléaire, i.e. que pour tout espace localement convexe F, l'application canonique de $E \otimes F$ dans

$\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ est un isomorphisme topologique, signifie aussi (par polarité) que tout ensemble M de formes linéaires sur $E \otimes F$, équicontinu pour la topologie de produit tensoriel projectif, est aussi équicontinu pour la topologie induite par $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$. Nous allons montrer que si on exprime ceci seulement pour tout espace <u>de Banach</u> F et dans le cas où M est réduit à un seul élément, on obtient la condition b., d'où à fortiori les implications a. $\Longrightarrow$ a bis $\Longleftrightarrow$ b. La condition envisagée signifie que toute forme bilinéaire continue sur $E \times F$, où F est un espace de Banach, est <u>intégrale</u> (Chap. I, § 4, n°3, définition 7). Soit alors A une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E', posons $F = E'_A$, l'application identique de F dans E' définit une forme bilinéaire continue sur $E \times F$, qui est donc intégrale. En vertu du Chap. I, § 4, lemme 13, 2°, il existe une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée $A_1 \supset A$ de E telle que l'application identique de $F = E'_A$ dans E'_{A_1} soit intégrale. Appliquant ceci à A_1 au lieu de A, on voit donc qu'il existe une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée $B \supset A_1$ de E', telle que l'application identique de E'_{A_1} dans E'_B soit intégrale. L'application identique de E'_A dans E'_B apparait donc comme composée de deux applications intégrales, et est par suite nucléaire. (Chap. I, § 4, th. 10, corollaire 1). On a bien prouvé la condition b.

b. implique a., car soit M un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $E \times F$, i.e. correspondant à un ensemble d'applications linéaires de F dans E' appliquant un voisinage fixe V de 0 dans F en une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée fixe A de E'; montrons que M est un ensemble équicontinu de formes linéaires sur $E \otimes F$ pour la topologie induite par $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$. En vertu de l'hypothèse, il existe une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée B de E', telle que l'application identique de E'_A dans E'_B soit nucléaire; supposons p. ex. sa norme-trace $\leqslant 1$. Il suit que les $u \in M$ s'identifient à des applications nucléaires de F_V dans E'_B, de norme-trace $\leqslant 1$, i.e. proviennent tous de la boule unité de $E'_B \hat{\otimes} F'_V$, d'où aussitôt la conclusion. On a ainsi prouvé que les conditions a., a bis., b. du th. 6 sont équivalentes. D'autre part, c. implique b., car supposant vérifié c., soit A une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E', soit U son polaire, et soit V un voisinage convexe cerclé de 0 dans E, $V \subset U$, tel que l'application linéaire canonique de $\hat{E}_V$ dans $\hat{E}_U$ soit nucléaire. Alors l'application transposée, qui n'est autre que l'application identique de E'_A dans E'_B, où B est le polaire de V, est aussi nucléaire (Chap. I, § 3, n°2, prop. 15, 1°). Réciproquement, prouvons que b. implique c., et plus généralement le

LEMME 2. - <u>Soit</u> E <u>un espace nucléaire</u>, F <u>un espace de Banach</u>, M <u>un ensemble équicontinu d'applications linéaires de</u> E <u>dans</u> F. <u>Alors il existe une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée</u> A <u>de</u> E' <u>telle que</u> M <u>soit contenu dans l'ensemble des opérateurs définis par la boule unité de</u> $E'_A \otimes F$.

On voit d'abord comme dans la preuve de b. $\Longrightarrow$ a. que les ${}^tu$ sont tous des applications nucléaires de norme-trace $\leqslant 1$ de F' dans un espace E'_A, où A est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée convenable de E'. Donc les ${}^tu$ proviennent tous de la boule unité de l'espace $F'' \hat{\otimes} E'_A$. Il en est donc de même des $u \in M$ eux-mêmes, quand on les considère comme des applications linéaires de E dans F''. Cela démontre déjà le lemme 2 quand F est réflexif. Par ailleurs, il est immédiat qu'il suffit de vérifier ce lemme quand F est un espace $\hat{E}_V$, où V parcourt un système fondamental de voisinages convexes cerclés de 0 dans E. Le lemme 2 résultera alors du

LEMME 3. - <u>Un espace nucléaire</u> E <u>admet un système fondamental de voisinages convexes cerclés fermés de zéro</u> V <u>tels que les</u> $\hat{E}_V$ <u>soient des espaces de Hilbert</u>.

Soit en effet A une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E'; il existe une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée $B \supset A$ telle que l'application identique de E'_A dans E'_B soit nucléaire. Or, on a vu (par exemple dans la démonstration de Chap. I, § 5, n°3, prop. 44, ou Chap. II, § 1, n°3, th. 3) qu'une application nucléaire est la composée d'une application linéaire continue de E'_A dans ℓ^2 et d'une application linéaire continue de ℓ^2 dans E'_B. Si A_0 est l'image de la boule unité de ℓ^2 par cette dernière application, A_0 est équicontinue, contient à une homothétie près l'ensemble A, et E'_{A_0} est un espace de Hilbert (car isomorphe à un espace quotient de ℓ^2). Soit V le polaire de A_0, $\widehat{E_V}$ est un espace de Hilbert, car son dual E'_{A_0} est un espace de Hilbert. Par construction, les V et leurs homothétiques parcourent un système fondamental de voisinages de 0 dans E, d'où le lemme 3.

Pour achever de prouver le th. 6, il reste à montrer que si E est nucléaire, alors $E \otimes F$ est dense dans $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$, i.e. que toute application linéaire continue de E'_τ dans F est limite, uniforme sur toute partie équicontinue de E', d'applications linéaires continues de rang fini. Mais cela résulte aussitôt de la condition b. du th. 6, et de la prop. 44 du Chap. I, § 5, n° 3.

COROLLAIRE 1. - <u>Un espace nucléaire est du type</u> ($\mathcal{S}$) ([9], § 3, n°4, définition 5). <u>En particulier</u>, <u>ses parties bornées sont précompactes</u>.

Dire que E est du type ($\mathcal{S}$), signifie en effet que pour toute partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée A de E', en existe une autre $B \supset A$ telle que A soit compact dans E'_B, ce qui est évidemment une conséquence de la condition b. du th. 6, une application nucléaire étant compacte. En particulier :

COROLLAIRE 2. - <u>Un espace de Banach nucléaire est de dimension finie</u>.

Signalons cependant, qu'un espace nucléaire complet peut être non tonnelé (à fortiori non bornologique), et avoir un dual fort non quasi-complet : voir § 3, n°3, exemple 4 (avec F nucléaire), et § 4, en particulier n°1, prop. 14. Un autre corollaire, à vrai dire trivial à priori, est le

COROLLAIRE 3. - Un espace localement convexe E est nucléaire si et seulement si son complété l'est.

En effet, la condition b. du th. 6 est la même pour E ou son complété.

COROLLAIRE 4. - Soit E un espace nucléaire, F un espace localement convexe.

1. Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit nucléaire, il suffit que u transforme un voisinage convenable de 0 en une partie bornée de F dont l'adhérence est complète (donc, si F est quasi-complet, il faut et il suffit que u soit bornée).

2. Toute application linéaire de F dans E' qui transforme un voisinage de zéro convenable en une partie équicontinue de E', est nucléaire, et même une application nucléaire de F dans un espace E'_A, où A est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée convenable de E'.

3. Toute forme bilinéaire continue sur $E \times F$ provient d'un élément d'un espace $E'_A \hat{\otimes} F'_B$, où A (resp. B) est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée convenable de E (resp. F).

Pour 1. la nécessité est triviale de toutes façons (une application nucléaire étant compacte), et pour la suffisance on est aussitôt ramené au cas où F est un espace de Banach (en introduisant au besoin un espace de Banach F_A), et on applique alors la condition c. du th. 6. D'autre part, 2. résulte de 3., qui est une conséquence immédiate de la condition b. du th. 6.

COROLLAIRE 5. - Soit E un espace nucléaire complet, M un espace localement compact muni d'une mesure positive μ. Alors toute application linéaire faiblement continue de $L^\infty(\mu)$ dans E provient d'un élément de $L^1_E(\mu)$

(voir définition au Chap. I, § 2, n°2). Si E est du type $(\mathcal{F})$, toute application f de M dans E qui est scalairement sommable (i.e. telle que la fonction $t \longrightarrow \langle f(t), x' \rangle$ soit sommable pour tout $x' \in E'$) est sommable.

La première partie du corollaire résulte de la fin du th. 6, joint au fait que $E \hat{\otimes} L^1(\mu)$ peut s'identifier à $L^1_E(\mu)$ (Chap. I, § 2, n°2, th. 2). La deuxième partie du corollaire en résulte, car E étant séparable en tant qu'espace du type $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{S})$ (voir corollaire 1) f sera fortement mesurable; d'autre part, E étant du type $(\mathcal{S})$ (corollaire 1), l'application linéaire $\varphi \longrightarrow \int \varphi f d\mu$ de $L^\infty(\mu)$ dans le dual algébrique de E' est en fait une application de $L^\infty(\mu)$ dans E (car, comme il est bien connu - conséquence du th. du "graphe fermé" - $\int \varphi f d\mu$ est une forme linéaire sur E' bornée sur les parties équicontinues, d'où suit ici, E étant du type $(\mathcal{S})$, qu'elle est même faiblement continue sur les parties équicontinues, donc $\in E$ puisque E est complet). Cette application étant faiblement continue, est donc donnée par un élément de $L^1_E(\mu)$, qui ne peut être que f. On a des énoncés analogues pour les applications linéaires d'un espace $L^p(\mu)$ dans E, et les applications de M dans E qui sont scalairement de puissance p.ème sommable. On pourrait multiplier les exemples de cette nature.

THÉORÈME 7. - Soit E un espace du type $(\mathcal{F})$, ou du type $(\mathcal{DF})$ et complet. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a. E est nucléaire.

b. E'_b est nucléaire.

a'. Toute partie bornée de E'_b est nucléaire.

b'. Toute partie bornée de E est nucléaire.

Démonstration. - Notons d'abord que chacune des 4 conditions envisagées implique que E est réflexif (à cause du th. 6, corollaire 1 dans le cas de a. et b., et parce qu'un ensemble nucléaire est relativement compact et à fortiori faiblement relativement compact, dans le cas de a' et b'). Cela permet, par raison de symétrie. de nous borner au cas où E est du type ($\mathcal{F}$). Alors le th. 6 (condition b bis de la remarque 6) prouve l'équivalence de a. et a'., ainsi que de b. et b'. Il suffit donc de prouver que a. implique b'. et que b'. implique a. Supposons donc d'abord E nucléaire, et soit A une partie bornée convexe cerclée fermée de E. Comme A est compacte (th. 6, corollaire 1) et à fortiori faiblement compacte, A est l'image de la boule unité du dual F' d'un espace de Banach $F = \widehat{E_A}$ par une application linéaire faiblement continue u. D'après la fin du th. 6, u provient donc d'un élément de $E \hat{\otimes} F$, et d'après le Chap. I, §2, th. 1, u est donc nucléaire, ce qui signifie que A est une partie nucléaire de E. Réciproquement, si toute partie bornée de E est nucléaire, nous allons prouver que E est nucléaire en appliquant le critère a bis. du th. 6 : il faut prouver que pour tout espace de Banach F, l'application canonique de $E \hat{\otimes} F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ est un isomorphisme topologique. Il suffit pour cela de prouver que l'application canonique de $E \hat{\otimes} F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ est une application biunivoque du premier espace sur le second, car en vertu du "théorème des homomorphismes" de Banach, il suivra que c'est même un isomorphisme topologique. Que l'application précédente soit une application du premier espace sur le second résulte immédiatement de l'hypothèse et du début (trivial) de la prop. 2 (§1, n°5), en interprétant les éléments de $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ comme des applications linéaires faiblement continues de F' dans E. (En fait, remplaçant dans ce raisonnement $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ par $E \hat{\hat{\otimes}} F$, on voit qu'il suffit même de supposer que les parties compactes de E soient nucléaires ; nous obtiendrons un résultat plus fort comme conséquance du th. 8 ci-dessous). Dire que l'application précédente est biunivoque signifie que toute $u \in E \hat{\otimes} F$ orthogonale à $E' \otimes F'$ est nulle, c'est à dire par polarité que toute forme bilinéaire continue sur $E \times F$ est adhérente à $E' \otimes F'$ pour la topologie faible définie par $E \hat{\otimes} F$, ou encore pour la topologie de la convergence bicompacte (Chap. I, §4, n°2, prop.21). Mais interprétant une forme bilinéaire continue sur $E \times F$ comme une application linéaire continue de E dans F', il suffit encore d'appliquer la prop.44 du Chap. I, §5, n°3, les parties compactes de E étant nucléaires.

Remarque 7. - Il semble que le th. 7 soit valable dans des conditions bien plus générales, englobant tous les espaces nucléaires qu'on rencontre en Analyse (voir p. ex. th. 9, 4° et th. 10). On notera cependant que dans le cas général , si E est un espace nucléaire, son dual fort E' peut ne pas être nucléaire. Ainsi, un espace E qui est le produit vectoriel-topologique d'une famille de droites est manifestement nucléaire (car les parties équicontinues de son dual sont de dimension finie), mais son dual fort E' n'est pas nucléaire si l'ensemble d'indices n'est pas dénombrable. Car il faudrait, d'après le corollaire 1 du th. 6, que les parties bornées de E soient métrisables comme parties équicontinues du dual d'un espace $(\mathcal{F})$, ce qui n'est pas le cas. Il semble possible que tout espace nucléaire dont les parties bornées sont métrisables, ait un dual fort nucléaire.

Il apparaitra que les espaces du type $(\mathcal{M})$ qu'on rencontre usuellement en Analyse sont nucléaires (voir n° 2 et 3). Cependant il est très facile de construire des exemples d'espaces $(\mathcal{F})$ du type $(\mathcal{S})$ qui ne sont pas nucléaires. Il en est par exemple ainsi de l'espace "échelonné" défini par la suite des suites $i \longrightarrow i^n$, espace qui n'est pas nucléaire (voir n°3, prop. 8), mais dont on vérifie facilement qu'il est du type $(\mathcal{S})$.

THÉORÈME 8. - Soit E un espace localement convexe, F un espace localement convexe isomorphe à c_o ou admettant un espace quotient isomorphe à ℓ^1. Pour que E soit nucléaire, il faut et il suffit que l'application naturelle de $E \otimes F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ soit un isomorphisme topologique (quand $E \otimes F$ est muni de la topologie de produit tensoriel projectif). Si

E *et* F *sont du type* ($\mathcal{F}$), *il faut et il suffit aussi que l'application naturelle de* $E \hat{\otimes} F$ *dans* $E \hat{\hat{\otimes}} F$ *soit une application du premier espace sur le second*.

Signalons tout de suite le corollaire suivant, obtenu en prenant $F = \ell^1$ ou $F = c_0$:

COROLLAIRE 1. - *Soit* E *un espace du type* ($\mathcal{F}$). *Pour que* E *soit nucléaire, il faut et il suffit que toute suite sommable dans* E *soit absolument sommable. Ou encore que toute suite dans* E *qui converge vers zéro, provienne d'un élément de* $c_0 \hat{\otimes} E$.

Il suffit d'appliquer le th. 8, compte tenu de l'interprétation des espaces $\ell^1 \hat{\otimes} E$, $\ell^1 \hat{\hat{\otimes}} E$, $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ (Chap. I, §2, n°2 et Chap. I, §3, n°3, exemples). Nous montrerons (corollaire 2) que le corollaire 1 reste vrai si E et F sont du type ($\mathcal{DF}$).

Démonstration du th. 8. - La deuxième assertion du th. 8 est contenue, grâce au théorème des homomorphismes de Banach, dans l'amélioration suivante de la première assertion : E *est nucléaire si l'application linéaire canonique de* $E \hat{\otimes} F$ *dans* $E \hat{\hat{\otimes}} F$ *est un homomorphisme topologique du premier espace dans le second*. Soit N le noyau de cette application, le dual de $E \hat{\otimes} F/N$ est le sous-espace $B_0(E,F)$ de $B(E,F)$, adhérence de $E' \otimes F'$ pour la topologie faible définie par $E \hat{\otimes} F$. L'hypothèse signifie que toute partie équicontinue M de $B_0(E,F)$ provient d'un ensemble équicontinu de formes linéaires sur $E \hat{\hat{\otimes}} F$, i.e. s'identifie à un ensemble borné d'applications *intégrales* d'un espace $\widehat{F_V}$ dans un espace E'_A, où V est un voisinage convexe cerclé de 0 dans F, A une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E'. Identifions ℓ^1 resp. c_0 à un espace quotient de F, que nous notons dans tous les cas par λ. Soit A une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E'. Soit M l'ensemble des applications linéaires de F dans E' qui proviennent des applications linéaires de norme ≤ 1 de λ dans E'_A. D'après ce qui précède, il existe une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée B de E' telle que tout $u \in M$ définisse une application intégrale d'un espace $\widehat{F_V}$ (V fixe) dans E'_B. Par suite, toute application linéaire continue de λ dans E'_A transforme la boule unité de λ en une partie de E'_B contenue dans l'image de la boule unité d'un espace de Banach $\widehat{F_V}$ par une application intégrale. Si $\lambda = \ell^1$, il s'ensuit que toute application linéaire continue de ℓ^1 dans E'_A est elle-même une application intégrale de ℓ^1 dans E'_B (voir Chap. I, § 4, n°6) donc l'application identique $E'_A \longrightarrow E'_B$ définit une application linéaire $c_o \hat{\hat{\otimes}} E'_A \longrightarrow I(E'_A, G)$ (où $G = \widehat{E'_B}$), donc par raison de continuité même une application $c_o \hat{\hat{\otimes}} E'_A \rightarrow c_o \hat{\otimes} G'$. Par suite (Chap. I, § 4, n°6, th. 13, condition c, et définition 8) $E'_A \longrightarrow E'_B = G'$ est une application semi-intégrale gauche. Dans le cas où $F = \lambda = c_o$, on conclut de même que $E'_A \longrightarrow E'_B$ est semi-intégrale droite. Le th. 8 résulte maintenant du lemme suivant, qui nous sera encore utile plus bas :

LEMME 4. - <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe tel que pour toute partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée</u> A <u>de</u> E', <u>en existe une autre</u> B <u>telle que l'application identique de</u> E'_A <u>dans</u> E'_B <u>soit semi-intégrale</u> (Chap. I, § 4, n°6, définition 8). <u>Alors</u> E <u>est nucléaire</u>.

En effet, si alors A_o est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée quelconque de E, il lui correspond une autre telle partie $A_1 \supset A_o$ telle que l'application identique de E'_{A_o} dans E'_{A_1} soit semi-intégrale. A A_1 correspond de la même façon un A_2. On peut considérer l'application identique de E'_{A_o} dans E'_{A_2} comme composé de deux applications semi-intégrales, et il est manifeste qu'on peut supposer que ces applications sont toutes deux semi-intégrales à gauche, ou toutes deux semi-intégrales à droite. (Autrement, on commencerait par aller jusqu'à A_3, et au moins 2 parmi les trois applications successives obtenues seront du même type gauche ou droite). Mais il en résulte alors que cette application de

E'_{A_0} dans E'_{A_2} est nucléaire (Chap. I, §4, n°6, th. 14) ce qui achève la démonstration en vertu du critère b. du th. 6.

COROLLAIRE 2. - Soit E un espace $(\mathcal{DF})$, soit F un espace isomorphe à ℓ^1 ou c_0. Pour que E soit nucléaire, il faut et il suffit que l'application naturelle de $E \hat{\otimes} F$ dans $E \hat{\hat{\otimes}} F$ soit une application du premier espace sur le second. Cet énoncé reste valable si F contient seulement un sous-espace vectoriel isomorphe à c_0.

Démonstration. - On peut évidemment supposer E complet. Soit A une partie bornée convexe cerclée fermée de E, tout élément de $F \hat{\hat{\otimes}} E_A$ définit un élément de $F \hat{\hat{\otimes}} E$, donc d'après l'hypothèse un élément de $F \hat{\otimes} E$. Comme E' est du type $(\mathcal{F})$, il suit que la forme bilinéaire naturelle sur $E_A \times E'$ satisfait à la condition c du Chap. I, §4, n°6, th. 13, 1°, ou à la condition symétrique (suivant que $F = c_0$ ou $F = \ell^1$), de sorte qu'il existe une partie équicontinue B convexe cerclée faiblement fermée du dual E'' de E', telle que l'application identique de E''_A dans E'' provienne d'une application semi-intégrale de E''_A dans E''_B. Il en résulte d'abord que A est faiblement relativement compact dans E''_B, donc dans le sous-espace fermé E_{B_0} (où $B_0 = B \cap E$), et à fortiori dans E. Comme A était indéterminé, il suit que E est réflexif. Donc, dans ce qui précède, B est en réalité une partie de E. Le lemme 4 appliqué à E' prouve maintenant que E' est nucléaire. Donc E est nucléaire (th. 7). Supposons maintenant seulement que F admette un sous-espace vectoriel isomorphe à c_0. Identifions donc c_0 à ce sous-espace vectoriel, et soit V un voisinage convexe cerclé de 0 dans F découpant la boule unité sur c_0. Tout $u \in c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ s'identifie à un élément de $F \hat{\hat{\otimes}} E$, donc provient d'un élément de $F \hat{\otimes} E$ par hypothèse, qui a son tour définit un élément v de $\hat{F}_V \hat{\otimes} E$. c_0 peut aussi s'identifier à un sous-espace vectoriel topologique de $\hat{F}_V$, donc son dual ℓ^1 s'identifie à un espace quotient du dual de $\hat{F}_V$. Il est alors immédiat que l'application linéaire de ℓ^1 dans E

définie par $u \in c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ induit une application de $(\widehat{F_V})'$ qui n'est autre que celle définie par l'élément v de $\widehat{F_V} \hat{\otimes} E$. Grâce à la propriété de relèvement bien connue de l'espace ℓ^1 (voir p. ex. Chap. I, th. 2, corollaire 3), il suit que l'application de ℓ^1 dans E définie par u est elle-même définie par un élément de $\ell^\infty \hat{\otimes} E$, évidemment unique. On a ainsi une application linéaire naturelle de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ dans $\ell^\infty \hat{\otimes} E$. Pour toute partie bornée convexe cerclée fermée A de E, l'application de $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E_A$ dans $\ell^\infty \hat{\otimes} E$ induite par l'application précédente est <u>continue</u> ; car elle est continue quand le deuxième espace est muni de la topologie induite par $\ell^\infty \hat{\hat{\otimes}} E$, et on peut alors appliquer la version généralisée du théorème du "graphe fermé" de Banach (Chap. I, Introduction IV, théorème B). Comme $c_0 \hat{\otimes} E$ est un sous-espace vectoriel topologique de $\ell^\infty \hat{\otimes} E$ (Chap. I, §1, prop. 4, corollaire 4), il suit par raison de continuité que l'on a $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E_A \subset c_0 \hat{\otimes} E$. C'est là une forme affaiblie de l'hypothèse de la première partie du corollaire 2, qui avait suffi dans la démonstration de cette première partie pour assurer que E est bien nucléaire.

COROLLAIRE 3. - <u>Soit</u> E <u>un espace complet du type</u> $(\mathcal{F})$ <u>ou</u> $(\mathcal{DF})$. <u>Pour que</u> E <u>soit nucléaire</u>, <u>il faut et il suffit que toute partie compacte de</u> E <u>soit nucléaire</u>. <u>Ou aussi que toute partie compacte du dual soit nucléaire</u>.

C'est évidemment nécessaire (th. 7). C'est suffisant, car alors p. ex. toute application linéaire compacte de c_0 dans E (resp. E') est nucléaire, de sorte que E (resp. E') est nucléaire grâce aux corollaires 1 et 2 où on fait $F = \ell^1$. Notons d'ailleurs que si E est du type $(\mathcal{DF})$, et complet, pour qu'il soit nucléaire, il suffit même que soient nucléaires les parties de E relativement compactes dans un espace E_A, où A parcourt une suite fondamentale de parties bornées convexes cerclées fermées de E.

<u>Remarque</u> 8. - Il semble que les résultats indiqués dans les corollaires précédents doivent pouvoir se généraliser beaucoup. On notera cependant qu'une somme directe non dénombrable de droites

n'est pas nucléaire, (voir remarque 7), bien que ses parties bornées soient nucléaires, car de dimension finie.

Le th. 8 et ses corollaires 1 et 2 suggèrent la conjecture suivante : Soient E et F deux espaces localement convexes tels que l'application naturelle de $E \hat{\otimes} F$ dans $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ soit un isomorphisme topologique ; est-ce que alors E ou F est forcément nucléaire ? - Je ne connais pas de contre-exemple même dans le cas le plus général, ni de démonstration même si E et F sont des espaces de Banach. Il est possible de montrer que la réponse est affirmative si E et F sont tous deux isomorphes à des sous-espaces vectoriels topologiques du produit d'une famille d'espaces de Hilbert. Signalons qu'on peut se ramener facilement au cas où E et F sont des espaces $(\mathcal{F})$.

2. Théorème de permanence.

THÉORÈME 9. - 1. Un sous-espace vectoriel, un espace quotient séparé, d'un espace localement convexe nucléaire est nucléaire.

2. Le produit vectoriel topologique d'une famille d'espaces nucléaires est nucléaire. Il en est de même de leur somme directe topologique pourvu que la famille des espaces facteurs soit dénombrable.

3. Le produit tensoriel projectif de deux espaces nucléaires est nucléaire.

4. Soit F un espace nucléaire tel que toute partie faiblement compacte du dual soit équicontinue (p. ex. un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{DF})$ nucléaire), et soit E un espace $(\mathcal{DF})$ nucléaire et complet. Alors le produit tensoriel inductif complété $E \overline{\otimes} F$ (Chap. I, §3, n°1, définition 3) est nucléaire.

Rappelons aussi pour mémoire que le dual fort d'un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{DF})$ nucléaire est nucléaire (th. 7).

Signalons tout de suite des corollaires importants :

COROLLAIRE 1. - *Un espace localement convexe séparé, limite inductive d'une suite d'espaces nucléaires, est nucléaire.*

COROLLAIRE 2. - *Un espace localement convexe* E *séparé dont la topologie est définie comme la moins fine des topologies rendant continues certaines applications linéaires* u_i *de* E *dans des espaces nucléaires* E_i *est nucléaire.*

En effet, le corollaire 1 résulte de ce que la limite inductive séparée d'une suite d'espaces localement convexes s'identifie à un espace quotient de leur somme directe topologique, le corollaire 2 de ce que, sous les conditions indiquées, E s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique du produit des E_i.

COROLLAIRE 3. - *Soit* E *un espace nucléaire, du type* $(\mathcal{F})$ *ou du type* $(\mathcal{DF})$ *et complet,* F *un espace nucléaire. Alors* $L_b(E,F)$ *est nucléaire. Si de plus* F *est du type* $(\mathcal{F})$, *ou si* E *est du type* $(\mathcal{DF})$, F *quasi-complet et* F'_b *nucléaire, alors le dual fort de* $L_b(E,F)$ *est nucléaire.*

En effet, E est le dual fort de l'espace nucléaire E'_b (th. 7), donc $L_b(E,F)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel dense de $E'_b \hat{\otimes} F$ (fin du th. 6), espace qui est nucléaire (th. 9, 3.), donc $L_b(E, F)$ est nucléaire. Si F est quasi-complet, le dual de $E \bar{\otimes} F'_b$, qui s'identifie à $\mathcal{L}(E, F'_b)$, s'identifie aussi à $L(E,F)$ (car le dual de F'_b est F, F étant réflexif - th. 6, corollaire 1 - et la topologie de E est $\tau(E,E')$), et les parties équicontinues de ce dual, i.e. les parties séparément équicontinues de $\mathcal{L}(E, F'_b)$, s'identifient manifestement aux parties bornées de $L_s(E,F)$ (E et F'_b étant quasi-tonnelés), ou aussi de $L_b(E,F)$ (E étant quasi-tonnelé) Il suit que $E \otimes F'_b$ s'identifie avec la topologie induite par $E \bar{\otimes} F'_b$ à un sous-espace vectoriel topologique du dual fort de $L_b(E,F)$. Ce sous-espace est manifestement faiblement dense, et comme $L_b(E,F)$ est réflexif, (Chap. I, § 4, n°1; prop. 19, corollaire 1), il est même fortement dense dans ce dual. Ce dernier est donc nucléaire si et seulement si $E \bar{\otimes} F'_b$ l'est (th. 6, corollaire 3). Appliquant le th. 9, 4., le corollaire 3 en résulte aussitôt.

Démonstration du théorème 9. - 1. Soit E un espace nucléaire, F un sous-espace vectoriel fermé, montrons que F et E/F sont nucléaires. C'est une conséquence à peu près immédiate du lemme 4. Soit A une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée du dual de F', c'est l'image canonique d'une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée A_0 de E'. Soit $B_0 \supset A_0$ une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E' telle que l'application identique de E'_{A_0} dans E'_{B_0} soit nucléaire (th. 6, critère b.), soit B l'image canonique de B_0 dans F', on a $B \supset A$. A est contenu dans l'image de la boule unité A_0 de E'_{A_0} par une application nucléaire et à fortiori intégrale de cet espace dans F'_B, savoir celle qu'on obtient en composant l'application identique de E'_{A_0} dans E'_{B_0} et l'application canonique de ce dernier espace dans F'_B. Il suit que l'application identique de F'_A dans F'_B est semi-intégrale à gauche, donc que E est nucléaire en vertu du lemme 4. On procède de façon toute analogue pour prouver que E/F est nucléaire ; on obtient cette fois-ci des applications semi-intégrales à droite.

2. La première assertion, relative à un produit vectoriel topologique d'espaces nucléaires, est immédiate grâce au critère b. du th. 6, compte tenu que le dual du produit E des E_i est la somme directe des duals E'_i, les parties équicontinues de E' étant celles contenues dans la somme d'un nombre <u>fini</u> de parties équicontinues d'espaces E'_i. On emploiera ce même critère pour la seconde assertion, relative à la somme directe topologique d'une suite d'espaces nucléaires E_i. Il faut, pour toute partie équicontinue A de $E' = \prod_i E'_i$, trouver une autre partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée B telle que A soit une partie nucléaire de E'_B. On peut supposer A de la forme $\prod_i A_i$, où pour tout i, A_i désigne une partie

équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E'_i. Soit alors, pour tout i, B_i une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E'_i telle que A_i soit une partie nucléaire de $(E'_i)_{B_i}$, et considérons l'espace F produit topologique des espaces $(E'_i)_{B_i}$. Il suffit de prouver que A est une partie nucléaire de F (car toute partie bornée de F est manifestement une partie équicontinue de E'). Mais cela résulte en effet de la première partie du

LEMME 5. - 1. Soit (F_i) une suite d'espaces localement convexes, et pour tout i soit A_i une partie nucléaire de F_i. Alors $A = \prod_i A_i$ est une partie nucléaire de $F = \prod_i F_i$.

2. Soit (E_i) une suite d'espaces de Banach, et soit E l'espace de Banach formé des $(x_i) \in \prod_i E_i$ tels que $\|(x_i)\| = \operatorname{Sup}_i \|x_i\| < +\infty$, muni de la norme $\|(x_i)\|$ précédente. Soit F_i une autre suite d'espaces de Banach, et pour tout i soit u_i une application nucléaire de E_i dans F_i. Alors l'application linéaire u de E dans $F = \prod_i F_i$ déduite des u_i est nucléaire.

Pour prouver 1., on est immédiatement ramené au cas où les F_i sont des espaces de Banach, les A_i convexes cerclés, et en posant alors $E_i = (\widehat{F_i})_{A_i}$, on se ramène aussitôt à 2. Pour prouver 2., on note que pour chaque i existe une suite $(x'^{(i)}_j)$ extraite de la boule unité de E'_i, une suite bornée $(y_j^{(i)})$ dans F_i, enfin un $\lambda^{(i)} = (\lambda_j^{(i)}) \in \ell^1$, tel que l'on ait, pour tout $x_i \in E_i$:

$$u_i x_i = \sum_j \lambda_j^{(i)} \langle x_i, x'^{(i)}_j \rangle y_j^{(i)}$$

On peut d'ailleurs supposer que

$$\|\lambda^{(i)}\|_1 = \sum_j |\lambda_j^{(i)}| \leq 1/2^i$$

en multipliant au besoin la suite $j \to (y_j^{(i)})$ par un scalaire convenable. Alors on a $\sum_{i,j} |\lambda_j^{(i)}| \leq 1$, la suite double $(y_j^{(i)})$ est bornée dans

$F = \prod_i F_i$ (les F_i étant identifiés à des sous-espaces de F), et les formes linéaires $x'^{(i)}_j$, considérées comme des formes linéaires sur E, sont toutes de norme $\leqslant 1$. Enfin, il est immédiat que pour tout $x \in E$ on a $ux = \sum_{i,j} \lambda^{(i)}_j \langle x, x'^{(i)}_j \rangle y^{(i)}_j$, ce qui prouve que u est nucléaire.

3. Pour prouver que le produit tensoriel projectif de deux espaces nucléaires E et F est nucléaire, on applique le critère c. du th. 6. D'après la caractérisation des voisinages de 0 dans $E \hat{\otimes} F$ (Chap. I, § 1, prop. 2), on est ramené à prouver que si U (resp. V) est un voisinage convexe cerclé de 0 dans E (resp. F), alors l'application linéaire naturelle de $E \hat{\otimes} F$ dans $E_U \hat{\otimes} F_V$ est nucléaire. Cela résulte en effet du

LEMME 6. - <u>Le produit tensoriel de deux applications nucléaires (considéré comme une application entre les produits tensoriels projectifs complétés) est nucléaire</u>.

La démonstration est triviale, et vaut d'ailleurs aussi bien pour les applications de puissance p.ème sommable (§ 1, n°1, définition 1). On remarquera même que si u est une application de puissance p.ème sommable de E dans F, v une application de puissance p.ème sommable de G dans H, alors $u \otimes v$ peut être regardé comme une application de puissance p.ème sommable de $E \hat{\hat{\otimes}} G$ dans $F \bar{\otimes} H$: si en effet $u = \sum \lambda_i x'_i \otimes y_i$, $v = \sum_j \mu_j z'_j \otimes t_j$, où $(\lambda_i) \in \ell^p$, $(\mu_j) \in \ell^p$, les suites (x'_i), (y_i) etc. étant extraites de parties convexes cerclées compactes de E', resp. F etc., alors $u \otimes v = \sum_{ij} \lambda_i \mu_j (x'_i \otimes z'_j) \otimes (y_i \otimes t_j)$, et on a $(\lambda_i \mu_j) \in \ell^p(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ ($\mathcal{N}$, ensemble des entiers naturels), et $x'_i \otimes z'_j$ resp. $y_i \otimes t_j$ est extrait d'une partie convexe cerclée compacte de $(E \hat{\otimes} G)'$ resp. $F \bar{\otimes} H$.

4. Pour la dernière partie du th. 9, nous utiliserons encore le lemme 4. Une partie équicontinue du dual G' de $G = E \bar{\otimes} F$ s'identifie à une partie séparément équicontinue M de $\mathcal{L}(E,F)$, que l'on suppose convexe cerclée faiblement fermée, tout revient à trouver une partie analogue K de

$G' = \mathscr{L}(E,F)$, contenant M, telle que l'application identique de G'_M dans G'_K soit semi-intégrale. Soit (A_i) une suite croissante fondamentale de parties bornées convexes cerclées fermées de E, posons $E_{A_i} = E_i$. On peut supposer (th. 7) que l'application identique de E_i dans E_{i+1} est nucléaire. Pour tout i, M définit un ensemble M_i d'applications linéaires de E_i dans F', je dis que $M_i(A_i) = \bigcup_{u \in M_i} u(A_i)$ est une partie faiblement compacte de F', donc une partie équicontinue en vertu de l'hypothèse. En effet, M définit un ensemble borné donc équicontinu d'applications linéaires de E_{i+1} dans F'_s (car E est complet, donc les E_j sont complets), et A_i est une partie compacte de E_{i+1}, d'où suit que l'application naturelle de $A_i \times M$ dans F'_s est continue lorsque M est muni de la topologie de la convergence simple, et comme A_i et M, donc leur produit, sont compacts, il suit que l'image de $A_i \times M$ dans F'_s est compacte (M est compact comme partie équicontinue fermée du dual faible G' de $G = E \,\widetilde{\otimes}\, F$). Soit donc C_i l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée de $M(A_i)$, et soit B_i une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de F' telle que l'application identique de F'_{C_i} dans F'_{B_i} soit nucléaire et ait une norme-trace $\leqslant 1$. Il suit que les applications de E_i induites par les $u \in M$ proviennent toutes d'éléments de la boule unité de $E'_i \hat{\otimes} F'_{B_i}$; on peut d'ailleurs supposer que l'application canonique de $E'_i \hat{\otimes} F'_{B_i}$ dans $B(E_i, \widehat{F_{B^\circ}})$, donc dans $B(E_i, F)$, est biunivoque, en prenant par exemple les A_i tels que les E_i soient des espaces de Hilbert (n° 1, lemme 3) et satisfont par suite à la condition d'approximation (Chap. I, §5, n° 1, définition 9 et corollaire 3 des propositions 35 et 36). Il existe alors pour tout i une application linéaire continue naturelle u_i de G'_M dans $H_i = E'_i \hat{\otimes} F'_{B_i}$, appliquant M dans la boule unité, d'où une application linéaire naturelle u de G'_M dans l'espace de Banach H, espace des $(v_i) \in \prod_{i \geqslant 1} H_i$ tels que $\|(v_i)\| = \operatorname{Sup}_i \|v_i\| < +\infty$. D'autre part, on pouvait évidemment choisir la suite des B_i croissante et telle que l'application identique de F'_{B_i} dans $F'_{B_{i+1}}$ soit nucléaire. Pour $i > 1$, soit α_i l'application linéaire naturelle de E'_i dans E'_{i-1}, β_i l'application identique de F'_{B_i} dans $F'_{B_{i+1}}$, soit γ_i leur produit tensoriel , qui est une application linéaire de $H_i = E'_i \otimes F'_{B_i}$ dans $L_i = E'_{i-1} \otimes F'_{B_{i+1}}$. α_i et β_i étant nucléaires, il en est de même de γ_i (lemme 6), d'où suit que l'application linéaire naturelle γ de H dans $\prod_{i>1} L_i$ est aussi nucléaire (lemme 5; 2°), i.e. qu'on peut trouver une partie bornée convexe cerclée fermée $N = \prod_i N_i$ de $\prod_i L_i$, (où pour tout i, N_i est un homothétique convenable de la boule unité de L_i), telle que γ définisse une application nucléaire de H dans $L = (\prod_i L_i)_N$. Soit L_o le sous-espace fermé de L formé des $(v_i) \in L$ tels que pour tout $i > 1$, la forme bilinéaire sur $E_{i-1} \times F$ définie par $v_i \in L_i$ soit la restriction de la forme bilinéaire sur $E_i \times F$ définie par v_{i+1}. Il est immédiat que $\gamma \circ u$ applique G'_M dans L_o, et étant nucléaire donc intégrale en tant qu'application de G'_M <u>dans</u> L, c'est par suite une application semi-intégrale à droite u_o de G'_M dans L_o (Chap. I, §4, n°6, définition 8). D'autre part, tout $v = (v_i) \in L_o$ définit de façon évidente une forme bilinéaire $\delta.v$ sur $E \times F$, et quand v parcourt la boule unité, les $\delta.v$ forment un ensemble séparément équicontinu K de formes bilinéaires sur $E \times F$; car pour tout i leurs restrictions à $E_i \times F$ proviennent d'une partie bornée N_{i+1} de $E'_i \hat{\otimes} F'_{B_{i+2}}$. K est donc une partie équicontinue convexe cerclée du dual G' de $G = E \bar{\otimes} F$. Enfin, il est immédiat que l'application $\delta \circ u_o$ de G'_M dans G'_K n'est autre que l'application identique. Elle est d'ailleurs semi-intégrale à droite, puisque u_o l'est [3]. Comme nous l'avions dit au début, cela achève notre

3. Il est immédiat que l'application composée de deux applications linéaires continues, dont l'une est semi-intégrale, est semi-intégrale de même type (à droite ou à gauche).

démonstration.

3. Exemples usuels d'espaces nucléaires.

Nous donnons d'abord quelques exemples d'espaces de distributions qui sont des espaces nucléaires. Nous suivons [22] pour la définition et la notation des espaces suivants : ($\mathcal{E}$) espace des fonctions indéfiniment différentiables sur R^n ; ($\mathcal{D}$) espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact ; ($\mathcal{S}$) espace des fonctions "indéfiniment différentiables à décroissance rapide" ; ($\mathcal{O}_M$) espace des fonctions "indéfiniment différentiables à croissance lente", qui s'identifie aussi à l'espace des opérateurs de multiplication dans ($\mathcal{S}$) ; ($\mathcal{O}'_C$) espace des distributions à décroissance rapide, qui s'identifie aussi à l'espace des opérateurs de composition dans ($\mathcal{S}$). On considère aussi les duals de ces espaces, ($\mathcal{E}'$), ($\mathcal{D}'$), ($\mathcal{S}'$), ($\mathcal{O}'_M$), ($\mathcal{O}_C$), les trois premiers sont resp. l'espace des distributions à support compact, l'espace de toutes les distributions, l'espace des distributions tempérées. Nous donnons quelques indications sur les deux derniers espaces ($\mathcal{O}'_M$) et ($\mathcal{O}_C$) au § 4, n°4. Nous considérons aussi l'espace (s) des suites à décroissance rapide (i.e. dont le produit par toute suite $i \rightarrow i^n$ reste borné), et son dual (s'), espace des suites à croissance lente. D'après [22], tome 2, p.117,118, ($\mathcal{S}$) et (s) sont isomorphes (on utilise la transformation de Hermite). On sait aussi, grâce à la transformation de Fourier, que l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur le tore à n dimensions T^n, (espace qui peut aussi s'identifier à un certain sous-espace vectoriel fermé de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur le cube unité de R^n), est aussi isomorphe à (s) [4]. Enfin, ($\mathcal{O}_M$) et ($\mathcal{O}'_C$) sont canoniquement

---

4. A priori, la transformation de Fourier donne un isomorphisme de $\mathcal{E}(T^n)$ sur l'espace (s_n) des suites n-uples "à décroissance rapide" (sur l'ensemble d'indices $\mathcal{Z}^n$, où $\mathcal{Z}$ est l'ensemble des entiers). Mais si à la suite

isomorphes par la transformation de Fourier.

Notons aussi que les espaces $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{E}')$, $(\mathcal{D}')$ peuvent aussi être construits sur un ouvert quelconque de R^n, ou même sur une variété indéfiniment différentiable quelconque, et qu'on peut construire les espaces analogues pour n'importe quel type de tenseur donné. Le théorème qui suit restera manifestement valable pour ces espaces généraux.

THÉORÈME 10. - <u>Les espaces</u> $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{E}')$, $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$, $(\mathcal{S})$, $(\mathcal{S}')$, (s), (s'), $(\mathcal{O}_M)$, $(\mathcal{O}'_C)$, <u>sont tous nucléaires</u>, <u>ainsi que leurs duals forts</u>.

Démonstration. - Pour $(\mathcal{E})$, d'après la définition de sa topologie et le th. 9, corollaire 2, il suffit de prouver que l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur un cube qui s'annulent sur le bord avec toutes leurs dérivées est nucléaire (car la topologie de $(\mathcal{E})$ peut être obtenue comme la moins fine des topologies rendant continues certains opérateurs de multiplication de $(\mathcal{E})$ dans des espaces du type précédent, savoir les multiplications par les $\varphi \in \mathcal{D}$). Or, ce dernier est manifestement isomorphe à un sous-espace de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur le tore T^n, et cet espace est nucléaire comme il résulte par exemple du critère c. du th. 6 et de la prop. 5, corollaire 4 (§ 1, n°6). Comme (s) est isomorphe à ce dernier espace, il est aussi nucléaire. (Remarquons d'ailleurs que la démonstration par l'intermédiaire de la prop. 5, i.e. de la transformation de Fourier, revient en fait à se ramener d'abord à l'espace (s) dont en effet on prouve directement sans difficulté qu'il est nucléaire (voir prop. 8 plus bas)). Donc $(\mathcal{S})$ est

---

n-uple $(\lambda_{i_1,\dots,i_n})$ on fait correspondre la suite simple obtenue en ordonnant $\mathfrak{Z}^n$ une fois pour toutes par modules $|i_1| + \dots + |i_n|$ croissants (et de façon par ailleurs quelconque), on constate aisément qu'on obtient ainsi un isomorphisme de (s_n) sur (s). Notons qu'on voit de façon analogue que le produit vectoriel topologique d'un nombre fini d'espaces isomorphes à (s) est isomorphe à (s).

nucléaire, car isomorphe à (s). D'après le th. 7, les duals ($\mathcal{E}'$), (s'), et ($\mathcal{S}'$) sont donc aussi nucléaires. ($\mathcal{D}$) est la limite inductive d'une suite de sous-espaces qui sont aussi des sous-espaces vectoriels topologiques de ($\mathcal{E}$), donc est nucléaire d'après le th. 9, 1° et son corollaire 1. D'ailleurs, le dual fort de toute limite inductive complète d'une suite d'espaces ($\mathcal{F}$) nucléaires (et en particulier ($\mathcal{D}'$)) est nucléaire, car il est isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique du produit des duals de ces espaces ($\mathcal{F}$) nucléaires (utiliser Chap. I, Introduction IV, th. A, corollaire 1). Enfin, les topologies de ($\mathcal{O}_M$) et ($\mathcal{O}'_C$) ont été définies de façon à rendre ces espaces isomorphes à des sous-espaces vectoriels topologiques de $L_b((\mathcal{S}),(\mathcal{S}))$ (savoir resp. le sous-espace des opérateurs de multiplication ou de composition). Or ce dernier est un espace nucléaire complet dont le dual est nucléaire (th. 9, corollaire 3). Donc ($\mathcal{O}_M$) et ($\mathcal{O}'_C$) sont nucléaires (th. 9, 1°), et leurs duals, qui s'identifient, puisque $L_b((\mathcal{S}), (\mathcal{S}))$ est réflexif, à des espaces quotients du dual de ce dernier ([7], prop. 11), sont aussi nucléaires (th. 9, 1°). Cela achève la démonstration du th. 10.

D'ailleurs, en vertu du th. 9, les sous-espaces vectoriels et les espaces quotients des espaces précédents sont aussi nucléaires. Il en est par exemple ainsi de l'espace des solutions, dans n'importe lequel des espaces de distributions précédents, de n'importe quel système d'équations aux dérivées partielles linéaires homogènes (à coefficients indéfiniment différentiables). En particulier

COROLLAIRE. - <u>L'espace</u> $\mathcal{H}(V)$ <u>des fonctions holomorphes sur une variété holomorphe donnée</u>, <u>muni de la topologie de la convergence compacte est nucléaire</u>.

En effet, il est bien connu que $\mathcal{H}(V)$ est un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{E}(V)$ (th. de Weierstrass).

Nous verrons plus bas (§ 3, n°3) l'interprétation simple du produit tensoriel projectif complété de ces espaces avec un espace localement convexe quelconque.

Soit maintenant V une variété holomorphe, soit Φ un filtre sur V ayant une base formée d'ensembles ouverts. Soit $\mathcal{H}(\Phi)$ l'espace des fonctions holomorphes définies sur des ouverts $\in \Phi$, avec l'identifioation naturelle consistant à ne pas distinguer deux fonctions holomorphes qui coïncident sur un même ouvert $\in \Phi$, et sa structure vectorielle évidente. Pour tout ouvert $U \in \Phi$, il existe une application linéaire naturelle de l'éspace $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U dans $\mathcal{H}(\Phi)$, munissons donc $\mathcal{H}(\Phi)$ de la topologie limite inductive correspondante. Si Φ est le filtre des voisinages d'une partie non vide quelconque A de V, on retrouve les espaces $\mathcal{H}(A)$ considérés dans [10] (d'ailleurs, la théorie exposée dans [10] quand V est la sphère de Riemann admet dans ce cas, entre autres, la généralisation aux espaces qu'on vient de définir).

PROPOSITION 7. - *Si le filtre Φ admet une base dénombrable, $\mathcal{H}(\Phi)$ est un espace $(\mathcal{LF})$ nucléaire. Si Φ est même le filtre des voisinages d'une partie compacte K de V. $\mathcal{H}(K) = \mathcal{H}(\Phi)$ est un espace $(\mathcal{DF})$ nucléaire et complet.*

La première partie de la proposition est une conséquence immédiate du th. 10, corollaire, et du th. 9 corollaire 1. La deuxième partie est aussi facile, et a été montrée dans [9], § 1, n°4, exemple.

Il y aurait lieu d'ailleurs, avec les notations précédentes, d'introduire l'"antifiltre complémentaire de Φ", i.e. l'ensemble ψ des complémentaires dans V des $U \in \Phi$, et l'espace $\mathcal{H}(\psi)$, sous-espace vectoriel topologique du produit $\prod_K \mathcal{H}(K)$, où K parcourt les compacts $\in \psi$, formé des systèmes (f_K) tels que $K_1 \subset K_2$ implique que f_{K_1} est la "restriction" de f_{K_2} à K_1. On a alors le

COROLLAIRE. - *Avec les notations précédentes, $\mathcal{H}(\psi)$ est un espace*

<u>nucléaire</u>.

En effet, cela résulte du th. 9 et du fait que les $\mathcal{H}(K)$ sont nucléaires. Notons que si Φ est le filtre des voisinages d'une partie non vide A de V distincte de V, alors $\mathcal{H}(\psi)$ s'identifie en tant qu'espace vectoriel (non topologique) à l'espace $\mathcal{H}(\complement_V A)$ (les notations étant comme ci-dessus ; notre assertion n'est autre que l'élémentaire lemme de [10], §4, n°5). Quand V est la sphère de Riemann, on a vu dans [10], prop. 14, que cette identification respecte les topologies. En particulier, B <u>étant une partie non vide quelconque de la sphère de Riemann</u>, $\mathcal{H}(B)$ <u>est un espace nucléaire</u>.

Il n'est pas certain que ce fait subsiste quand on remplace $\mathcal{H}(B)$ par un espace $\mathcal{H}(\Phi)$ général, où quand on remplacera la sphère de Riemann par une variété holomorphe quelconque. Rappelons aussi qu'il résulte d'un théorème de J. S. Silva, mis sous sa forme générale dans [10], §4, que dans le cas où V est la sphère de Riemann, $\mathcal{H}(\Phi)$ s'identifie vectoriellement au dual d'un hyperplan fermé de $\mathcal{H}(\psi)$, lequel hyperplan s'identifie lui-même au dual de $\mathcal{H}(\Phi)$ [5].

Notons enfin que les considérations qui précèdent peuvent s'étendre à d'autres classes de fonctions que les fonctions holomorphes sur des variétés holomorphes, p. ex. aux espaces de solutions de systèmes d'équations aux dérivées partielles elliptiques, qu'on prendra plus ou moins généraux suivant les résultats qu'on désire étendre. Voir p. ex. mon article : <u>Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles</u>, à paraître au Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem.

---

5. Prenant un point ξ_0 arbitrairement dans un $K \in \psi$, l'hyperplan en question est formé des $f \in \mathcal{H}(\psi)$ qui "s'annulent en ξ_0"

Appelons avec G. Köthe [18] <u>espace échelonné</u> tout espace de suites E défini, à partir d'une suite croissante $a^{(1)},\dots,a^{(n)},\dots$ de suites positives $a^{(n)} = (a_i^{(n)})$, comme l'ensemble des suites $\lambda = (\lambda_i)$ dont le produit $\lambda a^{(n)} = (\lambda_i a_i^{(n)})$ par toute suite $a^{(n)}$ est sommable, muni de la suite des semi-normes

$$p_n(\lambda) = \|\lambda a^{(n)}\|_1 = \sum_i |\lambda_i a_i^{(n)}|$$

qui en fait un espace $(\mathcal{F})$ si on suppose que pour tout indice i existe un n tel que $a_i^{(n)} \neq 0$. On a alors la

PROPOSITION 8. - <u>Pour que l'espace échelonné</u> E <u>correspondant à la suite de définition</u> $(a^{(n)})$ <u>soit nucléaire</u>, <u>il faut et il suffit que pour tout indice</u> n <u>existe un indice</u> $m > n$ <u>tel que l'on ait</u>

$$(11) \qquad \sum_i a_i^{(n)} / a_i^{(m)} < +\infty$$

(Si les deux termes de $a_i^{(n)}/a_i^{(m)}$ sont nuls, on prend le rapport égal à 0).

Démonstration. - On vérifie que le dual de E s'identifie à l'espace des suites qui sont majorées en module par le multiple de quelque $a^{(n)}$, et les parties équicontinues sont celles contenues dans un homothétique d'un des ensembles A_n, où A_n est l'ensemble des suites $\lambda = (\lambda_i)$ majorées en module par $a^{(n)}$ (voir p. ex. [18]). En vertu du critère b. du th. 6, il suffit de montrer que la condition (11) est, pour tout couple m, n avec $m > n$, équivalente au fait que l'application identique de E'_{A_n} dans E'_{A_m} est nucléaire. Il revient évidemment au même de dire que l'application φ de ℓ^∞ dans E'_{A_m} définie par $\varphi((\xi_i)) = (\xi_i a_i^{(n)})$ est nucléaire. Or à priori la formule (11) exprime que la restriction φ_0 de φ à c_0 est nucléaire, car cela signifie aussi que la suite $(a_i^{(n)} e'_i)$ (où les e'_i sont les formes coordonnées sur E) est absolument sommable dans E'_{A_m} (Chap. I, §2, n°2 , th. 2) ce qui n'est autre que (11). Cette dernière condition est donc nécessaire pour que E soit nucléaire, et elle est de plus suffisante car alors il est immédiat que l'application nucléaire de ℓ^∞ dans E'_{A_m} obtenue en prolongeant φ_0 par continuité faible est identique à φ.

On retrouve par exemple que l'espace (s) des suites à décroissance rapide est nucléaire, car c'est l'espace échelonné qui correspond à $a^{(n)} = i^{(n)}$. Signalons aussi le

COROLLAIRE. - L'espace des fonctions entières d'ordre fini, muni de sa topologie naturelle d'espace ($\mathcal{DF}$) (voir [9], §1, n°4, exemple c) est nucléaire.

En effet, identifiant une fonction entière à la suite de ses coefficients de Taylor, l'espace des fonctions entières d'ordre fini apparait comme le dual de l'espace échelonné construit à partir des suites $a^{(n)} = (1/(i!)^n)$, qui est nucléaire en vertu de la prop. 8. Nous retrouverons l'espace précédent et ses variantes au § 4, n°3.

4. Propriétés de décroissance rapide.

Alors que les théorèmes précédents de ce paragraphe ne s'appuyaient que sur des techniques assez élémentaires, le théorème qui suit et ses corollaires font un usage essentiel des résultats du § 1.

THÉORÈME 11. - Soit E un espace nucléaire, A une partie équicontinue de son dual. Alors pour tout $0 < p \leq 1$ il existe une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée B de E' telle que A soit une partie de magnitude p de E'_B. (Voir § 1, n°5, définition 3).

Démonstration. - En effet, en vertu du critère b. du th. 6, il existe une suite croissante $A_1, A_2 \ldots$ de parties équicontinues convexes cerclées faiblement fermées de E', A_1 contenant A, telles que l'application identique de E'_{A_i} dans $E'_{A_{i+1}}$ soit une application de Fredholm pour tout i. Alors, en vertu du th. 3, corollaire (§ 1, n°3), l'application identique de E'_{A_1} dans E'_{A_n} est de puissance $(2/n-2)$.ème sommable, donc de puissance p.ème sommable pour n assez grand, d'où le théorème.

COROLLAIRE 1. - Une partie équicontinue du dual fort d'un espace nucléaire est d'ordre zéro (voir définition 3). Une partie bornée d'un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{DF})$ nucléaire complet est d'ordre zéro.

La première assertion est un corollaire immédiat du th. 11, la deuxième assertion en résulte compte tenu du th. 7

COROLLAIRE 2. - Toute application linéaire bornée d'un espace nucléaire E dans un espace localement convexe quasi-complet est d'ordre zéro. Il en est de même de toute application linéaire d'un espace localement convexe G dans E' qui transforme un voisinage convenable de 0 en une partie équicontinue.

La seconde assertion résulte aussitôt du th. 11. Pour la première, on est aussitôt ramené au cas où F est un espace de Banach; alors la transposée de l'application donnée u est, d'après ce qu'on vient de dire, une application d'ordre zéro, d'où suit que u est une application d'ordre zéro de E dans F", appliquant E dans F. On en conclut que c'est même une application d'ordre zéro de E dans F, grâce au corollaire 2 du th. 5 (§ 1, n°5), (ou aussi en utilisant le lemme 3, qui nous ramène au cas où F est réflexif).

COROLLAIRE 3. - Soit E un espace nucléaire quasi-complet, u un opérateur borné dans E. Alors u est un opérateur de Fredholm, d'ordre zéro. Le déterminant de Fredholm de u est bien défini et d'ordre zéro, la suite des valeurs propres de u, rangées par ordre de modules non croissants, est à décroissance rapide.

u est bien un opérateur de Fredholm d'ordre zéro en vertu du corollaire 2, donc son déterminant de Fredholm est bien défini (th. 4, corollaire 3), et d'ordre zéro (th. 4), d'où enfin la propriété de décroissance rapide pour la suite des valeurs propres.

COROLLAIRE 4. - Soit E un espace $(\mathcal{F})$ nucléaire. Alors toute partie bornée de E est contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'une

<u>suite à décroissance rapide dans</u> E. <u>Toute application linéaire bornée d'un espace localement convexe</u> F <u>dans</u> E <u>est de la forme</u> $\sum_i \lambda_i y'_i \otimes x_i$, <u>où</u> (λ_i) <u>est une suite à décroissance rapide</u>, (y'_i) <u>une suite équicontinue dans</u> F', (x_i) <u>une suite bornée dans</u> E.

La première partie du corollaire résulte du corollaire 1, compte tenu du corollaire 2 de la prop. 4 (§ 1, n°4); la deuxième partie résulte du corollaire 2 et du corollaire du th. 2 (§ 1, n°2), qui peut s'appliquer car on se ramène immédiatement au cas où F est un espace de Banach (savoir un espace E_A, où A est une partie bornée convexe cerclée fermée de E).

<u>Remarque</u> 9. - Le corollaire 3 ne peut pas s'améliorer dans le cas général, car déjà pour l'espace nucléaire (s) des suites à décroissance rapide, il est immédiat que n'importe quelle suite à décroissance rapide (λ_i) est la suite des valeurs propres d'un opérateur borné dans E = (s), savoir l'opérateur de multiplication par cette suite. Il en résulte aussi que toute fonction entière d'ordre zéro, égale à 1 à l'origine, est le déterminant de Fredholm d'un tel opérateur de multiplication. Cependant, pour <u>certains</u> espaces nucléaires, les résultats précédents peuvent encore s'améliorer. Ainsi, si E est l'espace (nucléaire) des fonctions holomorphes sur une variété holomorphe donnée V, il n'est pas difficile de voir que la suite des valeurs propres d'un opérateur borné dans E est même à décroissance exponentielle (i.e. majorée par une suite (k^i), où $k < 1$; comparer ce résultat et les précédents avec [15]). En effet, on montre successivement ce qui suit.

a. Si f est une application holomorphe de V dans un espace localement convexe quasi-complet F (il suffit de le montrer quand F est un espace de Banach), K une partie compacte de V, alors f(K) est contenu dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'une suite $(\lambda_i x_i)$

où (x_i) est une suite bornée dans F, et (λ_i) une suite de scalaires à décroissance exponentielle (on se ramène au local et on écrit le développement de Taylor de f).

b. Toute partie équicontinue A de E' est contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'une suite $(\lambda_i x_i)$ comme ci-dessus - appliquer a. à l'application holomorphe de V dans E' qui à tout $s \in V$ fait correspondre la forme linéaire $\varphi \longrightarrow \varphi(s)$ sur E -

c. Toute application linéaire bornée u de E dans un espace localement convexe quasi-complet F est de la forme $u = \sum_i \lambda_i x'_i \otimes y_i$, où (λ_i) est une suite à décroissance exponentielle, (x'_i) une suite équicontinue dans E', (y_i) une suite bornée dans F [6].

d. Enfin, si u est un opérateur borné dans E, on déduit alors, de la représentation précédente, par le calcul correspondant du déterminant de Fredholm, une majoration de ce déterminant qui implique le résultat annoncé grâce à la théorie classique des fonctions entières d'ordre zéro.

On voit de façon analogue, dans le cas particulier où E est

---

6. Pour le prouver, on peut supposer que F est un espace de Banach. Soit V un voisinage de 0 dans E tel que u définisse une application compacte de E_V dans F, alors ${}^t u$ est une application linéaire continue de F' faible dans l'espace $(E')_{V^o}$ muni de la topologie faible définie par le dual de cet espace de Banach. Il suffit maintenant d'appliquer à V^o l'énoncé b., et le lemme suivant, qui se démontre facilement comme les prop. 2 et 4 (§1, n°5)

LEMME. - Soit H un espace localement convexe, (x_i) une suite dans H, scalairement de carré sommable, soit A son enveloppe convexe cerclée fermée. Alors l'application identique de H_A dans H est de la forme $\sum x'_i \otimes x_i$, où (x'_i) est une suite scalairement de carré sommable dans le dual de H_A.

l'espace des fonctions entières à n variables, que la suite des valeurs propres d'un opérateur borné dans E, rangées par ordre de modules non croissants, est dominée par la suite (k^i) quel que soit $0<k<1$. On obtient des propriétés de décroissance encore plus fortes pour d'autres espaces nucléaires, p. ex. certains des espaces nucléaires échelonnés de la prop. 9, qui se prêtent particulièrement bien au calcul (p. ex. pour l'espace des fonctions entières d'ordre fini - voir corollaire de la prop. 9 -).

Ces remarques suggèrent un classement des espaces nucléaires d'après les "propriétés de décroissance" des parties équicontinues du dual, qui peut-être ne serait pas sans utilité, mais que nous n'entreprendrons point.

<u>Remarque</u> 10. - Soient E et F deux espaces nucléaires, M un ensemble d'applications linéaires appliquant un voisinage convexe cerclé fixe U de 0 dans E dans une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée fixe B de F' ; on suppose M fermée pour la topologie de la convergence simple. Comme $E \otimes F$ est un espace de Schwartz (Chap. I, § 1, n°3, prop. 7, 2°), on peut même supposer que M provient d'une partie compacte de l'espace $L(\widehat{E_U}, F'_B)$. Soit alors $0<p\leq 1$, et soit $B_1 \supset B$ une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de F', telle que l'application identique de F'_B dans F'_{B_1} soit de puissance p.ème sommable. Alors il est immédiat que M définit un ensemble compact d'applications de puissance p.ème sommable de $\widehat{E_U}$ dans F'_{B_1}, et provient donc d'une partie compacte M_1 de $E'_A \overset{(p)}{\otimes} F'_{B_1}$, où $A = U^o$ (voir § 1, n°s 1 et 2 pour les notations). On peut d'ailleurs supposer que l'application naturelle de $E'_A \widehat{\otimes} F'_{B_1}$ dans B(E,F) est biunivoque, en supposant par exemple que E'_A ou F'_{B_1} est un espace de Hilbert (lemme 3), de sorte que

l'application naturelle de M_1 sur M est biunivoque, donc un homéomorphisme quand M est muni de la topologie de la convergence simple sur $E \times F$. (D'ailleurs, si E'_b ou F'_b est du type $(\mathcal{F})$, il est immédiat, grâce au corollaire 4 du th. 11, que l'on peut même remplacer $E'_A \overset{(p)}{\otimes} F'_{B_1}$ par l'espace $E'_A \overset{[p]}{\otimes} F'_{B_1}$). Supposons maintenant que E est un espace nucléaire quasi-complet dont le dual fort E' soit nucléaire, et prenons dans ce qui précède F = E'. Avec les notations précédentes, notons maintenant que le déterminant de Fredholm d'un opérateur provenant d'un $u \in E'_A \overset{(p)}{\otimes} E_{B_1}$ est aussi identique au déterminant de Fredholm de l'image canonique de u dans $(E_{B_1})' \overset{(p)}{\otimes} (E_{B_1})$ (pour l'application produit tensoriel de l'application naturelle de E'_A dans le dual de E_{B_1} et de l'identité). Soit alors $\hat{u}$ la "suite non ordonnée des valeurs propres de u" au sens de la remarque 4 du § 1, n°4. Tenant compte de cette remarque 4, on trouve le résultat suivant : Soit E un espace nucléaire quasi-complet dont le dual est nucléaire, M un ensemble équiborné d'opérateurs dans E. Alors l'application $u \longrightarrow \hat{u}$ qui, à tout $u \in M$, associe la suite non ordonnée de ses valeurs propres, est une application continue de M, muni de la topologie induite par $L_s(E,E_s)$, dans l'espace des suites non ordonnées à décroissance rapide (i.e. d'ordre 0 ; voir la définition à la remarque 4).

D'ailleurs, il n'est pas difficile de s'assurer qu'il n'est pas nécessaire en fait que E'_b soit nucléaire, ni E quasi-complet, pourvu que A soit une partie convexe cerclée bornée complète de E.

Reconsidérons l'espace (s) des suites à décroissance rapide (n°3) et son dual (s') des suites à croissance lente, et soit E un espace localement convexe quelconque. Une suite (x_i) dans E est dite à décroissance rapide si pour tout $x' \in E'$, la suite $(\langle x_i, x' \rangle)$ est une suite à décroissance rapide, ou, ce qui revient manifestement au même, si pour tout entier $n \geqslant 0$, la suite $(i^n x_i)$ dans E est bornée. Si E est normé, cela signifie donc aussi que la suite des normes $(\|x_i\|)$ est à décroissance rapide. Plus généralement, si E est un espace $(\mathcal{F})$, il résulte aussitôt de la "propriété de dénombrabilité de Mackey" ([7], prop. 3) que si (x_i) est à décroissance rapide, il existe une partie bornée convexe cerclée A de E telle que (x_i) soit à décroissance rapide dans E_A. Si E est localement convexe quelconque, une suite qui possède cette propriété est dite à décroissance très rapide. Une telle suite est à fortiori à décroissance rapide, mais la réciproque n'est pas vraie en général : ainsi, dans l'espace du type $(\mathcal{DF})$ nucléaire (s'), la suite (e'_i) des formes coordonnées est manifestement à décroissance rapide, mais il n'existe pas de suite à décroissance rapide (λ_i) telle que la suite $(\frac{1}{\lambda_i} e'_i)$ soit bornée. Il est facile de voir (voir §3, n°3) que l'espace de toutes les suites à décroissance rapide dans un espace localement convexe complet E s'identifie à $(s) \hat{\otimes} E$; par suite, les suites à décroissance très rapide dans E s'identifient aux noyaux de Fredholm de l'espace $(s) \overline{\otimes} E$, ce qui explique de nouveau pourquoi les deux notions envisagées coïncident dans le cas où E est du type $(\mathcal{F})$ (voir Chap. I, th. 1).

Une suite à décroissance rapide dans un espace quasi-complet E a une enveloppe convexe cerclée fermée d'ordre zéro (§ 1, n°5, prop. 4, 2°), et si E est du type $(\mathcal{F})$, réciproquement toute partie d'ordre zéro est contenue dans une telle enveloppe (prop. 4, corollaire 2). J'ignore si cette réciproque est encore vraie si E est du type $(\mathcal{DF})$, même si E est nucléaire (voir proposition 9).

Notons du moins que si A est une partie bornée d'un espace $(\mathcal{DF})$ nucléaire (A est donc d'ordre zéro), A n'est pas contenu en général dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'une suite à décroissance <u>très</u> rapide. Il suffit de prendre $E = (s')$, A = ensemble des formes coordonnées e'_i. A n'est pas d'ordre zéro dans un espace E_B, où B est un borné défini par : $(\lambda_i) \in B$ équivaut à $|\lambda_i| \leqslant i^n$ pour tout i (où n est un entier $\geqslant 0$ donné). Car si A l'était, l'opérateur de multiplication par la suite (i^{-n}) dans E_B, qui applique B dans A, serait d'ordre zéro, et aurait donc une suite de valeurs propres à décroissance rapide, ce qui n'est pas, cette suite n'étant autre manifestement que (i^{-n}).

PROPOSITION 9. - <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe</u>. <u>Pour que</u> E <u>soit isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique d'un espace produit</u> $(s)^N$ (<u>où</u> N <u>est un ensemble d'indices convenable</u>), <u>il faut et il suffit que toute partie équicontinue de</u> E' <u>soit contenue dans l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée d'une suite</u> (x'_i) <u>dont le produit par toute suite scalaire</u> (i^n) (<u>où</u> n <u>est un entier</u> $\geqslant 0$ <u>arbitraire</u>) <u>soit équicontinue</u> (<u>c'est à dire une suite à décroissance rapide dans</u> E'_b <u>si</u> E <u>est quasi-tonnelé</u>). <u>Si</u> E <u>est du type</u> $(\mathcal{F})$, <u>on peut supposer dans cet énoncé que</u> N <u>est l'ensemble des entiers naturels</u>.

Démonstration. - Nécessité. Elle résulte de ce que la condition énoncée est manifestement stable par passage à un sous-espace vectoriel topologique et par l'opération de produit vectoriel topologique, et qu'elle est de plus vérifiée pour (s). Pour ce dernier point, on peut supposer que la partie équicontinue envisagée A soit l'ensemble des $(\lambda_i) \in (s')$ tels que $|\lambda_i| \leqslant i^n$ pour tout i, où n est un entier $\geqslant 0$ donné. Soit $x'_i = i^{n+2} e'_i$, la suite (x'_i) est évidemment à décroissance rapide dans (s'), et si $\lambda = (\lambda_i) \in A$, on a

$$\lambda = \sum_i \lambda_i e'_i = \sum_i (\lambda_i i^{-n}) i^{-2} x'_i$$

Il suit, si $\rho = \sum_i i^{-2}$, que A est contenu dans l'enveloppe convexe cerclée fermée de la suite des $\rho x'_i$.

Suffisance. Soit $(A_\nu)_{\nu \in N}$ une famille fondamentale de parties équicontinues de E', et pour tout $\nu \in N$, soit $(x_i'^{(\nu)})$ une suite dans E' dont le produit par toute suite (i^n) reste équicontinue, et dont l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée contienne A. Pour tout $x \in E$, la suite $(\langle x, x_i'^{(\nu)}\rangle)$ est donc à décroissance rapide, soit $\varphi_\nu(x)$ cette suite, et il est immédiat que l'application $x \to \varphi_\nu(x)$ de E dans (s) est linéaire et continue, et que la topologie de E est la moins fine des topologies rendant continues les applications φ_ν pour $\nu \in N$, d'où la conclusion voulue.

Un espace E qui satisfait aux conditions de la prop. 9 est évidemment nucléaire (th. 9). Il semble plausible que <u>tout</u> espace nucléaire satisfait réciproquement à ces conditions. Comme il est très facile de voir que tout espace nucléaire est isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique du produit d'une famille d'espaces nucléaires du type $(\mathcal{F})$, (on utilise le th. 6, critère b.), il suffirait de prouver la conjecture suivante pour les espaces nucléaires du type $(\mathcal{F})$: un tel espace est-il isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique de $(s)^N$, où N est l'ensemble des entiers naturels ? Il est d'ailleurs facile, en vertu de l'isomorphie de (s) avec l'espace $\mathcal{E}(T)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur le tore à une dimension, de montrer que chacun des espaces $(s)^N$ et $\mathcal{E}(R)$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables sur la droite réelle R) est isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique de l'autre, de sorte que l'on peut dans la question précédente remplacer aussi $(s)^N$ par $\mathcal{E}(R)$. Notons qu'il est du moins immédiat que les espaces nucléaires du th. 10 et de la proposition 8 satisfont bien aux conditions de la prop. 9 (pour les espaces nucléaires échelonnés de la prop. 8, on procède exactement comme pour (s)).

§ 3. PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE D'UN ESPACE NUCLÉAIRE PAR UN ESPACE LOCALEMENT CONVEXE

1. Propriétés de relèvement.

PROPOSITION 10. - 1. Soient E_1, E_2 deux espaces localement convexes, soit F_1 (resp. F_2) un sous-espace vectoriel de E_1 (resp. E_2). On suppose F_1 ou F_2 nucléaire. Alors toute forme bilinéaire continue sur $F_1 \times F_2$ est restriction d'une forme bilinéaire continue sur $E_1 \times E_2$. Tout ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $F_1 \times F_2$ est l'ensemble des restrictions d'un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $E_1 \times E_2$.

2. Soit E un espace localement convexe, F un sous-espace vectoriel nucléaire, G un espace localement convexe quasi-complet. Toute application linéaire bornée de F dans G est la restriction d'une application nucléaire de E dans G. Tout ensemble équiborné d'applications linéaires de F dans G est l'ensemble des restrictions d'un ensemble équiborné d'applications nucléaires de E dans G.

3. Soit E un espace localement convexe, F un sous-espace vectoriel, H un espace du type $(\mathcal{F})$ ou le dual fort d'un espace du type $(\mathcal{F})$, G un espace quotient de H par un sous-espace vectoriel fermé (faiblement fermé si H est un dual d'espace du type $(\mathcal{F})$). On suppose F ou G nucléaire. Alors toute application linéaire bornée de F dans G provient d'une application de Fredholm de E dans H (en prenant la restriction de cette dernière à F, puis en composant avec l'application canonique de H sur G). Enoncé analogue pour les ensembles équibornés d'applications linéaires de F dans G, pourvu que toute partie bornée de G soit l'image canonique d'une partie bornée de H (ce qui est le cas p. ex. si H est le dual d'un espace du type $(\mathcal{F})$, donc G le dual d'un sous-espace fermé de ce dernier - donc les parties bornées de G équicontinues, d'où la conclusion - ou si H est du type $(\mathcal{F})$ et G du type $(\mathcal{M})$, p. ex. G nucléaire).

Démonstration. - 1. En vertu de la prop. 4 du Chap. I (§ 1, n°2), la première partie de la prop. 10 équivaut au

COROLLAIRE. - Soient E_1, E_2 deux espaces localement convexes, soit (F_1) (resp. F_2) un sous-espace vectoriel de E_1 (resp. E_2). Si F_1 ou F_2 est nucléaire, l'application linéaire naturelle de $F_1 \hat{\otimes} F_2$ dans $E_1 \hat{\otimes} E_2$ est un isomorphisme vectoriel topologique.

Ce corollaire résulte immédiatement de la définition 4, d'après laquelle on a $F_1 \hat{\otimes} F_2 = F_1 \hat{\hat{\otimes}} F_2$ et du fait général que l'application canonique envisagée est un isomorphisme pour les topologies induites par $F_1 \hat{\hat{\otimes}} F_2$ resp. $E_1 \hat{\hat{\otimes}} E_2$ (comme il a été dit au Chap. I, § 3, n°3), et enfin que $E_1 \hat{\hat{\otimes}} E_2$ induit sur $E_1 \otimes E_2$ une topologie moins fine que la topologie de produit tensoriel projectif.

2. On est aussitôt ramené au cas où G est un espace de Banach. Alors la conclusion résulte du lemme 2 (n°1), et de la propriété évidente de relèvement des applications nucléaires signalée au Chap. I § 3, n°2, prop. 16. En fait, on trouve même qu'il existe une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée A de E' telle que les applications linéaires données soient toutes des restrictions à F d'applications linéaires de E définies par les éléments de la boule unité de $E_A' \hat{\otimes} G$.

3. Soit u une application linéaire bornée de F dans G. Comme les parties bornées de G sont nucléaires quand G est nucléaire (th. 7), ou à cause du corollaire 4 du th. 6 quand F est nucléaire, u est nucléaire. Il suffit maintenant d'appliquer successivement les deux parties de la prop. 16 du Chap. I, § 3, n°2, qui est bien valable ici ; il faut seulement vérifier que toute partie compacte convexe cerclée de G est l'image canonique d'une partie bornée de H. Mais cela est vrai si H est du type ($\mathcal{F}$) (Chap. I, lemme 6) ; et si H est le dual fort d'un espace du type ($\mathcal{F}$), il est bien connu (par raison d'équicontinuité) que même toute partie bornée de G est l'image canonique d'une partie bornée de H. On

procède de la même façon pour le cas d'un ensemble équiborné d'applications linéaires de F dans G.

De l'ordre d'idées précèdent procède aussi la

PROPOSITION 11. - Soit E un espace localement convexe, F un sous espace vectoriel nucléaire, A une partie équicontinue convexe cerclée de son dual F', identifié à E'/F°. Alors il existe une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée M de E' et une application nucléaire u de F'_A dans E'_M qui, composée avec l'application canonique de E' dans F', donne l'application identique.

Démonstration. - Soit en effet B une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de F', contenant A, telle que l'application identique de F'_A dans F'_B soit nucléaire (th. 6, critère b.), B est l'image canonique d'une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée M de E', et par suite F'_B s'identifie à un espace quotient de E'_M. La proposition résulte alors encore de la prop. 16 du Chap. I, § 3, n°2.

Ces propriétés exigent usuellement, pour être valables, l'existence de supplémentaires topologiques pour les sous-espaces vectoriels qui entrent en jeu. On jugera combien on est loin pourtant, en général, de l'existence d'un supplémentaire topologique dans les énoncés précédents, par le

LEMME 7. - Soit E un espace du type $(\mathcal{F})$ qui n'est pas isomorphe à un produit d'une suite d'espaces de Banach, ou un espace $(\mathcal{DF})$ qui n'est pas la somme directe (algébriquement) d'une suite de sous-espaces vectoriels fermés engendrés par des bornés. Alors E admet un sous-espace vectoriel fermé sans supplémentaire topologique. Il en est ainsi en particulier si E est un espace nucléaire du type $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{DF})$ qui n'est pas isomorphe au produit vectoriel topologique ou à la somme directe topologique d'une suite de droites.

Faisons p. ex. la démonstration dans le cas où E est du type ($\mathfrak{F}$), l'autre cas se traite de façon duale. Supposons d'abord qu'il existe une partie équicontinue A de E' telle que l'espace vectoriel faiblement fermé H qu'elle engendre ne puisse être engendrée algébriquement par un seul borné. Il existe donc dans H une suite fondamentale strictement croissante de parties bornées convexes cerclées faiblement fermées A_i, d'où résulte facilement l'existence d'un sous-espace vectoriel φ de H de dimension infinie, dont l'intersection avec chaque A_i est de dimension finie. D'après un critère fin de Banach (voir [7], th. 5), φ est faiblement fermé ; mais φ n'admet pas de supplémentaire faible dans E', i.e. il n'existe pas de projection faiblement continue de E' sur φ - car l'image de A dans φ serait une partie bornée faiblement totale de φ, ce qui est impossible par construction (cette image devant être contenu dans l'un des A_i, donc être de dimension finie) Donc l'orthogonal de φ dans E n'admet pas de supplémentaire topologique. - Supposons maintenant qu'il n'existe pas d'espace H comme ci-dessus. Il en résulte que E' est la réunion d'une suite croissante de sous-espaces faiblement fermés H_i dont chacun est engendré algébriquement par un borné, ces bornés formant une suite fondamentale de bornés. Si dans E tout sous-espace vectoriel fermé admettait un supplémentaire topologique, alors chaque H_i admettrait un supplémentaire topologique dans E'_s, d'où résulterait facilement que E' est, algébriquement, la somme directe d'une suite de sous-espaces vectoriels faiblement fermés L_i, engendrés par des bornés, tels que la somme directe F_i des L_j pour $j \neq i$ soit un supplémentaire faible de L_i. Posons alors $E_i = (F_i)^0$, la somme des E_i serait directe et dense dans E, et il est manifeste que la topologie induite sur $\sum_i E_i$ par E serait la topologie induite par le produit vectoriel topologique des E_i, d'où résulterait que E est isomorphe au produit $\prod_i E_i$. Comme enfin les E_i sont manifestement normables cela est contradiotoire avec l'hypothèse du lemme 7.

Notons que, d'après ce qui précède, si E est un espace du type ($\mathfrak{F}$) dans lequel tout sous-espace vectoriel fermé admet un supplémentaire topologique, E est isomorphe au produit d'une suite d'espaces de Banach E_i, et ces derniers devront forcément avoir la même propriété. Si, comme il est plausible, un espace de Banach dans lequel tout sous-espace vectoriel fermé admet un supplémentaire topologique est forcément isomorphe à un espace de Hilbert, alors les E_i sont des espaces de Hilbert. Mais il résulte immédiatement de [9], §2, n°2 qu'un espace produit d'une suite d'espaces de Hilbert de dimension infinie contient un sous-espace vectoriel fermé sans supplémentaire topologique. Sous réserve que la conjecture plus haut soit exacte, il suivrait donc que E est isomorphe soit à un espace de Hilbert H, soit à l'espace ω produit d'une suite de droites, soit enfin à un produit $\omega \times H$.

Le "Problème des topologies" du Chap. I, § 1, n°1, se résoud ici par l'affirmative dans les conditions suivantes :

PROPOSITION 12. - Soient E et F deux espaces localement convexes qui sont tous deux du type ($\mathfrak{F}$) ou tous deux du type ($\mathcal{DF}$) et complets. Supposons E nucléaire.

1. Pour toute partie bornée M de $E \hat{\otimes} F$, il existe une partie bornée convexe cerclée fermée A (resp. B) de E (resp. F) tels que M soit contenu dans l'image canonique de la boule unité de l'espace $E_A \hat{\otimes} F_B$.

2. Si M est oonvexe cerclé, il existe une suite (x_i) dans E tendant vers zéro, une suite $(\lambda_i) \in \ell^1$, et une suite équicontinue (φ_i) d'applica-

tions linéaires de $(E \hat{\otimes} F)_M$ dans F, de telle façon que pour tout $u \in M$, on ait

$$(12) \qquad u = \sum_i \lambda_i x_i \otimes \varphi_i(u)$$

Démonstration. - La deuxième partie implique manifestement la première. On sait qu'il existe un voisinage convexe cerclé V de 0 dans E' et une partie bornée convexe cerclée fermée B de F tels que les $u \in M$, considérées comme des applications linéaires de E' dans F, appliquent V dans B (si E' et F' sont du type $(\mathcal{F})$, c'est là un résultat classique sur les ensembles simplement bornés de formes bilinéaires continues sur le produit de deux espaces $(\mathcal{F})$, résultant du théorème de Baire ; et si E et F sont du type $(\mathcal{F})$, cela résulte de [7], th. 8, mis sous une forme légérement plus générale). Donc, E' étant nucléaire (th. 7), les $u \in M$ sont des applications nucléaires, donc compactes, de E_V dans F_B si V et B sont choisis convenablement (lemme 2 du n°1). Soit $A = V^0$, $U = B^0$; les $u \in M$ peuvent aussi être considérées comme des applications linéaires faiblement continues de F' dans E_A, appliquant U dans A. Comme A est une partie nucléaire de E, l'application identique de E_A dans E est de la forme $\sum_i \lambda_i \rho_i \otimes x_i$, où $(\lambda_i) \in \ell^1$, où (ρ_i) est une suite de formes linéaires sur E_A bornées par 1 en module sur A, et où (x_i) est une suite tendant vers zéro dans E. Posons $G = E \hat{\otimes} F$; on aura, pour tout $u \in G_M$, $y' \in F'$:

$$u.y' = \sum_i \lambda_i \langle u.y', \rho_i \rangle x_i \quad .$$

Comme u est une application faiblement continue de F' dans E_A, ${}^t u.\rho_i$ est un élément de F, dépendant linéairement de u, soit $\varphi_i(u)$. On a donc $\langle u.y', \rho_i \rangle = \langle \varphi_i(u), y' \rangle$, d'où $u.y' = \sum_i \lambda_i \langle \varphi_i(u), y' \rangle x_i$, d'où la formule (12). Enfin, les φ_i forment un ensemble équicontinu d'applications linéaires de G_M dans F, et de façon précise les φ_i appliquent M dans B. Car si $u \in M$, $y' \in B^0 = U$, on a bien $|\langle \varphi_i(u), y' \rangle| \leqslant 1$, puisque le premier membre est $|\langle u.y', \rho_i \rangle|$, et que $u.y' \in A$. La prop. 12 est ainsi démontrée.

Notons d'ailleurs que si E est du type $(\mathcal{F})$, on peut supposer que la suite (λ_i) est même à décroissance rapide, et si E est du type $(\mathcal{DF})$, que cette suite décroit plus vite que (i^{-n}) pour un $n > 0$ donné à l'avance (utiliser le th. 11 et son corollaire 4). Notons aussi que si E est un espace nucléaire quelconque, F un espace localement convexe quelconque, alors on a encore un énoncé analogue à la prop. 12, 2° pour tout ensemble équicontinu M de formes bilinéaires sur $E \times F$ (il suffit de reprendre la fin de la démonstration précédente).

COROLLAIRE 1. - Sous les conditions de la prop. 12, la topologie de la convergence bibornée sur $B(E,F)$ est identique à la topologie de dual fort de $E \hat{\otimes} F$.

COROLLAIRE 2. - Sous les conditions de la prop. 12, si G est un espace de Banach quelconque, alors les espaces vectoriels $L(G, E \hat{\otimes} F)$ et $E \hat{\otimes} L(G,F)$ sont canoniquement isomorphes vectoriellement.

A priori, il y a une application linéaire continue naturelle de $E \hat{\otimes} L(G,F)$ dans $L(G, E \hat{\otimes} F)$, correspondant à l'application bilinéaire continue naturelle de $E \times L(G,F)$ dans $L(G, E \hat{\otimes} F)$ qui, à tout couple $(x,u) \in E \times L(G,F)$, fait correspondre l'application linéaire $z \longrightarrow x \otimes u.z$ de G dans $E \hat{\otimes} F$. Montrons que c'est là une application biunivoque de $E \hat{\otimes} L(G,F)$ sur $L(G, E \hat{\otimes} F)$. Que ce soit une application sur résulte aussitôt de la prop. 12, 2°, l'image de la boule unité de G par une $u \in L(G, E \hat{\otimes} F)$ étant une partie bornée de $E \hat{\otimes} F$. D'autre part, si $A \in E \hat{\otimes} L(G,F)$ est tel que son image dans $L(G, E \hat{\otimes} F)$ est nulle, alors son produit scalaire avec tout élément de $E' \otimes G \otimes F'$ est nul. Comme $G \otimes F'$ est total dans le dual de $L(G,F)$, il suit aisément que A est orthogonal à $E' \otimes (L(G,F))'$, donc nul puisque pour tout espace localement convexe H (ici $L(G,F)$), l'application canonique $E \hat{\otimes} H$ dans $\mathcal{L}_e(E', H')$ est biunivoque (car c'est même un isomorphisme vectoriel topologique en vertu de la définition 4 du N°1). Bien entendu, la démonstration vaut encore si G est du type $(\mathcal{F})$ (resp. $(\mathcal{DF})$)

quand E et F sont du type $(\mathcal{DF})$ (resp. $(\mathcal{F})$).

2. <u>Propriétés de permanence et de dualité</u>.

PROPOSITION 13. - <u>Soit</u> E <u>un espace nucléaire non nul</u>, F <u>un espace localement convexe complet</u>. <u>Chacune des propriétés suivantes de</u> F <u>est vraie si et seulement si</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>possède la même propriété</u>.

a. F <u>est un espace de Schwartz</u> ([9], § 3, n°4).

b. F <u>est quasi-normable</u> ([9], § 3, n°1).

c. F <u>est nucléaire</u>.

d. F <u>est du type</u> $(\mathcal{M})$.

e. F <u>est réflexif</u>.

Démonstration. - Les réciproques résultent toutes du fait que F est isomorphe à un facteur direct de $E \hat{\otimes} F$ (Chap. I, § 1, n°3, lemme 3); reste à prouver la partie directe. a. et b. sont des cas particuliers de Chap.I, § 1, n°3, prop. 7, puisque E lui-même est un espace de Schwartz, donc quasi-normable (th. 6, corollaire 1). c. n'est autre que le th. 9, 3°. Pour les deux derniers points, on note d'abord qu'on peut supposer E complet (car $E \hat{\otimes} F$ ne change pas quand on remplace E par son complété). Il suffit alors d'identifier $E \hat{\otimes} F$ à $L_e(E'_\tau, F)$ (th. 6), de noter que E est un espace de Schwartz complet et d'appliquer le Chap. I, § 4, n°2, prop. 24, corollaire.

Soit E un espace nucléaire, F un espace localement convexe. Le dual de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à B(E,F), et ses éléments se représentent par des noyaux de Fredholm (th. 6, corollaire 4). Voici un résultat plus particulier :

THÉORÈME 12. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces localement convexes qui sont tous deux du type</u> $(\mathcal{F})$ (<u>resp</u>. <u>du type</u> $(\mathcal{DF})$), E <u>étant nucléaire</u>. <u>Alors</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>est du type</u> $(\mathcal{F})$ (<u>resp</u>. $(\mathcal{DF})$), <u>et la topologie de son dual fort</u> B(E,F), <u>qui est du type</u> $(\mathcal{DF})$ (<u>resp</u>. $(\mathcal{F})$), <u>est identique à la topologie de la convergence bibornée</u>. <u>On a</u> B(E,F) = $\mathcal{L}$(E,F), <u>et l'application</u>

<u>linéaire canonique de</u> $E'\hat{\otimes} F'$ <u>dans le dual fort</u> $B(E,F)$ <u>de</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>est un isomorphisme vectoriel topologique du premier espace sur le second</u>.

Signalons toute de suite les corollaires.

COROLLAIRE 1. - <u>Sous les conditions du th</u>. 12, <u>le bidual de</u> $E \hat{\otimes} F$, <u>muni de la topologie forte du dual de</u> $(E \hat{\otimes} F)' = B(E,F)$, <u>s'identifie à</u> $E \hat{\otimes} F''_b$, <u>où</u> F''_b <u>est le dual fort de</u> F'_b.

Il suffit d'appliquer deux fois le th. 12.

COROLLAIRE 2. - <u>Soient</u> E, F <u>deux espaces du type</u> $(\mathcal{F})$, E <u>nucléaire</u>. <u>Pour que</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>soit distingué</u>, <u>il faut et il suffit que</u> F <u>le soit</u>.

En effet, par définition, un espace est distingué si et seulement si son dual fort est tonnelé, or le dual fort de $E \hat{\otimes} F$ est $E'_b \hat{\otimes} F'_b$ et il suffit alors d'appliquer le Chap. I, §1, n°3, prop. 5, corollaire.

Démonstration du th. 12. - La première assertion n'est qu'un rappel de propositions antérieures (notamment Chap. I, prop. 5 et Chap. II, prop. 12, corollaire 1). $B(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$ est toujours vrai si E et F sont du type $(\mathcal{F})$. Si E et F sont du type $(\mathcal{DF})$, E étant de plus du type $(\mathcal{M})$, c'est encore vrai et résulte du th. 2 de [9], §1 : on doit seulement prouver qu'une forme bilinéaire séparément continue sur $E \hat{\otimes} F$ est "hypocontinue", i.e. que l'application de E dans F' et l'application de F dans E' qu'elle définit transforment les parties bornées en des parties équicontinues. Or dans le premier cas cela résulte du fait que les parties bornées de E sont compactes et les parties compactes de F'_b équicontinues, dans le deuxième cas du fait que E est évidemment tonnelé. Enfin, l'application naturelle de $E' \hat{\otimes} F'$ dans $B(E,F)$ est un isomorphisme topologique du premier espace sur le second, puisque, E' étant nucléaire (th. 7), $E' \hat{\otimes} F'$ s'identifie précisément à $L_e(E,F')$ en vertu du th. 6 (le dual de E' étant E si E est complet, cas auquel on se ramène aisément), et $L_e(E,F')$ s'identifiant à son tour à $B_b(E,F)$.

Le corollaire 2 du th. 12 est aussi contenu dans la caractérisation suivante des parties équicontinues du dual de $E \hat{\otimes} F$, où E et F sont des espaces du type $(\mathcal{DF})$, E nucléaire : *Une partie* M *du dual* $B_b(E,F) = L_b(E,F')$ *de* $E \hat{\otimes} F$ *est équicontinue si et seulement si pour toute partie bornée* A *de* E, *l'ensemble* $M(A) = \bigcup_{u \in M} u(A)$ *est une partie équicontinue de* F'. En effet, il suffit de prouver qu'alors il existe un voisinage de zéro V dans E tel que M(V) soit une partie équicontinue de F'. Pour cela, soit (A_i) une suite fondamentale de parties bornées de E. Comme les $M(A_i)$ sont des parties équicontinues de F', il existe une suite (k_i) de nombres > 0 tels que la réunion des $k_i M(A_i)$ soit une partie équicontinue de F'. Il suffit alors de prendre pour V l'enveloppe convexe cerclée fermée des $k_i A_i$, qui est bien un voisinage de zéro, E étant évidemment tonnelé.

Pour un résultat plus général que le th. 12, nous renvoyons au Chap.I §4, n°2, prop. 25, qui s'appliquera surtout quand E est un espace nucléaire quasi-oomplet quelconque, F un espace localement convexe quelconque. Signalons aussi les prop. 23 et 24 du Chap. I, qui s'appliquent ici pour donner, entre autres, un critère de faible compacité dans $E \hat{\otimes} F$ (E nucléaire) ; nous ne répèterons pas ces énoncés.

3. *Espaces fonotionnels nucléaires usuels*.

LEMME 8. - *Soit* T *un ensemble*, E *un espace vectoriel de fonctions scalaires sur* T, *muni d'une topologie localement convexe plus fine que la topologie de la convergence simple*. *Soit* F *un espace localement convexe complet*. *Alors l'espace* $L(F'_s, E_s)$ *s'identifie à l'espace des applications* f *de* T *dans* F *telles que pour tout* $y' \in F'$, $t \to \langle f(t), y' \rangle$ *soit une fonction* $\in E$, *soit* $U_f y'$, *et que* $U_f y'$ *parcoure une partie faiblement relativement compacte de* E *quand* y' *parcourt une partie équicontinue de* F'. *Cette dernière condition est inutile quand* E *est un espace réflexif*, *et que* E est du type $(\mathcal{LF})$, ou plus généralement si sa topologie est la moins fine de celles rendant continues les applications identiques de E dans des espaces E_i du type $(\mathcal{LF})$, formés de fonctions scalaires sur T avec des topologies plus fines que la convergence simple. (Il suffit même que la topologie de chaque E_i soit moins fine qu'une certaine topologie d'espace $(\mathcal{LF})$).

Démonstration. - Soit $u \in L(F'_s, E_s)$; pour tout $t \in T$, $y' \to u.y'(t)$ est une forme linéaire continue sur F'_s, donc un élément de F qu'on peut noter $F_u(t)$. F_u est une application de T dans F définie par

$$\langle F_u(t), y' \rangle = u.y'(t)$$

pour $t \in T$, $y' \in F'$, donc satisfait aux conditions de l'énoncé du lemme 8, car manifestement $U_{F_u} = u$, et u étant une application continue de F'_s dans E_s, transforme les parties relativement compactes, et à fortiori les parties équicontinues, de F'_s en des parties relativement compactes de E_s. Il reste à montrer que si f est une application de T dans F satisfaisant aux conditions du lemme 8, alors l'application $u = U_f$ de F' dans E qu'elle définit est faiblement continue, i.e. que sa transposée ${}^t u$ (qui est à priori une application linéaire de E' dans le dual algébrique F'^* de F') applique E' dans F. En effet, l'hypothèse faite exprime que ${}^t u$ est une application continue de E'_τ dans F'^* muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de F'. D'autre part, désignons, pour tout $t \in T$, par ε_t la forme linéaire $\varphi \to \varphi(t)$ sur E; les ε_t sont totales dans E'_s donc dans E'_τ (car $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in T$ implique $\varphi = 0$), donc l'espace vectoriel fermé dans E'_τ engendré par les ε_t est identique à E'_τ. Or ${}^t U_f(\varepsilon_t) = f(t) \in F$, d'où suit par continuité (F étant complet), que ${}^t u$ applique E'_τ dans F. Si maintenant E est réflexif, l'hypothèse que U_f transforme les parties équicontinues de F' en des parties faiblement relativement compactes de E devient : pour toute partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée A de F', la restriction de

U_f à F'_A est une application <u>continue</u> de F'_A dans E, ou, ce qui revient au même, de F'_A dans chaque E_i. Or si la topologie de E_i est moins fine qu'une topologie d'espace $(\mathcal{LF})$, on peut appliquer le critère du graphe fermé (Chap. I, Introduction IV, th. B), qui permet de conclure, car les formes $y' \to \langle U_f y', \varepsilon_t \rangle$ sur F'_A sont continues, et les ε_t sont totales dans E'_i. Remarquons que le même raisonnement aurait pu s'appliquer si, au lieu de supposer E réflexif, on supposait F quasi-normable, et réflexif, ou plus généralement que F satisfait aux conditions du lemme 9 de [9], §3, n°3.

Supposons maintenant que E est un espace <u>nucléaire complet</u>, et à fortiori réflexif. Alors $L_e(F'_\tau, E)$ s'identifie à $E \hat{\otimes} F$ (th. 6), et lemme 8 donne une nouvelle interprétation du produit tensoriel projectif complété $E \hat{\otimes} F$:

THÉORÈME 13. - <u>Soit</u> T <u>un ensemble</u>, E <u>un espace de fonctions scalaires sur</u> T, <u>muni d'une topologie localement convexe plus fine que la topologie de la convergence simple</u>, <u>et qui en fait un espace nucléaire complet</u>. <u>Alors pour tout espace localement convexe complet</u> F, $E \hat{\otimes} F$ <u>s'identifie à l'espace des applications</u> f <u>de</u> T <u>dans</u> F <u>telles que pour tout</u> $y' \in F'$, <u>la fonction</u> $t \to \langle f(t), y' \rangle$ <u>soit dans</u> E, <u>du moins si</u> E <u>est du type</u> $(\mathcal{LF})$, <u>ou plus généralement si sa topologie peut se définir comme à la fin de l'énoncé du lemme</u> 8.

De plus, la topologie sur cet espace fonctionnel définie par la topologie de $E \hat{\otimes} F$ s'interprète, dans chaque cas précisé, de façon immédiate, en se référant par préférence à l'espace $L_e(F'_\tau, E)$. Notons aussi qu'il est le plus souvent facile, même si E n'est pas du type $(\mathcal{LF})$, d'établir la validité du th. 13 à l'aide d'un emploi convenable du théorème du graphe fermé classique (voir exemple 5 plus bas).

<u>Exemples</u>. -

1. Soit V une variété indéfiniment différentiable [7] soit $E = \mathcal{E}(V)$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur V, avec sa topologie usuelle qui en fait un espace nucléaire du type $(\mathcal{F})$ (th. 10). Alors (F étant un espace localement convexe complet), $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à l'espace $\mathcal{E}(V,F)$ des fonctions vectorielles indéfiniment différentiables sur V, à valeurs dans F, muni de la topologie de la convergence compacte de la fonction et de ses dérivées. Soit (D_i) un système d'opérateurs différentiels dans $\mathcal{E}(V)$, soit $E = \mathcal{E}_{(D_i)}(V)$ le sous-espace de $\mathcal{E}(V)$ formé des solutions du système $D_i f = 0$ pour tout i. Alors $E \hat{\otimes} F$ est le sous-espace $\mathcal{E}_{(D_i)}(V,F)$ de $\mathcal{E}(V,F)$ formé des fonctions vectorielles satisfaisant au système d'équations $D_i f = 0$.

Dans ceci, on peut remplacer $\mathcal{E}(V)$ par un espace de tenseurs indéfiniment différentiables de type quelconque sur V. On peut aussi, pour toute partie fermée K de V, considérer le sous-espace $\mathcal{E}_K(V)$ des $\varphi \in \mathcal{E}(V)$ dont le support est dans K. Alors $\mathcal{E}_K(V) \hat{\otimes} F$ s'identifie au sous-espace correspondant $\mathcal{E}_K(V,F)$ de $\mathcal{E}(V,F)$.

2. Soit V une variété holomorphe, soit $E = \mathcal{H}(V)$ l'espace des fonctions holomorphes sur V, muni de sa topologie usuelle qui en fait un espace nucléaire du type $(\mathcal{F})$ (th. 10, corollaire). Alors $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à l'espace $\mathcal{H}(V,F)$ des fonctions vectorielles holomorphes à valeurs dans F, muni de la topologie de la convergence compacte. Cet exemple peut se modifier comme l'exemple précédent, et peut d'ailleurs aussi être considéré comme un cas particulier de ce dernier (car il est bien connu que la topologie de la convergence compacte dans $\mathcal{H}(V)$ est identique à la topologie induite par $\mathcal{E}(V)$).

3. On a des énoncés tout analogues si E est l'espace $(\mathcal{S})$ des fonc-

7. Comme d'habitude, toutes les variétés que nous envisagerons sont implicitement supposées dénombrables à l'infini.

tions sur R^n "indéfiniment différentiables à décroissance rapide", ou un espace nucléaire échelonné (voir prop. 8), en particulier, l'espace (s) des suites à décroissance rapide.

4. Soit V une variété indéfiniment différentiable, soit $E = \mathcal{D}(V)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur V à support compact, muni de sa topologie limite inductive naturelle. Alors $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à l'espace $\tilde{\mathcal{D}}(V,F)$ des fonctions vectorielles indéfiniment différentiables sur V, à valeurs dans F, qui sont "scalairement à support compact". Si F est un espace de Banach, plus généralement si F est du type $(\mathcal{DF})$, la topologie de $\tilde{\mathcal{D}}(V,F)$ qui correspond à celle de $E \hat{\otimes} F$ est la topologie de la limite inductive des sous-espaces $\mathcal{D}_K(V,F)$ (où pour tout compact $K \subset V$, $\mathcal{D}_K(V,F)$ est le sous-espace de $\tilde{\mathcal{D}}(V,F)$ formé des fonctions ayant leur support dans K), munis de la topologie de la convergence uniforme de la fonction f et de ses dérivées. Pour le voir, on applique l'exemple 1, qui prouve que $\mathcal{D}_K(V,F) = \mathcal{D}_K(V) \hat{\otimes} F$, et le Chap. I, § 1, n°3, prop. 6, corollaire, et enfin on note que, puisque la limite inductive des $\mathcal{D}_K(V,F)$ est une limite inductive <u>stricte</u> d'espaces complets, cet espace est complet, donc identique à $E \hat{\otimes} F$. Si F est un espace localement convexe complet quelconque, on prend sur $\tilde{\mathcal{D}}(V,F)$ la topologie borne supérieure des topologies des espaces $\mathcal{D}(V,\widehat{F_U})$, où U parcourt un système fondamental de voisinages convexes cerclés de 0 dans F.

On se gardera, si F n'est pas du type $(\mathcal{DF})$, de confondre l'espace $\tilde{\mathcal{D}}(V,F)$ avec l'espace $\mathcal{D}(V,F)$ des applications indéfiniment différentiables à support compact de V dans F, muni de la topologie limite inductive stricte des espaces $\mathcal{D}_K(V,F)$ considérés précédemment. Prenant par exemple $F = \mathcal{D}'(V)$ (dual de $\mathcal{D}(V)$), et définissant une application f de V dans F par $f(s) = \varepsilon_s$ (masse + 1 au point s), f est évidemment scalairement à support compact, mais non à support compact si V est non compacte. D'ailleurs, <u>si</u> V <u>est</u>

non compacte et si F admet un sous-espace vectoriel du type $(\mathcal{F})$ non normable, alors $\widetilde{\mathcal{D}}(V,F) = \mathcal{D}(V) \hat{\otimes} F$ et $\mathcal{D}(V,F)$ n'induisent pas la même topologie sur $\mathcal{D}(V) \otimes F$, et y donnent même des duals distincts. En effet, la topologie induite par le deuxième espaoe est la topologie limite inductive des espaoes $\mathcal{D}_K(V) \otimes F$ munis de la topologie de produit tensoriel projectif (qui est en effet la topologie induite par $\mathcal{D}_K(V,F)$ en vertu de l'exemple 1), de sorte qu'il suffit d'appliquer la remarque 1 du Chap. I, § 1, n°3. Si cependant il existe dans F'_b une partie bornée oonvexe cerclée complète A qui est faiblement totale (à fortiori s'il existe une partie équicontinue faiblement totale, i.e. si dans F existe une vraie norme continue), alors les espaces vectoriels $\widetilde{\mathcal{D}}(V,F)$ et $\mathcal{D}(V,F)$ sont identiques, et ont même les mêmes parties bornées. En effet, si M est une partie bornée de $\widetilde{\mathcal{D}}(V,F) = \mathcal{D}(V) \hat{\otimes} F$, en interprétant M oomme un ensemble d'applioations linéaires continues de F'_s dans E, on voit que M(A) est une partie bornée de $E = \mathcal{D}(V)$, dono contenue dans un sous-espace $\mathcal{D}_K(V)$, d'où résulte par prolongement par continuité que $M(F') \subset \mathcal{D}_K(V)$, d'où aussitôt le résultat annonoé. Comparant les deux remarques précédentes, on voit que si V n'est pas compact, si F admet un sous-espaoe vectoriel du type $(\mathcal{F})$ non normable et si F admet une semi-norme continue qui est une vraie norme, alors $\widetilde{\mathcal{D}}(V,F) = \mathcal{D}(V) \hat{\otimes} F$ n'est pas bornologique ; il n'est d'ailleurs pas même tonnelé, et son dual fort n'est pas quasi-complet. En effet, $\mathcal{D}(V,F)$ est égal à $\widetilde{\mathcal{D}}(V,F)$ et a les mêmes parties bornées, mais une topologie strictement plus fine, dono $\widetilde{\mathcal{D}}(V,F)$ n'est pas bornologique. Remarquons de plus que toute forme linéaire continue v sur $\mathcal{D}(V,F)$ est limite forte d'une suite de formes linéaires continues sur $\widetilde{\mathcal{D}}(V,F)$, p. ex. les formes $v_i(f) = v(\varphi_i f)$, où (φ_i) est une suite de fonctions $\in \mathcal{D}(V)$

qui finissent par être égales à 1 sur tout compact. Prenant alors v non dans le dual de $\tilde{\mathcal{D}}(V,F)$, (v_i) <u>est une suite de Cauchy dans le dual fort</u> $B(\mathcal{D}(V),F)$ <u>de</u> $\tilde{\mathcal{D}}(V,F)$ <u>qui ne converge pas dans ce dual</u>, qui n'est par suite pas quasi-complet. A fortiori $\tilde{\mathcal{D}}(V,F)$ n'est-il pas tonnelé.

<u>Si</u> F <u>est du type</u> $(\mathcal{F})$, <u>alors</u> $\mathcal{D}_K(V,F) = \mathcal{D}_K(V) \hat{\otimes} F = \mathcal{D}_K(V) \bar{\otimes} F$ (exemple 1), <u>donc</u> $\mathcal{D}(V,F)$ <u>s'identifie à</u> $\mathcal{D}(V) \bar{\otimes} F$ (Chap. I, §3, définition 3 et prop. 14). Quand F n'est ni du type $(\mathcal{DF})$ ni du type $(\mathcal{F})$, on n'a pas d'interprétation de $\mathcal{D}(V,F)$ par une des notions de produit tensoriel topologique rencontrée précédemment. On peut seulement dire que c'est un espace compris entre $\mathcal{D}(V) \bar{\otimes} F$ et $\mathcal{D}(V) \hat{\otimes} F = \tilde{\mathcal{D}}(V,F)$, avec une topologie intermédiaire. Son dual est manifestement l'espace des formes bilinéaires sur $\mathcal{D}(V) \times F$ dont la restriction à tout $\mathcal{D}_K(V) \times F$ est continue. La structure de ces formes bilinéaires est étudiée, ainsi qu'en général les espaces $\mathcal{D}(V,F)$, $\tilde{\mathcal{D}}(V,F)$ etc., dans [23].

Soit W une deuxième variété indéfiniment différentiable, et faisons $F = \mathcal{D}(W)$. Alors le produit tensoriel inductif complété $\mathcal{D}(V) \bar{\otimes} \mathcal{D}(W)$ s'identifie avec sa topologie à l'espace $\mathcal{D}(V \times W)$ construit sur la variété produit $V \times W$. Pour le voir, il suffit d'appliquer l'exemple 1 aux espaces $\mathcal{D}_K(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}_L(V) = \mathcal{D}_K(V) \bar{\otimes} \mathcal{D}_L(V)$ qui s'identifient donc à $\mathcal{D}_{K \times L}(V \times W)$, puis d'utiliser le Chap. I, §3, prop. 14, d'après lequel $\mathcal{D}(V) \bar{\otimes} \mathcal{D}(W)$ est la limite inductive des $\mathcal{D}_K(V) \bar{\otimes} \mathcal{D}_L(W)$. D'autre part, il existe dans $\mathcal{D}(W)$ une vraie norme continue, p. ex. $g \to \|g\|_\infty$, de sorte que $\mathcal{D}(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}(W) = \tilde{\mathcal{D}}(V, \mathcal{D}(W))$ s'identifie en tant qu'espace vectoriel à $\mathcal{D}(V, \mathcal{D}(W))$, qui lui-même s'identifie manifestement à $\mathcal{D}(V \times W)$ et donne même les mêmes parties bornées. <u>Ainsi</u>, <u>l'espace</u> $\mathcal{D}(V \times W)$ <u>est muni de trois topologies localement convexes</u>

<u>naturelles</u>, <u>donnant les mêmes parties bornées</u>, <u>savoir la topologie</u> T_0 <u>de</u> $\mathcal{D}(V) \overline{\otimes} \mathcal{D}(W)$, <u>qui est la topologie usuelle de</u> $\mathcal{D}(V \times W)$; <u>la topologie</u> T_1 <u>de</u> $\mathcal{D}(V, \mathcal{D}(W))$; <u>enfin la topologie</u> T_2 <u>de</u> $\mathcal{D}(V) \hat{\otimes} \mathcal{D}(W) = \tilde{\mathcal{D}}(V, \mathcal{D}(W))$. (On pourrait aussi envisager la topologie T'_1 de $\mathcal{D}(W, \mathcal{D}(V))$). On a $T_0 \geqslant T_1 \geqslant T_2$. Il est facile de voir, grâce à ce qui précède, que <u>l'on a</u> $T_0 = T_1$ <u>si et seulement si</u> W <u>est compacte</u>, <u>et</u> $T_1 = T_2$ <u>si et seulement si</u> V <u>est compacte</u>, <u>donc</u> $T_0 = T_2$ <u>si et seulement si</u> V <u>et</u> W <u>sont compactes</u>. De plus, si deux de ces topologies sont distinctes, elles donnent même des duals distincts.

5. Soit $E = (\mathcal{O}_M)$ l'espace des fonctions sur R^n "indéfiniment différentiables à croissance lente", muni de sa topologie usuelle qui en fait un espace nucléaire (th. 10). Alors $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à l'espace $\mathcal{O}_M(R^n, F)$ des fonctions sur R^n à valeurs dans F, "indéfiniment différentiables à croissance lente", i.e. dont le produit scalaire par tout $y' \in F'$ est une fonction $\in (\mathcal{O}_M)$. Pour le prouver, il suffit de noter que la topologie de $\mathcal{O}_M$ est bien définie comme à la fin du lemme 8, les E_i étant des espaces $(\mathcal{F})$ isomorphes à $(\mathcal{S})$. En effet, pour toute $\varphi \in (\mathcal{S})$ telle que $\varphi(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, on pose $E_\varphi = \frac{1}{\varphi}(\mathcal{S})$, espace des quotients $\frac{f}{\varphi}$ avec $f \in (\mathcal{S})$, muni de la topologie déduite de celle de $(\mathcal{S})$ par transport de structure. La topologie sur $\mathcal{O}_M(R^n, F)$ qui correspond à celle de $(\mathcal{O}_M) \hat{\otimes} F$ s'interprète facilement. Regardant $(\mathcal{O}_M)$ comme un sous-espace vectoriel topologique de $L_b((\mathcal{S}), (\mathcal{S})) = (\mathcal{S}') \hat{\otimes} (\mathcal{S})$, $(\mathcal{O}_M) \hat{\otimes} F$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de $(\mathcal{S}') \hat{\otimes} (\mathcal{S}) \hat{\otimes} F$ (prop. 10, corollaire), que nous interprétons comme $L_b((\mathcal{S}), (\mathcal{S}) \hat{\otimes} F)$, i.e. l'espace des applications linéaires continues de $(\mathcal{S})$ dans l'espace $(\mathcal{S}) \hat{\otimes} F = \mathcal{S}(R^n, F)$ des fonctions sur R^n, à valeurs dans F, qui sont "indéfiniment différentiables à décroissance rapide" (voir exemple 3). Il est immédiat

qu'à $f \in \mathcal{O}_M(R^n,F)$ correspondra, par l'interprétation précédente, l'opérateur de multiplication $\varphi \to \varphi f$ de $(\mathcal{S})$ dans $\mathcal{O}_M(R^n,F)$.

6. On traitera de façon analogue l'espace $(\mathcal{O}_C)$, dual fort de l'espace $(\mathcal{O}'_C)$ des "distributions à décroissance rapide" (voir th. 10). $(\mathcal{O}_C)$ s'identifie à l'espace des fonctions sur R^n qui sont "indéfiniment différentiables à croissance très lente", i.e. qui sont produits d'un polynôme par une fonction indéfiniment différentiable bornée ainsi que toutes ses dérivées ; et $(\mathcal{O}_C)$ est un espace $(\mathcal{LF})$ nucléaire et complet (voir §4, n°4, th. 15). Le th. 13 est donc directement applicable à cet espace.

Un autre type d'espaces nucléaires, qui ne se ramènent pas utilement aux espaces fonctionnels envisagés dans le lemme 8, sont les espaces de distributions nucléaires, notamment les espaces $(\mathcal{E}')$, $(\mathcal{S}')$, $(\mathcal{D}')$ de L. Schwartz (th. 10). Si F est un espace localement convexe complet, alors $(\mathcal{E}') \hat{\otimes} F$ (resp. $(\mathcal{S}') \hat{\otimes} F$, $(\mathcal{D}') \hat{\otimes} F$) s'identifie à l'espace $L_b((\mathcal{E}), F)$ (resp. à $L_b((\mathcal{S}), F)$, $L_b((\mathcal{D}), F)$) en vertu du th. 6, et s'identifie donc à un espace de noyaux-distributions lorsque F est lui-même un "espace de distributions" ; tandis que si F est quelconque, on a affaire à des espaces de "distributions vectorielles" (voir [23] pour ces notions). Si F est un espace du type $(\mathcal{DF})$, on a à envisager le produit tensoriel de deux espaces $(\mathcal{DF})$ lorsque E est l'espace $(\mathcal{E}')$ ou $(\mathcal{S}')$, ce qui permet d'utiliser la prop. 12 pour des théorèmes de structure explicites. On trouvera dans [23] un procédé plus direct qui permet d'obtenir ces "distributions vectorielles" comme des sommes de dérivées de fonctions vectorielles continues.

Nous terminons ce § avec quelques indications sur les utilisations possibles des résultats de ce §, et en donnant au hasard quelques exemples dans cette voie. Le théorème 13 et les exemples qui précèdent sont utiles pour appliquer aux espaces de fonctions vectorielles envisagés les théorèmes généraux sur les produits tensoriels topologiques, et notamment les résultats des n^{os} 1 et 2 de ce §. Ainsi, je ne connais pas de démonstration directe, sauf sous des hypothèses très particulières sur la variété holomorphe V, pour prouver dans le cas de l'exemple 2, que les fonctions holomorphes vectorielles de la forme simple, $z \to f(z)a$, où $f \in \mathcal{H}(V)$ et $a \in F$, et leurs combinaisons linéaires, sont denses dans $\mathcal{H}(V,F)$. Dans cet ordre d'idées, lorsque E et F sont du type $(\mathcal{F})$, on peut même appliquer le th. 1 du Chap. I et obtenir les éléments de l'espace fonctionnel $E \hat{\otimes} F$ envisagé par des séries de la forme $\sum_i \lambda_i f_i \otimes g_i$, où $(\lambda_i) \in \ell^1$, et où (f_i) (resp. (g_i)) est une suite bornée dans E (resp. F). Appliquant le th. 11, corollaire 4, on peut même supposer la suite (λ_i) à décroissance rapide. En particularisant, on trouve par exemple que si V et W sont des variétés indéfiniment différentiables (resp. holomorphes), alors toute fonction indéfiniment différentiable, (resp. holomorphe) sur la variété produit $V \times W$ est la somme d'une série $\sum \lambda_i f_i \otimes g_i$, où (λ_i) est une suite à décroissance rapide, (f_i) une suite bornée de fonctions indéfiniment différentiables (resp. holomorphes) sur V, et (g_i) une suite bornée de fonctions indéfiniment différentiables (resp. holomorphes) sur M. On peut même supposer que dans cette représentation $h = \sum \lambda_i f_i \otimes g_i$, chaque f_i est une combinaison linéaire de fonctions du type $x \to h(x,y)$, et chaque g_i une combinaison linéaire de fonctions du type $y \to h(x,y)$. Cela est contenu dans les réflexions générales suivantes : Soient E et F deux espaces du type $(\mathcal{F})$, E nucléaire, et soit $u \in E \hat{\otimes} F$. Soit F_o le sous-espace vectoriel de F adhérence de $u(E')$, quand u est interprété comme une application linéaire de E' dans F, et soit E_o le sous-espace de E adhérence de ${}^t u(F')$; c'est aussi le sous-espace de E orthogonal du noyau de u. u s'identifie donc à une application linéaire continue de $E'/(E_o)^o$ dans F_o, et comme le premier espace s'identifie au dual de l'espace nucléaire E_o, u s'identifie à un élément de $E_o \hat{\otimes} F_o$, et peut par suite se représenter par une série $\sum \lambda_i x_i \otimes y_i$, où (λ_i) est une suite à décroissance rapide, et (x_i) (resp. (y_i)) une suite bornée dans E_0 (resp. F_0). Ces réflexions restent d'ailleurs valables si E et F sont du type $(\mathcal{DF})$, grâce à la prop. 12, à cela près qu'on ne peut plus en général supposer la suite (λ_i) à décroissance rapide, mais seulement qu'elle est majorée par une suite (i^{-n}), où n est un entier > 0 donné. [8]. Signalons aussi qu'on peut, dans des énoncés du type précédent, tenir compte de la prop. 12 pour avoir une <u>décomposition simultanée</u> d'un ensemble borné de fonctions vectorielles, dépendant "linéairement" de la fonction variable envisagée.

Un autre genre d'applications a été vu au Chap. I, § 1, n°3. Signalons dans le même ordre d'idées (savoir l'application de la propriété de relèvement exprimée dans le Chap. I, § 1, n°3) des résultats comme le suivant. Soit K une partie fermée de la variété indéfiniment différentiable V, soit $\mathcal{E}(K)$ l'espace des fonctions scalaires indéfiniment différentiables sur K, i.e. des fonctions scalaires sur K qui sont restriction d'une fonction indéfiniment différentiable définie sur V. $\mathcal{E}(K)$ peut donc être regardé comme un espace quotient de $\mathcal{E}(V)$, et est à ce titre un espace du type $(\mathcal{F})$ nucléaire (th. 9, 1°). Appliquant le th. 13, qui caractérise l'espace $\mathcal{E}(K) \hat{\otimes} F$, et la prop. 3 du Chap. I, on trouve : <u>Soit</u> f <u>une application de</u> K <u>dans un espace</u> F <u>du type</u> $(\mathcal{F})$, <u>telle que pour tout</u> $y' \in F'$, <u>la fonction</u> $t \longrightarrow \langle f(t), y' \rangle$ <u>soit la restriction à</u> K <u>d'une fonction scalaire indéfiniment différentiable sur</u> V. <u>Alors</u> f <u>est la restriction d'une application indéfiniment différentiable de</u> V <u>dans</u> F. Cet énoncé est d'ailleurs en défaut quand F n'est pas du type $(\mathcal{F})$, par exemple, en général, pour l'application $t \longrightarrow \varepsilon_t$ de K dans le dual de $\mathcal{E}(K)$, où ε_t est la forme

---

8. Si E et F sont des espaces localement convexes <u>quelconques</u>, en appliquant le th. 5 du § 2, n°5, on trouve une généralisation du résultat qui précède pour les opérateurs de puissance p.ème sommable, pourvu que $0 < p < 1/2$.

$\varphi \longrightarrow \varphi(t)$ sur $\mathcal{E}(K)$.

Remplaçons $\mathcal{E}(K)$ par l'espace quotient $\tilde{\mathcal{E}}(K)$ de $\mathcal{E}(V)$ par le sous-espace des $\varphi \in \mathcal{E}(V)$ tels que φ et chacune de ses dérivées s'annule sur K. $\tilde{\mathcal{E}}(K)$ est donc un espace nucléaire du type $(\mathcal{F})$ (th. 9, 1°). Supposons pour simplifier $V = R^n$. Une $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{E}}(K)$ est déterminée quand on connaît les restrictions (φ_p) à K des dérivées multiples $D^p\varphi$ d'un représentant quelconque $\varphi \in \mathcal{E}(V)$ de $\tilde{\varphi}$, restrictions qui ne dépendent pas du choix de ce représentant ; et les systèmes (φ_p) de fonctions sur K qui correspondent effectivement à une $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{E}}(K)$ convenable peuvent se caractériser de façon intrinsèque (voir H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 36, 1934, p. 63-89). Soit P l'ensemble des indices de dérivation multiples $p = (p_1, \dots, p_n)$ sur R^n, soit $T = K \times P$, identifions les $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{E}}(K)$ à des fonctions scalaires $(t,p) \longrightarrow \varphi_p(t)$ sur T. Alors $\tilde{\mathcal{E}}(K)$ devient un espace nucléaire du type $(\mathcal{F})$ formé de fonctions sur T. Appliquant le th. 13, on voit que si F est un espace localement convexe complet, alors $\tilde{\mathcal{E}}(K) \hat{\otimes} F$ s'identifie à l'espace des systèmes (f_p) (où pour tout $p \in P$, f_p est une application de K dans F) tels que pour tout $y' \in F'$, le système des fonctions $f_p^{(y')}(t) = \langle f_p(t), y' \rangle$ soit $\in \tilde{\mathcal{E}}(K)$. Si F est du type $(\mathcal{F})$, on trouve, compte tenu de la prop. 3 du Chap. I, et en se rappelant l'interprétation de $\tilde{\mathcal{E}}(K)$ comme un quotient de $\mathcal{E}(V)$: *Soit* (f_p) *une famille d'applications de* K *dans un espace* F *du type* $(\mathcal{F})$, *telle que pour tout* $y' \in F'$, *la famille des fonctions scalaires* $t \longrightarrow \langle f_p(t), y' \rangle$ *soit la famille des restrictions à* K *d'une fonction indéfiniment différentiable sur* R^n *et de ses dérivées. Alors il existe une application indéfiniment différentiable* f *de* R^n *dans* F, *telle que pour tout* p, f_p *soit la restriction de* $D^p f$ *à* K.

§4. PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE D'UN ESPACE $(\mathcal{F})$ PAR UN ESPACE $(\mathcal{DF})$

1. *Considérations générales, contre-exemples.*

Nous avons vu (§3, th. 13 et corollaires) que la théorie de la dualité pour un espace $E \hat{\otimes} F$, E nucléaire, était particulièrement simple quand E et F sont tous deux du type $(\mathcal{F})$, ou tous deux du type $(\mathcal{DF})$; en particulier, le dual fort de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie alors à $E' \hat{\otimes} F'$. Il est évident que dans le cas général, cette formulation doit pour le moins se modifier. Si par exemple E est un espace qui est nucléaire et complet ainsi que son dual fort, et si on prend $F = E'$, alors $E \hat{\otimes} F$ et $E' \hat{\otimes} F'$ sont identifiés tous deux à l'espace $L_b(E,E)$, or ce dernier ne peut évidemment se mettre en dualité avec lui-même à l'aide de la fonction trace si E est de dimension infinie, car l'opérateur identique ne peut raisonnablement avoir une trace finie. Mais dans les cas favorables, on peut espérer que le dual de $E \hat{\otimes} F$ soit identique à $E' \bar{\otimes} F'$:

LEMME 9. - *Soit* E *un espace nucléaire*, F *un espace localement convexe quelconque. Tout élément* u *du dual* $B(E,F)$ *de* $E \hat{\otimes} F$ *provient d'un élément* u_o *d'un espace* $E'_A \hat{\otimes} F'_B$, *où* A (*resp.* B) *est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de* E' (*resp.* F'). *D'autre part, si l'élément* v *de* $E' \bar{\otimes} F'$ *qui provient de* u_o *est nul, alors* u *est nul, d'où une immersion canonique de* $B(E,F)$ *dans* $E' \bar{\otimes} F'$. *Supposons* E *et* F *complets. La topologie induite par* $E' \bar{\otimes} F'$ *sur* $B(E,F)$ *est plus fine que la topologie de dual fort de* $E \hat{\otimes} F$, *et est identique à cette dernière si* (*par exemple*) F *est réflexif. D'autre part* $B(E,F)$ *est dense dans* $E' \bar{\otimes} F'$, *qui est donc le complété de* $B(E,F)$ *si* F *est réflexif. Si de plus chacun des espaces* E, F *est du type* $(\mathcal{F})$ *ou* $(\mathcal{DF})$, *alors le dual fort* $B(E,F)$ *de* $E \hat{\otimes} F$ *est du type* $(\mathcal{LF})$.
(Pour la définition des espaces $(\mathcal{LF})$, voir Chap. I, Introduction IV).

COROLLAIRE. - *Si* E *et* F *sont complets*, E *nucléaire*, F *réflexif, alors* le dual fort $B(E,F)$ de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à $E' \bar{\otimes} F'$ si et seulement si ce dual fort est complet.

Démonstration du lemme 9. - La caractérisation des éléments de $B(E,F)$ par des noyaux de Fredholm a été donnée avec le th. 6, corollaire 4. Avec les notations du lemme, prouvons que $v = 0$ implique $u = 0$. Grâce au lemme 3 du § 2, n°1, on peut supposer que E'_A est un espace de Hilbert. Posons $E_1 = \widehat{E_{A^0}}$, $F_1 = \widehat{F_{B^0}}$, donc E'_A s'identifie à E'_1, F'_B à F'_1, et $v = 0$ implique que $u_0 \in E'_1 \hat{\otimes} F'_1$ définit une forme bilinéaire nulle sur $E_1 \times F_1$, d'où suit que u_0 est nul puisque E_1 est un espace de Hilbert, (et satisfait donc à la "propriété d'approximation" du Chap. I, § 5, n°1, ce qui permet d'appliquer à E'_1 et F'_1 le corollaire des prop. 35 et 36, 3°), et à fortiori on a $u = 0$. Ainsi, $B(E,F)$ s'immerge dans $E' \bar{\otimes} F'$, et est évidemment dense dans $E' \bar{\otimes} F'$ puisque $E' \otimes F'$ y est déjà dense. Le dual de $B(E,F)$ pour la topologie T_0 induite par $E' \bar{\otimes} F'$ est donc $\mathcal{L}(E',F')$, et les parties équicontinues de ce dual sont les ensembles séparément équicontinus de formes bilinéaires sur $E' \times F'$. En particulier, toute partie bornée de $E \hat{\otimes} F = \mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ est une partie équicontinue du dual de $B(E,F)$ pour la topologie T_0, de sorte que T_0 est plus fine que la topologie T_1 du dual fort de $E \hat{\otimes} F$. Si F est réflexif, on a même $\mathcal{L}(E',F') = \mathcal{L}_e(E'_s, F'_s) = E \hat{\otimes} F$, et comme toute partie séparément équicontinue de $\mathcal{L}(E',F')$ est bornée pour la topologie de la convergence simple, donc aussi pour la topologie de la convergence bi-équicontinue, elle est bornée dans $E \hat{\otimes} F$, d'où alors $T_0 = T_1$. Si de plus E et F sont tous deux du type $(\mathcal{F})$ (resp. $(\mathcal{DF})$), alors $B(E,F)$ est du type $(\mathcal{DF})$ (resp. du type $(\mathcal{F})$), donc à fortiori du type $(\mathcal{LF})$ (car dans le premier cas, $B(E,F)$ étant le dual d'un espace du type $(\mathcal{F})$ réflexif - voir prop. 13 -, sera bornologique - voir [9], § 1, th. 7 - donc du type $(\mathcal{LF})$). Nous allons voir dans un instant que si E est du type $(\mathcal{F})$, F du type $(\mathcal{DF})$, ou vice-versa, alors $B(E,F)$ est encore du type $(\mathcal{LF})$, ce qui achève la démonstration du lemme 9.

Une question naturelle est donc, dans chaque cas, si le dual fort $B(E,F)$ de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie bien à $E' \bar{\otimes} F'$. Dans le cas où la topologie induite par $E' \bar{\otimes} F'$ sur $B(E,F)$ est bien la topologie de dual fort, une question équivalente est donc : le dual fort de $E \hat{\otimes} F$ est-il complet ? Ou encore : tout élément de $E' \bar{\otimes} F'$ est-il un noyau de Fredholm, provenant d'un espace $E'_A \hat{\otimes} F'_B$, où A (resp. B) est une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E' (resp. F') ? Supposons maintenant, dans ce qui précède, que E soit du type $(\mathfrak{F})$ et F du type $(\mathfrak{DF})$, ou E du type $(\mathfrak{DF})$ et F du type $(\mathfrak{F})$ et <u>distingué</u> (i.e. dont le dual fort soit tonnelé, il suffit donc par exemple que F soit <u>réflexif</u>). Alors E' et F' sont des espaces $(\mathfrak{LF})$ ([9], §1, th. 7), donc $B(E,F)$ est un espace $(\mathfrak{LF})$ pour la topologie induite par $E' \bar{\otimes} F'$ (Chap. I, §3, n°1, prop. 14). On est donc ramené à la question si l'espace des formes bilinéaires continues sur le produit d'un certain espace du type $(\mathfrak{F})$ par un certain espace du type $(\mathfrak{DF})$ est complet pour la topologie limite inductive naturelle déjà considérée au Chap. I, Introduction IV, exemple c. Nous allons voir que <u>la question et ses formulations équivalentes peut avoir une réponse négative même si</u> E <u>et</u> F <u>sont tous deux nucléaires</u> (E <u>du type</u> $(\mathfrak{F})$, F <u>du type</u> $(\mathfrak{DF})$), même dans les cas les plus usuels. De façon générale, on a la

PROPOSITION 14. - <u>Soit</u> E <u>un espace</u> $(\mathfrak{DF})$ <u>ne contenant pas de partie bornée totale</u>, F <u>un espace</u> $(\mathfrak{F})$ <u>dont le dual faible ne contient pas de partie bornée totale</u> (i.e. F n'admet pas de semi-norme continue qui soit une vraie norme). <u>Soit</u> G <u>un espace</u> $(\mathfrak{F})$ <u>dont le dual n'est pas réunion d'une suite de sous-espaces vectoriels faiblement fermés engendrés par des bornés</u> (voir lemme 11 plus bas); <u>soit</u> H <u>un espace</u> $(\mathfrak{DF})$ <u>qui n'est pas réunion d'une suite de sous-espaces vectoriels engendrés par des bornés</u>.

1. <u>Désignons par</u> F <u>l'un quelconque des espaces</u> $E \hat{\otimes} G$, $E \hat{\hat{\otimes}} G$, $L_e(E'_\tau\ , G)$, $L_e(E'_b\ , G)$, $L_b(F,G)$, $L_b(H,E)$, <u>ou le sous-espace vectoriel fermé de l'un de ces deux derniers espaces</u>, <u>formé par les applications</u>

qui transforment les parties bornées en des parties relativement compactes. Alors P n'est pas bornologique ni tonnelé, son dual fort n'est pas quasi-complet, et contient même des suites de Cauchy non convergentes.

2. Soit J l'un quelconque des 3 espaces suivants : espace des applications linéaires bornées (resp. compactes) de E dans H, muni de sa topologie d'espace $(\mathcal{LF})$ naturelle (voir Chap. I, Introduction, IV, exemple c), ou le sous-espace de $F \bar{\otimes} H$ formé des noyaux de Fredholm, muni de la topologie induite par $F \bar{\otimes} H$ (qui en fait un espace $(\mathcal{LF})$ si H est bornologique - voir Chap. I, §3, n°1, prop. 14). Alors J n'est pas quasi-complet, et contient même des suites de Cauchy non convergentes.

Démonstration. - Prouvons d'abord le

LEMME 10. - 1. Soit E un espace $(\mathcal{DF})$. Pour que E ne contienne pas de partie bornée totale, il faut et il suffit que E contienne un facteur direct isomorphe à l'espace φ, somme directe topologique d'une suite de droites.

2. Soit F un espace $(\mathcal{F})$, pour que son dual faible ne contienne pas de partie bornée totale (i.e. que F n'ait pas une vraie norme continue), il faut et il suffit que F contienne un facteur direct isomorphe à l'espace ω, produit vectoriel topologique d'une suite de droites.

Prouvons d'abord 1. La condition énoncée est manifestement suffisante car φ ne contient pas de partie bornée totale. Elle est nécessaire, car si E ne contient pas de partie bornée totale, soit (A_i) une suite fondamentale de parties bornées de E, soit E_i le sous-espace vectoriel fermé engendré par A_i, on peut alors supposer la suite (E_i) strictement croissante. Il est alors facile de construire par récurrence simultanée, deux suites (x_i) et (x'_i), d'éléments de E et de formes linéaires continues sur E, telles que l'on ait $\langle x_i, x'_i\rangle = 1$, $\langle x_i, x'_j\rangle = 0$ si $i \neq j$, x'_i nulle sur E_i. Alors pour tout $x \in E$, la suite $(\langle x, x'_i\rangle)$ est finie (i.e. a tous ses termes nuls sauf un nombre fini), on peut donc poser

$u.x = \sum_i \langle x, x_i' \rangle x_i$, u est manifestement une projection de E sur le sous-espace E_0 engendré par les x_i, et les restrictions de u aux E_i sont manifestement continues, même si E_0 est muni de la topologie limite inductive de ses sous-espaces de dimension finie. Il en résulte que u est une application continue de E sur E_0 muni de la topologie limite inductive ([9], § 1, th. 3, corollaire), d'où suit aussitôt que cette dernière topologie est aussi celle induite par E, d'où la conclusion. Pour prouver 2., il suffit dans ce qui précède de faire E = F', de prendre les E_i faiblement fermés et les x_i' faiblement continus. Alors on vérifie facilement que la projection de E sur E_0 construite plus haut est faiblement continue, de sorte que E_0 est un facteur direct dans E_s'. Donc son orthogonal dans E admet un supplémentaire topologique, isomorphe au dual de E_0, donc à ω.

Le lemme 10 implique que l'espace P (resp. J) est une somme directe topologique de deux espaces, dont l'un s'obtient en remplaçant, dans la définition de P (resp. J) E par φ, F par ω. Ce facteur est alors toujours isomorphe à $\varphi \hat{\otimes} G$ ou $\varphi \hat{\otimes} H_b'$ (resp. à l'espace des noyaux de Fredholm dans $\omega \bar{\otimes} H$ [9]), comme on vérifie aussitôt. Il suffit donc de prouver l'énoncé 1. (resp. l'énoncé 2.) pour ces espaces. D'ailleurs H_b' est un espace $(\mathcal{F})$ satisfaisant à la même hypothèse que G, on est donc ramené, pour prouver 1., à l'espace $\varphi \hat{\otimes} G$. Pour cela, il suffit de trouver dans le dual fort $B(\varphi, G)$ de $\varphi \hat{\otimes} G$ une suite de Cauchy non convergente. Alors il suivra que $B(\varphi, G)$ n'est pas quasi-complet, à fortiori $\varphi \hat{\otimes} G$ n'est pas quasi-tonnelé,

9. La topologie à prendre sur cet espace de noyaux de Fredholm est, suivant les cas, soit la topologie induite par $\omega \bar{\otimes} H$, soit sa topologie $(\mathcal{LF})$ naturelle. Cependant, on peut toujours se ramener au premier cas, car la deuxième topologie est la topologie induite par $\omega \bar{\otimes} H_1$, où H_1 est l'espace H muni de la topologie bornologique associée à la topologie donnée de H, topologie qui en fait manifestement un espace $(\mathcal{DF})$ bornologique qui n'est pas non plus réunion d'une suite de sous-espaces vectoriels fermés engendrés par des bornés.

ni à fortiori bornologique. Nous allons même construire dans $B(\varphi,G)$ une suite de Cauchy forte, qui ne converge pas dans $B(\varphi,G)$ même pour la topologie de la convergence simple sur $\varphi \otimes G$. En même temps nous aurons donc prouvé, si G est réflexif, que dans l'espace des noyaux de Fredholm dans $\omega \overline{\otimes} G'$ (qui n'est autre que $B(\varphi,G)$), existe une suite de Cauchy pour la topologie induite par $\omega \overline{\otimes} G'$ qui ne converge pas dans $B(\varphi,G)$ pour cette topologie. Nous laisserons au lecteur le soin de faire les adaptations évidentes dans ce qui suit pour prouver le résultat analogue dans le cas général où G ne serait pas réflexif.

Soit G_0 un sous-espace vectoriel fermé de G, posons $G_1 = G/G_0$. Alors $B(\varphi, G_1)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $B(\varphi,G)$ fermé pour la topologie T_s de la convergence simple sur $\varphi \otimes G$, et la topologie de dual fort de $\varphi \hat{\otimes} G_1$ y est plus fine que la topologie induite par $B(\varphi,G)$. Enfin la topologie sur $B(\varphi,G_1)$ de la convergence simple sur $\varphi \otimes G_1$ est identique à la topologie induite par la topologie T_s sur $B(\varphi,G)$. Il suffit donc, pour notre propos, de trouver une suite dans $B(\varphi,G_1)$, de Cauchy pour la topologie de dual fort de $\varphi \hat{\otimes} G_1$, qui ne converge pas dans $B(\varphi,G_1)$ pour la topologie de la convergence simple sur $\varphi \otimes G_1$; en d'autres termes, on peut remplacer G par $G_1 = G/G_0$. Notons maintenant le

LEMME 11. - Soit G un espace du type $(\mathcal{F})$. Pour que le dual de G ne soit pas la réunion d'une suite de sous-espaces vectoriels faiblement fermés, engendrés par des parties bornées, il faut et il suffit que G admette un espace quotient $G_1 = G/G_0$ non normable, dont le dual faible contienne une partie bornée totale.

L'existence d'un quotient G/G_0 comme dans l'énoncé signifie qu'il existe un sous-espace vectoriel faiblement fermé L de G', contenant une partie bornée faiblement totale A, mais qui n'est pas engendré par un seul borné. Cela exclut la possibilité que G' soit la réunion d'une suite de sous-espaces vectoriels faiblement fermés L_i engendrés par des bornés, car l'un des L_i contiendrait A (d'après le th. de Baire, où le th. A de l'Introduction, IV), donc L, qui serait donc engendré par une partie bornée. Réciproquement, s'il n'existe pas L comme ci-dessus, on considère une suite fondamentale croissante (A_i) de parties bornées de G', et on désigne par L_i l'espace vectoriel faiblement fermé engendré par A_i. Alors L_i doit être engendré par un borné, et la réunion des L_i est G'.

Grâce au lemme 11 et les considérations qui l'ont précédé, nous sommes ramenés au cas où $E = \varphi$, et où le dual de G contient une partie bornée faiblement totale, G non normable. Dans la suite, il est commode de changer de notation et de remplacer G par E.

D'après le th. 13, pour tout espace localement convexe complet E, $\varphi \hat{\otimes} E$ s'identifie à l'espace des suites dans E qui sont "faiblement finies", i.e. dont le produit scalaire par tout $x' \in E'$ est une suite $\in \varphi$. Soit M une partie bornée de $\varphi \hat{\otimes} E$, et soit A une partie bornée convexe cerclée complète de E'_b. Interprétant M comme un ensemble borné d'applications linéaires continues de E'_b dans φ, on voit que M(A) est une partie bornée de φ, donc qu'il existe un entier n tel que pour tout $(x_i) \in M$, et $x' \in A$, on ait $\langle x_i, x' \rangle = 0$ pour $i > n$. <u>Si en particulier</u> A <u>est faiblement dense dans</u> E', <u>on voit que toute partie bornée de</u> $\varphi \hat{\otimes} E$ <u>est aussi une partie bornée de la somme directe topologique</u> $\varphi \bar{\otimes} E$ <u>d'une suite d'espaces identiques à</u> E. Alors les ensembles $\varphi \bar{\otimes} E$ et $\varphi \hat{\otimes} E$ sont les mêmes, le premier espace a à priori une topologie plus fine, mais les parties bornées sont les mêmes. Par suite le dual fort $B(\varphi, E)$ de $\varphi \hat{\otimes} E$ s'identifie à un sous-espace vectoriel <u>topologique</u> du dual fort de $\varphi \bar{\otimes} E$, qui s'identifie au produit vectoriel topologique $\omega \hat{\otimes} E'$ d'une suite d'espaces identiques à $E' = E'_b$ (où $\omega = \varphi'$ désigne le produit vectoriel topologique d'une suite de droites). Il est visible que le sous-espace $B(\varphi, E)$ est exactement l'espace des suites dans E' contenues dans un sous-espace E'_A convenable, où A est une partie équicontinue convexe cerclée de E' (c'est ce qui exprime qu'on a une application linéaire de φ dans un E'_λ). Revenant alors au cas où E est un espace du type $(\mathcal{F})$ non normable, dont le dual contient une partie bornée faiblement totale, il existe manifestement dans E' des suites qui ne sont pas du type précédent, de sorte que $B(\varphi,E)$ est différent de son complété $\omega \hat{\otimes} E'$. Pour construire même une suite de Cauchy dans $B(\varphi,E)$ qui ne converge pas dans $B(\varphi,E)$ même pour la topologie de la convergence simple, sur $\varphi \otimes E$, il suffit de prendre un élément (x'_i) de $\omega \hat{\otimes} E'$ qui n'est pas dans $B(\varphi,E)$, et la suite de ses "sections" $u_n = (x'_1,\ldots,x'_n, 0, 0,\ldots)$.

COROLLAIRE 1 de la prop. 14. - Soit F un espace $(\mathcal{F})$ dont le dual ne contient pas de partie bornée faiblement totale, soit G un espace du type $(\mathcal{F})$ nucléaire non isomorphe au produit vectoriel topologique d'une suite de droites. Alors $L_b(F,G)$ n'est pas bornologique ni tonnelé, son dual fort n'est pas quasi-complet. Il existe des applications à trace de G dans F qui ne sont pas des applications de Fredholm. (Chap. I, §3, n°2, définition 4).

Montrons d'abord que G' n'est pas la réunion d'une suite de sous-espaces vectoriels faiblement fermés L_i engendrés par des bornés. En effet, chaque L_i serait le dual d'un espace quotient de E ([9], §3, th. 12), donc le dual d'un espace $(\mathcal{F})$ nucléaire (th. 9, 1°) qui serait forcément normable puisque son dual est engendré par un borné, donc de dimension finie ; par suite la topologie de G serait une topologie faible complète, donc G serait isomorphe à un produit de droites, contrairement à l'hypothèse. On peut donc appliquer la prop. 14, qui prouve immédiatement la première partie du corollaire. Pour trouver une application à trace de G dans F qui ne soit pas une application de Fredholm, on peut, en vertu du lemme 10, supposer que F est identique à ω. Alors le dual fort de $\varphi \hat{\otimes} G$ est l'espace des noyaux de Fredholm dans $\omega \tilde{\otimes} G'$, muni de la topologie induite (lemme 9). En vertu de la prop. 14, ce dual n'est pas complet, donc distinct de $\omega \overline{\otimes} G'$. Soit alors $u \in \omega \overline{\otimes} G'$, $u \notin B(\varphi, G)$, u définit une application à trace de G dans F qui n'est pas une application de Fredholm. Nous pouvons prendre par exemple $F = G = (\mathcal{E})$, espace de toutes les fonctions indéfiniment différentiables sur R_n, muni de sa topologie usuelle, et on trouve le

COROLLAIRE 2. - $L_b((\mathcal{E}),(\mathcal{E}))$ *n'est pas bornologique ni tonnelé, son dual (espace des opérateurs bornés dans* $(\mathcal{E})$) *n'est pas quasicomplet. Il existe dans* $(\mathcal{E})$ *des opérateurs à trace qui ne sont pas des opérateurs de Fredholm.*

Nous allons maintenant montrer que la conclusion du lemme 9 est en défaut quand on n'y suppose plus que F est réflexif. De façon précise, soit toujours φ l'espace somme directe d'une suite infinie de droites, c'est donc un espace $(\mathcal{DF})$ nucléaire particulièrement simple. *Nous allons donner un exemple simple d'un espace* E *du type* $(\mathcal{F})$, *quasi-normable et à fortiori distingué* ([9], §3, définition 4 et §1, th. 5), *tel que sur le dual de* $\varphi \widehat{\otimes} E$, *la topologie forte soit strictement moins fine que la topologie induite par* $\omega \overline{\otimes} E'$, *et donne même un dual strictement moins grand*. (Rappelons encore que la topologie induite sur $B(\varphi, E)$ par $\omega \overline{\otimes} E'$ est une topologie d'espace $(\mathcal{LF})$). Il suffira que l'espace E (du type $(\mathcal{F})$ et quasi-normable) soit tel que son dual contienne une partie bornée faiblement totale, mais pas de partie bornée fortement totale. En effet, le dual de $B(\varphi, E)$ pour la topologie induite par $\omega \overline{\otimes} E'$, i.e. le dual $\mathcal{L}(\omega, E')$ de $\omega \overline{\otimes} E'$, s'identifie à $\varphi \widehat{\otimes} E''$ (§2, n°1, th. 6, fin de l'énoncé). Le dual de $B(\varphi, E)$ pour la topologie forte de dual est donc contenu dans $\varphi \widehat{\otimes} E''$, et c'est exactement la réunion des adhérences faibles, pour la dualité avec $B(\varphi, E)$, des parties bornées de $\varphi \widehat{\otimes} E$. Or on a vu que les parties bornées de $\varphi \widehat{\otimes} E$ sont aussi des parties bornées de la somme directe topologique $\varphi \overline{\otimes} E$ (en raison du fait que E' contient une partie bornée faiblement totale), d'où suit aisément que le bidual de $\varphi \widehat{\otimes} E$ s'identifie vectoriellement à l'espace somme directe $\varphi \otimes E''$. Montrons donc qu'il existe un élément de $\varphi \hat{\otimes} E''$ qui n'est pas dans $\varphi \otimes E''$. En effet, soit (A_i) une suite fondamentale croissante de parties bornées de E', il existe pour tout i, une forme linéaire continue x''_i sur E', non identiquement nulle et nulle sur A_i (car A_i n'est pas fortement totale). Alors la suite (x''_i) dans E'' est faiblement finie, et définit donc un élément de $\varphi \hat{\otimes} E''$, qui n'appartient pas à $\varphi \otimes E''$.

Reste à construire un espace E du type $(\mathfrak{F})$ comme ci-dessus. Nous prendrons l'espace échelonné [18] construit sur l'ensemble d'indices $N \times N$ (N, ensemble des entiers > 0), défini par la suite des suites doubles $a^{(n)} = (a^{(n)}_{i,j})$, où

$$a^{(n)}_{i,j} = \begin{cases} j^i & \text{si} \quad i < n+1 \\ j^n & \text{si} \quad i \geq n+1 \end{cases}$$

$(n = 0,1,\ldots)$. Soit $A^{(n)}$ l'ensemble des suites doubles $(x'_{i,j})$ telles que $|x'_{i,j}| \leq a^{(n)}_{i,j}$ pour tout i, j ; les $A^{(n)}$ et leurs homothétiques forment un système fondamental de parties équicontinues de E'. $A^{(0)}$ est manifestement faiblement total (Hahn-Banach). Montrons que $A^{(n)}$ n'est pas fortement total. Pour cela, considérons le sous-espace Q_{n+2} de E' formé des suites doubles $(x'_{i,j})$ telles que $x'_{i,j} = 0$ pour $i \neq n+2$, Q_{n+2} est exactement l'espace des suites $(x'_{i,j})$, nulles sur les lignes de rang $\neq n+2$, qui sont dominées par j^{n+1} sur la ligne de rang n+2 ; et la topologie induite par la topologie forte de E' est la topologie normée naturelle, pour laquelle cet espace est isomorphe à ℓ^{∞} par la transformation de multiplication par la suite (j^{-n-1}). Cette application envoie $A^{(n)} \cap Q_{n+2}$ dans c_0, de sorte qu'il existe une forme linéaire continue non identiquement nulle sur Q_{n+2}, nulle sur $A^{(n)} \cap Q_{n+2}$. Il suffit de composer cette forme avec la projection naturelle de E' sur Q_{n+2} pour trouver une forme linéaire fortement continue sur E', non identiquement nulle, et nulle sur $A^{(n)}$, ce qui prouve bien que $A^{(n)}$ n'est pas fortement total. Montrons enfin que E est quasi-normable. Nous utiliserons le

LEMME 12. - Soit E un espace localement convexe, tel que l'endomorphisme identique de E soit limite, pour la convergence bornée, d'une suite (u_i) d'applications linéaires bornées. Alors les parties équicontinues de E' sont fortement métrisables.

En effet, pour tout i, soit A_i une partie bornée convexe cerclée fermée de E telle que $\overset{-1}{u_i}(A_i)$ soit un voisinage de 0 dans E, et soit $\mathfrak{S}$ la famille des A_i. Soit B une partie équicontinue convexe cerclée faiblement fermée de E', je dis que la topologie forte y est identique à la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence (qui est en effet métrisable). Elle est à priori plus fine, pour voir l'inverse, il suffit, B étant convexe cerclé, de se borner au filtre des voisinages de zéro dans B pour ces deux topologies (comme il est bien connu). Il suffit donc, pour toute partie bornée convexe cerclée fermée A de E, de trouver un A_i et un $\lambda > 0$ tels que $(\lambda A_i)^0 \cap B \subset A^0$, ce qui s'écrit aussi, en désignant par V le polaire de B dans E : $\overline{\Gamma}(\lambda A_i, V) \supset A$. Comme $2^{-1}(\lambda A_i + V) \subset \Gamma(\lambda A_i, V)$, il suffit qu'on ait $A \subset 2^{-1}(\lambda A_i + V)$, soit $2A \subset \lambda A_i + V$. Il suffit en effet de prendre i tel que $(u_i - 1).2A \subset V$, d'où $2A \subset u_i(2A) + V$, et de remarquer qu'il existe un $\lambda > 0$ tel que $u_i(2A) \subset \lambda A_i$ (d'après la définition de A_i, et 2A étant borné).

Revenons à l'espace échelonné E considéré plus haut, et pour tout m, soit u_m l'opérateur dans E qui fait correspondre à la suite double $(x_{i,j})$ la suite double identique à $(x_{i,j})$ pour les indices (i,j) tels que $i \leqslant m$, $j \leqslant m$, et nulle pour les autres indices. Il est immédiat que chaque u_m est un opérateur borné (et de façon précise, transforme le polaire de $A^{(0)}$ en une partie bornée). D'autre part, (u_m) tend vers l'identité pour la topologie de la convergence bornée, ou, ce qui revient au même, la suite des transposés ${}^t u_m$ tend vers l'identité dans $L(E'_b, E'_b)$ pour la topologie de la convergence équicontinue. En effet, ${}^t u_m$ se définit dans l'espace de suites E' exactement de la même façon que u_m dans E, et il est alors immédiat que si x' parcourt $A^{(n)}$, alors $u_m x' - x'$ tend vers zéro uniformément, dans E'_b, et même dans $E'_{A^{(n+1)}}$. Car si $m \geqslant n+1$, et $x' \in A^{(n)}$, alors on a

$$x' - u_m x' \in m^{-1} A^{(n+1)}$$

i.e. $|x'_{i,j}| \leqslant m^{-1} a^{(n+1)}_{i,j}$ pour tout $i > m$, $j > m$. Car on a pour de tels indices $|x'_{i,j}| \leqslant a^{(n)}_{i,j} = j^n$, $a^{(n+1)}_{i,j} = j^{n+1}$, d'où $|x'_{i,j}| \leqslant j^{-1} a^{(n+1)}_{i,j} \leqslant m^{-1} a^{(n+1)}_{i,j}$. Il résulte donc du lemme 12 que les $A^{(n)}$ sont métrisables.

Prouvons maintenant que l'application identique de $A^{(n)}$, muni de la topologie forte, dans $E'_{A^{(n+1)}}$, est continue, ce qui prouvera que E est quasi-normable. Comme $A^{(n)}$ est convexe cerclé, il suffit de prouver que cette application est continue à l'origine, donc, $A^{(n)}$ étant métrisable, continue pour les suites tendant vers zéro dans $A^{(n)}$. Soit $(x'^{(k)})$ une telle suite, si elle ne tendait pas vers zéro dans $E'_{A^{(n+1)}}$, on pourrait supposer (par extraction d'une suite partielle) qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $x'^{(k)} \notin \varepsilon A^{(n+1)}$ pour tout k. Il existerait donc pour tout k un couple (i_k, j_k) tel que $|x'^{(k)}_{i_k,j_k}| > \varepsilon a^{(n+1)}_{i_k,j_k}$. Soit $(e'_{i,j})$ la suite des formes coordonnées sur E, $e'_{i,j} \in E'$, et posons $\lambda_k = \varepsilon a^{(n+1)}_{i_k,j_k}$, alors $\lambda_k e'_{i_k,j_k}$ est majoré par l'élément x'_k en module, donc est dans $A^{(n)}$, tend vers zéro fortement pour $k \to +\infty$, mais ne tend pas vers zéro dans $E'_{A^{(n+1)}}$. Montrons d'abord que cela implique $i_k > n+2$ sauf pour un nombre fini d'indices k, et $j_k \to +\infty$ pour $k \to +\infty$. Si en effet on n'avait pas $j_k \to +\infty$, on pourrait supposer (par extraction d'une suite partielle) que j_k reste égal à un indice fixe j ; or, sur le sous-espace P_j de E', formé des suites doubles qui se réduisent à la colonne de rang j, il est immédiat que la topologie forte est identique à la topologie induite par $E'_{A^{(0)}}$, et à fortiori à celle induite par $E'_{A^{(n+1)}}$, d'où une contradiction. De même, si on avait

$i_k < n+2$ pour une infinité d'indices k, on pourrait supposer que $i_k = i < n+2$ est fixe ; or, il est immédiat que sur l'espace Q_i formé des suites doubles de E' qui se réduisent à la ligne de rang i, la topologie forte est identique à la topologie induite par $E'_{A^{(m)}}$ pour n'importe quel $m \geqslant i-1$, et en particulier à celle induite par $E'_{A^{(n+1)}}$, d'où encore une contradiction. On peut donc supposer $i_k \geqslant n+2$ et $j_k \to +\infty$. Mais alors, de $\lambda_k e'_{i_k,j_k} \in A^{(n)}$ on déduit $\lambda_k \leqslant (j_k)^n$, d'autre part on aura $a^{(n+1)}_{i_k,j_k} = (j_k)^{n+1}$, d'où $\lambda_k = \varepsilon (j_k)^{n+1} \leqslant (j_k)^n$, d'où $j_k \leqslant \varepsilon^{-1}$, ce qui est encore impossible, puisque $j_k \to +\infty$.

Signalons que la démonstration que E est quasi-normable vaut exactement pour prouver ce qui suit : Soit E un espace échelonné construit sur un ensemble d'indices I, à l'aide d'une suite $(a^{(n)})$ de suites $a^{(n)} = (a^{(n)}_i)_{i \in I}$. Supposons qu'il existe une suite croissante (I_m) de parties de I telle que :

a) pour tout m la "section de E sur I_m" (i.e. le sous-espace des éléments de E nuls dans $\complement I_m$) est normable, i.e. il existe un entier $n_m > 0$ tel que chaque $a^{(n)}$ soit, sur I_m, majorée par un multiple de $a^{(n_m)}$;

b) si Φ est le filtre des complémentaires des I_m, pour tout entier $n \geqslant 0$ existe un entier $n' > n$ tel que $\lim_{\Phi} a^{(n)}_i / a^{(n')}_i = 0$. Sous ces conditions, E est quasi-normable. Cet énoncé généralise [18], Satz 6.

2. <u>Un théorème général</u>.

THÉORÈME 14. - <u>Soit</u> E <u>un espace</u> $(\mathcal{DF})$ <u>tonnelé complet</u>, F <u>un espace</u> $(\mathcal{F})$. <u>Soit</u> P <u>un espace vectoriel compris entre</u> $E \otimes F$ <u>et</u> $E \hat{\otimes} F$, <u>muni de la topologie induite par</u> $E \hat{\otimes} F$ (<u>le dual de</u> P <u>s'identifie donc à</u> B(E,F)). <u>Nous considérons sur</u> P <u>les diverses hypothèses suivantes</u> :

a_P. P <u>est bornologique</u>,

b_P. P <u>est quasi-tonnelé</u>,

c_P. Le dual fort de P est quasi-complet,

d_P. Le dual fort de P est complet.

Avec ces notations, on a ce qui suit :

1. On a les implications suivantes :

$$a_p \Longrightarrow d_p \Longrightarrow c_p \Longleftrightarrow b_p$$

et si Q est un espace analogue à P, contenant P, on a

$$b_p \Longrightarrow b_Q$$

2. Supposons vérifiée l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes:

a) Il existe un filtre (φ_k) sur une partie équicontinue de $L(E,E)$, formée d'opérateurs de rang fini, et convergeant vers l'identité dans $L_s(E,E_s)$.

b) Hypothèse analogue sur F, et on suppose de plus E bornologique.

Sous ces conditions, la topologie de dual fort de P sur $B(E,F)$ est indépendante de P. Si on pose $P_o = E \otimes F$, les conditions a_{P_o}, b_{P_o}, c_{P_o}, d_{P_o}, b_P, c_P, d_P sont toutes équivalentes et impliquées par a_P.

3. Supposons qu'il existe une suite fondamentale de voisinages (V_n) dans F telle que, pour tout $u \in E \hat{\otimes} F$, l'image canonique u_n de u dans $E \hat{\otimes} F_{V_n}$ soit un noyau de Fredholm. Supposons de plus vérifiée l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :

a) Il existe une suite (φ_k) d'endomorphismes de rang fini de E, telle que pour tout $x \in E$, $\varphi_k x$ tende vers x au sens de Mackey [10].

---

10. Par définition, une suite (x_i) dans l'espace localement convexe E tend vers la limite x au sens de Mackey, s'il existe un ensemble borné convexe cerclé A dans E tel que (x_i) tende vers x dans l'espace normé E_A. Il revient au même de dire qu'il existe une suite de nombres $\varepsilon_i > 0$, tendant vers 0, telle que $\frac{1}{\varepsilon_i}(x-x_i)$ reste borné. La propriété (évidente) de cette notion de convergence qui nous servira, est : Si x' est une forme linéaire sur E bornée sur les parties bornées de E, et si (x_i) tend vers x au sens de Mackey alors $\langle x_i,x'\rangle$ tend vers $\langle x,x'\rangle$.

b) E est bornologique, et il existe une suite (φ_k) d'endomorphismes de rang fini de F, tendant vers l'identité pour la topologie de la convergence simple, et telles que $\varphi_k(V_n) \subset V_n$ pour tout k et n.

Sous ces conditions, la topologie de dual fort de P sur B(E,F) ne dépend pas de P, et les conditions a_P, b_P, c_P, d_P sont équivalentes, et indépendantes de P.

Signalons tout de suite le

COROLLAIRE. - Sous les conditions du th. 14, 2° supposons que l'un des espaces E, F soit nucléaire, l'autre réflexif (de sorte que $E \hat{\otimes} F$ est isomorphe à $L_b(E',F)$, et à $L_b(F',E)$). Alors les hypothèses que $P = E \hat{\otimes} F$ soit tonnelé, ou que son dual fort B(E,F) soit quasi-complet, ou complet, sont équivalentes. Si elles sont vérifiées, alors le dual fort B(E,F) de $P = E \hat{\otimes} F$ s'identifie à $E' \bar{\otimes} F'$ (qui est aussi l'espace des opérateurs à trace de E dans F' ou de F dans E'), et c'est un espace $(\mathcal{LF})$ complet ; $E \hat{\otimes} F$ et son dual $E' \bar{\otimes} F'$ sont complètement réflexifs. Ils sont de plus nucléaires si E et F sont tous deux nucléaires.

La première assertion n'est autre que l'application du th. 14, 2°, la deuxième assertion en résulte aussitôt grâce au lemme 9, enfin la dernière assertion résulte alors du th. 9.

Démonstration. - 1. Les implications $a_P \Rightarrow d_P \Rightarrow c_P \Leftarrow b_P$ et $b_P \Rightarrow b_Q$ sont triviales, reste à prouver $c_P \Rightarrow b_P$. Cela résulte aussitôt du

LEMME 13. - Les parties équicontinues de P' sont identiques aux parties bornées de P'_b dont l'enveloppe convexe cerclée fermée est complète.

Il suffit de prouver que toute partie bornée convexe cerclée complète de P'_b est équicontinue. Soit (V_n) une suite fondamentale de voisinages convexes cerclés de 0 dans F ; pour tout n, $B_b(E,\widehat{F_{V_n}})$ est un espace du type $(\mathcal{F})$ ([9], prop. 3), et il existe une application linéaire continue évidente de cet espace dans P'_b. P'_b est évidemment la réunion des images canoniques des espaces $B_b(E,\hat{F}_{V_n})$; il suffit maintenant d'appliquer, Introduction IV, 4°, théorème A, corollaire 1, et de remarquer qu'une partie bornée de $B_b(E,\hat{F}_{V_n})$ est équicontinue puisque E est tonnelé, donc donne une image équicontinue dans $P' = B(E,F)$.

2. Prouvons d'abord l'équivalence des conditions a_{P_o}, b_{P_o}, c_{P_o}, d_{P_o}. En vertu de 1°, il suffit de prouver $b_{P_o} \Longrightarrow a_{P_o}$, donc que si P_o est quasi-tonnelé, alors toute forme linéaire v sur P_o, bornée sur les parties bornées de P_o, est continue. Soit, pour tout k, ψ_k le produit tensoriel de φ_k et de l'application identique de F, ou de l'application identique de E et de φ_k (suivant que les φ_k sont définis dans E ou dans F). Les formes $v_k = v \circ \psi_k$ sont continues, car on peut écrire $\psi_k = \alpha_k \circ \beta_k$, où β_k est une application linéaire continue de P dans un espace localement convexe <u>bornologique</u> P_k, et α_k une application linéaire continue de P_k dans P : si en effet les φ_k sont définis par exemple dans E, on pose $E_k = \varphi_k(E)$ (espace de dimension finie) et $P_k = E_k \hat{\otimes} F$, et $\beta_k = \varphi_k \otimes 1$, α_k étant l'immersion canonique de $E_k \otimes F$ dans $E \otimes F$; et si les φ_k sont définis dans F, on définira de façon analogue $P_k = E \hat{\otimes} F_k$. Dans chacun de ces cas, P_k est bien bornologique, car isomorphe au produit d'un nombre fini d'espaces E, ou F. Il vient alors $v_k = (v \circ \alpha_k) \circ \beta_k$, et $v \circ \alpha_k$ est une forme linéaire sur P_k bornée sur les parties bornées, donc continue, d'où suit que v_k est bien continue. D'autre part, v est limite des v_k pour la convergence simple, car il suffit de vérifier que $v(x \otimes y) = \lim v(\varphi_k x \otimes y)$ (resp. $v(x \otimes y) = \lim v(x \otimes \varphi_k y)$), ce qui est immédiat, car pour y donné (resp. x donné) v est une forme linéaire de x bornée sur les parties bornées de E (resp. une forme linéaire de y bornée sur les parties bornées de F) – et par suite continue puisque E et F sont bornologiques. Il suffit donc, pour prouver la continuité de v, de prouver que la suite des v_k est équicontinue ou aussi, $P_o = E \otimes F$ étant quasi-tonnelé par hypothèse, que

cet ensemble est borné dans le dual fort de P_o. Cela signifie que pour toute partie bornée M de P_o, on a

$$\sup_k \sup_{u \in M} \langle u, v_k \rangle < +\infty . \text{ Or } \langle u, v_k \rangle = v(\psi_k u),$$

il suffit donc de prouver que $\bigcup_k \psi_k(M)$ est une partie bornée de P_o, donc que l'ensemble des ψ_k est borné pour la topologie de la convergence bornée dans $L(P_o, P_o)$. Cela résulte en effet du

LEMME 14. - <u>Sous les conditions du th.</u> 14, 2°, <u>et avec la définition précédente des</u> ψ_k, <u>opérateurs continus dans</u> $P = E \hat{\otimes} F$, <u>on a</u> : (ψ_k) <u>est un filtre équicontinu d'opérateurs dans</u> P, <u>tendant vers l'identité dans</u> $L_s(P, P_s)$.

Tout d'abord, il est immédiat que pour tout $u \in E \otimes F$, $\psi_k u$ tend faiblement vers u : il suffit de faire $u = x \otimes y$, avec $x \in E$, $y \in F$. Comme $E \otimes F$ est dense dans $E \hat{\otimes} F$, le lemme sera prouvé si nous prouvons seulement que l'ensemble des ψ_k est équicontinu (à fortiori sera-t-il équicontinu comme ensemble d'applications de P dans P_s). Or, de façon générale, il résulte aussitôt des définitions (voir Chap. 1, prop.2, 2°) que si E_i, F_i sont des espaces localement convexes $(i = 1, 2)$, et si A_i est un ensemble équicontinu d'applications linéaires de E_i dans F_i, alors l'ensemble $A_1 \otimes A_2$ des applications linéaires $u_1 \otimes u_2$ de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \hat{\otimes} F_2$, où u_1 parcourt A_1 et u_2 parcourt A_2, est équicontinu. Dans le cas actuel, on fera $E_1 = F_1 = E$, $E_2 = F_2 = F$, enfin A_2 réduit à l'application identique, A_1 ensemble des φ_k ou inversement.

Il est donc prouvé que les conditions a_{P_o}, b_{P_o}, c_{P_o}, d_{P_o} sont bien équivalentes. Si nous prouvons que la topologie de dual fort de P sur $B(E,F)$ ne dépend pas de P, il est évident que les conditions précédentes sont aussi équivalentes à b_P, c_P, d_P, donc impliquées par a_P en vertu de 1°, ce qui achèvera de prouver 2°. Il reste donc à montrer que toute partie bornée A de P est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de $P_0 = E \otimes F$, et on peut alors évidemment supposer $P = E \hat{\otimes} F$. Il suffit alors de prendre $B = \bigcup_k \psi_k(A)$, qui est borné puisque l'ensemble des ψ_k est équicontinu (lemme 14), évidemment contenu dans $E \otimes F$, et dont l'adhérence faible contient A en vertu du lemme 14.

3. Gardons la définition précédente des ψ_k, et prouvons d'abord le

LEMME 15. - Sous les conditions du th. 14, 3° pour tout $u \in E \hat{\otimes} F$, $\psi_k(u)$ tend vers u au sens de Mackey.

Ce lemme résultera du

LEMME 16. - Soit P un espace localement convexe dont la topologie est la moins fine des topologies rendant continues des applications linéaires α_n de P dans des espaces localement convexes P_n ($n = 1, 2 \ldots$). Pour qu'une suite (u_k) dans P tende vers une limite u au sens de Mackey, il faut et il suffit que pour tout n, $\alpha_n(u_k)$ tende vers $\alpha_n(u)$ au sens de Mackey.

La nécessité de la condition est triviale. Réciproquement, si cette condition est remplie, il existe pour tout entier $n > 0$ une suite $\varepsilon^{(n)} = (\varepsilon_k^{(n)})$ de nombres > 0 tendant vers zéro, telle que la suite des $(\alpha_n(u_k) - \alpha_n(u))/\varepsilon_k^{(n)}$ (pour $k = 1, 2 \ldots$) reste bornée dans P_n. Soit alors $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ une suite de nombres > 0, tendant vers zéro moins vite que chacune des suites $\varepsilon^{(n)}$ (par exemple $\varepsilon = \sum_n \varepsilon^{(n)}/M_n$, où $M_n = 2^{-n} \operatorname{Sup}_k \varepsilon_k^{(n)}$; alors la suite $(u - u_k)/\varepsilon_k$ reste bornée dans P, donc u_k tend vers u au sens de Mackey.

Appliquons le lemme 16 à $P = E \hat{\otimes} F$, dont la topologie est la moins fine des topologies rendant continues les applications linéaires naturelles de $E \hat{\otimes} F$ dans les $P_n = E \hat{\otimes} F_{V_n}$, où (V_n) est la suite fondamentale donnée de voisinages convexes cerclés de 0 dans F, (comme il résulte aussitôt de la définition du produit tensoriel topologique, et du Chap. I, prop. 2, 2°). Dans le cas 3°, b, pour tout n, chaque φ_k définit un opérateur de norme $\leqslant 1$ dans F_V, donc aussi dans $\widehat{F_{V_n}}$, soit $\varphi_k^{(n)}$. Pour n donné, les $\varphi_k^{(n)}$ tendent vers l'identité sur les points de $\widehat{F_{V_n}}$ qui proviennent de F, donc partout par raison d'équicontinuité. Ceci posé, soit, pour tout n et tout k, $\psi_k^{(n)}$ l'opérateur dans $E \widehat{\otimes} F_{V_n}$ identique à $\varphi_k \otimes 1$ si les φ_k sont définis dans E (hypothèse 3°, a), ou à $1 \otimes \varphi_k^{(n)}$ si les φ_k sont définis dans F (hypothèse 3°, b). Dans les deux cas, pour tout $u \in E \widehat{\otimes} F$, l'image canonique de $\psi_k u$ dans $E \widehat{\otimes} F_{V_n}$ est $\psi_k^{(n)} u_n$, où u_n est l'image canonique de u dans $E \widehat{\otimes} F_{V_n}$. Pour prouver maintenant le lemme 15, on est ramené, en vertu du lemme 16, à prouver que pour tout $\alpha \in E \widehat{\otimes} F_{V_n}$ provenant d'un élément de $E \widehat{\otimes} F$, la suite des $\psi_k^{(n)}\alpha$ tend vers α au sens de Mackey. Posons pour simplifier $G = \widehat{F_{V_n}}$. En vertu du Chap. I, § 2, n°1, th. 1, corollaire 1, on a $\alpha \in \overline{\Gamma}(A_0 \otimes B)$, où A_0 resp. B est une partie compacte de E resp. G. On a donc, sous la condition a. resp. b. : $\psi_k\alpha \in \overline{\Gamma}(\varphi_k A_0 \otimes B)$ (resp. $\psi_k\alpha \in \overline{\Gamma}(A_0 \otimes \varphi_k B)$). Dans le deuxième cas, B étant compact, on a $\varphi_k B \subset \varepsilon_k V$, où V est la boule unité de G et $\varepsilon_k \longrightarrow 0$, d'où $\psi_k \alpha \in \varepsilon_k M$, où $M = \overline{\Gamma}(A_0 \otimes V)$ est un borné dans $E \widehat{\otimes} G$. Dans le premier cas, on conclut de la même façon, en notant qu'on peut supposer même A_0 compact dans un espace de Banach E_A, où A est une partie bornée convexe cerclée fermée de E, et en faisant usage du

LEMME 17. - <u>Soit</u> E <u>un espace du type</u> $(\mathcal{DF})$ <u>complet</u>, (φ_k) <u>une suite d'applications linéaires continues de</u> E <u>en lui-même, telle que pour tout</u> $x \in E$, $\varphi_k x$ <u>tende vers une limite</u> φx <u>au sens de Mackey. Alors pour toute partie bornée convexe cerclée fermée</u> A <u>de</u> E, <u>en existe une autre</u> B <u>telle que</u> $\varphi_k(A) \subset B$ <u>pour tout</u> k, <u>d'où</u> $\varphi(A) \subset B$, <u>et que la suite des restrictions des</u> φ_k <u>à</u> E_A <u>tende vers la restriction de</u> φ <u>dans l'espace</u> $L_s(E_A, E_B)$.

Démonstration du lemme 17. - φ est évidemment un endomorphisme <u>continu</u> de E (voir [9], prop. 1, corollaire 1), et on peut se ramener immédiatement au cas où $\varphi = 0$, en remplaçant au besoin les φ_k par $\varphi_k - \varphi$. Soit alors $\widetilde{E}$ l'espace des suites dans E qui convergent vers 0 au sens de Mackey muni de la topologie de la convergence simple. Soit (A_n) une suite fondamentale de parties bornées convexes cerclées fermées de E, et soit, pour tout n, $\widetilde{E_n}$ l'espace de Banach des suites qui convergent vers zéro dans E_{A_n} ; l'application identique de $\widetilde{E_n}$ dans $\widetilde{E}$ est évidemment continue, et $\widetilde{E}$ est la réunion des $\widetilde{E_n}$. Pour tout $x \in E$, considérons $\Phi_x = (\varphi_k x) \in \widetilde{E}$. Φ est une application linéaire de E_A dans $\widetilde{E}$, évidemment continue. D'après Introduction IV, th. A, corollaire 1, $\Phi(A)$ est donc contenu et borné dans un espace $\widetilde{E_n}$. Il suffit alors de prendre $B = A_n$ pour satisfaire à l'énoncé du lemme 17. Le lemme 15 est donc, par là, lui aussi prouvé.

Compte tenu du th. 14, 2°, la partie 3° du th. 14 sera prouvé si nous prouvons $b_P \Longrightarrow a_P$. Cette implication résulte du résultat plus général :

LEMME 18. - Soit P un espace localement convexe, et (ψ_k) une suite d'endomorphismes de P satisfaisant aux hypothèses suivantes :

a. Pour tout $x \in P$, la suite $(\psi_k x)$ tend vers x au sens de Mackey ;

b. Pour toute partie bornée A de P, la réunion des $\psi_k(A)$ est bornée ;

c. Pour tout k, il existe un espace bornologique P_k tel que $\psi_k = \alpha_k \circ \beta_k$, où β_k est une application linéaire continue de P dans P_k, α_k une application linéaire continue de P_k dans P.

Sous ces conditions, si P est quasi-tonnelé, il est bornologique.

Ce lemme s'applique en effet directement au cas particulier envisagé, car en vertu des lemmes 14 et 15, les deux premières conditions sont satisfaites, et la dernière condition est aussi satisfaite comme il a été vu dans la démonstration de 2°. La preuve du lemme 18 est très facile. Supposons P quasi-tonnelé; pour prouver qu'il est bornologique, il suffit de prouver que toute forme linéaire v sur P, bornée sur les parties bornées, est continue. Pour cela, on pose $v_k = v \circ \psi_k = v \circ (\alpha_k \circ \beta_k)$; v_k est une forme linéaire continue sur P en vertu de la condition c., et la suite (v_k) tend vers v pour la topologie de la convergence simple en vertu de a. Il suffit donc de prouver que la suite (v_k) est équicontinue, ou encore bornée dans le dual fort P' de P puisque P est quasi-tonnelé. Cela signifie aussi que pour toute partie M de P, on a $\sup_k \sup_{u \in M} v(\psi_k u) < +\infty$, et cela résulte de la condition b. et de ce que la forme v est bornée sur les parties bornées de P. Le th. 14 est ainsi complètement démontré.

Remarque 11. – Il semble possible, avec les notations générales du th. 14, que les hypothèses a_P, b_P, c_P, d_P, sont toujours équivalentes, quels que soient l'espace $(\mathcal{DF})$ bornologique complet E et l'espace F du type $(\mathcal{F})$ [11]. Du moins les conditions envisagées dans 2° et 3° sont-elles peu restrictives en pratique. Ainsi, les conditions de 3° sont vérifiées si F est un espace échelonné de Köthe [18] – il suffit alors de prendre pour φ_n l'opérateur faisant correspondre à chaque suite $(x_i) \in F$ sa "section au rang n" $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$, et pour (V_n) le système fondamental naturel donné dans la définition d'un espace échelonné. Alors les $\hat{E}_{V_n}$ sont de dimension finie ou isomorphes à ℓ^1, et on peut donc appliquer le résultat du Chap. I, §4, n°3, lemme 14, corollaire 4. Il semble aussi que les conditions du th. 14, 3° sont vérifiées chaque fois que E ou F est nucléaire (voir question non résolue 4).

Remarque 12. – Notons que sous les conditions du th. 14, 3°, si on désigne par P* l'espace des formes linéaires sur P qui sont bornées sur les parties bornées de P, P* est indépendant de l'espace P envisagé. De façon précise, si $P_0 = E \otimes F$, toute $v \in P_0^*$ se prolonge de façon unique en une forme $\in P^*$ sur P. Pour le voir, il suffit d'appliquer le lemme 15 de façon évidente.

11. Rappelons qu'on ne connaît pas encore d'exemple d'espace quasi-tonnelé non bornologique.

On voit aussi que, sous les conditions du th. 14, 3°, les formes linéaires sur P bornées sur les parties bornées sont exactement les formes qui sont adhérentes, pour la topologie de la convergence simple, à une partie fortement bornée de P', ou aussi qui sont limites simples d'une suite fortement bornée dans P'. Cette caractérisation est en effet valable sous les conditions plus générales du lemme 18, comme on voit facilement (voir note 11 page 110).

3. Cas des espaces échelonnés.

Préliminaires. - Nous allons préciser complètement le th. 14 dans le cas où E et F sont certains espaces de Köthe d'un type courant. Nous pourrions nous placer dans le cadre des espaces échelonnés construits sur une mesure μ sur un espace localement compact arbitraire [5], mais préférons, pour la simplicité des notations, nous en tenir aux espaces de suites. Soient $(a^{(n)})$, $(b^{(n)})$ deux suites croissantes de suites positives, telles que pour tout i, existe n avec $a_i^{(n)} \neq 0$, $b_i^{(n)} \neq 0$. Soit, pour tout m, $a^{(m)}\ell^1$ l'espace des produits des suites $\in \ell^1$ par $a^{(m)}$, muni de la topologie quotient de la topologie de ℓ^1 par l'application précédente de ℓ^1 sur $a^{(m)}\ell^1$ ($a^{(m)}\ell^1$ est alors de dimension finie, ou isomorphe à ℓ^1). On a évidemment $a^{(m)}\ell^1 \subset a^{(m+1)}\ell^1$, et cette inclusion est une application continue. Soit alors E l'espace limite inductive de la suite des $a^{(m)}\ell^1$.

(1) E est un espace $(\mathcal{DF})$ complet, tonnelé et bornologique.

Que E est tonnelé et bornologique est trivial par définition. D'autre part, il est facile de voir que toute suite $x = (x_i)$ telle que $\sum_i |x_i x'_i| < +\infty$ pour toute suite $x' = (x'_i) \in E'$, est dans E, d'où suit que E est un "espace parfait" de Köthe, donc complet (voir [6] ou [19]). Le dual de E s'identifie, comme on vérifie aussitôt, à l'espace des suites

$x' = (x'_i)$ dont le produit par toute suite $a^{(m)}$ est bornée. Plus généralement :

(2) Pour tout espace de Banach G, l'espace des applications linéaires continues de E dans G s'identifie à l'espace des suites (X_i) dans G dont le produit par toute suite $a^{(m)} = (a_i^{(m)})$ reste borné ; ou encore, telles que la suite des normes des X_i soit dans E'. (Vérification immédiate).

Soit d'autre part F l'espace échelonné défini par la suite des $b^{(n)}$, i.e. l'espace des suites $y = (y_i)$ dont le produit par tout $b^{(n)}$ est sommable, muni de la suite des semi-normes $\|b^{(n)}y\|_1 = \sum_i |b_i^{(n)}y_i|$, qui en fait un espace $(\mathcal{F})$ complet. Son dual s'identifie à l'espace des suites $y' = (y'_i)$ qui sont dominées par quelque $b^{(n)}$, et si B_n désigne l'ensemble des suites majorées en module par $b^{(n)}$, alors les B_n et leurs homothétiques forment un système fondamental de parties équicontinues convexes cerclées faiblement fermées de F'. Soit V_n le polaire de B_n dans F, l'espace $\widehat{F_{V_n}}$ est isomorphe à l'espace échelonné défini par $b^{(n)}$ tout seul, donc isomorphe à l'espace des suites sommables construit sur l'ensemble des indices i tels que $b_i^{(n)} \neq 0$. Avec cette identification, l'application canonique de F dans $\widehat{F_{V_n}}$ n'est autre que la multiplication par $b^{(n)}$.

Nous nous proposons d'interpréter $E \widehat{\otimes} F$ comme un espace de suites doubles. Notons d'abord que le produit tensoriel $E \widehat{\otimes} \ell^1$, identifié à un espace de suites doubles de façon évidente (p. ex. moyennant le th. 2 du Chap. I), n'est autre que l'espace de suites construit sur le même modèle que E, mais à partir de la suite des suites doubles $\tilde{a}^{(m)}$, où $\tilde{a}_{ij}^{(m)} = a_i^{(m)}$. En effet, ce dernier espace s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de $E \widehat{\otimes} \ell^1$ (voir Chap. 1, §1, n°3, prop. 6, 2°, corollaire et Chap. I, §3, th. 2), évidemment dense, et comme nous avons vu qu'il est complet, notre assertion est établie. (Nous aurions pu aussi utiliser Chap. I, §4, n°3, lemme 14, corollaire 4). En particulier, tout élément de E $\hat{\otimes}\ell^1$ est un noyau de Fredholm. Par suite

(3) <u>Le couple</u> E, F <u>satisfait aux hypothèses du th</u>. 14, 3°, b).

De plus, nous pouvons maintenant prouver que

(4) E $\hat{\otimes}$ F <u>s'identifie à l'espace</u> P <u>des suites doubles</u> (u_{ij}) <u>telles que</u>, <u>pour tout</u> n, <u>existe un indice</u> m_n <u>tel que</u>

$$\sum_{ij} b_j^{(n)} |u_{ij}| / a_i^{(m_n)} < +\infty$$

<u>muni de la topologie la moins fine rendant continues les applications</u> $(u_{ij}) \longrightarrow (b_j^{(n)} u_{ij})$ <u>de</u> P <u>dans</u> E $\hat{\otimes}\ell^1$. (Nous convenons pour la suite de prendre la valeur nulle pour un rapport α/β dont les termes α et β sont nuls).

En effet, pour tout n, la multiplication par la suite double $(i,j) \longrightarrow b_j^{(n)}$ applique E $\otimes$ F (identifié de façon évidente à un espace de suites doubles) dans E $\otimes \ell^1$, car ce n'est autre que l'application composée de l'application naturelle E $\otimes$ F $\rightarrow$ E $\hat{\otimes}$ F_{V_n}, avec l'isomorphisme de E $\hat{\otimes}$ F_{V_n} dans E $\hat{\otimes}\ell^1$ déduit de l'isomorphisme défini plus haut de $\widehat{F_{V_n}}$ sur un facteur direct de ℓ^1. De cela résulte que E $\otimes$ F est bien un sous-espace vectoriel topologique de P car sa topologie est à priori la moins fine de celles rendant continues les applications E $\hat{\otimes}$ F $\rightarrow$ E $\hat{\otimes}$ F_{V_n}. Il est immédiat de constater que P est complet. Enfin E $\otimes$ F est dense dans P, car l'espace des suites doubles "finies" (i.e. dont tous les termes sauf un nombre fini sont nuls) est déjà dense dans P, puisque pour tout n, l'image de ce sous-espace par l'application $(u_{ij}) \rightarrow (b_j^{(n)} u_{ij})$ de P dans E $\hat{\otimes}\ell^1$ est dense dans ce dernier espace. Il suit bien que P = E $\hat{\otimes}$ F. De plus, on vérifie facilement :

(5) <u>Les parties bornées</u> M <u>de</u> P = E $\hat{\otimes}$ F <u>sont celles pour lesquelles il existe</u>, <u>pour tout</u> n, <u>un</u> m_n <u>tel que</u>

$$\operatorname*{Sup}_{u \in M} \Big(\sum_{ij} b_j^{(n)} |u_{ij}| / a_i^{(m_n)} \Big) < +\infty$$

(cela exprime en effet que, pour tout n, l'image de M dans $E \hat{\otimes} \ell^1$ par l'application $(u_{ij}) \longrightarrow (b_j^{(n)} u_{ij})$ est bornée).

Soit P* l'espace des formes linéaires sur P qui sont bornées sur les parties bornées. Pour tout $v \in P^*$, posons $v_{ij} = v(e_i \otimes e_j)$ (où (e_i) resp. (e_j)) est la "base canonique" de E (resp. F). On a :

(6) <u>Pour</u> $u \in P$, $v \in P^*$, <u>on a</u> $\langle u, v \rangle = \sum_{ij} u_{ij} v_{ij}$, <u>où la série du second membre est convergente</u>. <u>Réciproquement, si</u> (v_{ij}) <u>est une suite double dont le produit par toute suite</u> $(u_{ij}) \in P$ <u>est sommable, la forme linéaire</u> v <u>qu'elle définit sur</u> P <u>est</u> $\in P^*$.

Pour le premier point, notons d'abord qu'en vertu de (5), l'ensemble des suites doubles (α_{ij}) "finies" et majorées par (u_{ij}) en module est une partie <u>bornée</u> de P, d'où résulte que $\operatorname{Sup}_{\Phi} \sum_{(ij)\in\Phi} u_{ij} v_{ij}$, étendu aux parties finies Φ de l'ensemble des (i,j), est fini, d'où la convergence du second membre de la formule donnée dans (6). Si réciproquement (v_{ij}) est une suite double telle que $u_{ij} v_{ij}$ soit absolument convergente pour tout $u = (u_{ij}) \in P$, la somme de cette série est bien une forme linéaire sur P bornée sur les parties bornées, comme il résulte du th. de Banach-Steinhaus, $P = E \hat{\otimes} F$ étant complet et la forme linéaire envisagée limite simple d'une <u>suite</u> de formes linéaires continues (savoir les sommes partielles finies $\sum_{i,j \leq n} u_{ij} v_{ij}$) (on applique alors le th. de Banach-Steinhaus aux espaces P_A, A ensemble borné convexe cerclé fermé de P). Enfin, si v est une forme linéaire sur P bornée sur les parties bornées de P, le fait que la formule donnée dans (6) soit valable, i.e. que v soit identique à la forme linéaire $\tilde{v}$ définie par le deuxième membre, se vérifie d'abord sur les éléments de $E \otimes F$ (tout $x \otimes y$, avec $x \in E$, $y \in F$, est en effet la limite au sens de Mackey de la suite des $x^{(n)} \otimes y$, où $x^{(n)}$ est la "section au rang n" de x), puis sur tout $E \hat{\otimes} F$ grâce à la remarque 12 (fin du n°2 de ce §) et au fait que $\tilde{v} \in P^*$.

Identifions P* à un espace de suites doubles grâce à ce qui précède. P* est évidemment complet pour la topologie de la convergence bornée (fait général et trivial). (C'est d'ailleurs aussi l'espace de Köthe "dual" de P). Le dual fort P' = B(E,F) de P est un sous-espace vectoriel topologique de P*, de façon précise :

(7) P' = B(E,F) s'identifie à l'espace des suites doubles (v_{ij}) telles que, pour un entier $n \geq 0$ convenable, on ait pour tout m :

$$\operatorname{Sup} a_i^{(m)} |v_{ij}| / b_j^{(n)} < +\infty$$

Ou, ce qui revient au même, telles que (pour un n convenable) il existe une suite $\lambda = (\lambda_i) \in E'$ telle que l'on ait $|v_{ij}| \leq \lambda_i b_j^{(n)}$ pour tout (i,j).

En effet, la première condition signifie manifestement que (v_{ij}) s'identifie à une application linéaire de E dans F'_{B_n}, dont les restrictions aux sous-espaces $a^{(m)} \ell^1$ sont continues, i.e. qui est continue. La deuxième condition n'est qu'une autre formulation de la première, comme il a été dit dans (2).

Nous en arrivons au théorème principal de ce §.

THÉORÈME 15. - Soit E l'espace $(\mathcal{DF})$ bornologique et complet défini par la suite des suites $a^{(m)} = (a_i^{(m)})$ comme limite inductive des espaces $a^{(m)} . \ell^1$, et F l'espace échelonné (du type $(\mathcal{F})$) défini par la suite des suites $b^{(n)} = (b_j^{(n)})$ (voir développements ci-dessus). Soit $P_o = E \otimes F$, $P = E \hat{\otimes} F$. Alors sur P' = B(E,F), les topologies de dual fort de P ou de P_o sont identiques. De plus, les conditions qui suivent sont toutes équivalentes.

a. P est bornologique (ou a'. P_o est bornologique)

b. P est tonnelé (ou b'. P_o est quasi-tonnelé)

c. Le dual fort B(E,F) de P est quasi-complet

d. Le dual fort B(E,F) de P est complet

e. Pour toute suite double

$v = (v_{ij})$ telle que $\sum_{ij} u_{ij} v_{ij}$ soit absolument convergente pour tout $u \in P$, on a $v \in B(E,F)$, i.e. il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, on ait

$$\sup_{i,j} a_i^{(m)} |v_{ij}| / b_j^{(n)} < +\infty$$

f. Désignons, pour deux entiers m_o, $m \geqslant 0$ et toute suite positive $\lambda = (\lambda_i) \in E'$, par $\Phi_{m_o,m,\lambda}$ le filtre (éventuellement "impropre", i.e. contenant l'ensemble vide), dont une base est formée des ensembles $\Phi_{m_o,m,\lambda}(R)$, $R > 0$, définis par

(1) $(i,j) \in \Phi_{m_o,m,\lambda}(R)$ équivaut à $R b_j^{(m_o)} < \lambda_i a_i^{(m)} b_j^{(m)}$.

Désignons encore, pour trois entiers m_o, n_o, $m \geqslant 0$ donnés, par $\psi_{n_o,m_o,m}$ le filtre (éventuellement impropre) dont une base est formée des ensembles $\psi_{n_o,m_o,m}(R)$, $R > 0$ définis par

(1 bis) $(i,j) \in \psi_{n_o,m_o,m}(R)$ équivaut à $a_i^{(m)} b_j^{(n_o)} > R a_i^{(m_o)} b_j^{(m_o)}$

La condition f. s'énonce alors : Pour tout entier $n_o \geqslant 0$, existe un entier m_o tel que, quel que soit l'entier $m \geqslant 0$, et la suite positive $\lambda = (\lambda_i) \in E'$, le filtre intersection de $\Phi_{m_o,m,\lambda}$ et de $\psi_{n_o,m_o,m}$ est impropre.

Démonstration. - L'équivalence des 5 premières conditions résulte des développements du début de ce n°, de façon précise des assertions (3), (6), et (7), et du th. 14, 3°. Pour l'énoncé de la condition e., rappelons que nous convenons ici de regarder comme nul un quotient dont les deux termes sont nuls. Dans les calculs qui vont suivre, la possibilité de termes nuls aux dénominateurs demanderait à plusieurs endroits quelques précautions d'écriture supplémentaires et d'ailleurs immédiates, que nous nous dispensons de détailler. Il suffit de prouver l'équivalence des conditions e. et f. On peut évidemment se borner, dans l'énoncé de e., à considérer des suites (v_{ij}) positives.

La terminologie suivante nous sera utile. Nous dirons qu'une suite double (w_{ij}) est une section d'une autre (v_{ij}) si on a, pour tout (i,j), $w_{ij} = v_{ij}$ ou $w_{ij} = 0$. Soit N l'ensemble des entiers > 0, soit I une partie non vide de $N \times N$; on appelle section de $v = (v_{ij})$ sur I la suite double $w = (w_{ij})$ définie par $w_{ij} = v_{ij}$ pour $(i,j) \in I$, et $w_{ij} = 0$ pour $(i,j) \notin I$. Appelons filtre associé à I le filtre dans $N \times N$ dont une base est formée, des complémentaires dans I des parties finies de I si I est infini, de I tout seul si I est fini. Si une fonction f_{ij} converge vers une limite k suivant ce filtre, nous écrirons $\lim\limits_{I} f_{ij} = k$. Enfin, appelons contrariante toute suite double $v = (v_{ij})$ qui est dans P^* et non dans P'. La condition e. signifie qu'il n'existe pas de suite contrariante.

1° f. implique e. - Nous procédons par l'absurde, en supposant que $v = (v_{ij})$ est une suite contrariante positive. Construisons alors par récurrence une suite décroissante, éventuellement finie, de parties $I_o, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ de $N \times N$, telles que pour tout entier $n \geqslant 1$, existe un entier $m_n \geqslant 0$ tel que $\lim\limits_{I_n} a_i^{(m_n)} v_{ij} / b_j^{(n)} = +\infty$ et que la section de v sur I_n soit contrariante (ce qui implique évidemment que I_n est infini). Nous prendrons pour I_o l'ensemble des (i,j) tels que $v_{ij} \neq 0$. Montrons (sans faire usage de f.) qu'il est impossible que cette suite $I_o, I_1, \ldots$ soit infinie. S'il en était autrement, soit I une partie infinie de I_o telle que pour tout n, I soit contenue dans I_n à l'exception d'un nombre fini d'éléments (l'existence d'un tel I est classique par le "procédé diagonal"). On a donc $\lim\limits_{I} a_i^{(m_n)} v_{ij} / b_j^{(n)} = +\infty$ pour tout n. Montrons qu'il existe une suite double positive (α_{ij}), ayant un support contenu dans I, non sommable, et telle que la suite double (u_{ij}) donnée par $u_{ij} = \alpha_{ij} / v_{ij}$ pour $(i,j) \in I$, $u_{ij} = 0$ pour $(i,j) \notin I$, soit $\in P$. Cela prouvera notre assertion, puisque on aurait $\sum_{i,j} u_{ij}v_{ij} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} = +\infty$, contrairement à $u \in P$, $v \in P^*$. Or, pour tout n, posons $M_{ij}^{(n)} = a_i^{(m_n)}v_{ij}/b_j^{(n)}$, on a donc $\lim_I M_{ij}^{(n)} = +\infty$, et en prenant les m_n suffisamment grands, on peut supposer que $M_{ij}^{(n)} \neq 0$ pour $(i,j) \in I$ (car à priori, on ne peut avoir $M_{ij}^{(n)} = 0$ que pour un nombre fini d'indices $(i,j) \in I$). On a alors, pour $(i,j) \in I$, (α_{ij} étant supposée choisie) : $u_{ij} = \alpha_{ij}/v_{ij} = (\alpha_{ij}/M_{ij}^{(n)})(a_i^{(m_n)}/b_j^{(n)})$, soit $b_j^{(n)}u_{ij}/a_i^{(m_n)} = \alpha_{ij}/M_{ij}^{(n)}$, et en vertu de la caractérisation donnée plus haut (4) de $P = E \hat{\otimes} F$, on est ramené à <u>trouver une suite non sommable</u> (α_{ij}) <u>sur</u> I <u>telle que</u> $(\alpha_{ij}/M_{ij}^{(n)})$ <u>soit sommable pour tout</u> n. Soit M_{ij} une fonction sur I tendant vers l'infini plus lentement que chacun des $M_{ij}^{(n)}$ (existence immédiate); il suffit que $\sum \alpha_{ij} = \infty$, $\sum \alpha_{ij}/M_{ij} < +\infty$. Si une telle suite (α_{ij}) n'existait pas, il s'ensuivrait (en posant $\beta_{ij} = \alpha_{ij}/M_{ij}$) que pour toute suite sommable (β_{ij}) sur I, la suite $(M_{ij}\beta_{ij})$ serait encore sommable, donc que (M_{ij}) est borné, contrairement à l'hypothèse que M_{ij} tend vers l'infini.

La construction de la suite I_0, I_1,... doit donc s'arrêter à un terme, que nous noterons $I = I_{n_0-1}$. Alors <u>la section de</u> v <u>sur</u> I <u>est contrariante</u>, <u>et pour toute partie</u> J <u>de</u> I, <u>on ne peut avoir</u> $\lim_J a_i^{(m)}v_{ij}/b_j^{(n_0)} = +\infty$ <u>que si la section de</u> v <u>sur</u> J <u>est non contrariante</u>. La section de v sur I étant contrariante, il existe pour tout entier $n \geq n_0$ un entier m_n tel que $\operatorname{Sup}_I a_i^{(m_n)}v_{ij}/b_j^{(n)} = +\infty$, donc une partie J_n de I telle que l'on ait

$$(2) \qquad \lim_{J_n} a_i^{(m_n)}v_{ij}/b_j^{(n)} = +\infty$$

A fortiori, on aura $\lim_{J_n} a_i^{(m_n)}v_{ij}/b_j^{(n_0)} = +\infty$, donc, d'après la définition de I, la section de v sur J_n est non contrariante. Il existe donc un entier assez grand (qu'on peut prendre pour simplifier égal à m_n, en augmentant au besoin ce dernier, ce qui est évidemment possible), et un $\lambda^{(n)} \in E'$, positif, tels que

$$(3) \quad v_{ij} \leq \lambda_i^{(n)} b_j^{(m_n)} \qquad \text{pour } (i,j) \in J_n$$

comme il a été vu dans les préliminaires (7). Comparant (2) et (3), on voit aussitôt que <u>le filtre associé à</u> J_n <u>est plus fin que le filtre</u> $\Phi_{n,m_n,\lambda^{(n)}}$ défini dans l'énoncé de la condition f. Supposons alors vérifiée cette condition f., et soit m_o l'entier qui figure dans cet énoncé (n_o étant déjà défini ci-dessus). Je dis qu'on a

$$(4) \quad \lim_{J_n} a_i^{(m_o)} v_{ij} / b_j^{(n_o)} = +\infty \qquad \text{pour } n \geq m_o$$

En effet, on a

$$a_i^{(m_o)} v_{ij} / b_j^{(n_o)} = (a_i^{(m_n)} v_{ij} / b_j^{(n)})(a_i^{(m_o)} b_j^{(n)} / a_i^{(m_n)} b_j^{(n_o)}),$$

où le premier facteur du deuxième membre tend vers l'infini sur J_n en vertu de la formule (2), et le deuxième membre est plus grand que $a_i^{(m_o)} b_j^{(m_o)} / a_i^{(m_n)} b_j^{(n_o)}$, <u>qui reste minoré par un nombre</u> > 0 <u>fixe</u>, dans un ensemble convenable élément du filtre associé à J_n. En effet, ce dernier filtre, avons nous dit, est plus fin que $\Phi_{n,m_n,\lambda^{(n)}}$, et à fortiori plus fin que $\Phi_{m_o,m_n,\lambda^{(n)}}$, de sorte qu'il suffit d'appliquer la condition f. La formule (4) montre que l'on peut supposer, en rétrécissant au besoin J_n, que pour tout $n \geq m_o$, on ait

$$(5) \quad \operatorname*{Inf}_{J_n} a_i^{(m_o)} v_{ij} / b_j^{(n_o)} \geq n$$

les formules (2) et (3) restant vérifiées. Soit alors $J = \bigcup_{n \geq m_o} J_n$, la conjonction de (4) et (5) prouve aussitôt que l'on a $\lim_{J} a_i^{(m_o)} v_{ij} / b_j^{(n_o)} = +\infty$, d'où suit, puisque $J \subset I$, que la section de v sur J est non contrariante. Mais cela est contradictoire avec les formules (2). L'implication f. $\Longrightarrow$ e. est ainsi prouvée.

2° e. implique f. - Nous allons prouver que "non f" implique "non e".

Nous supposons donc qu'il existe un entier $n_o \geqslant 0$, tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, existe un entier $m_n \geqslant 0$ et une suite positive $\lambda^{(n)}$ élément de E', telle que les filtres $\Phi_{n,m_n,\lambda(n)}$ et ψ_{n_o,n,m_n} aient un filtre intersection propre $\mathfrak{F}_n$. Nous allons alors construire, pour tout n, une suite double positive $v^{(n)} = (v_{ij}^{(n)})$ telle que

(6) $\quad \limsup_{i,j} a_i^{(m_n)} v_{ij}^{(n)}/b_j^{(n)} = +\infty$

(7) $\quad a_i^{(n)} v_{ij}^{(n)}/b_j^{(n_o)} \leqslant 2^{-n}$

(8) $\quad v_{ij}^{(n)} \leqslant \lambda_i^{(n)}\ b_j^{(m_n)}$.

Pour cela, soit I_n l'ensemble des indices (i,j) tels que $b_j^{(n_o)} \geqslant 2^{-n} \lambda_i^{(n)} a_i^{(n)} b_j^{(m_n)}$. Si $\mathfrak{F}_n$ a une trace sur I_n, on posera

$v_{ij}^{(n)} = \lambda_i^{(n)} b_j^{(m_n)}$ pour $(i,j) \in I_n$ et $v_{ij}^{(n)} = 0$ pour $(i,j) \notin I$; alors (8) et (7) sont vérifiés par définition, et (6) est vérifié grâce au fait que $\Phi_{n,m_n,\lambda(n)}$ a une trace sur I_n. Si $\mathfrak{F}_n$ n'a pas de trace sur I_n, on prendra $v_{ij}^{(n)} = 0$ pour $(i,j) \in I_n$, et $v_{ij}^{(n)} = 2^{-n} b_j^{(n_o)}/a_i^{(n)}$ pour $(i,j) \in \complement I_n$, (ce qui est possible, car on aura $a_i^{(n)} \neq 0$) ; alors (8) et (7) sont encore vérifiés par définition, et (6) grâce au fait que ψ_{n_o,n,m_n} a une trace sur $\complement I_n$. De (8) on tire

(9) $\quad v^{(n)} \in P'$.

Je dis que la série $v_{ij} = \sum_{n \geqslant 0} v_{ij}^{(n)}$ converge pour tout (i,j) et que la suite double somme $v = (v_{ij})$ appartient à P*, et non à P', i.e. est contrariante (ce qui achèvera la démonstration). Soit en effet, pour (i,j) donné, m un entier > 0 tel que $a_i^{(m)} \neq 0$, on a alors, en vertu de (7), pour $n \geqslant m$: $v_{ij}^{(n)} \leqslant M 2^{-n}$, où $M = b_j^{(n_o)}/a_i^{(m)}$, d'où résulte la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} v_{ij}$. Que la suite $v = (v_{ij})$ ne puisse appartenir à P' résulte de la formule (6), qui implique à fortiori

$\limsup_{i,j} a_i^{(m_n)} v_{ij}/b_j^{(n)} = +\infty$. Reste à prouver que $v \in P^*$, i.e. que pour toute $u = (u_{ij}) \in P$, la série $\sum u_{ij}v_{ij}$ converge absolument. On peut supposer les $u_{ij} \geqslant 0$, on est ramené à prouver que l'on ne peut avoir $\sum_n \sum_{i,j} u_{ij}v_{ij}^{(n)} = +\infty$. En effet, en vertu de (9), on a, pour tout n,

$\sum_{i,j} u_{ij}v_{ij}^{(n)} < +\infty$; il existerait donc pour tout n une section <u>finie</u> $w^{(n)}$ de $v^{(n)}$ telle que l'on ait encore $\sum_n \sum_{i,j} u_{ij}w_{ij}^{(n)} = = +\infty$. Soit alors $w = \sum w^{(n)}$; je dis que $w \in P'$, ce qui impliquerait contradiction, et achèvera la démonstration. De façon précise, nous allons prouver que $\operatorname{Sup.} a_i^{(m)} w_{ij}/b_j^{(n_0)} < +\infty$ pour tout entier $m \geqslant 0$. On a en effet

$$a_i^{(m)} w_{ij}/b_j^{(n_0)} = a_i^{(m)} w'_{ij}/b_j^{(n_0)} + a_i^{(m)} w''_{ij}/b_j^{(n_0)}$$

où $w' = \sum_{n<m} w^{(n)}$, $w'' = \sum_{n \geqslant m} w^{(n)}$. w' est une suite finie, on peut la négliger pour la vérification en vue. D'autre part, on a $a_i^{(m)} w''_{ij}/b_j^{(n_0)} \leqslant \sum_{n \geqslant m} a_i^{(m)} v_{ij}^{(n)}/b_j^{(n_0)} \leqslant \sum_{n \geqslant m} 2^{-n}$ en vertu de (7), d'où bien $\operatorname{Sup.} a_i^{(m)} w''_{ij}/b_j^{(n_0)} < +\infty$, ce qui achève de prouver le théorème.

Nous appliquerons le th. 15 surtout quand les espaces E et F sont nucléaires. <u>Pour que</u> E (<u>resp</u>. F) <u>soit nucléaire, il faut et il suffit que pour tout</u> m_0 <u>existe un</u> m <u>tel que la suite</u> $a^{(m_0)}/a^{(m)}$ (<u>resp</u>. <u>la suite</u> $b^{(m_0)}/b^{(m)}$) <u>soit sommable</u>. Pour l'espace F, ce n'est là autre que la prop. 8, et pour l'espace E, la démonstration de la prop. 8 s'applique telle quelle (compte tenu du th. 7). Si par exemple la suite des $a^{(m)}$ satisfait à la condition précédente, il est immédiat que l'espace échelonné correspondant (espace des suites $x = (x_i)$ dont le produit par toute suite $a^{(m)}$ est <u>sommable</u>) est aussi identique à l'espace des suites $x = (x_i)$ dont le produit par toute suite $a^{(m)}$ est <u>bornée</u>. Et dualement, que l'espace E, limite inductive des $a^{(m)}.\ell^1$, est identique au dual de l'espace échelonné précédent, i.e. à la limite inductive des espaces $a^{(m)}.\ell^\infty$ (ou encore l'espace des suites qui sont majorées en module par un multiple d'une des suites $a^{(m)}$). En dépit de son apparence rébarbative, la condition f. du th. 15 est très maniable dans chaque cas particulier, comme nous allons nous en convaincre sur quelques exemples. Nous commençons par définir une classe intéressante d'espaces échelonnés.

Soit $b = (b_j)$ une suite fixe de nombres > 0; considérons pour tout $\alpha > 0$ la suite $b^\alpha = (b_j^\alpha)$. L'espace F des suites dont le produit par toute b^α est sommable est évidemment un espace échelonné, car il suffit évidemment de faire prendre à α toutes les valeurs de la forme n et $1/n$, où n est un entier > 0. Décomposant l'ensemble N des entiers naturels en deux ensembles, correspondants à des indices j pour lesquels on a respectivement $b_j \geqslant 1$ et $b_j \leqslant 1$, il en résulte une décomposition correspondante de F en somme directe topologique, ce qui permet de se borner au cas où on a $b_j \geqslant 1$ pour tout j, ou $b_j \leqslant 1$ pour tout j. Dans le premier cas, F est défini par la suite des $b^{(n)} = b^n = (b_j^n)$, avec n entier $\geqslant 0$, dans le second par la suite des $b^{(n)} = b^{1/n} = (b_j^{1/n})$, avec n entier > 0. F <u>est appelé l'espace échelonné défini par la suite des puissances croissantes</u> (<u>resp.</u> <u>décroissantes</u>) <u>de la suite</u> $b = (b_j)$, <u>où</u> $b_j \geqslant 1$ (<u>resp.</u> $b_j \leqslant 1$) <u>pour tout</u> j. On peut aussi, plus généralement, pour un $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant +\infty$ donné, considérer l'ensemble des suites $b^\alpha = (b_j^\alpha)$ avec $\alpha < \alpha_0$ si $b_j \geqslant 1$ (on suppose alors $\alpha_0 \neq 0$), ou avec $\alpha > \alpha_0$ si $b_j \leqslant 1$ (on suppose alors $\alpha_0 \neq +\infty$), et l'espace échelonné correspondant F, noté F_{b,α_0}. Les deux espaces envisagés d'abord sont donc respectivement $F_{b,\infty}$ et $F_{b,0}$. Mais pour α_0 quelconque, on n'obtient pas des espaces essentiellement nouveaux, car F_{b,α_0} <u>est isomorphe de façon naturelle</u>, <u>si</u> $\alpha_0 \neq \infty$, <u>à l'espace échelonné défini par la suite des puissances décroissantes d'une suite de nombres</u> $\leqslant 1$ <u>convenable</u>, <u>savoir la suite</u> b <u>elle-même si les</u> b_j <u>sont</u> $\leqslant 1$, <u>et la suite</u> $b^{-1} = (b_j^{-1})$ <u>si les</u> b_j <u>sont</u> $\geqslant 1$. Il est en effet immédiat que l'opération de multiplication par la suite $b^{-\alpha_0} = (b_j^{-\alpha_0})$ est un isomorphisme de F_{b,α_0} sur $F_{b^{-1},0}$ si $b \geqslant 1$, et de F_{b,α_0} sur $F_{b,0}$ si $b \leqslant 1$.

Ces considérations valent telles quelles quand, au lieu de considérer l'espace échelonné F défini par la suite des $b^{(n)}$, on considère l'espace E, limite inductive des $b^{(n)}.\ell^1$, envisagé dans le th. 15. Cet espace sera noté $E_{b,\infty}$ si $b \geqslant 1$, $E_{b,0}$ si $b \leqslant 1$, et les espaces E_{b,α_0} (qui se définissent de façon évidente) se ramènent aux deux types précédents.

Notons que, pour que $F_{b,\infty}$ (resp. $F_{b,0}$) soit nucléaire, il faut et il suffit qu'une puissance convenable de $b^{-1} = (b_j^{-1})$ soit sommable (resp. que pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $b^{\varepsilon} = (b_j^{\varepsilon})$ soit sommable, i.e. que la suite (b_j) ait un exposant de convergence nul, ou encore soit à décroissance rapide si elle est rangée par ordre décroissant). Cela résulte en effet immédiatement du critère général donné plus haut. De ce qui avait été dit plus haut résulte aussi que <u>le dual de</u> $F_{b,\infty}$ (<u>resp</u>. $F_{b,0}$), <u>supposé nucléaire</u>, <u>est identique à</u> $E_{b,\infty}$ (<u>resp</u>. <u>à</u> $E_{b,0}$).

A titre d'exemples, nous considérons maintenant trois cas types de suites $b \geqslant 1$ et de leurs inverses b^{-1}, et interprétons dans ces cas les espaces $F_{b,\infty}$ et $F_{b^{-1},0}$ correspondants et leurs duals. Tous les espaces que nous envisagerons seront manifestement nucléaires, grâce au critère qu'on vient de donner. Pour fixer les idées, les scalaires sont supposés complexes.

1. $b_j = j$. <u>Alors</u> $F_{b,\infty}$ <u>n'est autre que l'espace</u> (s) <u>des suites à décroissance rapide</u>, <u>dont le dual</u> $E_{b,0}$ <u>est l'espace</u> (s') <u>des suites à croissance lente</u>. Rappelons que (s) et (s') sont respectivement isomorphes à l'espace $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ (espace des fonctions sur $\mathcal{R}^n$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, ou espace des distributions tempérées sur $\mathcal{R}^n$). La suite $b^{-1} = (j^{-1})$ donne lieu à des espaces non nucléaires, sans interprétation remarquable.

2. $b_j = k^j$, où $k>1$ (il est immédiat que l'espace $F_{b,\infty}$ ne dépend pas de la valeur particulière de k). Alors $F_{b,\infty}$ est l'espace des suites (x_j) telles que $\sum |x_j| R^j < +\infty$ pour tout $R > 0$, donc à l'espace des suites des coefficients de Taylor des fonctions entières sur le plan complexe $\mathcal{C}$; <u>donc</u> $F_{b,\infty}$ <u>s'identifie à l'espace</u> $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ <u>des fonctions holomorphes sur le plan complexe</u> $\mathcal{C}$. Son dual est identique à l'espace des suites qui sont majorées par quelque suite (MR^j) (pour M et R assez grands), donc à l'espace des suites des coefficients des séries de Taylor à l'origine. <u>Donc</u> $E_{b,0}$ <u>s'identifie à l'espace</u> $\mathcal{H}(\{0\})$ <u>des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine</u>.

2 bis. $b_j = k^{-j}$, où $k>1$. On a vu que $F_{b,0}$ est isomorphe à l'espace $F_{b^{-1},1}$ des suites (x_j) telles que $\sum |x_j| R^j < +\infty$ pour tout $R<k$, donc $F_{b,0}$ <u>est isomorphe à l'espace</u> $\mathcal{H}(C_0)$ <u>des fonctions holomorphes dans le cercle unité</u> C_0 <u>du plan complexe</u>. <u>Son dual</u> $E_{b,0}$ <u>est aussi isomorphe à</u> $E_{b,1}$, <u>qu'on interprète aussitôt comme l'espace</u> $\mathcal{H}(\bar{C}_0)$ <u>des fonctions holomorphes au voisinage du cercle unité fermé</u> $\bar{C}_0$ <u>de</u> $\mathcal{C}$.

La dualité entre $\mathcal{H}(C_0)$ et $\mathcal{H}(\bar{C}_0)$, ou entre $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ et entre $\mathcal{H}(\{0\})$, est d'ailleurs classique, elle s'exprime par une certaine intégrale de Cauchy sur un contour convenable.

3. $b_j = j!$ (en vertu de la formule de Stirling, on peut d'ailleurs remplacer $j!$ par j^j, les espaces correspondants ne seraient pas changés). Alors, en vertu d'un classique théorème de Hadamard, $F_{b,\infty}$ est l'espace des suites des coefficients de Taylor des fonctions entières d'ordre zéro, <u>donc</u> $F_{b,\infty}$ <u>s'identifie à l'espace</u> $\mathcal{H}^\circ(C)$ <u>des fonctions entières d'ordre zéro</u>. Son dual, espace des suites majorées par quelque suite $M(j!)^n$, ne semble pas avoir d'interprétation remarquable.

3 bis. $b_j = 1/j!$ (ou, ce qui revient au même, $b_j = j^{-j}$). Nous avons dit que $F_{b,0}$ est isomorphe, pour tout $0<\alpha<+\infty$, à l'espace $F_{b^{-1},1/\alpha}$,

espace des suites (x_j) qui sont, pour tout $\beta > \alpha$, majorées par un multiple de la suite $(1/(j!)^{1/\beta})$. D'après le théorème de Hadamard, ce ne sont autres que les suites des coefficients de Taylor des fonctions entières d'ordre $\leqslant \alpha$. Ainsi, $F_{b,0}$ est ici isomorphe à l'espace des fonctions entières d'ordre $\leqslant \alpha$ (où $0 < \alpha < +\infty$), espace que nous notons $\mathcal{H}^{\leqslant\alpha}(\mathcal{C})$. Le dual $E_{b,0}$ de $F_{b,0}$ est de même isomorphe à $E_{b,1/\alpha}$, espace des suites qui sont majorées par un multiple d'une suite du type $(1/(j!)^{1/\beta})$, avec $\beta < \alpha$, i.e. des suites qui sont les coefficients de Taylor d'une fonction entière d'ordre $< \alpha$. On peut d'ailleurs faire ici $\alpha = +\infty$. Donc $E_{b,0}$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{H}^{<\alpha}(\mathcal{C})$ des fonctions entières d'ordre $< \alpha$, (où $0 < \alpha \leqslant +\infty$ est donné arbitrairement), et en particulier à l'espace $\mathcal{H}^{<+\infty}(\mathcal{C})$ des fonctions entières d'ordre fini.

PROPOSITION 15. - Sous les conditions générales du th. 15, supposons que F soit l'espace échelonné défini par la suite des puissances croissantes (resp. décroissantes) de la suite $b = (b_j)$, où $b_j \geqslant 1$ (resp. $b_j \leqslant 1$) pour tout j. Une condition suffisante pour que $E \hat{\otimes} F$ soit bornologique est alors l'existence d'un entier $\nu \geqslant 0$ tel que, pour tout entier m, tout élément positif λ de E', et tout $\varepsilon > 0$, on ait :

$$(14) \qquad \sup_i (\lambda_i a_i^{(m)})^{\varepsilon} a_i^{(m)}/a_i^{(\nu)} < +\infty$$

resp. :

$$(14 \text{ bis}) \qquad \sup_i (\lambda_i a_i^{(m)})^{\nu} a_i^{(m)}/a_i^{(\nu)} < +\infty$$

Cette condition est aussi nécessaire si $\sup_j b_j = +\infty$ (resp. $\inf_j b_j = 0$) et s'il existe un entier $k > 0$ et un $M > 0$ tels que $b_{j+1} \leqslant Mb_j^k$ pour tout j (resp. tels que $b_{j+1} \geqslant Mb_j^k$ pour tout j).

Démonstration. - Supposons $b_j \geqslant 1$, le cas $b_j \leqslant 1$ se traite de façon toute analogue. Avec les notations de l'énoncé de la condition f. du th. 15, $\Phi_{m_0,m,\lambda}$ est le filtre image réciproque du filtre des voisinages de l'infini par la suite $\lambda_i a_i^{(m)} b_j^{m-m_0}$, et la condition f. signifie qu'on peut, pour n_o donné, déterminer m_o tel que $c_{ij} = a_i^{(m)}/a_i^{(m_o)} b_j^{m_o-n_o}$ reste borné suivant ce filtre quels que soient m, λ. Si la condition de la prop. 15 est vérifiée, faisons $m_o = n_o + \nu$; alors $c_{ij} = a_i^{(m)}/a_i^{(m_o)} b_j^{\nu} \leqslant a_i^{(m)}/a_i^{(\nu)} b_j^{\nu}$, et si on a $\lambda_i a_i^{(m)} b_j^{m-m_o} \geqslant 1$, d'où $1/b_j \leqslant (\lambda_i a_i^{(m)})^{1/(m-m_o)}$, donc $c_{ij} \leqslant (\lambda_i a_i^{(m)})^{\varepsilon} a_i^{(m)}/a_i^{(\nu)}$ avec $\varepsilon = \nu/(m-m_o)$, il en résulte que c_{ij} reste borné dans l'ensemble $\Phi_{m_o, m, \lambda}(1)$. Supposons maintenant la condition de la formule (14) non vérifiée. Pour tout ν, existent donc m, λ, ε tels que l'on ait $\operatorname{Sup}_i (\lambda_i a_i^{(m)})^{\varepsilon} a_i^{(m)}/a_i^{(m_o)} = +\infty$. Dans l'énoncé de la condition f., faisons $n_o = 0$, montrons que pour tout $m_o = \nu$, existent λ et m tels que c_{ij} ne soit pas borné suivant le filtre $\Phi_{\nu, m, \lambda}$. Ce filtre est aussi le filtre image réciproque du filtre des voisinages de l'infini par la suite $(\lambda_i a_i^{(m)})^{1/(m-\nu)} b_j$, et comme $c_{ij}^{1/\nu} = (a_i^{(m)}/a_i^{(\nu)})^{1/\nu} (1/b_j)$, il suffit de trouver, pour tout $R > 0$, un couple (i,j) tel que $(\lambda_i a_i^{(m)})^{1/(m-\nu)} b_j \geqslant R$ et $(a_i^{(m)}/a_i^{(\nu)})^{1/\nu} (1/b_j) \geqslant R$, ce qui s'écrit aussi $R(\lambda_i a_i^{(m)})^{-1/(m-\nu)} \leqslant b_j \leqslant R^{-1} (a_i^{(m)}/a_i^{(\nu)})^{1/\nu}$.

Commençons par prendre m, λ, ε tels que (14) ne soit pas vérifié. On peut supposer, en augmentant au besoin m, que l'on a $\nu/(m-\nu) < \varepsilon/k$, où k est l'entier qui intervient dans l'hypothèse de la deuxième partie de la prop. 15. Comme $\lambda a^{(m)}$ est une suite bornée, on peut supposer que $\lambda_i a_i^{(m)} \leqslant 1$, (en multipliant au besoin λ par une constante). Il suffit alors, pour tout $R>0$ donné, de trouver un couple (i,j) tel que $A_i \leqslant b_j \leqslant B_i$, où on pose

$$A_i^{\nu} = R^{\nu} (\lambda_i a_i^{(m)})^{-\varepsilon/k}, \quad B_i^{\nu} = R^{-\nu} a_i^{(m)}/a_i^{(\nu)}$$

Les deux suites (A_i), (B_i) sont telles que $\operatorname{Sup}_i B_i/A_i^k = +\infty$, $\lim_i A_i = +\infty$, nous allons en déduire qu'il existe un couple (i,j) tel que $A_i \leqslant b_j \leqslant B_i$. En effet, soit i tel que $A_i \geqslant b_1$, $B_i/A_i^k \geqslant M$, où M est tel que $b_{j+1} \leqslant M b_j^k$ pour tout j. Soit j le plus grand indice tel que $b_j \geqslant A_i$, je dis qu'alors on a $A_i \leqslant b_j \leqslant B_i$. Autrement on aurait en effet $b_j > B_i$, d'où

$b_j/b^k_{j-1} > B_i/A^k_i \geqslant M$, ce qui est contradictoire. La prop. 15 est donc démontrée.

Remarquons que la condition (14) (resp. (14 bis)) est une condition <u>sur l'espace</u> E <u>uniquement</u>. La condition (14 bis) est moins stricte que la condition (14), car pour tout m, $(\lambda_i a^{(m)}_i)$ est une suite bornée, donc en la multipliant par un scalaire on peut supposer ses termes $\leqslant 1$ en module. Or la condition (14) est toujours vérifiée si E est l'espace $E_{a,\infty}$ défini par la suite des puissances croissantes d'une suite $a = (a_i)$ de nombres $\geqslant 1$ (il suffit de prendre $\nu = 0$, alors le premier membre de (14) s'écrit $a^{(m)}_i(\lambda_i a^{(m)}_i)^{\varepsilon} = (a^M_i \lambda_i)^{\varepsilon}$, où $M = m(1+1/\varepsilon)$, or la suite $(a^M_i \lambda_i)$ est bornée). D'autre part, si E est l'espace $E_{a,0}$ défini par la suite des puissances décroissantes d'une suite $a = (a_i)$ de nombres $0 < a_i \leqslant 1$, alors la plus faible (14 bis) des deux conditions envisagées n'est pas remplie, sauf dans le cas trivial où il existerait $\alpha > 0$ tel que $a_i > \alpha$ pour tout i (ce qui signifie d'ailleurs que E est normable). En effet, la suite $\lambda = (\lambda_i)$, avec $\lambda_i = 1$ pour tout i, est dans E', et pour ce λ le premier membre de (14 bis) devient a^s_i, avec $s = (1+\nu)/m - 1/\nu$, quantité qui ne reste pas bornée pour i croissant, quand m est choisi assez grand pour qu'on ait $s < 0$. Ces considérations, jointes à la prop. 15, donnent le

COROLLAIRE 1. - <u>Soit</u> F <u>l'espace échelonné défini par la suite des puissances croissantes</u>, <u>resp</u>. <u>décroissantes</u>, <u>d'une suite donnée</u> $b = (b_j)$, <u>avec</u> $b_j \geqslant 1$, <u>resp</u>. $0 < b_j \leqslant 1$. <u>Soit</u> E <u>l'espace limite inductive de la suite des espaces</u> $a^n . \ell^1$, <u>où</u> $a = (a_i)$ <u>est une suite donnée de nombres</u> $\geqslant 1$, <u>et où</u> $a^n = (a^n_i)$. <u>Alors</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>est bornologique</u>. <u>Si au contraire</u> E <u>est l'espace limite inductive des espaces</u> $a^{1/n} . \ell^1$, <u>où</u> $a = (a_i)$, $0 < a_i \leqslant 1$, <u>et si</u> $b = (b_j)$ <u>satisfait à la condition de la deuxième partie de la prop</u>. 15, <u>alors</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>n'est pas bornologique ni tonnelé</u>, <u>et son dual fort n'est pas quasi-complet</u>, <u>sauf si</u> E <u>ou</u> F <u>est normable</u>.

Notons maintenant que dans chacun des exemples particuliers envisagés plus haut, correspondants respectivement aux suites (b_j) avec $b_j = j, j^{-1}, R^j, R^{-j}, j!$ et $1/j!$, la condition de la deuxième partie de la prop. 15 est vérifiée. Il est en effet visible que si cette condition est vérifiée pour la suite $b = (b_j)$, elle l'est aussi pour $b^{-1} = (b_j^{-1})$, de sorte qu'on peut se borner aux suites (j), (R^j) avec $R > 1$, et $(j!)$; on constate alors qu'il suffit de faire $k = 1$ pour les deux premières suites, et $k = 2$ pour la troisième. On obtient ainsi le

COROLLAIRE 2. - Considérons les trois groupes suivants d'espaces nucléaires (dont les définitions ont été données plus haut, on suppose $0 < \alpha < +\infty$) :

1° - (s'), $(\mathcal{S}')$, $\mathcal{H}(\{0\})$ (isomorphe au dual de $\mathcal{H}(\mathcal{C})$), $(\mathcal{H}^{\circ}(\mathcal{C}))'$

2° - $\mathcal{H}(\bar{C})$ (isomorphe au dual de $\mathcal{H}(C_0)$), $\mathcal{H}^{<\alpha}(\mathcal{C})$ (isomorphe aussi à $\mathcal{H}^{<+\infty}(\mathcal{C})$ et au dual de $\mathcal{H}^{\leq\alpha}(\mathcal{C})$).

3° - (s), $(\mathcal{S})$, $\mathcal{H}(\mathcal{C})$, $\mathcal{H}(C_0)$, $\mathcal{H}^{\circ}(\mathcal{C})$, $\mathcal{H}^{\leq\alpha}(\mathcal{C})$.

(Les espaces réunis dans 1° et 2° sont du type $(\mathcal{DF})$, les espaces réunis dans 3° sont du type $(\mathcal{F})$). Soit E un espace d'un des deux premiers groupes, F un espace du troisième groupe. Alors $E \hat{\otimes} F = L_b(E', F)$ est bornologique si et seulement si E appartient au premier groupe. $F' \hat{\otimes} E = L_b(F, E)$ est donc bornologique sauf dans le cas où $F = \mathcal{H}(C_0)$ ou $F = \mathcal{H}^{\leq\alpha}(\mathcal{C})$. Quand $E \hat{\otimes} F$ n'est pas bornologique, il n'est pas tonnelé, son dual fort n'est pas quasi-complet.

On notera la différence topologique entre l'espace $H = \mathcal{H}(V)$ des fonctions holomorphes dans l'ouvert V du plan complexe, quand V est soit tout le plan complexe, soit le cercle unité : dans le premier cas, $L_b(H,H)$ est bornologique, dans le second il ne l'est pas. Une autre différence, relative à la nature de la suite des valeurs propres d'un opérateur nucléaire dans H, a été vue au §2, n°4, Remarque 9. On pourrait envisager une classification (probablement assez grossière) des variétés analytiques-complexes V suivant de telles propriétés vectorielles topologiques de l'espace $\mathcal{H}(V)$, et se demander quelles propriétés internes de la variété V correspondent à une telle classification.

Remarque 14. - Avec les notations du corollaire 2, le produit tensoriel projectif complété de tout espace E du premier groupe avec tout espace F du troisième groupe est bornologique. Mais cela ne doit pas faire penser que l'on puisse dans cet énonçé remplacer F par n'importe quel espace échelonné, même nucléaire. Il est en effet facile de prouver, à l'aide du critère f. du th. 15, le résultat suivant : E étant l'espace limite inductive des espaces $a^{(m)}.\ell^1$ (où $a^{(m)}$ est une suite croissante arbitraire de suites positives), si E n'est pas normable, on peut trouver un espace échelonné nucléaire F tel que $E \hat{\otimes} F$ ne soit pas bornologique.

Remarque 15. - Des résultats précédents, on déduit d'autres cas où un espace $E \hat{\otimes} F$ (E du type $(\mathcal{DF})$, F du type $(\mathcal{F})$) est bornologique. Supposons par exemple que (E_1, F_1) soit un couple d'espaces tels que $E_1 \otimes F_1$ soit quasi-tonnelé (ce qui aura pu se vérifier par exemple à l'aide du th. 15, ou de la prop. 15 et de ses corollaires), et soit E un espace quotient de E_1, F un espace quotient de F_1. Alors $E \otimes F$ est un espace quotient topologique de $E_1 \otimes F_1$ (Chap. I, §1, n°2, prop. 3), donc est quasi-tonnelé. Par suite, si (E,F) satisfait aux hypothèses du th. 14, 3°, on pourra en conclure que $E \hat{\otimes} F$ est bornologique. De façon analogue, si $E_1 \hat{\otimes} F_1$ est bornologique, et si E est un facteur direct de E_1, F un facteur direct de F_1, alors $E \hat{\otimes} F$ est un facteur direct de $E_1 \hat{\otimes} F_1$, donc lui aussi bornologique. On voit par exemple ainsi que si V et W sont deux variétés indéfiniment différentiables compactes, alors l'espace $L_b(\mathcal{E}(V), \mathcal{E}(W)) = \mathcal{E}'(V) \hat{\otimes} \mathcal{E}(W)$ est bornologique. En effet, il est facile de voir que $\mathcal{E}(V)$ est isomorphe à un facteur direct du produit d'un nombre fini d'espaces identiques à l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur un tore T^n, donc isomorphe à un facteur direct de l'espace (s) des suites à décroissance rapide (voir note 4 page 54). Comme (s') $\hat{\otimes}$ (s) est bornologique (prop. 15, corollaire 2) le résultat annoncé s'ensuit.

4. Application aux espaces $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$.

Nous terminons en élucidant les propriétés topologiques des espaces $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$ (définis et étudiés dans [22], Chap. 7, §5) et de leurs duals. Rappelons les définitions.

$(\mathcal{O}_M)$ est l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^n$ "indéfiniment différentiables à croissance lente" (i.e. qui sont "à croissance lente" ainsi que toutes leurs dérivées multiples). Il s'identifie à l'espace de tous les "opérateurs de multiplication" dans l'espace $(\mathcal{S})$ des fonctions sur $\mathbb{R}^n$ "indéfiniment différentiables à décroissance rapide", et la topologie induite par $L_b((\mathcal{S}),(\mathcal{S}))$ ou par $L_s((\mathcal{S}),(\mathcal{S}))$ y est la même, et en fait un espace complet. Comme le dual de ce dernier espace est évidemment connu (c'est le produit tensoriel algébrique $(\mathcal{S}) \otimes (\mathcal{S}')$), on en déduit facilement la caractérisation suivante du dual de $(\mathcal{O}_M)$: $(\mathcal{O}'_M)$ est l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$ qui sont sommes finies de dérivées de fonctions continues à décroissance rapide (distributions dites "à décroissance très rapide"). C'est d'ailleurs un espace $(\mathcal{LF})$, comme on peut s'en assurer facilement de façon directe grâce à l'énoncé précédent, mais cela résulte aussi à priori du fait que le dual fort de $(\mathcal{O}_M)$ s'identifie à un espace quotient du dual de $L_b((\mathcal{S}), (\mathcal{S}))$ (puisque $(\mathcal{O}_M)$ est isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique de l'espace $L_b((\mathcal{S}),(\mathcal{S}))$, qui est réflexif en vertu du Chap. I, §4, n°1, prop. 19, corollaire 1), or ce dernier dual est du type $(\mathcal{LF})$ (lemme 9), il en est donc de même de $(\mathcal{O}'_M)$. Il n'est pas trivial, par contre, que $(\mathcal{O}'_M)$ soit complet, ce que nous allons pourtant montrer.

$(\mathcal{O}'_C)$ est l'espace des "distributions à décroissance rapide" sur $\mathcal{R}^n$, ou encore l'espace des "opérateurs de composition" dans $(\mathcal{S})$. Diverses caractérisations en sont données dans [22], Chap. 7; il nous suffira ici de noter que $(\mathcal{O}'_C)$ est isomorphe à $(\mathcal{O}_M)$ par transformation de Fourier, et que par cette transformation il apparaît encore aussitôt que sur $(\mathcal{O}'_C)$ la topologie induite par $L_b((\mathcal{S}),(\mathcal{S}))$ ou par $L_s((\mathcal{S}),(\mathcal{S}))$ est la même, et en fait un espace complet. Le dual $(\mathcal{O}_C)$ de $(\mathcal{O}'_C)$ s'en déduit comme pour $(\mathcal{O}_M)$, on trouve que $(\mathcal{O}_C)$ s'identifie à l'espace des fonctions sur $\mathcal{R}^n$ qui sont le produit d'une fonction indéfiniment différentiable, nulle à l'infini avec toutes ses dérivées, par un polynôme (fonctions dites "indéfiniment différentiables à croissance très lente"). C'est encore un espace $(\mathcal{LF})$ puisque le dual de $(\mathcal{O}_M)$ l'est, et de façon précise c'est la limite inductive naturelle des espaces $\dot{\mathcal{B}}_m = (1 + r^2)^m \cdot \dot{\mathcal{B}}$, où $\dot{\mathcal{B}}$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathcal{R}^n$ nulles à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées (espace qui est du type $(\mathcal{F})$), et où $(1 + r^2)^m \cdot \dot{\mathcal{B}}$ désigne l'ensemble des produits $(1 + r^2)^m f$, avec $f \in \dot{\mathcal{B}}$ (r étant la fonction "distance à l'origine"), muni de la topologie déduite de celle de $\dot{\mathcal{B}}$ par transport de structure. Que cette topologie limite inductive soit précisément la topologie du dual fort de $(\mathcal{O}'_C)$ n'est pas difficile à voir directement, mais résulte aussi du fait qu'on sait déjà que cette dernière est du type $(\mathcal{LF})$ et à priori moins fine, donc identique grâce au "théorème des homomorphismes" (Introduction IV, th. B). Nous allons prouver maintenant le

THÉORÈME 16. - Soit E l'espace $(\mathcal{O}_M)$ ou $(\mathcal{O}'_C)$. E est un espace nucléaire, complet, bornologique, dont le dual est un espace $(\mathcal{LF})$ nucléaire et complet, et à fortiori bornologique. A fortiori E et E' sont du type $(\mathcal{M})$ et tonnelés, donc complètement réflexifs.

Démonstration. - Il suffit de le prouver par exemple pour $E = (\mathcal{O}_M)$. Que E et E' soient nucléaires a été vu déjà dans le th. 10 (§ 2, n°3), que

E est complet et son dual du type $(\mathcal{LF})$ a déjà été dit. Il suffira de prouver que E est bornologique - alors son dual sera à fortiori complet. Or on sait que $(s')\hat{\otimes}(s)$ est bornologique, (prop. 15, corollaire 2), de sorte que le th. 16 résultera du

LEMME 18. - $(\mathcal{O}_M)$ <u>est isomorphe à un facteur direct de</u> $(s')\hat{\otimes}(s)$.

Démonstration. - Soit Z le groupe additif des entiers, Z^n est un sous-groupe additif discret de $\mathbb{R}^n$. Soit I l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par : $(x_i)\in I$ équivaut à $|x_i| < k$ pour $i = 1,\dots,n$ où k est donné une fois pour toutes, $1/2 < k < 1$. Pour tout $z\in Z^n$, considérons la translation correspondante τ_z dans $\mathbb{R}^n$, qui opère aussi sur les parties de $\mathbb{R}^n$ et sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Les $\tau_z I$ (avec $z\in Z^n$) forment un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}^n$, et il existe un entier N, facile à expliciter, tel que $N + 1$ des ensembles $\tau_z I$ aient toujours une intersection vide. Soit φ une fonction indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}^n$, à support dans I, telle que la somme $\sum_{z\in Z^n} \tau_z\varphi$ (somme localement finie à priori) soit identique à 1 (il suffit de prendre d'abord $\varphi_0 \geqslant 0$ à support dans I telle que $\varphi_0(x) = 1$ quand $|x_i| \leqslant 1/2$ pour tout i, d'où résultera que la fonction $S = \sum \tau_z\varphi_0$ est partout non nulle, puis de prendre $\varphi = \varphi_0/S$).

Soit F l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$ qui ont la période 2k par rapport à chaque variable (F est isomorphe à (s)). Soit s'_n l'espace des familles de scalaires (λ_z) construites sur Z^n qui sont à croissance lente - s'_n est le dual de l'espace s_n des familles (μ_z) à décroissance rapide. s'_n est aussi isomorphe à (s'). $s'_n\hat{\otimes}F$ est l'espace des suites n-uples $(f_z)_{z\in Z^n}$, à valeurs dans F, qui sont <u>à croissance lente</u> dans l'espace vectoriel topologique F, i.e. telles que pour tout $T\in F'$, la suite des scalaires $(\langle f_z, T\rangle)_{z\in Z^n}$ soit à croissance lente (voir § 3, n°3, th. 13). Alors pour toute semi-norme continue $\nu : x\longrightarrow \|x\|_\nu$ sur F, la suite des $\|f_z\|_\nu$ est à croissance lente, car cela signifie aussi que l'application linéaire continue de F' dans s'_n définie par $(f_z) \in s'_n \hat{\otimes} F$ transforme les parties équicontinues de F' en des parties bornées de s'_n. D'ailleurs, l'interprétation de $s'_n \hat{\otimes} F$ comme espace $L_b(s_n, F)$ nous montre qu'on a dans $s'_n \hat{\otimes} F$ un système fondamental de voisinages de 0 avec les ensembles $V_{\nu,\mu}$, où ν parcourt un système fondamental de semi-normes continues sur F, et où $\mu = (\mu_z)$ parcourt les éléments positifs de s_n, $V_{\nu,\mu}$ étant défini par : $(f_z) \in V_{\nu,\mu}$ équivaut à $\mu_z \| f_z \|_\nu \leq 1$ pour tout $z \in Z^n$.

Pour tout $f = (f_z) \in s'_n \hat{\otimes} F$, soit $u(f) = \sum_{z \in Z^n} \tau_z(\varphi f_z)$ (où le deuxième membre est une somme localement finie sur $\mathbb{R}^n$, et converge donc vers une fonction indéfiniment différentiable). Je dis que $u(f)$ est "indéfiniment différentiable à croissance lente". On a en effet, pour tout indice de dérivation q, une inégalité

$$\|D^q f_z\|_\infty \leq A_q(1 + |z|)^{m_q} \quad \text{pour tout } z \in Z^n \ .$$

Pour toute dérivation multiple D^r, $D^r u(f)$ est une somme finie de fonctions de la forme $\sum_z (\tau_z D^p \varphi)(\tau_z D^q f_z)$; pour en calculer la valeur au point x, on peut se borner à sommer sur les z tels que $D^p \varphi(x - z) \neq 0$, donc tels que $x \in \tau_z I$, qui sont en nombre fini $\leq N$; et comme pour un tel z on a $|z| \leq |x| + 1$, le terme correspondant est majoré en module par $NA_q \|D^p \varphi\|_\infty (2 + |x|)^{m_q}$, d'où suit bien que $D^r u(f)$ est majoré en module par un polynôme fixe sur $\mathbb{R}^n$. u est donc une application linéaire de $s'_n \hat{\otimes} F$ dans $(\mathcal{O}_M)$, dont le raisonnement précédent montre aussitôt qu'elle est continue. Construisons maintenant une application linéaire continue v de $(\mathcal{O}_M)$ dans $s'_n \hat{\otimes} F$ qui soit inverse à droite de u, il s'ensuivra donc que $(\mathcal{O}_M)$ est isomorphe à un espace facteur direct de $s'_n \hat{\otimes} F$, et comme ce dernier est isomorphe à $(s') \hat{\otimes} (s)$, le lemme 18 sera établi. Soit ψ une fonction indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}^n$, ayant son support dans I, et égale à 1 sur le support de φ. Pour toute $g \in (\mathcal{O}_M)$ et tout $z \in Z^n$, considérons la fonction $\psi\tau_{-z}g$; comme son support est dans I, elle coïncide sur I avec une fonction de F uniquement déterminée, soit $v_z(g)$. Le lecteur vérifiera facilement que si on pose $v(g) = (v_z(g))_{z\in Z^n}$, alors $v(g)$ est une suite n-uple à croissance lente dans F, et que l'application $g\longrightarrow v(g)$ de $(\mathcal{O}_M)$ dans $s'_n\hat{\otimes}F$ ainsi définie est linéaire et continue. Enfin, on aura évidemment $\varphi v_z g = \varphi\tau_{-z}g$ (car $\psi\varphi = \varphi$), d'où $\tau_z(\varphi v_z(g)) = (\tau_z\varphi)g$ et enfin $u(v(g)) = \sum_z (\tau_z\varphi)g = g$, car $\sum\tau_z\varphi = 1$, ce qui achève la démonstration du lemme 18.

On notera que cette démonstration est toute analogue à celle qui prouverait que l'espace $\mathcal{E}(V)$ construit sur une variété indéfiniment différentiable compacte V est isomorphe à un facteur direct de l'espace (s). Signalons la question suivante, suggérée par ces démonstrations : $(\mathcal{O}_M)$ est-il isomorphe à $(s')\hat{\otimes}(s)$, et $\mathcal{E}(V)$ est-il isomorphe à (s) ? - Signalons aussi qu'en procédant comme pour le lemme 18, on voit que l'espace $(\mathcal{D}_{L^p})$ de L. Schwartz est isomorphe à un facteur direct de $(s)\hat{\otimes}\mathcal{L}^p$ ($\mathcal{L}^p$ étant construit pour la mesure de Lebesgue sur le cube unité de R^n ; $(\mathcal{D}_{L^p})$ est-il même isomorphe à $(s)\hat{\otimes}\mathcal{L}^p$?). Cela redonne immédiatement les propriétés topologiques de $(\mathcal{D}_{L^p})$ par application de §3, n°2, prop. 13, et en particulier que $(\mathcal{D}_{L^p})$ est un espace $(\mathcal{F})$ réflexif et quasi-normable.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

1. Problèmes d'approximation. - Rappelons pour mémoire le "Problème d'Approximation" (sans doute le plus important des problèmes rencontrés) et ses variantes, étudié en détail au Chap. 1, § 5. Signalons ici un affaiblissement du problème d'approximation métrique : Si E et F sont deux espaces de Banach, l'application linéaire naturelle de $E \hat{\otimes} F$ dans $\mathcal{J}(E',F')$ est-elle un homomorphisme métrique ? En transformant par dualité, on voit que cette question est équivalente à la suivante : Si u est une forme bilinéaire continue sur $E \times F$, adhérente à $E' \otimes F'$ pour la topologie de la convergence bicompacte, alors u est-il même adhérent pour la convergence bicompacte à l'ensemble des $v \in E' \otimes F'$ qui ont une norme $\leq \|u\|$? Si la réponse était affirmative, le problème d'approximation métrique se trouverait ramené au problème d'approximation topologique, et d'autre part on aurait une amélioration considérable de Chap. I, § 5, th. 15. L'énoncé de ce th. 15 (un peu compliqué) suggère aussi que la réponse à la question précédente soit affirmative chaque fois que u est une forme bilinéaire faiblement compacte.

D'autre part, on peut espèrer, même si le problème d'approximation se solvait par la négative dans le cas général (ce qui me semble probable) que toute forme bilinéaire faiblement compacte sur $E \times F$ soit adhérente à $E' \otimes F'$ pour la topologie de la convergence bicompacte. Cela impliquerait que tout espace de Banach réflexif satisfait à la condition d'approximation, donc même à la condition d'approximation métrique.

2. "Problème des Topologies" (Chap. I, § 1, n°1). Signalons ici un renforcement intéressant de ce problème : Soient E et F deux espaces du type $(\mathcal{F})$, M une partie bornée de $E \hat{\otimes} F$. Existe-t-il une partie bornée convexe cerclée A (resp. B) de E (resp. F) telle que M soit contenue dans l'image canonique de la boule unité de $E_A \hat{\otimes} F_B$ (comparer Chap. I, § 2, n°2, remarque 2) ? Même pour le "Problème des Topologies" proprement dit, la

difficulté essentielle consiste déjà à prouver la conjecture dans le cas où F est un espace de Banach, et j'ignore la réponse même si F = ℓ^2.

3. <u>Caractérisation des espaces nucléaires</u>. - Soient E et F deux espaces localement convexes tels que l'application linéaire naturelle de $E \hat{\otimes} F$ dans $E \hat{\hat{\otimes}} F$ soit un isomorphisme topologique (ou même seulement un homomorphisme topologique). Alors E ou F est-il nucléaire ? (Voir Chap. I, §4, n°5 et Chap. II, §2, n°1, th. 8 et remarque 8). J'ignore si c'est vrai même si E et F sont des espaces de Banach. Dans ce dernier cas, je le sais du moins si par exemple E est un espace $\mathcal{L}^p(\mu)$ avec $0 \leq p \leq +\infty$,

4. <u>Problème d'approximation dans les espaces nucléaires</u>. - Soit E un espace nucléaire du type $(\mathfrak{F})$. Existe-t-il une suite (u_i) d'endomorphismes de rang fini dans E, tendant vers l'identité dans $L_b(E,E)$? Peut-on choisir une telle suite (u_i), et une suite fondamentale (V_j) de voisinages convexes cerclés de 0 dans E, tels que $u_i(V_j) \subset V_j$ pour tout i,j ? Peut-on même supposer que les $\widehat{E_{V_j}}$ sont des espaces de Hilbert ? Ces questions se posent par exemple pour savoir si les conditions du Chap. II, §4, n°2, th. 14 sont toujours vérifiées si E <u>ou</u> F est nucléaire. Il suffirait en effet que E soit nucléaire, si la réponse à la première de nos questions était affirmative, et que F soit nucléaire si les deux autres questions se résolvaient aussi par l'affirmative.

Signalons à ce propos qu'il reste possible que, <u>quels que soient</u> les espaces E et F, du type $(\mathcal{DF})$ et $(\mathfrak{F})$ respectivement, les conditions a_p, b_p, c_p, d_p, du Chap. II, th. 14 soient équivalentes, et indépendantes de p. Il serait de toutes façons intéressant de donner d'autres cas étendus où il en est ainsi.

5. <u>Problème de décroissance rapide</u>. - Tout espace nucléaire est-il isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique d'un produit topologique $(s)^N$, N ensemble d'indices convenable ? (Voir Chap. II, §2, n°4, prop. 9).

Plus généralement, si E est un espace $(\mathcal{DF})$, toute partie de E d'ordre zéro (voir Chap. II, §1, n°5) est-elle contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'une suite à décroissance rapide ?

6. Divers sur les espaces nucléaires. - Donner des conditions plus générales que dans le Chap. II, §2, th. 7, permettant d'affirmer que le dual d'un espace nucléaire est nucléaire (voir Chap. II, §2, remarque 7). Une question évidemment liée à la précédente est de donner d'autres conditions que celles du Chap. II, §2, th. 9, sous lesquelles un espace $E \overline{\otimes} F$ (E et F nucléaires) est nucléaire. Pour l'une et l'autre question, il serait bon d'avoir au moins un énoncé englobant les espaces $(\mathcal{LF})$ nucléaires.

7. Propriété de Nachbin duale. - Soit E un espace de Banach tel que pour tout espace de Banach F, et tout sous-espace vectoriel fermé G, l'application linéaire canonique de $E \hat{\otimes} G$ dans $E \hat{\otimes} F$ soit un isomorphisme normé, i.e. tel que E possède la propriété de Nachbin [20]. Alors E est-il isomorphe à un espace $\mathcal{L}^1(\mu)$? Voir Chap. I, §2, n°2, th. 2, corollaire 3.

8. Graphe fermé. - Elargir les conditions sur E dans l'énoncé de Introduction, IV, 4, th. B. En particulier, cet énoncé reste-t-il valable si E est un sous-espace vectoriel topologique du produit d'une suite d'espaces $(\mathcal{DF})$, p. ex. l'espace $(\mathcal{D}')$ de L. Schwartz ?

9. Espaces $(\mathcal{LF})$ complets. - Un espace $(\mathcal{LF})$ dont les parties bornées et fermées sont complètes, est-il complet ?

10. Soient E et F deux espaces $(\mathcal{DF})$. Alors $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est-il du type $(\mathcal{DF})$? Du moins, son dual fort est-il du type $(\mathcal{F})$?

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Banach Théorie des opérations linéaires, Varsovie 1932

[2] N. Bourbaki Sur certains espaces vectoriels topologiques (Annales Inst. Fourier, t.2, p. 5-16, 1950)

[3] N. Bourbaki Eléments de Mathématique, Algèbre, Chap.III, Act. Scient. et Ind. 1044, Paris (Hermann)

[4] N. Bourbaki Eléments de Mathématique, Topologie Générale, Chap. IX, Act. Scient. et Ind. 1045, Paris (Hermann)

[5] J. Dieudonné Sur les espaces de Köthe, Journal d'Analyse Mathématique, t.1 (Jérusalem 1951), p. 81-115

[6] J. Dieudonné Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym, Journ. Indian Math. Soc., t. XV, 1951, p. 77-86

[7] J. Dieudonné et L. Schwartz - La dualité dans les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{LF}$), Annales Inst. Fourier, t.1 (1949) p. 61-101

[8] J. Dixmier Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, Annals of Math., t.51 (1950) p. 387-408

[9] A.Grothendieck Sur les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{DF}$), à paraître dans Summa Brasiliensis Mathematicae

[10] A. Grothendieck Sur certains espaces de fonctions holomorphes, à paraître au Journal de Crelle

[11] A.Grothendieck La théorie de Fredholm, à paraître.

[12] A.Grothendieck Sur la complétion du dual d'un espace localement convexe, Comptes rendus, t.230, p. 605-606, 1950

[13] A.Grothendieck Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K), Canad. Journal of Math., t.5, 1953, p. 129-173

[14] A.Grothendieck Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux, Amer. Journ. of Math. t.74 (1952) p.168-186

[15] E.Hille et J.D.Tamarkin - On the characteristic values of Linear Integral Equations, Acta Mathematica t.57 (1931) p.1-76

[16] S. Kakutani Concrete representation of abstract (L)-spaces, Annals of Math. t.42 (1941) p. 523-537

[17] G. Köthe Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume, Math. Zeitschrift, Bd 52 (1950) p.627-630

[18] G. Köthe Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume, Math. Zeitschrift, Bd 51 (1948) p. 316-345

[19] G. Köthe Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume, Math. Nachrichten, Bd. 4 (1950), p. 70-80

[20] L. Nachbin A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. Am. Math. Soc. t. 68 (1950) p. 28-46

[21] R. Schatten A theory of cross-spaces, Princeton University Press, 1950

[22] L. Schwartz Théorie des distributions, tomes 1 et 2, Act. Sc. et Ind. 1091 et 1122, Paris (Hermann)

[23] L. Schwartz Distributions à valeurs vectorielles, (à paraître)

[24] L. Schwartz Théorie des noyaux, Proc. of the Int. Congress of Math. 1950, Vol. 1, p. 220-230

[25] R.S.Philipps On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., t. 48 (1940) p. 516-551

[26] A. Weil L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Act. Sc. et Ind. 869, Paris (Hermann)

[27] A. Zygmund Trigonometrical Series, Varsovie 1935

[28] N.Dunford et J.Pettis - Linear operations on summable functions, Trans. Amer. Math. Soc. t. 47 (1940), p.325-392

[29] A.Dvoretzky - C.A.Rogers - Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, Proc. Nat. Ac. Sc. Vol. 36 (1950) p. 192-197

[30] I.M.Gelfand et M.A.Naimark - Rings with involution, Translations of the Amer. Math. Soc.

RESUME DES RESULTATS ESSENTIELS DANS LA THÉORIE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET DES ESPACES NUCLÉAIRES

par A. GROTHENDIECK.

INTRODUCTION (1)

Sujet. — Cet article est destiné à donner un résumé, sans démonstration, des principaux résultats contenus dans mon travail « Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires » qui sera publié dans les *Mémoirs of the Amer Math. Society* (travail auquel je réfère comme PTT). Dans PTT prédominait le souci d'être exhaustif, tant pour traiter toutes les questions que posaient les sujets traités, que pour ramener les résultats les moins faciles à des théorèmes aussi généraux que possible. Aussi ce travail est-il assez touffu et les idées simples importantes risquent-elles d'être parfois obscurcies par les détails techniques. C'est pourquoi ce résumé expurgé n'est peut-être pas inutile pour donner un aperçu plus facilement assimilable de la théorie. Quelques compléments, intéressants mais non nécessaires pour la compréhension générale de ce résumé, ainsi que parfois des indications sur certaines démonstrations, ont été placés entre des astérisques, comme * ... *.

L'importance des produits tensoriels topologiques se manifeste dans diverses directions :

a) La notion de produit tensoriel topologique est à la base d'une bonne formulation générale et simple de la *théorie de Fredholm*, englobant en plus du cas classique d'un opérateur intégral défini par un noyau continu, beaucoup d'autres opérateurs définis dans les espaces fonctionnels les plus importants (2). Je donnerai ailleurs un développement systématique de cette théorie, qui est seulement effleurée dans ce travail.

b) Les diverses variantes de la notion de produit tensoriel topologique donnent lieu par dualité à la définition d'autant de classes remarquables de formes bilinéaires et d'opérateurs linéaires, dont

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

(2) Une telle formulation de la théorie de Fredholm semble avoir été aperçue pour la première fois par A. Ruston, Direct Product of Banach spaces and linear functional équations, *Proc of the London Math Soc.*, (3), 1, 1951. Mon travail sur ce sujet avait été conçu indépendamment du sien (en automne 1951), et en est assez différent.

l'étude est seulement amorcée dans PTT, chap. I, § 4. En particulier, les techniques exposées à cet endroit, convenablement systématisées et exploitées, permettent d'obtenir des résultats tout à fait inattendus dans la *théorie des transformations linéaires entre des espaces* L^1, L^2 *et* L^∞ et leurs analogues vectoriels-topologiques (résultats qui à l'heure actuelle ne sont pas encore définitifs, et pour cette raison non publiés). Je pense revenir sur ce sujet, et me borne à signaler, dans une voie assez différente, le travail systématique de von Neumann-Schatten sur les classes remarquables d'opérateurs compacts dans un espace de Hilbert [8], chap. 4.

c) Du point de vue du travail actuel, la plus importante application des produits tensoriels topologiques est la théorie des *espaces nucléaires*. On y parvient à expliquer, à généraliser de façon étendue, et à préciser en même temps le fameux « théorème des noyaux » de L. Schwartz, et de plus on trouve des propriétés nouvelles jusque dans les espaces les plus classiques. Ici le calcul tensoriel topologique prend son maximum de simplicité, car la plupart des variantes de la notion de produit tensoriel topologique coïncident, et leurs propriétés par suite s'ajoutent. Pour l'instant, les applications des théorèmes généraux que nous obtenons à des théories particulières ne sont pas encore nombreuses. La plus intéressante semble une variante vectoriel-topologique du « théorème de Künneth », donnant l'homologie d'un complexe défini comme produit tensoriel de deux complexes, variante qui semble utile en Topologie algébrique.

d) De façon générale, il me semble que les notions de produit tensoriel topologique sont tout indiquées pour fournir un *langage* suggestif et maniable, qui a intérêt à être utilisé dans beaucoup de situations en Analyse fonctionnelle, d'autant plus que nous avons à notre disposition des théorèmes (dont certains non triviaux) pour tirer profit de ce langage. J'espère que ce résumé, ou mieux le travail PTT, arrivera à donner au lecteur une impression analogue, avant la publication des articles promis ci-dessus.

Terminologie et notations. — De façon générale nous suivons la terminologie et les notations de [3], sauf que nous appelons *réflexifs* les espaces appelés semi-réflexifs dans [3]. Nous n'envisageons, sauf avis contraire, que des espaces *localement convexes* et *séparés* ; par espace quotient d'un espace E, nous entendons le quotient de E par un sous-espace vectoriel *fermé*. Le *dual* de E, noté E', est supposé sauf avis du contraire muni de la topologie forte (*i. e.* la topologie de la convergence bornée). Le dual de E′, ou *bidual* de E, noté E″, sera muni sauf avis du contraire de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E′, topologie qui induit donc sur E la topologie initiale. Il nous arrivera de faire appel à des notions définies et étudiées dans [6], et notamment à la notion d'espace $(\mathcal{DF})$. Il nous suffira ici de savoir que le dual d'un espace $(\mathcal{F})$ est un espace $(\mathcal{DF})$, que tout espace normé est un espace $(\mathcal{DF})$, enfin que le dual d'un espace $(\mathcal{DF})$ est un espace $(\mathcal{F})$.

Soient E, F, G des espaces localement convexes. $B(E, F; G)$ (resp. $\mathcal{B}(E, F; G)$) désigne l'espace des applications bilinéaires continues (resp. séparément continues, *i. e.* continues par rapport à chaque variable) de $E \times F$ dans G, $L(E; F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F. $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ désigne l'espace des formes bilinéaires séparément continues sur le produit des duals faibles E'_s et F'_s de E et F, muni de la topologie de la *convergence biéquicontinue*, *i. e.* la topologie de la convergence uniforme sur les produits d'une partie équicontinue de E′ par une partie équicontinue de F′. Cet espace est complet si et seulement si les espaces E, F sont complets.

On appelle *application linéaire bornée* (*resp. compacte, resp. faiblement compacte*) de E dans F, toute application linéaire de E dans F transformant un voisinage convenable de O en une partie bornée (resp. relativement compacte. resp. relativement faiblement compacte) de F.

Pour abréger, si E est un espace vectoriel, nous appelons *disque* ou ensemble *disqué* dans E, une partie convexe et cerclée de E([3]). Soit E un espace localement convexe, A un disque borné de E, on désigne par E_A l'espace vectoriel engendré par A, muni de la norme $\|x\|_A = \operatorname{Inf}_{x \in \lambda A} |\lambda|$. Si A est fermé alors la boule unité de E_A est A. Si A est complet, alors E_A est complet. Soit V un voisinage disqué de O dans E, E_V désignera l'espace normé obtenu par passage au quotient à partir de la semi-norme $\|x\|_V = \operatorname{Inf}_{x \in \lambda V} |\lambda|$.

Rappelons qu'un espace localement convexe est dit *quasi-complet* si ses parties fermées et bornées sont complètes, *tonnelé* (resp. *quasi-tonnelé*) si les parties bornées de son dual faible (resp. de son dual fort) sont équicontinues, *bornologique* si tout ensemble de formes linéaires sur E, uniformément bornées sur toute partie bornée, est équicontinue. Si E est quasi-complet, tonnelé équivaut à quasi-tonnelé ; en tout cas bornologique implique quasi-tonnelé.

([3]) Cette terminologie m'a été suggérée par R. E. Edwards.

CHAPITRE PREMIER

PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

1. Généralités sur $E\hat{\otimes}F$ (PTT chap. I, § 1, n° 1 et n° 3). — La définition axiomatique du produit tensoriel algébrique $E \otimes F$ de deux espaces vectoriels E et F, et de l'application bilinéaire canonique $(x, y) \rightarrow x \otimes y$ de $E \times F$ dans $E \otimes F$, [1], pose que pour tout espace vectoriel G, les applications bilinéaires de $E \times F$ dans G correspondent biunivoquement aux applications linéaires f de $E \otimes F$ dans G, lorsqu'à f on fait correspondre l'application $(x, y) \rightarrow f(x \otimes y)$.

THÉORÈME 1. — *Si* E *et* F *sont deux espaces localement convexes, alors on peut munir* $E \otimes F$ *d'une topologie localement convexe et d'une seule, telle que pour tout espace localement convexe* G, *les applications bilinéaires* continues *de* $E \times F$ *dans* G *correspondent exactement aux applications linéaires* continues *de* $E \otimes F$ *dans* G.

Alors les parties *équicontinues* de B(E, F ; G) et de L($E \otimes F$; G) se correspondent aussi exactement. Sauf mention du contraire, $E \otimes F$ sera supposé muni de la topologie précédente, appelée produit tensoriel projectif des topologies de E et F ; muni de cette topologie, $E \otimes F$ prend le nom de *produit tensoriel topologique projectif* de E et F.

Si E et F sont normés, $E \otimes F$ est normable, et on peut même y trouver une norme et une seule telle que, pour tout espace *normé* G, l'isomorphisme ci-dessus entre B(E, F ; G) et L($E \otimes F$; G) conserve les normes naturelles. Cette norme sur $E \otimes F$, notée $u \rightarrow \|u\|_1$ quand les normes de E et F sont sous-entendues, est la borne inférieure des quantités $\sum_i \|x_i\|\|y_i\|$, pour toutes les représentations de u sous la forme $u = \sum_i x_i \otimes y_i$ (norme déjà considérée dans [8]). C'est aussi la jauge de l'ensemble $\Gamma(U \otimes V)$, où U (resp. V) est la boule unité de E (resp. F), et où $U \otimes V$ désigne l'ensemble des $x \otimes y$ avec $x \in U$, $y \in V$

(Γ désignant comme d'habitude l'enveloppe disquée). Dans le cas où E et F sont des espaces localement convexes généraux, un système fondamental de voisinages de O dans $E \otimes F$ est obtenu en prenant les ensembles $\Gamma(U \otimes V)$, ou U (resp. V) parcourt un système fondamental de voinages de O dans E (resp. F).

On peut introduire le complété de $E \otimes F$, noté $E \hat{\otimes} F$, et appelé *produit tensoriel projectif complété* de E et F. Si E et F sont des espaces normés, $E \hat{\otimes} F$ est un espace de Banach (avec une norme bien définie!). Si E et F sont métrisables, $E \hat{\otimes} F$ est du type $(\mathcal{F})$. On a par définition le *Scholie* : Si E et F sont deux espaces localement convexes, G un espace localement convexe *complet*, alors les applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G correspondent biunivoquement aux applications linéaires continues de $E \hat{\otimes} F$ dans G.

Cet énoncé reste valable pour les ensembles équicontinus d'applications. En particulier, le dual de $E \hat{\otimes} F$ est $B(E, F)$, avec correspondance entre les parties équicontinues (ce qui suffit déjà à caractériser la topologie induite sur $E \otimes F$).

J'ignore, si E et F sont du type $(\mathcal{F})$, si cet isomorphisme algébrique du dual de $E \hat{\otimes} F$ sur $B(E, F)$ est un isomorphisme topologique, quand on munit $B(E, F)$ de la topologie de la convergence bibornée, *i. e.* de la convergence uniforme sur les produits de deux bornés (« Problème des topologies »). Question équivalente : Toute partie bornée de $E \hat{\otimes} F$ est-elle contenue dans l'enveloppe disquée fermée d'un ensemble $A \hat{\otimes} B$, où A (resp. B) est une partie bornée de E (resp. F)?

* Donnons quelques indications générales sur le calcul avec $E \hat{\otimes} F$ (PTT, chap. I, § I, n° 3). Si $E = \prod_i E_i$, $F = \prod_j F_j$ (produits vectoriels-topologiques) alors $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à $\prod_{i,j} E_i \hat{\otimes} F_j$. Si $E = \sum_i E_i$ (somme directe topologique) et si F est un espace normable, alors $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à la somme directe topologique $\sum_i (E_i \hat{\otimes} F)$. Cela reste vrai si F est un espace $(\mathcal{DF})$ quelconque, pourvu que I soit dénombrable, et ces énoncés se généralisent aussi au cas où E est la limite inductive (au sens le plus général) d'une famille d'espaces E_i. Si E et F sont tous deux du type $(\mathcal{F})$ (resp. $(\mathcal{DF})$), il en est de même de $E \hat{\otimes} F$. De même, si E et F sont des espaces quasi-normables, ou des espaces de Schwartz (voir définitions dans [6], § 3), il en est de même de $E \hat{\otimes} F$. *

2. L'espace $E \hat{\otimes} F$ quand E et F sont du type $(\mathcal{F})$ (PTT, chap. 1, § 2, N° 1).

THÉORÈME 2. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{F})$. *Alors tout élément de* $E \hat{\otimes} F$ *est la somme d'une série absolument convergente de la forme*

$$u = \sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$$

où (x_i) (*resp.* (y_i)) *est une suite bornée dans* E (*resp.* F), *et* (λ_i) *une suite sommable de scalaires.*

(D'ailleurs, si (x_i), (y_i) et (λ_i) sont donnés comme ci-dessus, la série $\sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$ est toujours absolument convergente dans $E \hat{\otimes} F$, de sorte que nous avons une *caractérisation* des éléments de $E \hat{\otimes} F$.) Si E et F sont normés, on peut supposer ci-dessus que $\|x_i\| \leqslant 1$, $\|y_i\| \leqslant 1$, $\sum_i |\lambda_i| \leqslant \|u\|_1 + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est donné arbitrairement à l'avance. Dans ces deux énoncés, si u parcourt un compact de $E \hat{\otimes} F$, on peut supposer que les suites (x_i) et (y_i) restent fixes (et on peut supposer même que ce sont des suites convergeant vers 0), et que (λ_i) parcourt une partie compacte de l^1 (espace des suite sommables). On a un énoncé analogue pour la représentation concrète des suites convergentes dans $E \hat{\otimes} F$. Le théorème 2 et ses variantes précédentes servent surtout par l'intermédiaire du

COROLLAIRE. — *Soient* E *et* F *deux espaces du type* $(\mathcal{F})$. *Toute partie compacte* K *de* $E \hat{\otimes} F$ *est contenue dans l'image canonique de la boule unité d'un espace* $E_A \hat{\otimes} F_B$, *où* A (*resp.* B) *est une partie compacte disquée de* E (*resp.* F). *A fortiori,* K *est contenu dans l'enveloppe convexe fermée de* $A \otimes B$.

Ce dernier fait signifie aussi que sur $B(E, F)$, la topologie de la « convergence bicompacte » est identique à la topologie de la convergence compacte dans le dual de $E \hat{\otimes} F$.

* Pour la preuve du théorème 2, supposons pour simplifier que E et F sont des espaces de Banach, soit I le produit de leurs boules unité, soient $i \to x_i$ et $i \to y_i$ les projections de I sur les ensembles facteurs. Il est facile de voir que l'application linéaire $(\lambda_i) \to \sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$ de $l^1(I)$ dans $E \hat{\otimes} F$ est un homomorphisme métrique du premier espace sur un sous-espace dense du second, donc en fait *sur* le second, d'où résulte bien que $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à un espace quotient de $l^1(I)$.

On peut tirer du th. 2 des résultats du genre suivant : soit $\mathcal{G}$ un groupe localement compact (resp. un groupe de Lie), alors toute fonction f sommable (resp. indéf. diff. et à support compact) sur $\mathcal{G}$ est de la forme $\Sigma\lambda_i g_i * h_i$, où $(\lambda_i) \in l^1$, et où (g_i) et (h_i) sont des suites bornées dans $L^1(\mathcal{G})$ (resp. dans $\mathcal{D}(\mathcal{G})$, espace des fonctions ind. diff. à support compact sur $\mathcal{G}$); on en conclut aussitôt que f est combinaison linéaire de fonctions de type positif qui sont $\in L^1(\mathcal{G})$ (resp. $\mathcal{D}(\mathcal{G})$). Dans le premier cas, on peut aussi se borner à des fonctions qui soient toutes à support compact (les supports de g_i, h_i étant contenus dans un compact ne dépendant que du support compact de f). Il y a une démonstration directe simple dans le cas de $L^1(\mathcal{G})$, mais je ne pense pas qu'il y en ait pour $\mathcal{D}(\mathcal{G})$, où la question présente des difficultés même pour $\mathcal{G} = R$ (en se servant alors de la transformation de Fourier). $_*$

3. **Calcul de $L^1 \widehat{\otimes} E$** (PTT, chap. I, § 2, N° 2). — Soit M un espace localement compact muni d'une mesure $\mu \geqslant 0$, soit E un espace de Banach, soit $L^1_E(\mu)$ l'espace des applications μ-intégrables de M dans E [2], muni de sa norme usuelle $\|f\|_1 = \int \|f(t)\| \, d\mu(t)$. $L^1(\mu)$ désigne l'espace des fonctions scalaires sommables pour μ. Alors il existe une application bilinéaire $(\varphi, a) \to \varphi \cdot a$ évidente de $L^1(\mu) \times E$ dans $L^1_E(\mu)$, qui est de norme $\leqslant 1$, et définit donc une application linéaire de norme $\leqslant 1$ de $L^1(\mu) \widehat{\otimes} E$ dans $L^1_E(\mu)$.

THÉORÈME 3. — *L'application précédente de* $L^1(\mu) \widehat{\otimes} E$ *dans* $L^1_E(\mu)$ *est un isomorphisme métrique du premier espace sur le second.*

Pour le voir, on se ramène aussitôt au cas où E est de dimension finie, puis on procède par transposition. Il suffit alors d'appliquer le théorème classique de Dunford-Pettis, caractérisant les applications linéaires continues de $L^1(\mu)$ dans E'.

Si E est un espace localement convexe quelconque, on désigne par $L^1_E(\mu)$ l'espace complété de l'espace séparé associé à l'espace des applications continues à support compact de M dans E, muni de la famille des semi-normes $f \to \int p(f(t)) \, d\mu(t)$ (où p parcourt une famille fondamentale de semi-normes continues dans E). Alors le théorème 3 implique facilement que $L^1_E(\mu)$ soit encore isomorphe à $L^1(\mu) \widehat{\otimes} E$.

COROLLAIRE. — *Si* E *est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Banach* F, *alors l'application linéaire canonique de* $L^1(\mu) \widehat{\otimes} E$ *dans* $L^1(\mu) \widehat{\otimes} F$ *est un isomorphisme métrique.*

Cela redonne par exemple le fait bien connu que toute application linéaire continue de E dans le dual $L^\infty(\mu)$ de $L^1(\mu)$ peut se prolonger en une application linéaire de même norme de F dans $L^\infty(\mu)$; ou dualement, que toute application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans un espace quotient F'/E^0 d'un dual de Banach par un sous-espace vectoriel faiblement fermé, provient d'une application linéaire de norme égale de $L^1(\mu)$ dans F'.

* L'analogue du théorème 3 pour les espaces L^p est faux pour tout $p > 1$. Le théorème 3 s'applique de façon essentielle à divers endroits importants de la théorie exposée ici. Donnons quelques applications moins importantes (voir PTT, chap. 1, § 2, n° 2 pour des détails). Prenant, dans le théorème 3, $E = c_0$, espace des suites scalaires qui tendent vers O, et notant que $L^1_E(\mu)$ s'identifie alors à l'espace des suites latticiellement bornées dans $L^1(\mu)$ qui tendent vers O presque partout, on voit que de telles suites dans $L^1(\mu)$ forment une catégorie de suites invariante au point de vue vectoriel-topologique. En particulier, une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans un espace $L^1(\nu)$ transforme les suites latticiellement bornées convergeant presque partout vers O, en des suites de même type. On en déduit aussi que les parties latticiellement bornées de $L^1(\mu)$ forment une catégorie invariante au point de vue vectoriel-topologique. Prenant $F = l^p$, avec $1 \leqslant p < +\infty$, on obtient de même une interprétation vectorielle-topologique des suites (f_i) dans $L^1(\mu)$ telles que

$$\int \Big(\sum_i |f_i(t)|^p\Big)^{1/p} d\mu(t) < +\infty.$$

De telles suites sont transformées en des suites de même type par toute application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans un espace $L^1(\nu)$. Une autre application intéressante du théorème 3 est la suivante : Toute partie bornée M de $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ est contenue dans l'image canonique de la boule unité d'un espace $L^1(\mu) \hat{\otimes} E_A$, où A est un disque borné fermé de l'espace E du type $(\mathcal{F})$; à fortiori M est contenue dans l'enveloppe disquée fermée de $B \otimes A$, où B est la boule unité de $L^1(\mu)$, ce qui résoud ici le « Problème des topologies » signalé au n° 1. *

4. **Autres exemples.** — Si H est un espace de Hilbert, les éléments de $H' \hat{\otimes} H$, identifiés à des endomorphismes de H (les *applications de Fredholm* ou *applications nucléaires* de H dans H — voir n° 7 —) sont exactement les endomorphismes u tels que l'opérateur hermitien

positif $\sqrt{u^* u}$ soit compact et ait une suite de valeurs propres sommable. et $\|u\|_1$ est alors égal à la somme des valeurs propres de $\sqrt{u^* u}$ (répétées bien entendu chacune selon sa multiplicité). On obtient les opérateurs déjà étudiés dans [4] et [8]. u est aussi un opérateur de Fredholm si et seulement si ses composantes hermitiennes $\frac{1}{2}(u + u^*)$ et $\frac{1}{2i}(u - u^*)$ le sont, *i. e.* si ce sont des hermitiens compacts dont la suite des valeurs propres est sommable. *Relation avec les opérateurs de Hilbert-Schmidt : Si* A *et* B *sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt, alors* AB *est un opérateur de Fredholm, et* $\|AB\|_1 \leqslant \|A\|_2 \|B\|_2$; et réciproquement, d'ailleurs, tout opérateur de Fredholm u est le produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt A et B de norme $\|A\|_2 = \|B\|_2 = \sqrt{\|u\|_1}$. Tous ces faits sont élémentaires (une fois connue la décomposition spectrale des opérateurs hermitiens compacts dans un espace de Hilbert) et bien connus.

De nombreux autres exemples de produits $E \hat{\otimes} F$, relatifs aux *espaces nucléaires*. seront vus au chapitre II, n° 5.

★ Dans le cadre des espaces de Banach de dimension infinie, je ne connais pas, même dans des cas particuliers, d'autres caractérisations concrètes des éléments de $E \hat{\otimes} F$ que celles que nous avons données. Ainsi, les éléments de $c_0 \hat{\otimes} E$ (où E pourra être un espace localement convexe complet quelconque) s'identifient à *certaines* suites dans E tendant vers O, que l'on pourra appeler les suites *nucléairement convergentes* vers O ; mais si E est un espace de Banach de dimension infinie, on obtient toujours là une classe strictement plus petite que la classe de toutes les suites convergentes vers O (voir chap. II, n° 2, th. 2). On montre même que (si E est un espace de Banach de dimension infinie), pour toute suite (λ_i) de scalaires positifs qui n'est pas de carré sommable, il existe dans E une suite (x_i) qui ne converge pas nucléairement vers O, et telle que $\|x_i\| = \lambda_i$ pour tout i. Cependant. si E est l'espace C(K) des fonctions continues sur un espace compact par exemple, on montre que toute suite de carré sommable dans C(K) converge nucléairement vers O. Signalons aussi que dans un espace localement convexe complet quelconque, toute suite sommable converge nucléairement vers O. ★

5. Espaces $E \check{\otimes} F$ (PTT, chap. I, § 3, N° 3). — Si E et F sont deux espaces de Banach, alors $E \otimes F$ peut être considéré comme un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach B(E'. F') des formes biliné-

aires continues sur $E' \times F'$. Le complété de $E \otimes F$ pour la norme induite par $B(E', F')$ se note $E \hat{\hat{\otimes}} F$, c'est donc un sous-espace vectoriel normé complet de $B(E', F')$. Toute topologie normée raisonnable sur $E \otimes F$ est comprise entre la topologie induite par $E \hat{\otimes} F$ et celle induite par $E \hat{\hat{\otimes}} F$. Si maintenant E et F sont deux espaces localement convexes quelconques, on peut encore considérer $E \otimes F$ comme un espace de formes bilinéaires sur $E' \times F'$, et le munir de la topologie de la convergence biéquicontinue (i. e. la topologie de la convergence uniforme sur les produits d'une partie équicontinue de E' par une partie équicontinue de F') : le complété de $E \otimes F$ pour cette topologie sera encore noté $E \hat{\hat{\otimes}} F$. Quand E et F sont complets, l'espace $\mathfrak{L}_e(E'_s, F'_s)$ des formes bilinéaires séparément continues sur le produit $E'_s \times F'_s$ des duals faible E'_s et F'_s, muni de la topologie de la convergence biéquicontinue, est complet, donc $E \hat{\hat{\otimes}} F$ s'identifie alors à un sous-espace vectoriel topologique de $\mathfrak{L}_e(E'_s, F'_s)$. Alors les éléments de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ s'identifient donc à certaines applications bilinéaires séparément faiblement continues sur $E' \times F'$, ou encore à certaines applications linéaires faiblement continues de E' dans F ; ces applications linéaires transforment les parties équicontinues de E' en des parties relativement compactes de F, et la réciproque est vraie dans tous les cas connus (voir Appendice 2, Chapitre 1).

La topologie sur $E \otimes F$ induite par $E \hat{\otimes} F$ est plus fine que celle induite par $E \hat{\hat{\otimes}} F$, d'où une application linéaire continue canonique

$$E \hat{\otimes} F \to E \hat{\hat{\otimes}} F.$$

Un important problème, non résolu, est si cette application est toujours biunivoque, voir Appendice 2. Signalons qu'il semble extrêmement plausible que si E et F sont deux espaces de Banach tels que l'application précédente $E \hat{\otimes} F \to E \hat{\hat{\otimes}} F$ soit un isomorphisme topologique (ou même seulement un homomorphisme topologique, *i. e.* ici une application du premier espace *sur* le second), alors E ou F est de dimension finie. C'est vrai par exemple si E contient un sous-espace vectoriel isomorphe à un espace l^p ou à c_0.

Soient E et F deux espaces de Banach. La norme induite par le dual de $E \hat{\otimes} F$ sur $E' \otimes F'$ est évidemment la norme induite par $E' \hat{\hat{\otimes}} F'$. D'autre part la norme induite sur $E' \otimes F'$ par le dual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est dans tous les cas connus (voir Appendice 2) identique à la norme induite par $E' \hat{\otimes} F'$. Cette dualité, qui n'apparaît guère dans le présent résumé, est un outil précieux dans diverses questions (p. ex.

PTT, chap. I, § 4, N° 6). Le théorème qui suit, à vrai dire trivial, peut être regardé comme la contre-partie duale du th. 3 :

THÉORÈME 4. — *Soit* M *un espace localement compact,* $C_0(M)$ *l'espace des fonctions scalaires continues sur* M « *nulles à l'infini* », *muni de la norme de la convergence uniforme, soit* E *un espace localement convexe complet. Alors* $C_0(M)\widehat{\otimes} E$ *est canoniquement isomorphe à l'espace* $C_0(M, E)$ *des applications continues de* M *dans* E *qui sont nulles à l'infini, muni de la topologie de la convergence uniforme (et de la norme uniforme quand* E *est un espace de Banach). En particulier,* $c_0 \widehat{\widehat{\otimes}} E$ *est isomorphe à l'espace des suites dans* E *qui tendent vers* O.

Comme plus bas les espaces $C(K)\widehat{\otimes} E$, ici les espaces $L^1(\mu)\widehat{\widehat{\otimes}} E$ n'ont en général pas d'interprétation spéciale simple comme espaces fonctionnels. Signalons cependant que *l'espace* $l^1 \widehat{\widehat{\otimes}} E$ *peut s'interpréter comme l'espace des suites sommables dans* E (i. e. des suites « commutativement convergentes » dans E).

6. **Produit tensoriel d'applications linéaires** (PTT, chap. I, § I, N° 2). — Soient E_i, F_i $(i = 1, 2)$ des espaces localement convexes, soit u_i une application linéaire continue de E_i dans F_i. Alors on définit en algèbre une application linéaire $u_1 \otimes u_2$ de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$, par la formule $(u_1 \otimes u_2).(x_1 \otimes x_2) = u_1x_1 \otimes u_2x_2$. Cette application est continue quand on munit $E_1 \otimes E_2$ et $F_1 \otimes F_2$ des topologies induites par $E_1 \widehat{\otimes} E_2$ et $F_1 \widehat{\otimes} F_2$ (resp. par $E_1 \widehat{\widehat{\otimes}} E_2$ et $F_1 \widehat{\widehat{\otimes}} F_2$). Il en résulte que $u_1 \otimes u_2$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue $u_1 \widehat{\otimes} u_2$ de $E_1 \widehat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \widehat{\otimes} F_2$, et une application linéaire continue $u_1 \widehat{\widehat{\otimes}} u_2$ de $E_1 \widehat{\widehat{\otimes}} E_2$ dans $F_1 \widehat{\widehat{\otimes}} F_2$ (ces applications seront encore simplement notées $u_1 \otimes u_2$ quand il n'y a pas de confusion à craindre).

THÉORÈME 5. — *Si chaque* u_i *est un homomorphisme topologique de* E_i *sur un sous-espace dense de* F_i, *alors* $u_1 \widehat{\otimes} u_2$ *est un homomorphisme topologique de* $E_1 \widehat{\otimes} E_2$ *sur un sous-espace dense de* $F_1 \widehat{\otimes} F_2$. *Si chaque* u_i *est un isomorphisme topologique de* E_i *dans* F_i, *alors* $u_1 \widehat{\widehat{\otimes}} u_2$ *est un isomomorphisme topologique de* $E_1 \widehat{\widehat{\otimes}} E_2$ *dans* $F_1 \widehat{\otimes} F_2$.

Ces énoncés subsistent si les E_i, F_i sont normés et s'il s'agit d'homomorphismes et isomorphismes *métriques*. Particulièrement intéressant est le corollaire suivant, qui pourrait aussi s'obtenir par application du th. 2 :

COROLLAIRE. — *Si les* E_i, F_i *sont des espaces* $(\mathcal{F})$ $(i = 1, 2)$, u_i *un* *homomorphisme de* E_i sur F_i, *alors* $u_1 \widehat{\otimes} u_2$ *est un homomorphisme de* $E_1 \widehat{\otimes} E_2$ sur $F_1 \widehat{\otimes} F_2$.

Comme cas particuliers de ce corollaire, on obtient des propriétés intéressantes de relèvement de fonctions vectorielles à valeurs dans un espace quotient d'un espace E du type $(\mathcal{F})$. Si p. ex. f est une application indéfiniment différentiable d'un ouvert de R^n dans E/F, alors elle provient d'une application indéfiniment différentiable de cet ouvert dans E. Résultat analogue pour les fonctions holomorphes, ou les fonctions sur R^n indéfiniment différentiables à décroissance rapide, ou les fonctions sommables pour une certaine mesure, etc. (*). Autre application : soit D un opérateur différentiel dans l'espace $\mathcal{E}(U)$ des fonctions indéfiniment différentiables dans un ouvert U de R^n, soit E un espace $(\mathcal{F})$, soit $\mathcal{E}(U, E)$ l'espace des applications indéfiniment différentiables de U dans E. On a $\mathcal{E}(U, E) = \mathcal{E}(U) \otimes E = \mathcal{E}(U) \widehat{\widehat{\otimes}} E$ (voir Chap. 2, N° 5). Soit D_E l'opérateur défini dans $\mathcal{E}(U, E)$ à partir de D, on a $D_E = D \widehat{\otimes} I$, I étant l'identité dans E. Si alors D est un homomorphisme topologique (resp. un homomorphisme topologique *sur*), il en est de même de D_E. En effet, dans le cas d'un homomorphisme sur, c'est là un cas particulier du corollaire du th. 5, et dans le cas général, on utilise le th. 5 et le fait que pour tout espace quotient F de $\mathcal{E}(U)$, on a $F \widehat{\otimes} E = F \widehat{\widehat{\otimes}} E$ ($\mathcal{E}(U)$ donc F étant nucléaire, voir Chap. 2, N° 2 définition 1 et Chap. 2, N° 3, th. 3, 2°).

On notera que si u_1 et u_2 sont des isomorphismes topologiques, alors $u_1 \widehat{\otimes} u_2$ n'est pas un isomorphisme topologique en général (ni $u_1 \widehat{\widehat{\otimes}} u_2$ un homomorphisme topologique, en général, quand u_1 et u_2 sont des homomorphismes topologiques *sur*). Si chaque E_i est identifié à un sous-espace vectoriel topologique de F_i par u_i, alors l'application canonique $u_1 \widehat{\otimes} u_2$ de $E_1 \widehat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \widehat{\otimes} F_2$ est un isomorphisme topologique si et seulement si tout ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des restrictions d'un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $F_1 \times F_2$. Quand F_1

(*) Signalons à ce propos qu'on démontre par une méthode toute différente l'assertion suivante, qui peut être regardée comme duale du corollaire du th. 3 : Soit M un espace localement compact et paracompact (p. ex. un espace compact), f une application continue de M dans un espace quotient E/F d'un espace E du type $(\mathcal{F})$: alors f provient d'une application continue de M dans E. Comme l'espace $\mathcal{E}^{(m)}(V)$ des fonctions m fois continûment différentiables sur une variété indéfiniment différentiable paracompacte V, est isomorphe à un facteur direct d'un espace du type C(M) (comme je l'ai signalé dans : Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K), *Can. J. Math.* 5, p. 144 (1953)), il en résulte que le théorème de relèvement analogue vaut aussi pour les applications m fois continûment différentiables de V dans E/F.

et F_2 sont du type ($\mathcal{F}$), il suffit d'ailleurs de considérer les ensembles réduits à *une* forme bilinéaire. En général ce critère ne sera pas vérifié, mais est lié à un problème d'existence de supplémentaires topologiques.

* De façon précise, si E_1 et E_2 sont facteurs directs, alors $E_1 \hat{\otimes} E_2$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de $F_1 \hat{\otimes} F_2$. D'autre part, si E est un sous-espace vectoriel topologique de l'espace de Banach F, et si l'application canonique $E \hat{\otimes} G \rightarrow F \hat{\otimes} G$ est un isomorphisme topologique quand $G = F'$, alors E'' est facteur direct dans F''; donc dans le cas fréquent où E est déjà facteur direct dans E'', E sera facteur direct de F.

Un cas utile où le produit tensoriel $u \hat{\otimes} v$ de deux isomorphismes topologiques est un isomorphisme topologique est le suivant : Si E'' est le bidual de E, alors $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique (resp. un sous-espace vectoriel normé si E et F sont normés) de $E'' \hat{\otimes} F$. *

7. Applications nucléaires (PTT, chap. I, § 3 N° 2). — Soient E et F deux espaces de Banach. L'application bilinéaire continue $(x', y) \rightarrow x' \otimes y$ de $E' \times F$ dans $L(E, F)$ définit une application linéaire continue naturelle de $E' \hat{\otimes} F$ dans $L(E, F)$; les éléments de l'image de $E' \hat{\otimes} F$ dans $L(E, F)$ sont dits *applications nucléaires* de E dans F. (On définit aussi, entre espaces localement convexes quelconques, les notions *d'application à trace* et *d'application de Fredholm* — voir Appendice I — , qui coïncident avec la notion d'application nucléaire quand E et F sont des espaces de Banach : dans ce dernier cas, on pourra donc parler indifféremment d'applications nucléaires, d'applications à trace ou d'applications de Fredholm.) Les applications nucléaires de E dans F forment un espace vectoriel, qui s'identifie à un espace quotient de $E' \hat{\otimes} F$ (et à $E' \otimes F$ dans tous les cas connus — voir « Problème de biunivocité » au N° 1). La norme quotient, notée encore $u \rightarrow \|u\|_1$, est appellée *norme-trace* de l'opérateur nucléaire u.

Si E et F sont deux espaces localement convexes quelconques, une application linéaire u de E dans F est dite *nucléaire*, si elle est la composée d'une séquence de trois opérateurs

$$E \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\beta} F_1 \xrightarrow{\gamma} F$$

où E_1 et F_1 sont des espaces de Banach, β une application nucléaire de E_1 dans F_1, et α et γ des applications linéaires continues. Il revient au même de dire qu'il existe une partie équicontinue disquée faiblement fermée A de E', et une partie bornée disquée B dans F telle que F_B soit complet, enfin un $u_0 \in E'_A \widehat{\otimes} F_B$, tels que u soit l'opérateur de E dans F défini par u_0 (à priori, u_0 définit une application nucléaire de $\widehat{E}_{A^0}$ dans F_B). *Une application nucléaire est toujours compacte* (*i. e.* transforme un voisinage convenable de O en un ensemble relativement compact). Mieux : à cause du corollaire du théorème 2, on peut supposer ci-dessus que A resp. B sont des parties *compactes* de E' fort resp. F. Le théorème 2, appliqué directement, donne aussi : les applications nucléaires de E dans F sont les applications qui sont sommes des séries (toujours absolument convergentes dans L (E, F) muni de la topologie de la convergence bornée) $u = \Sigma \lambda_i x'_i \otimes y_i$, où (x'_i) est une suite équicontinue dans E', (y_i) une suite extraite d'un disque compact de F, enfin (λ_i) une suite sommable de scalaires. En composant une application nucléaire, à droite ou à gauche, avec une application linéaire continue, on obtient encore une application nucléaire. La transposée d'une application nucléaire de E dans F est une application nucléaire de F' fort dans E' fort (et même de F' muni de la convergence uniforme sur les disques compacts de F, dans E' fort).

Les applications nucléaires de E dans lui-même (plus précisément la catégorie un peu plus large des applications de Fredholm de E dans E), forment le domaine naturel de la *théorie de Fredholm*. Ici, notre intérêt se porte sur d'autres propriétés de ces opérateurs, résultant directement soit du th. 2, soit du th. 5, corollaire.

THÉORÈME 6. — *Soient* E, G *deux espaces localement convexes.* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors :*

a) *Toute application nucléaire de* F *dans* G *est la restriction d'une application nucléaire de* E *dans* G.

b) *Supposons que* F *soit fermé, et que tout disque compact de* E/F *soit contenu dans l'image canonique d'un disque borné* A *de* E *tel que* E_A *soit complet* (*par exemple d'un disque borné* complet *de* E). (*Il suffit par exemple que* E *soit du type* ($\mathcal{F}$), *ou que ce soit le dual d'un espace du type* ($\mathcal{F}$) *et que* F *soit* faiblement *fermé.*) *Alors toute application nucléaire de* G *dans* E/F *peut s'obtenir par passage au quotient à partir d'une application nucléaire de* G *dans* E.

On a des énoncés analogues pour les ensembles « équinucléaires » d'applications, si on entend par là un ensemble d'applications d'un espace localement convexe M dans un autre N, contenu dans l'ensemble d'applications défini par la boule unité d'un espace $M'_A \hat{\otimes} N_B$, où A est un disque équicontinu faiblement fermé de M', B un disque borné dans N tel que N_B soit complet.

On fera attention que si u est une application nucléaire de E dans F, M un sous-espace vectoriel fermé de E contenu dans le noyau du u, N un sous-espace vectoriel fermé de F contenant $u(E)$, alors en général l'application linéaire de E/M dans F ou de E dans N définie par u *n'est pas nucléaire*, même si E et F sont des espaces de Banach réflexifs. Cependant, si M (resp. N) admet un supplémentaire topologique, alors l'application de E/M dans F (resp. de E dans N) définie par u sera encore nucléaire. Il en est en particulier ainsi si E (resp. F) est un espace de Hilbert.

8. Applications linéaires intégrales, formes bilinéaires intégrales (PTT, § 4, N° 3 et N° 4).

THÉORÈME 7. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes* (*resp. normés*), v *une forme bilinéaire séparément continue sur* $E \times F$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $u \to \langle u, v \rangle$ *est une forme linéaire sur* $E \otimes F$ *continue pour la topologie induite par* $E \hat{\hat{\otimes}} F$ (*resp.* $u \to \langle u, v \rangle$ *est une forme linéaire sur* $E \otimes F$ *de norme* $\leqslant 1$, *quand* $E \otimes F$ *est muni de la norme induite par* $E \hat{\hat{\otimes}} F$).

b) v *est contenue dans l'enveloppe disquée fermée dans* $\mathcal{B}_s(E, F)$ (*espace* $\mathcal{B}(E, F)$ *muni de la topologie de la convergence simple*) *d'un ensemble* $M \otimes N$, *où* M *est une partie équicontinue de* E', N *une partie équicontinue de* F' (*resp.* M *la boule unité de* E', N *la boule unité de* F').

c) *Il existe une mesure* μ *sur l'espace produit d'une partie équicontinue faiblement compacte* M *de* E' *par une partie équicontinue faiblement compacte* N *de* F' (*resp. une mesure* μ *de norme* $\leqslant 1$ *sur le produit de la boule unité de* E' *par la boule unité de* F', *muni du produit des topologies faibles*) *telle que l'on ait la formule*

$$v = \int_{M \times N} x' \otimes y' \, d\mu(x', y')$$

(*intégrale faible dans* $\mathcal{B}(E, F)$, *mis en dualité avec* $E \otimes F$).

d) *Il existe un espace compact muni d'une mesure positive* μ *de norme* $\leqslant 1$, *une application linéaire continue* α *de* E *dans* $L^\infty(\mu)$ *et une application linéaire continue* β *de* F *dans* $L^\infty(\mu)$ (*resp. et* α *et* β

de norme $\leqslant 1$), *tels que l'on ait* $u(x, y) = \langle \alpha x, \beta y \rangle$ *pour* $x \in E$, $y \in E$.

Une forme bilinéaire sur $E \times F$ est dite *intégrale* si elle satisfait aux conditions équivalentes *a*) à *d*) du théorème 7. En particulier, le dual de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à l'espace $J(E, F)$ des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$. Si E et F sont des espaces de Banach, $J(E, F)$ sera muni de la norme du dual de l'espace de Banach $E \check{\otimes} F$, appelée *norme intégrale* et notée $\|v\|'_1$. De même, une application linéaire v d'un espace localement convexe E dans un autre G est dite *intégrale*, si la forme bilinéaire sur $E \times G'$ qui lui correspond est intégrale.

Si E et G sont des espaces de Banach, on appelle encore norme intégrale de v, la norme intégrale de la forme bilinéaire qui lui correspond.

Rappelons que dans tous les cas connus, quand E et F sont des espaces de Banach, l'application linéaire naturelle de $E' \hat{\otimes} F'$ dans $J(E, F)$ est un isomorphisme métrique du premier espace dans le second (voir n° 5), c'est pourquoi nous employons pour la norme intégrale la notation $\|v\|'_1$ voisine de la notation $\|v\|_1$, pour la norme-trace. Le critère *d*) du th. 7 prend pour les applications linéaires intégrales la forme suivante (que nous énonçons pour les espaces de Banach pour fixer les idées) : Soit v une application linéaire d'un espace de Banach E dans un autre F, alors v est intégrale et de norme intégrale $\leqslant 1$ si et seulement si l'application de E dans F'' qu'elle définit peut s'obtenir en composant une application linéaire de norme $\leqslant 1$ de E dans un espace $L^\infty(\mu)$ construit sur une mesure positive convenable de norme $\leqslant 1$ sur un espace compact, l'application identique de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\mu)$, et enfin une application linéaire de norme $\leqslant 1$ de $L^1(\mu)$ dans F''. De même, le critère *b*) du th. 7 donne facilement : l'application linéaire v de E dans F est intégrale et de norme intégrale $\leqslant 1$ si et seulement si elle est adhérente dans $L_s(E, F_s)$ à l'enveloppe disquée de l'ensemble des $x' \otimes y$, où x' (resp. y) parcourt la boule unité de E' (resp. de F) ; ou encore si elle est adhérente à l'ensemble des opérateurs nucléaires de norme-trace $\leqslant 1$ (F_s désigne F muni de la topologie faible, et $L_s(E, F_s)$ désigne $L(E, F_s)$ muni de la convergence simple).

Exemples. — Soient E et F des espaces localement convexes quelconques, alors toute forme bilinéaire sur $E \times F$ définie par un élément d'un espace $E'_A \hat{\otimes} F'_B$, où A (resp. B) est une partie équicontinue disquée faiblement fermée de E' (resp. F'), est intégrale. Donc toute application nucléaire de E dans F est intégrale. La réciproque est fausse même pour les espaces de Banach, puisque l'application identique de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\mu)$ est intégrale, mais n'est en général pas même compacte. Si $E = C(M)$, $F = C(N)$, espace des fonctions scalaires continues sur l'espace compact M resp. N, on a vu (N° 5, th. 4) que $C(M) \hat{\otimes} C(N)$ s'identifie avec sa norme à l'espace $C(M \times N)$, donc l'espace des formes bilinéaires intégrales sur $C(M) \times C(N)$ s'identifie avec sa norme à l'espace des mesures de Radon sur l'espace compact $M \times N$. D'autres exemples seront vus au N° 9.

En composant à gauche ou à droite une application linéaire intégrale avec une application linéaire continue, on obtient encore une application linéaire intégrale. La transposée d'une application intégrale de E dans F est une application intégrale de F′ fort dans E′ fort.

Utilisant par exemple le critère *a*) du th. 7, on trouve que si E_1 et E_2 sont des espaces localement convexes, F_1 (resp. F_2) un sous-espace vectoriel topologique de E_1 (resp. E_2), alors toute forme bilinéaire intégrale sur $F_1 \times F_2$ peut se prolonger en une forme bilinéaire intégrale sur $E_1 \times E_2$, de norme intégrale égale si E_1 et E_2 sont normés (comparer th. 6). Les propriétés les plus importantes des supposés applications intégrales sont résumées dans le

THÉORÈME 8. — *Soit u une application linéaire intégrale d'un espace localement convexe* E *dans un autre* F.

1° *Si* F *est quasi complet, alors u est faiblement compacte, et transforme les parties faiblement compactes de* E *en des parties compactes de* F. *Si v est une application linéaire de* F *dans un espace localement convexe* G, *transformant les parties bornées en des parties faiblement relativement compactes alors* $v \circ u$ *est une application compacte.*

2° *Soit v une application linéaire de* F *dans un espace* G *du type* ($\mathcal{F}$), *transformant les parties bornées en des parties faiblement relativement compactes (resp. une application linéaire d'un espace* G *du type* ($\mathcal{DF}$) *dans* E, *transformant les parties bornées en des parties faiblement relativement compactes de* E). *Alors* $v \circ u$ (*resp.* $u \circ v$) *est une application* nucléaire *de* E *dans* G (*resp. de* G *dans* F″). *Si* E, F, G *sont des espaces de Banach, on a* $\|v \circ u\|_1 \leqslant \|v\| \, \|u\|^1$.

COROLLAIRE 1. — *L'application composée de deux applications intégrales est nucléaire.*

Autres corollaires : Une application intégrale de E dans F est nucléaire si F est un espace ($\mathcal{F}$) réflexif, et c'est une application nucléaire de E dans F'' si E est un espace $(\mathcal{DF})$ réflexif. Une application intégrale de E dans F transforme les suites sommables en des suites absolument sommables, les suites faiblement convergentes en des suites nuclairement convergentes (voir fin du n° 4).

* Ainsi, considérant la circonférence unité T du plan complexe, muni de sa mesure de Haar μ, supposons que la suite (a_n) sur l'ensemble Z des entiers soit telle que $(\varepsilon_n a_n)$ soit la suite des coefficients d'une fonction $\in L^\infty(\mu)$, quelle que soit la suite (ε_n) de nombres égaux à $+1$ ou -1 : alors on voit facilement que la suite des $a_n z^n \in L^1(\mu)$ est sommable, donc c'est une suite absolument sommable dans $L^1(\mu)$, d'où aussitôt $(a_n) \in l^1$. On a obtenu un analogue d'un théorème bien connu de Littlewood (dans lequel L^∞ est remplacé par L^1, et l^1 par l^2). Signalons que le théorème de Littlewood peut être obtenu de la même façon, comme conséquence du théorème suivant, de portée bien plus générale (et qui sera publié ultérieurement ainsi que diverses conséqucnces) : Toute suite sommable dans un espace $L^1(\mu)$ (construit sur une mesure quelconque) a une suite de normes qui est de carré sommable (et même, appartient à $l^2 \widehat{\otimes} L^1(\mu)$; c'est le théorème dual de celui, signalé à la fin du n° 4, affirmant que toute suite de carré sommable dans un espace du type C(K) — et même toute suite appartenant à $l^2 \otimes C(K)$ — est nucléairement convergente vers 0).

Donnons quelques indications sur la preuve du théorème 8, qui s'appuie essentiellement sur le critère *d*) du théorème 7. Que *u* soit une application faiblement compacte résulte aussitôt du fait qu'il en est de même de l'application identique de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\mu)$. Les autres assertions du théorème résultent facilement de la seconde partie, qui est plus difficile. On est ramené à prouver que toute application linéaire faiblement compacte de $L^1(\mu)$ dans un espace G du type $(\mathcal{F})$ induit une application nucléaire de $L^\infty(\mu)$ dans G, donc (th. 3) provient d'une $f \in L^1_G(\mu)$. Or un théorème de Dunford-Pettis-Philipps nous apprend qu'une telle application est même donnée par une application *fortement mesurable et bornée f* de M dans G. Notons que le corollaire 1, qui est important à cause de son application dans la théorie des espaces nucléaires, admet une démonstration directe plus simple : on est ramené à montrer que si μ et ν sont des mesures sur des compacts M et N, une application linéaire continue *u* de $L^1(\mu)$ dans $L^\infty(\nu)$ définit une application *nucléaire* de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\nu)$. Or *u* s'identifie à une forme linéaire continue sur $L^1(\mu) \widehat{\otimes} L^1(\nu)$, espace isomorphe à $L^1(\mu \otimes \nu)$ (th. 3), donc *u* est définie par une fonction mesurable et bornée f sur $M \times N$, qui s'identifie à fortiori à un élément de $L^1(\mu\otimes\nu) = L^1(\mu)\hat{\otimes} L^1(\nu)$. Ce dernier élément définit bien une application nucléaire de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\nu)$, qui d'ailleurs n'est autre que l'application induite par u. c. q. f. d.

Dans PTT, nous déduisons le théorème 8 de résultats plus généraux (voir PTT, chap. I, § 4, n° 2). L'essentiel du § 4 de PTT, chap. I (le plus touffu de tout le travail), est consacré à l'exposé de ces résultats et de leurs diverses conséquences, que nous ne pouvons donner dans ce résumé. *

* 9. **Applications linéaires intégrales dans un espace L^1, ou d'un espace $C_0(M)$ (PTT chap. I, § 4, n° 4).** — On peut caractériser les applications linéaires intégrales d'un espace localement convexe E dans un espace $L^1(\mu)$ (où μ est une mesure quelconque sur un espace localement compact M). Ce sont les applications linéaires appliquant un voisinage convenable V de O dans E en une partie *latticiellement bornée* de $L^1(\mu)$. Si E est normé, V sa boule unité, et et $h = \operatorname{Sup}_{x\in V}|ux|$ (donc h est un élément positif de $L^1(\mu)$), alors on a $\|u\|'_1 = \|h\|_1$. Si E ou $L^1(\mu)$ est séparable, le théorème de Dunford-Pettis donne un critère équivalent (que nous énonçons par exemple en supposant E normé) : il existe une application faiblement mesurable f de M dans E', telle que $\|f(t)\|$ soit fonction sommable de t, et que pour $x\in E$, ux soit la classe dans $L^1(\mu)$ de la fonction $t \to \langle x, f(t)\rangle$; alors $\|u\|'_1 \leqslant \int \|f(t)\|\, d\mu(t)$ (et on a l'égalité pour un choix convenable de f). On peut aussi caractériser les applications *nucléaires* d'un espace localement convexe E dans $L^1(\mu)$: ce sont celles qui transforment un voisinage convenable V de O dans E en une partie A de $L^1(\mu)$ qui est latticiellement bornée et de plus *équimesurable* (par quoi on entend que pour tout compact $K \subset M$ et tout $\varepsilon > 0$, existe un compact K_0 tel que $\mu(K \cap \complement K_0) \leqslant \varepsilon$, et que les $\varphi\in A$ coïncident presque partout sur K_0 avec les fonctions d'un ensemble équicontinu et uniformément borné de fonctions sur K_0). Supposant encore que E est un espace de Banach pour fixer les idées, il revient au même de dire que l'application envisagée est donnée par une application *intégrable* [2] f de M dans E' (et en effet, il résulte aussitôt du théorème 3 que cela signifie bien que u est nucléaire).

De façon duale, soit M un espace localement compact, E un espace de Banach (pour fixer les idées), on suppose M métrisable et dénombrable à l'infini, ou E séparable. Alors les applications intégrales u de $C_0(M)$ (espace des fonctions continues sur M « nulles à l'infini ») dans E'. *i. e.* les formes linéaires continues sur $C_0(M, E) = C_0(M) \hat{\hat{\otimes}} E$, sont celles données par une mesure μ sur M et une application faiblement μ-mesurable et bornée f de M dans E', par la formule $u\varphi = \int \varphi(t) f(t)\, d\mu(t)$. On peut de plus supposer que $\|f(t)\| = 1$ pour tout t, et que $\|\mu\|_1 = \|u\|_1'$. En utilisant le théorème 3, on trouve d'ailleurs que les applications *nucléaires* de $C_0(M)$ dans E', ou même de $C_0(M)$ dans un espace de Banach F quelconque, sont celles données par un couple (μ, f) comme ci-dessus, mais f étant même une application *intégrable* de M dans F : il n'est plus nécessaire ici de faire des hypothèses de séparabilité. En particulier, si K et L sont deux espaces compacts, μ une mesure sur K, $N(x, y)$ une fonction scalaire continue sur $K \times L$, alors l'application $f \rightarrow \int f(x) N(x, y)\, d\mu(x)$ de $C(K)$ dans $C(L)$, définie par le noyau continu N, est nucléaire. Notons que nous venons d'interpréter deux catégories remarquables de « mesures vectorielles » sur M, que l'on pourra appeler respectivement *mesures vectorielles intégrales* et *mesures vectorielles nucléaires* sur M.

Le fait que l'on puisse caractériser les applications intégrales et nucléaires d'un espace de Banach (par exemple) E dans $L^1(\mu)$, par des propriétés de l'image de la boule unité, est tout à fait spécial à $L^1(\mu)$ (voir fin n° 7) et lié d'ailleurs au corollaire du théorème 3. De même, on peut montrer que les applications linéaires intégrales de $L^1(\mu)$ dans un espace localement convexe E peuvent se caractériser par des propriétés de l'image de la boule unité de $L^1(\mu)$, particularité que nous ne développerons pas ici (voir PTT. chap. 1, § 4, n° 6). $_*$

Appendice I. — **Variantes diverses de la notion de produit tensoriel topologique** (PTT. chap. 1, § 3).

Sur $E \otimes F$, on peut introduire un grand nombre de topologies intéressantes distinctes (même quand E et F sont des espaces de Banach). Nous nous bornons ici à noter l'existence d'une topologie localement convexe unique sur $E \otimes F$ telle que, pour tout espace localement convexe G, les applications bilinéaires *séparément continues* de $E \times F$ dans G correspondent exactement aux applications linéaires *continues* de $E \otimes F$ dans G. Aux ensembles séparément équicontinus d'applications bilinéaires de $E \times F$ correspondent alors les ensembles équicontinus d'applications linéaires de $E \otimes F$. Muni de cette topologie, $E \otimes F$ est appelé *produit tensoriel inductif* de E et F, et son complété, noté $E \overline{\otimes} F$, est appelé produit tensoriel inductif complété de E et F. Son dual est donc l'espace $\mathcal{B}(E, F)$, les parties équicontinues du dual sont les ensembles séparément équicontinus de formes bilinéaires sur $E \times F$ (ce qui suffit déjà à déterminer la topologie du produit tensoriel inductif). La topologie produit tensoriel inductif sur $E \otimes F$ est plus fine que la topologie produit tensoriel projectif, et ces deux topologies sont identiques si et seulement si les ensembles séparément équicontinus de formes bilinéaires sur $E \times F$ sont déjà équicontinus (par exemple si E et F sont du type $(\mathcal{F})$, ou si E et F sont du type $(\mathcal{DF})$ et tonnelés). Ainsi, si E est un espace non normable, les deux topologies précédentes sur $E \otimes E'$ donnent même des duals distincts (car la forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$ est séparément continue et non continue). — Si E est la limite inductive (au sens général) d'une famille d'espaces E_ι, F la limite inductive d'une famille d'espaces F_j, alors le sous-espace vectoriel topologique H de $E \overline{\otimes} F$ engendré par les images canoniques des espaces $E_\iota \overline{\otimes} F_j$ est la limite inductive de ces derniers (d'où le nom de produit tensoriel inductif). Malheureusement, l'espace H précédent se trouvera souvent être non complet, c'est-à-dire distinct de $E \overline{\otimes} F$. — L'énoncé analogue au précédent, quand E et F sont des espaces *produits*, n'est valable que sous des conditions assez restrictives, p. ex. si F est le produit vectoriel topologique d'une famille d'espaces *du type* $(\mathcal{F})$. — Remarquons enfin que la notation de produit tensoriel topologique qu'on vient de développer donne lieu à une notion de produit tensoriel de deux applications linéaires continues, toute analogue à la notion développée au n° 6.

Il y a lieu de définir un sous-espace dense remarquable de $E \hat{\otimes} F$ plus important que $E \otimes F$ lui-même (bien qu'il ne soit souvent pas complet, car distinct de $E \hat{\otimes} F$) : c'est le sous-espace réunion des images canoniques des espaces $E_A \overline{\otimes} F_B = E_A \hat{\otimes} F_B$, où A (resp. B) est un disque borné de E (resp. F) tel que E_A (resp. F_B) soit complet. Les éléments de ce sous-espace sont appelés *noyaux de Fredholm* dans $E \hat{\otimes} F$, ils interviennent par exemple dans la théorie des espaces nucléaires (voir chap. 2, n° 2 th. 1, corollaire 3). Les sous-espaces des noyaux de Fredholm se transforment les uns dans les autres par les produits tensoriels d'applications linéaires continues. — Le th. 2 du n° 2 montre que si E et F sont du type $(\mathcal{F})$, alors tout élément de $E \overline{\otimes} F = E \hat{\otimes} F$ est déjà un noyau de Fredholm ; il donne de plus un théorème de structure explicite pour les noyaux de Fredholm dans le cas général : les noyaux de Fredholm dans $E \overline{\otimes} F$ peuvent se représenter par des séries

$$u = \Sigma\lambda_i x_i \otimes y_i$$

où (x_i) resp. (y_i) est une suite extraite d'un disque compact de E (resp. F), et ou (λ_i) est une suite sommable de scalaires. Ainsi, u provient même d'un élément d'un espace $E_A \widehat{\otimes} F_B$, ou A et B sont des disques *compacts*.

On appelle *application de Fredholm* de E dans F une application définie par un noyau de Fredholm de $E' \overline{\otimes} F$. Une telle application est faiblement continue, mais pas toujours continue ; mais si tout disque fortement compact de E′ est équicontinu, en particulier si la topologie de E est la topologie de Mackey $\tau(E, E')$, alors toute application de Fredholm de E dans F est déjà nucléaire, et à fortiori continue. — Notons que ce sont les noyaux de Fredholm de $E' \overline{\otimes} E$ qui forment le domaine naturel de la théorie de Fredholm.

Soit E un espace localement convexe, prenons sur son dual E′ une topologie localement convexe plus fine que la topologie faible. Alors la forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$ est séparément continue, donc définit une forme linéaire continue sur $E \overline{\otimes} E'$ appelée forme *trace*. Soit F un autre espace localement convexe, soit $A \in \mathcal{B}(E, F)$, supposons que l'application linéaire ${}^tA$ de F dans E′ qui lui correspond soit continue (ce qui est par exemple le cas en prenant sur E′ la topologie forte, si on suppose F tonnelé), alors $1 \otimes {}^tA$ est une application linéaire continue de $E \overline{\otimes} F$ dans $E \overline{\otimes} E'$, notée aussi $u \rightarrow {}^tA.\ u$. Alors un passage à la limite trivial donne, pour tout $u \in E \overline{\otimes} F$:

$$\langle u, A \rangle = \mathrm{Tr.}\ {}^tA.\ u.$$

Cela explicite la dualité entre $E \overline{\otimes} F$ et $\mathcal{B}(E, F)$ au moyen de la forme trace. Cette formule se généralise immédiatement pour l'accouplement naturel correspondant à n'importe quelle espèce « raisonnable » de produit tensoriel topologique complété (PTT, § 3, N° 3, prop. 17). — Si K est un espace compact muni d'une mesure μ, on a vu que l'opérateur intégral défini par un noyau continu $N(x, y)$ (défini sur $K \times K$) est un opérateur nucléaire dans C(K) (N° 9). On montre facilement que sa trace n'est autre que $\int N(x, x)\, d\mu(x)$.

Appendice 2. — Les propriétés et les problèmes d'approximation (PTT, Chap. I, § 5).

Le problème le plus important qui reste à résoudre dans la théorie des produits tensoriels topologiques est le suivant « *Problème de biunivocité* » : l'application canonique de $E\hat{\otimes}F$ dans $E\hat{\hat{\otimes}}F$ est-elle toujours biunivoque ? Par le théorème de Hahn-Banach, ce problème se transforme en une des variantes du « *Problème d'approximation* » · Toute forme bilinéaire continue sur $E \times F$ est-elle limite, pour la topologie faible définie par $E\hat{\otimes}F$, de formes bilinéaires continues dégénérées, *i.e.* provenant de $E'\otimes F'$? Sous cette forme du problème, on voit qu'on peut se ramener au cas où E et F sont des espaces de Banach. Comme alors la topologie de la convergence bicompacte (*i.e.* convergence uniforme sur les produits d'un compact de E par un compact de F) sur B(E, F) donne pour dual $E\hat{\otimes}F$ (N° 2, th. 2), on peut remplacer dans le « Problème d'approximation » la topologie faible définie par $E\hat{\otimes}F$ par la topologie de la convergence bicompacte. Cela prouve aussi que l'on peut supposer E et F séparables. En continuant par de tels procédés (notamment utilisation systématique du th. 2), nous avons donné dans PTT, Chap. 1, § 5, prop. 37, un grand nombre d'autres formulations équivalentes de la conjecture précédente. Il suffit par exemple de supposer dans ce qui précède que E est un sous-espace vectoriel topologique de c_0, et que F est son dual. Il suffit même de prouver que si $u \in E'\hat{\otimes}E$ définit un opérateur nucléaire nul, alors $\mathrm{Tr}.u = 0$. Une formulation plus concrète de ce dernier énoncé est la suivante : soit $u = (u_{ij})$ une matrice représentant un élément de $l^1\hat{\otimes}c_0$ (*i.e.* telle que $\sum_i \mathrm{Sup}_j |u_{ij}| < +\infty$), et telle que $u^2 = 0$, alors $\mathrm{Tr}.u = \Sigma u_{ii} = 0$. Autres formulations : Soit $K(x, y)$ un noyau continu sur $X \times X$, (où X est un espace compact muni d'une mesure positive μ), tel que $K \circ K = 0$, alors $\mathrm{Tr}.K = \int K(x, x)\,d\mu(x) = 0$. Ou : soit $f(x, y)$ une fonction continue sur le produit de deux compacts X et Y, alors f est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions du type $f(x, b)f(a, y)$. Dans ces deux derniers exemples, il suffit de faire la preuve dans *un* seul cas pour que la conjecture générale soit prouvée, pourvu que μ ne soit pas somme d'une suite de masses discrètes dans le premier cas, et pourvu que X et Y soient infinis dans le second cas. D'autres formulations sont contenues dans ce qui suit.

On dira qu'un espace localement convexe E satisfait à la *condition d'approximation*, si l'application identique de E dans lui-même est limite, pour la convergence uniforme sur toute partie précompacte, d'applications linéaires continues de rang fini. Alors, pour *tout* espace localement convexe F. *toute* application linéaire continue de E dans F ou de F dans E est limite, pour la convergence précompacte, d'applications linéaires continues de rang fini. Si E est un espace de Banach, cela signifie aussi que pour tout espace de Banach F, toute application linéaire compacte de F dans E est limite, au sens de la *norme*, d'applications linéaires continues de rang fini : ou encore que pour tout espace de Banach G, $G\hat{\otimes}E$ est identique à l'espace des applications linéaires compactes et faiblement continues de G' dans E. On montre, par utilisation du th. 2, que cela équivaut au fait que pour tout espace de Banach F, l'application canonique de $E\hat{\otimes}F$ dans $B(E', F')$ est biunivoque ; et dans cette condition il suffit de faire $F = E'$ (on a donc ici une *condition de biunivocité*), et même de supposer que la trace d'un $u \in E'\hat{\otimes}E$ qui définit un opérateur nul, est nulle. — On montre que le dual E' d'un espace de Banach E satisfait à la condition d'approximation. si et seulement si toute application linéaire compacte de E dans un espace de Banach F est limite, au sens de la norme, d'applications linéaires continues de rang fini, et que cela implique que E lui-même satisfait à la condition d'approximation. — Le « Problème d'approximation » envisagé plus haut peut aussi s'énoncer : tout espace localement convexe satisfait-il à la condition d'approximation ? On a vu d'ailleurs qu'on peut alors se borner aux sous-espaces vectoriels fermés de c_0.

Les espaces L^p ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$) construits sur une mesure quelconque, les espaces C(K) (espace des fonctions continues sur l'espace compact K), ainsi que les duals, biduals, etc. de ces espaces. satisfont à la condition d'approximation (et même à la « condition d'approximation métrique » plus forte, voir ci-dessous). Les espaces nucléaires satisfont à la condition d'approximation (voir chap. 2), il en est ainsi plus généralement des espaces qui sont isomorphes à des sous-espaces de produits d'espaces de Hilbert (espaces assez fréquents en pratique). Je donne d'autres exemples dans PTT, chap. 1, § 5. N° 3, englobant notamment les plus importants parmi les espaces de Banach formés de distributions sur R^n (essentiellement ceux qui sont intermédiaires entre $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$. et qui sont stables par translation, et par multiplication par les $\varphi \in (\mathcal{D})$).

On dit qu'un espace de Banach satisfait à la *condition d'approximation métrique*, si l'application identique de E dans lui-même est limite, uniforme sur tout compact. d'applications linéaires de rang fini *et de normes* $\leqslant 1$. C'est un renforcement de nature métrique de la condition d'approximation, et on peut en donner des reformulations analogues (PTT, chap. I, § 5 N° 2). Signalons notamment la suivante: pour tout espace de Banach F, l'application canonique de $E \widehat{\otimes} F$ dans l'espace $J(E', F')$ des formes bilinéaires intégrales sur $E' \times F'$, est un isomorphisme métrique. Il suffit d'ailleurs encore de prouver que l'application canonique de $E \widehat{\otimes} E'$ dans $J(E', E)$ est un isomorphisme métrique. On ne connaît pas d'espace de Banach qui ne satisfasse à la condition d'approximation métrique.

On prouve encore que E′ satisfait à la condition d'approximation métrique si et seulement si pour tout espace de Banach F, l'application canonique de $E' \widehat{\otimes} F'$ dans l'espace $J(E, F)$ des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$ est un isomorphisme métrique, et qu'alors E satisfait aussi à la condition d'approximation métrique. Plus profond est le résultat suivant :

THÉORÈME 9. — *Soient* E, F, G *des espaces de Banach, u une application linéaire continue de* E *dans* F, *v une application linéaire continue de* F *dans* G. *On suppose l'une des applications u, v faiblement compacte, l'autre limite uniforme sur tout compact d'applications linéaires continues de rang fini. Alors* $w = v \circ u$ *est limite uniforme sur tout compact d'applications linéaires continues, de rang fini* et *de* norme $\leqslant \|w\|$.

COROLLAIRE. — *Soit* E *un espace de Banach réflexif. Pour que* E *satisfasse à la condition d'approximation métrique, il suffit déjà qu'il satisfasse à la condition d'appproximation.*

Ces énoncés, à partir d'hypothèses purement topologiques, donnent des conclusions de nature métrique, qui resteront donc valables en remplaçant les normes données par des normes équivalentes. A ce titre, le corollaire du th. 9 donne, même pour l'espace de Hilbert, un résultat d'approximation nouveau.

CHAPITRE II

ESPACES NUCLÉAIRES

1. Introduction des espaces nucléaires. — Dans la plupart des exemples où E est un espace localement convexe complet concrètement donné (espace de fonctions ou de distributions, par exemple), F un espace localement convexe complet arbitraire, on ne sait pas caractériser de façon concrète à la fois $E \hat{\otimes} F$, $E \overset{\frown}{\otimes} F$ et son extension vectorielle topologique $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ (par exemple interpréter ces espaces comme des espaces de fonctions ou distributions à valeurs vectorielles. caractérisées de façon simple). Mais on sait souvent expliciter de façon concrète un espace localement convexe P compris entre $E \hat{\otimes} F$ et $E \overset{\frown}{\otimes} F$ ou du moins entre $E \hat{\otimes} F$ et $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ (« compris entre » signifiant ici : les applications $E \hat{\otimes} F \rightarrow P$ et $P \rightarrow \mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ sont continues).

Exemple 1. — Soit $E = L^p(\mu)$, où $1 \leqslant p < +\infty$; si F est un espace de Banach (et par extension si F est un espace localement convexe complet quelconque) on définit de façon naturelle l'espace $L^p_F(\mu)$ des applications « de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable » de l'espace mesuré M dans F (voir [2]), et on voit facilement que

$$L^p \overset{\frown}{\otimes} F \subset L^p_F \subset L^p \hat{\otimes} F.$$

L^p_F est en général différent de $L^p \overset{\frown}{\otimes} F$ et de $L^p \hat{\otimes} F$, et les éléments de $L^p \hat{\otimes} F$ n'admettent pas de caractérisation interne apparente en tant qu'applications de M dans F (sauf si $p = 1$, voir chap. I, th. 3), tandis que les éléments de $L^p \hat{\otimes} F$ ne peuvent même plus s'interpréter en général par des applications mesurables ou scalairement mesurables de M dans F.

Exemple 2. — Pour des espaces E formés d'authentiques fonctions (et non seulement de classes de fonctions comme L^p) on peut caractériser le plus souvent $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ grâce au

LEMME. — *Soit* E *un espace de fonctions sur un ensemble* M, *muni d'une topologie localement convexe plus fine que la topologie de la convergence simple. Alors pour tout espace localement convexe complet* F, $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ *s'interprète comme l'espace des applications* f *de* M *dans* F *telles que, pour tout* $y' \in F'$ *la fonction* $f_{y'}(t) = \langle f(t), y' \rangle$ *appartienne à* E (f *appartient scalairement à* E), *et que* $f_{y'}$, *parcoure une partie faiblement relativement compacte de* E *quand* y' *parcourt une partie équicontinue de* F′. (*Cette deuxième condition est d'ailleurs surabondante quand* E *est réflexif et du type* ($\mathcal{F}$) *ou* ($\mathcal{LF}$).)

Mais dans un cas comme le précédent, on n'a en général pas prise sur l'espace $E \hat{\otimes} F$.

On conçoit donc les simplifications qui se présentent dans les cas où l'on sait à l'avance que $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F$, ou même que $E \hat{\otimes} F = \mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ (ces égalités étant d'ailleurs supposées impliquer les topologies). Alors on pourra le plus souvent déterminer de façon concrète $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F = \mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$, par exemple si on connaît à priori un espace intermédiaire P entre $E \hat{\otimes} F$ et $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$. Du même coup, on aura déterminé l'espace des applications linéaires faiblement continues de E′ dans F ou de F′ dans E, espaces qui s'identifient en effet à $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$. Et le dual B(E, F) de $E \hat{\otimes} F$, *i. e.* l'espace des formes bilinéaires continues sur $E \times F$, sera identique au dual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$, ou aussi au dual de P, et pourra souvent grâce à cela s'interpréter de façon concrète.

Par exemple. l'essentiel du « théorème des noyaux » de L. Schwartz affirme que l'espace des formes bilinéaires continues sur $\mathcal{E}(R^m) \times \mathcal{E}(R^n)$ est identique à l'espace des formes bilinéaires définies par les distributions à support compact sur $R^m \times R^n$. Ces dernières sont à priori les formes linéaires continues sur $\mathcal{E}(R^m \times R^n)$, or on voit directement (cas particulier du lemme ci-dessus) que $\mathcal{E}(R^m \times R^n)$ s'identifie à l'espace

$$E \hat{\hat{\otimes}} F = \mathcal{B}_e(E'_s, F'_s), \quad \text{où} \quad E = \mathcal{E}(R^m) \quad \text{et} \quad F = \mathcal{E}(R^n)$$

donc à priori, les distributions sur $R^m \times R^n$ sont les formes bilinéaires *intégrales* (chap. I, n° 8) sur $\mathcal{E}(R^m) \times \mathcal{E}(R^n)$. Le théorème des noyaux, qui dit qu'on obtient ainsi *toutes* les formes bilinéaires continues sur $\mathcal{E}(R^m) \times \mathcal{E}(R^n)$, *i. e.* que l'application transposée de l'application canonique de $\mathcal{E}(R^m) \hat{\otimes} \mathcal{E}(R^n)$ dans $\mathcal{E}(R^m) \hat{\hat{\otimes}} \mathcal{E}(R^n)$ est une application *sur*, signifie donc aussi (par un théorème classique de la théorie des espaces ($\mathcal{F}$)) que l'on a en fait

$$\mathcal{E}(R^m) \hat{\otimes} \mathcal{E}(R^n) = \mathcal{E}(R^m) \hat{\hat{\otimes}} \mathcal{E}(R^n).$$

En fait, la démonstration de ce théorème montre même que

$$\mathcal{E}(R^m)\widehat{\otimes} F = \mathcal{E}(R^m)\widehat{\widehat{\otimes}} F$$

(espace isomorphe, quand F est complet, à l'espace des applications indéfiniment différentiables de R^m dans F) pour *tout* espace localement convexe F.

On voit donc que de façon générale, *l'assertion que l'on a* $E \widehat{\otimes} F = E \widehat{\widehat{\otimes}} F$ *pour deux espaces donnés* E *et* F, *doit être regardé comme un équivalent algébrico-topologique du théorème des noyaux de L. Schwartz.* Dans la suite nous étudions les espaces E, tels que $\mathcal{E}(R^m)$, pour lesquels on ait $E \widehat{\otimes} F = E \widehat{\widehat{\otimes}} F$ pour *tout* espace localement convexe F : ce sont les *espaces nucléaires.*

2. Caractérisations des espaces nucléaires (PTT, chap. 2, § 2, n° 1). — D'après n° 1, un espace localement convexe est dit *nucléaire*, si pour tout espace localement convexe F, l'application canonique de $E \widehat{\otimes} F$ dans $E \widehat{\widehat{\otimes}} F$ est un isomorphisme vectoriel topologique du premier espace sur le second (ou, ce qui revient au même, si ces deux espaces induisent la même topologie sur $E \otimes F$). Il suffit d'ailleurs de le vérifier quand F est un espace de Banach. E est nucléaire si et seulement si son complété l'est.

THÉORÈME 1. — *Soit* E *un espace localement convexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) E *est nucléaire.*

b) *Toute application linéaire continue de* E *dans un espace de Banach* F *est nucléaire* (Chap. 1, N° 7).

c) *Pour tout disque équicontinu faiblement fermé* A *dans* E′, *en existe un autre* B ⊃ A *tel que l'application identique de* E'_A *dans* E'_B *soit nucléaire.*

Si alors E *est complet, on a pour tout espace localement convexe complet* F : $E \widehat{\otimes} F = E \widehat{\widehat{\otimes}} F = \mathcal{B}_e(E'_s, F')$ (*isomorphisme vectoriel-topologique*).

* La partie difficile de la démonstration consiste à prouver que *a* implique *c*. En transformant la condition *a* par dualité, on trouve que pour tout disque équicontinu faiblement fermé A de E′, en existe un autre B ⊃ A tel que l'application identique de E'_A dans E'_B soit *intégrale* (chap. 1, n° 8). Appliquant le même résultat à B, et utilisant le corollaire du chap. 1, théorème 8, on trouve *c*. Remarquons qu'on a seulement utilisé le fait que pour tout espace de

Banach, l'application canonique de $E \hat{\otimes} F$ dans $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est un isomorphisme *faible*. ★

Comme une application nucléaire est à fortiori compacte, c donne le

Corollaire 1. — *Soit* E *un espace nucléaire. Les parties bornées de* E *sont précompactes (et* E *est même un espace de Schwartz, voir* [6]). *A fortiori, si* E *est quasi complet,* E *est du type* ($\mathcal{M}$), *donc réflexif.*

On en conclut aussi qu'un espace de Banach nucléaire est de dimension finie. De plus :

Corollaire 2. — *Soit* E *un espace nucléaire,* F *un espace localement convexe quelconque. Si* F *est quasi complet, toute application linéaire bornée de* E *dans* F *est nucléaire. Si* E *est tonnelé (p. ex. si* E *est du type* ($\mathcal{F}$)), *toute application linéaire bornée de* F *dans* E′ *est nucléaire.*

Corollaire 3. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes,* E *nucléaire. Alors les formes bilinéaires continues sur* $E \times F$ *sont les formes bilinéaires « nucléaires », i.e. qui proviennent d'un élément d'un espace* $E'_A \hat{\otimes} F'_B$, *où* A *(resp.* B) *est un disque équicontinu faiblement fermé dans* E′ *(resp.* F′).

On ne connaît pas de cas où on ait $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F$ sans que E ou F soit déjà nucléaire (dans ce problème, on peut se ramener facilement au cas où E et F sont tous deux du type ($\mathcal{F}$)). On peut montrer que si F est l'espace c_0 ou l^1, plus généralement si F admet un espace quotient isomorphe à c_0 ou à l^1, alors $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F$ implique déjà que E est nucléaire. Conjuguant avec le classique « théorème des isomorphismes » de Banach, on obtient :

Théorème 2. — *Soit* E *un espace* ($\mathcal{F}$). *Pour que* E *soit nucléaire, il faut et il suffit que toute suite sommable dans* E *soit absolument sommable ou aussi que toute suite dans* E *qui converge vers zéro, converge vers zéro nucléairement (voir fin du n° 4).*

En particulier, si E est un espace de Banach, chacune des deux conditions précédentes impliquent que E est de dimension finie : dans le premier cas, on retrouve donc un théorème récent de Dvoretzky-Rogers.

3. Propriétés de permanence, exemples d'espaces nucléaires (PTT, chap. 2, § 2, n^os 2 et 3). — La classe des espaces nucléaires jouit d'une stabilité remarquable exprimée dans le

THÉORÈME 3. — 1° *Soit* E *un espace* ($\mathcal{F}$) *ou* ($\mathcal{DF}$). *Pour que* E *soit nucléaire, il faut et il suffit que* E′ *soit nucléaire.*

2° *Soit* E *un espace nucléaire. Tout sous-espace vectoriel, tout espace quotient de* E *est nucléaire.*

3° *Le produit vectoriel-topologique d'une famille quelconque d'espaces nucléaires, la somme vectorielle-topologique d'une famille dénombrable d'espaces nucléaires, sont nucléaires.*

4° *Soient* E *et* F *deux espaces nucléaires, alors* $E \hat{\otimes} F$ *est nucléaire.*

5° *Soit* E *un espace nucléaire du type* ($\mathcal{F}$), F *un espace réflexif dont le dual est nucléaire. Alors le dual de* $E \hat{\otimes} F$ *est nucléaire.*

* De ces assertions, 2 et 5 sont les plus difficiles (les autres résultent assez simplement des critères du théorème 1). La démonstration donnée dans PTT, qui repose sur des techniques assez fines, peut se remplacer par l'utilisation systématique du théorème 1, critère *c*, et des deux faits suivants : 1) Si E est un espace nucléaire, alors il existe une famille fondamentale de parties équicontinues A de E′ telles que E'_A soit un espace de Hilbert (*i. e.* E est isomorphe à un sous-espace vectoriel du produit d'une famille d'espaces de Hilbert) ; 2) la remarque faite à la fin du chap. 1, n° 7. *

Du théorème 3, on déduit les résultats suivants : Si E est un espace vectoriel muni de la topologie la moins fine rendant continues des applications linéaires f_i de E dans des espaces nucléaires E_i, alors E est nucléaire ; soit E un espace vectoriel muni de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les applications linéaires u_i d'une suite d'espaces nucléaires E_i dans E, telles que E soit engendré par la réunion des $u_i(E_i)$, alors E est nucléaire ; soit E un espace nucléaire du type ($\mathcal{F}$) ou ($\mathcal{DF}$), F un espace nucléaire, alors $L_b(E, F)$ est nucléaire, il en est de même du dual de $L_b(E, F)$ si F est aussi du type ($\mathcal{F}$) ou ($\mathcal{DF}$).

Le théorème 3, joint au fait que l'espace $\mathcal{E}(U)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur un ouvert U de R^n est nucléaire (n° 1), permet de montrer facilement le

COROLLAIRE. — *Les espaces* $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, *construits sur une partie ouverte* U *de* R^n ; *les espaces* ($\mathcal{S}$), ($\mathcal{S}'$), ($\mathcal{O}_M$) *et* ($\mathcal{O}'_C$) *construits sur* R^n, *et les duals forts de ces deux derniers espaces, sont nucléaires. Il en est de même de l'espace* $\mathcal{H}$ *des fonctions holomorphes sur une variété analytique complexe.* (*Pour la définition des espaces précédents voir* [9].)

* Considérons une suite croissante de suites positives $a^{(n)} = (a_i^{(n)})$,

soit E l'espace « échelonné » correspondant (voir [7]), *i. e.* l'espace des suites (x_i) telles que $\sum_i x_i a_i^{(n)}$ soit absolument sommable pour tout n. E est muni d'une topologie naturelle d'espace $(\mathcal{F})$. *Pour que* E *soit nucléaire, il faut et il suffit que pour tout* n, *existe un* $m \geqslant n$ *tel que la suite* $a^{(n)}/a^{(m)} = (a_i^{(n)}/a_i^{(m)})$, *soit sommable* (où on convient de regarder comme nul un quotient dont les deux termes sont nuls). Ainsi l'espace (s) des suites à décroissance rapide, donc aussi son dual (s') (espace des suites à croissance lente), est nucléaire. (Cela redonnerait facilement, grâce à la transformation de Fourier, que $\mathcal{E}(R_n)$ et plus généralement $\mathcal{E}(\mathrm{U})$, est nucléaire.) L'énoncé précédent permet aussi de construire des espaces échelonnés qui sont du type $(\mathcal{M})$ (et même du type $(\mathcal{S})$, voir [6], § 3), mais non nucléaires. *

4. **Propriétés de relèvement** (PTT, chap. 2, § 3, n° 1). — Le théorème 6 du chap. 1, n° 7, se spécialise ainsi :

Théorème 4. — 1° *Soient* E_1, E_2 *deux espaces localement convexes*, F_1 (*resp.* F_2) *un sous-espace vectoriel de* E_1 (*resp.* E_2). *On suppose* F_1 *ou* F_2 *nucléaire. Alors toute forme bilinéaire continue sur* $\mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2$ *est la restriction d'une forme bilinéaire nucléaire sur* $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$.

2° *Soient* E, G *deux espaces localement convexes*, F *un sous-espace vectoriel de* E. *Supposons que* F *est nucléaire et* G *quasi complet, ou que* G *est le dual fort d'un espace nucléaire quasi tonnelé* (*par exemple que* G *est un espace nucléaire complet du type* $(\mathcal{F})$ *ou* $(\mathcal{DF})$). *Alors toute application linéaire bornée de* F *dans* G *est la restriction d'une application nucléaire de* E *dans* G.

3° *Soient* E, G *deux espaces localement convexes*, F *un sous-espace vectoriel fermé de* E, *tel que tout disque compact de* E/F *soit contenu dans l'image canonique d'un disque borné et complet de* E. *On suppose que* G *est nucléaire, ou que* E/F *est isomorphe au dual fort d'un espace nucléaire quasi tonnelé* (*p. ex. que* E *est un espace* $(\mathcal{F})$ *ou* $(\mathcal{DF})$ *nucléaire et complet*). *Alors toute application linéaire bornée de* G *dans* E/F *provient d'une application nucléaire de* G *dans* E.

Une variante des propriétés précédentes est la suivante : Soit E un espace localement convexe, F un sous-espace vectoriel nucléaire, A un disque équicontinu dans E'. Alors il existe une application linéaire de F'_{A} dans E' inverse à droite de l'application canonique de E' sur F', et appliquant A dans une partie équicontinue de E'.

Signalons encore la propriété de « relèvement » suivante, conséquence facile des résultats précédents :

THÉORÈME 5. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes, tous deux du type* ($\mathcal{F}$) *ou tous deux du type* ($\mathcal{DF}$). *Supposons* E *nucléaire, et soit* A *un disque borné de* $P = E \hat{\otimes} F$. *Alors il existe une suite* (x_i) *tendant vers* 0 *dans* E, *et une suite équicontinue d'applications linéaires* $u \to y_i(u)$ *de* P_A *dans* F, *enfin une suite sommable fixe* (λ_i), *tels que pour* $u \in P_A$, *on ait*

$$u = \Sigma \lambda_i x_i \otimes y_i(u)$$

COROLLAIRE. — A *est contenu dans l'enveloppe disquée fermée d'un ensemble* $B \otimes C$, *où* B (*resp.* C) *est une partie bornée de* E (*resp.* F). *Donc sur* B(E, F), *la topologie de la convergence bibornée. et la topologie du dual fort de* $E \hat{\otimes} F$, *sont identiques.*

Signalons encore que l'analogue du th. 5 relatif à la représentation des *suites convergentes* de $E \hat{\otimes} F$, est aussi valable.

5. **Compléments sur le produit tensoriel d'un espace nucléaire par un espace localement convexe quelconque** (PTT, chap. 2, § 3, nos 2 et 3). — La théorie de la dualité pour $E \hat{\otimes} F$ est particulièrement simple quand E est nucléaire, et quand E et F sont tous deux du type ($\mathcal{F}$), ou tous deux du type ($\mathcal{DF}$). Les résultats précédents donnent en effet facilement :

THÉORÈME 6. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes, tous deux du type* ($\mathcal{F}$), *ou tous deux du type* ($\mathcal{DF}$). *Si* E *est nucléaire, le dual fort de* $E \hat{\otimes} F$ *qui s'identifie à* B(E, F) *muni de la convergence bibornée* (*voir Corollaire du th.* 5), *s'identifie à* $E' \hat{\otimes} F'$.

Par suite si E est complet, donc réflexif, le bidual de $E \hat{\otimes} F$, muni de la topologie forte du dual de $(E \otimes F)'$, s'identifie à $E \hat{\otimes} F_b''$, où F_b'' désigne le dual fort de F'.

En général, si E est nucléaire et complet, mais E et F par ailleurs quelconques, et si on prend de nouveau sur les biduals les topologies « naturelles » — voir Introduction — on prouve que le bidual de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique dense de $E \hat{\otimes} F''$ (voir PTT, chap. 1, § 4, n° 2, prop. 25, où on donne un énoncé plus général). Quant au dual de $E \hat{\otimes} F$, dont les éléments sont caractérisés par le cor. 3 du th. 1, il ne sera plus du tout en général identique à $E' \hat{\otimes} F'$, mais ce sera sous des conditions assez larges, par exemple si F est réflexif, un sous-espace vectoriel topologique dense de $E' \hat{\otimes} F$

(voir définition au chap. I, appendice I). Mais même dans le cas du produit tensoriel $E' \widehat{\otimes} E$, ou E est du type $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{DF})$ nucléaire, le dual fort de $E \widehat{\otimes} F$ sera souvent non complet (donc distinct de $E' \widehat{\otimes} F'$) : voir appendice.

Le produit $E \widehat{\otimes} F$ (E nucléaire) donne lieu à divers théorèmes de permanence : pour que $E \widehat{\otimes} F$ soit réflexif (resp. du type $(\mathcal{M})$, ou du type $(\mathcal{S})$, ou quasi normable) il suffit (et il faut quand F est complet) que F le soit. Mais E et F peuvent être bornologiques et tonnelés sans que $E \widehat{\otimes} F$ le soit (voir appendice).

D'après les réflexions du n° 1, la détermination concrète de $E \widehat{\otimes} F$, quand E est nucléaire, n'offre le plus souvent aucune difficulté. Donnons quelques exemples (où F est supposé un espace localement convexe complet).

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur une variété indéfiniment différentiable donnée V. Alors $\mathcal{E} \widehat{\otimes} F$ est l'espace des applications indéfiniment différentiables de V dans F (muni de sa topologie naturelle). Énoncé analogue quand on remplace $\mathcal{E}$ par le sous-espace E des fonctions satisfaisant à un certain système d'équations aux dérivées partielles $D_i f = 0$.

Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}(V)$ l'espace des fonctions holomorphes sur une variété analytique complexe donnée V. Alors $\mathcal{H} \widehat{\otimes} F$ est l'espace des applications holomorphes de V dans F, avec la topologie de la convergence compacte.

En particulier, on trouve que

$$\mathcal{E}(U) \widehat{\otimes} \mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(U \times V), \qquad \mathcal{H}(U) \widehat{\otimes} \mathcal{H}(V) = \mathcal{H}(U \times V),$$

quand U et V sont deux variétés indéfiniment différentiables (resp. analytiques complexes) données.

Soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}(R^n)$ l'espace des fonctions sur R^n « indéfiniment différentiables à décroissance rapide » ([9], t. 2). Alors $\mathcal{S} \widehat{\otimes} F$ est l'espace des applications de R^n dans F qui sont « indéfiniment différentiables à décroissance rapide », i. e. indéfiniment différentiables, et telles que pour tout indice de dérivation multiple D^p et tout polynome P sur R^n, $PD^p f$ soit fonction bornée sur R^n. En particulier

$$\mathcal{S}(R^m) \widehat{\otimes} \mathcal{S}(R^n) = \mathcal{S}(R^m \times R^n).$$

On a des énoncés analogues en faisant $E = (\mathcal{O}_M)$ (espace des fonctions « indéfiniment différentiables à croissance lente ») ou $E = (\mathcal{O}_C)$ (espace des fonctions « indéfiniment différentiables à croissance très lente », dual fort de l'espace $(\mathcal{O}'_C)$ des distributions à décroissance rapide [9]), etc. Signalons d'ailleurs qu'en utilisant le lemme du n° 1, on trouve qu'une application f à valeurs dans F est indéfiniment différentiable, resp. holomorphe, resp. « indéfiniment différentiable à décroissance rapide », resp. « indéfiniment différentiable à croissance lente », etc. si et seulement si elle l'est « scalairement », *i. e.* si pour tout $y' \in F'$, la fonction $\langle f(t), y' \rangle$, à valeurs scalaires, possède la même propriété.

6. **Opérateurs de puissance p.ème sommable. Application aux espaces nucléaires** (PTT, chap. 2, § 1, N°s 1 à 6 et § 2, N° 4). — Soient E et F deux espaces localement convexes. Parmi les éléments de $E \overline{\otimes} F$ (voir définition au Chap. 1, Appendice 1) on a distingué sous le nom de *noyaux de Fredholm* ceux qui proviennent d'un élément de quelque espace $E_A \hat{\otimes} F_B$, où A (resp. B) est un disque borné de E (resp. F) tel que E_A (res. F_B) soit complet; alors on peut même supposer que A et B sont compacts (Chap. 1, Appendice 1). Plus généralement, si $0 < p \leqslant 1$, on appelle *noyau de Fredholm de puissance p.ème sommable* dans $E \overline{\otimes} F$, tout élément de $E \overline{\otimes} F$ de la forme $\sum \lambda_i x_i \otimes y_i$, où $(\lambda_i) \in l^p$, et où (x_i) (resp. (y_i)) est une suite extraite d'un compact de E (resp, F). (Si $p = 1$, on retrouve les noyaux de Fredholm). L'ensemble des noyaux de Fredholm de puissance p.ème sommable dans $E \overline{\otimes} F$ est noté $E \overset{(p)}{\otimes} F$. — On appelle *application de puissance p.ème sommable* de E dans F toute application linéaire de E dans F qui provient d'un noyau de Fredholm de puissance p.ème sommable de $E' \overline{\otimes} F$ (si $p = 1$, on retrouve la notion d'application de Fredholm, introduite au Chap. 1, Appendice 1). L'espace de ces applications, noté $L^{(p)}(E, F)$, s'identifie donc à un espace quotient de $E' \overset{(p)}{\otimes} F$ et s'identifie même à $E' \overset{(p)}{\otimes} F$ dans tous les cas connus (voir « problème de biunivocité » au Chap. 1, Appendice 2); il en est toujours ainsi par exemple quand $p \leqslant 2/3$. Quand E et F sont des espaces de Banach, on introduit sur $E \overset{(p)}{\otimes} F$ une fonction « distance à l'origine »

$$S_p(u) = \operatorname{Inf} \sum |\lambda_i|^p$$

le inf étant pris pour toutes les représentations $u = \sum \lambda_i x_i \otimes y_i$, avec $\|x_i\| \leqslant 1$, $\|y_i\| \leqslant 1$. $E \overset{(p)}{\otimes} F$ devient ainsi un espace vectoriel topologique métrisable et complet, en général *non localement convexe*. Quand E et F sont des espaces localement convexes quelconques, les semi-normes de E et de F permettent de définir sur $E \overset{(p)}{\otimes} F$ un système d' « écarts à l'origine », qui en font encore un espace vectoriel topologique (non localement convexe en général) ; cet espace est métrisable et complet si E et F sont métrisables et complets. Par suite, si E est du type ($\mathcal{DF}$), F du type ($\mathcal{F}$), alors $L^{(p)}(E, F)$ est un espace vectoriel topologique métrisable et complet (en général non localement convexe), isomorphe à un espace quotient de $E' \overset{(p)}{\otimes} F$.

On peut aussi, pour $0 \leqslant p < 1$, introduire l'espace $E \overset{[p]}{\otimes} F$ des *noyaux de Fredholm d'ordre* $\leqslant p$, qui est par définition l'intersection des espaces $E \overset{(q)}{\otimes} F$ pour $p < q \leqslant 1$. Muni de la topologie borne supérieure des topologies induites par les espaces $E \overset{(q)}{\otimes} F$, c'est un espace vectoriel topologique (non localement convexe en général), qui est métrisable et complet si E et F sont métrisables et complets. On définit de façon analogue les espaces vectoriels topologiques $L^{[p]}(E, F)$, intersection des espaces $L^{(q)}(E, F)$ pour $p < q \leqslant 1$. L'introduction de ces topologies permet de prouver ceci : Soient E et F deux espaces du type ($\mathcal{F}$). Tout élément de $E \overset{[p]}{\otimes} F$ (où $0 \leqslant p < 1$) est de la forme $\sum \lambda_i x_i \otimes y_i$, où $(\lambda_i) \in l^{[p]}$, et où (x_i) (resp. (y_i)) est une suite bornée dans E (resp. F). Si (u_α) est une suite tendant vers 0 dans $E \overset{(p)}{\otimes} F$ (resp. dans $E \overset{[p]}{\otimes} F$), alors on a $u_\alpha = \sum \lambda_i^\alpha x_i \otimes y_i$, où les suites bornées (x_i) et (y_i) sont fixes, et où $\lambda^\alpha = (\lambda_i^\alpha)$ tend vers 0 dans l^p (resp. $l^{[p]}$). (On désigne par $l^{[p]}$ l'espace intersection des espaces l^q avec $p < q \leqslant 1$, muni de la topologie borne supérieure des topologies induites par les l^q, topologie qui en fait un espace métrisable et complet). L'application la plus importante de ces résultats est dans le

THÉORÈME 7. — *Soit* E *un espace* ($\mathcal{DF}$), F *un espace* ($\mathcal{F}$), *alors toute application d'ordre* 0 *de* E *dans* F *est de la forme* $\sum \lambda_i x_i' \otimes y_i$, *où* (λ_i) *est une suite de scalaires à* décroissance rapide, *et où* (x_i') (*resp.* (y_i)) *est une suite tendant vers* 0 *dans* E' (*resp.* F).

Soit E un espace localement convexe quelconque. Tout noyau de Fredholm élément de $E' \hat{\otimes} E$ admet un *déterminant de Fredholm* $\det(1 - zu)$, fonction entière de la variable complexe z, dont les zéros sont les inverses des valeurs propres z_i de l'opérateur de Fredholm défini par u (les zéros et les valeurs propres étant comptées suivant leur ordre de multiplicité). On a le

THÉORÈME 8. — *Si* $u \in E' \overset{(p)}{\otimes} E$, *le déterminant de Fredholm de* u *est une fonction entière d'ordre* $\leqslant q$, *où* $1/q = 1/p - 1/2$, *et la suite des* *valeurs propres de u est de puissance $q^{\text{ème}}$ sommable. Si $p \leqslant 2/3$, d'où $q \leqslant 1$, $\det(1 - zu)$ est une fonction entière de* genre 0, *donc identique au produit infini* $\prod (1 - zz_i)$, *(où les z_i sont les valeurs propres de u, répétées suivant leur ordre de multiplicité). Si* E *est un espace de Banach, on a*

$$(\sum |z_i|^q)^{1/q} \leqslant (S_p(u))^{1/p}$$

Corollaire 1. — *La suite des valeurs propres d'un opérateur de Fredholm est de carré sommable.*

Corollaire 2. — *Si u est un opérateur de Fredholm de puissance 2/3 sommable, alors* Tr. $u = \sum_i z_i$ *(où les z_i sont les valeurs propres de u).*

Corollaire 3. — *La suite des valeurs propres d'un opérateur de Fredholm d'ordre* 0 *dans* E, *rangée par ordre de modules décroissants, est à décroissance rapide.*

De plus, on peut montrer que sous les conditions du théorème 8, quand E est un espace de Banach, alors la suite des valeurs propres de $u \in E' \overset{(p)}{\otimes} E$, en tant que suite non ordonnée de puissance $q^{\text{ème}}$ sommable, dépend continûment de u. Cela signifie que si $u_\alpha \to u_0$ dans $E' \overset{(p)}{\otimes} E$, alors on peut ranger les valeurs propres de u_α en une suite $\lambda^{(\alpha)} = (\lambda_i^{(\alpha)})$ de telle façon que $\lambda^{(\alpha)} \to \lambda^{(0)}$ dans l^q. On a un résultat analogue pour $E' \overset{(p)}{\otimes} E$.

Par itération de noyaux de Fredholm, on obtient des noyaux ayant des « propriétés de décroissance » de plus en plus fortes :

Théorème 9. — *Soit u un noyau de Fredholm composé de n noyaux de Fredholm u_i, u_i étant de puissance p_i.$^{\text{ème}}$ sommable* ($0 < p_i \leqslant 1$). *Alors u est de puissance p.$^{\text{ème}}$ sommable, où*

$$1/p = (\sum 1/p_i) - (n+1)/2.$$

Si $u_i \in E'_i \overset{(p_i)}{\otimes} E_{i+1}$, où les E_i sont des espaces de Banach, on a

$$(S_p(u)^{1/p}) \leqslant \prod (S_{p_i}(u_i))^{1/p_i}$$

En tous cas, le composé de n opérateurs de Fredholm, où $n \geqslant 3$, est de puissance $(2/(n-1))$.$^{\text{ème}}$ sommable. Pour $n = 2$ ou 3, la formule $1/p = \sum 1/p_i - (n+1)/2$ ne donne pas de renseignement, mais il semble qu'on doive pouvoir y remplacer $n + 1$ par $n - 1$

Pour plus de détails sur les classes d'opérateurs précédentes, je renvoie à PTT, chap. 2, § 1. Signalons seulement qu'on peut montrer que, à un petit flottement numérique près dans la valeur des exposants (flottement qui est dans la nature des choses), le fait pour un opérateur d'être de puissance p.ème sommable se reconnaît dans les propriétés de l'image d'un voisinage convenable de O dans E (la boule unité si E est un espace de Banach). Le flottement disparaît pour les opérateurs d'ordre O, qui sont exactement caractérisés par le fait de transformer un voisinage convenable de O dans E en une partie de F qui est « d'ordre O ». PTT, chap. 2, § 1, n° 5. Quand F est du type ($\mathcal{F}$), les parties de F d'ordre O sont les parties contenues dans l'enveloppe disquée fermée d'une suite « à décroissance rapide » dans F.

La conjonction du th. 1, et du th. 9 donne le.

Théorème 10. — *Soit* E *un espace nucléaire. Pour tout* $\varepsilon > 0$, *et tout disque équicontinu faiblement fermé* A *dans* E′, *il existe un disque équicontinu faiblement fermé* $B \supset A$ *tel que l'application identique de* E'_A *dans* E'_B *soit de puissance* ε.ème *sommable.*

Corollaire 1. — *Soit* E *un espace nucléaire,* F *un espace localement convexe. Toute application linéaire bornée de* E *dans* F *supposé quasi complet, toute application linéaire de* F *dans* E′ *transformant un voisinage convenable de* O *en une partie équicontinue, est d'ordre* O. *Toute forme bilinéaire continue sur* $E \times F$ *provient d'un élément de* $E' \overset{[O]}{\otimes} F'$, (*i.e. est un noyau de Fredholm d'ordre* O).

Corollaire 2. — *Soit* E *un espace nucléaire quasi complet. Tout opérateur borné dans* E *est un opérateur de Fredholm d'ordre* O, *dont le déterminant de Fredholm est donc d'ordre* O, *et la suite des valeurs propres, rangées par ordre de modules décroissants, est à décroissance rapide.*

D'autres corollaires sont obtenus en tenant compte des autres résultats donnés dans ce n°. Ainsi, si E et F sont deux espaces du type ($\mathcal{F}$), E nucléaire, alors tout élément de $E \widehat{\otimes} F$ est de la forme $\Sigma\lambda_i x_i \otimes y_i$, où (x_i) (resp. (y_i) est une suite bornée dans E (resp. F), et où (λ_i) est une suite *à décroissance rapide*. Quand E et F sont du type ($\mathcal{DF}$), E nucléaire, on peut seulement supposer que $\sum|\lambda_i|^\varepsilon < +\infty$, $\varepsilon > 0$ étant donné à l'avance. De même, le théorème 5 peut se préciser de façon analogue. Plus généralement, si E et F sont deux espaces localement convexes, E nucléaire, toute forme bilinéaire continue u sur $E \times F$ est de la forme $\sum \lambda_i x'_i \otimes y'_i$, où $(\lambda_i) \in l^1$, et où (x'_i) (resp. (y'_i)) est une suite équicontinue dans E' (resp. F'). Si u varie dans un disque équicontinu faiblement fermé M de formes bilinéaires, on peut prendre ci-dessus (x'_i) et (λ_i) fixes, et $y'_i = \varphi_i(u)$, où les φ_i forment une suite équicontinue d'applications linéaires de l'espace de Banach engendré par M, dans un espace F'_B, où B est un disque équicontinu faiblement fermé dans F'. Quand F est lui aussi nucléaire (il suffit même que ce soit un espace de Schwartz), on peut aussi supposer dans ce qui précède les suites (x'_i) et (y'_i) fixes, et $\lambda = (\lambda_i)$ variable avec u, $\lambda = \varphi(u)$, où φ est une application linéaire continue de l'espace de Banach engendré par M dans l'espace l^1; on peut même supposer que la restriction de u à M muni de la topologie de la convergence simple soit continue, ce qui donne alors une autre représentation commode des suites équicontinues de formes bilinéaires sur $E \times F$, tendant vers O au sens de la convergence simple. Signalons enfin que si M est un ensemble d'endomorphismes d'un espace nucléaire E, appliquant un voisinage fixe de O en une partie bornée fixe de E, alors l'application qui à tout $u \in M$ fait correspondre la suite non ordonnée de ses valeurs propres, est une application continue de M, muni de la convergence simple, dans l'espace des suites non ordonnées à décroissance rapide (muni de sa topologie métrisable naturelle); cette assertion s'explicite comme l'assertion analogue, vue après le th. 8.

Appendice. — **Sur les espaces $E \hat{\otimes} F$, avec E du type $(\mathcal{DF})$, F du type $(\mathcal{F})$** (PTT, Chap. 2, § 4).

La théorie de la dualité pour les espaces $E \hat{\otimes} F$, très simple quand E est nucléaire et quand E et F sont tous deux du type $(\mathcal{F})$, ou tous deux du type $(\mathcal{DF})$ (voir th. 6) devient plus compliquée dans le cas général. On peut montrer, quand E est nucléaire, que le dual fort B(E, F) de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à un sous-espace vectoriel dense de $E' \hat{\otimes} F'$, mais avec une topologie à priori *moins fine* (et parfois strictement moins fine) que la topologie induite par $E' \hat{\otimes} F'$. Quand F est réflexif (par exemple) ces topologies coïncident; et quand de plus E et F sont chacun du type $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{DF})$, alors B(E, F) est un espace $(\mathcal{LF})$ au sens général (limite inductive généralisée d'une suite d'espaces du type $(\mathcal{F})$, voir PTT, Introduction, IV). Mais souvent, même si E et F sont tous deux nucléaires, E du type $(\mathcal{DF})$ et F du type $(\mathcal{F})$, le dual B(E, F) de $E \hat{\otimes} F$ est distinct de $E' \hat{\otimes} F'$, *i.e.* B(E, F) n'est pas complet (à fortiori $E \hat{\otimes} F$ n'est alors pas bornologique).

Par exemple, si E est la somme directe topologique d'une suite de droites, la situation désagréable qu'on vient de nommer se présente chaque fois que F est un espace $(\mathcal{F})$ non normable, admettant une vraie norme continue. Dans PTT, Chap. 2, § 4, N° 1, Prop. 14, nous donnons un cas plus général, impliquant par exemple que pour l'espace $\mathcal{E}'\widehat{\otimes}\mathcal{E} = L(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ (où $\mathcal{E} = \mathcal{E}(R^n)$, espace de Schwartz), les mêmes désagréments ont lieu. D'autres espaces analogues importants, tels $\mathcal{S}'\widehat{\otimes}\mathcal{S} = L(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ (où $\mathcal{S} = \mathcal{S}(R^n)$ est l'espace des fonctions « indéfiniment différentiables à décroissance rapide » sur R^n) sont au contraire bornologiques ; mais on ne discerne pas de critère simple permettant de reconnaître en général si $E\widehat{\otimes}F$ est bornologique ou non. Sans supposer E ou F nucléaire, si E est du type $(\mathcal{DF})$, F du type $(\mathcal{F})$, on peut sous des hypothèses très suffisantes en pratique, affirmer l'équivalence des conditions suivantes : a. $E\widehat{\otimes}F$ est bornologique ; b. $E\widehat{\otimes}F$ est tonnelé ; c. $B(E, F)$ est complet ; d. $B(E, F)$ est quasi complet (ou seulement complet pour les suites). Il se trouve que les hypothèses de validité de ce théorème sont vérifiées quand F est l'espace « échelonné » construit par le procédé de G. Köthe à partir d'une suite croissante de suites positives $b^{(n)} = (b^{(n)}_i)$ [7]. Quand de plus E est le dual d'un espace échelonné nucléaire, plus généralement, si E est la limite inductive (au sens général) d'une suite d'espaces normés $a^{(n)}l^1$ (où, pour une suite $a^{(n)} = (a^{(n)}_i)$ donnée, $a^{(n)}l^1$ désigne l'ensemble des suites qui sont produit d'une suite sommable par $a^{(n)}$), alors on peut donner un critère explicite exact pour que $E\widehat{\otimes}F$ soit bien bornologique : Pour que $E\widehat{\otimes}F$ soit bornologique, il faut et il suffit que pour tout entier $n_0 > 0$ existe un entier $n > 0$ tel que, pour tout entier $m > 0$ et toute suite positive $\lambda = (\lambda_i) \in E'$, il existe un $R > 0$, tel que pour tout couple (i, j) d'indices, on ait l'une des deux inégalités

$$\lambda_i a_i^{(m)} b_j^{(m)} \leqslant R b_j^{(n)} \qquad \text{ou} \qquad R a_i^{(n)} b^{(n)} \geqslant a_i^{(m)} b_j^{(n_0)}$$

Cet énoncé est parfaitement maniable dans tous les cas particuliers, malgré son aspect barbare. Dans PTT, chap. 2, § 4, n° 4 j'applique ce critère à une classe intéressante d'espaces échelonnés, comprenant plusieurs espaces intéressants en analyse. On trouve par exemple que si F est l'espace des fonctions holomorphes dans un ouvert U du plan complexe, alors $F'\widehat{\otimes}F = L(F, F)$ est bornologique quand $U = \mathbf{C}$, non bornologique quand U est le cercle unité !

La conséquence la plus importante du critère obtenu est que l'espace $(s')\widehat{\otimes}(s)$, où (s) est l'espace des suites à décroissance rapide.

est bornologique. Puisque (s) est isomorphe, par transformation d'Hermite, à l'espace $\mathcal{S}(R^n)$ des fonctions « indéfiniment différentiables à décroissance rapide » sur R^n, $\mathcal{S}' \otimes \mathcal{S}$ est aussi bornologique. On peut par exemple en conclure que les espaces $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$ de L. Schwartz sont bornologiques (PTT, chap. 2, § 4, n° 4). Ainsi, conjuguant avec les résultats du n° 3, on obtient le

THÉORÈME 11. — $(\mathcal{O}_M)$ *et* $(\mathcal{O}'_C)$ *sont des espaces nucléaires bornologiques et complets, dont les duals sont des espaces* $(\mathfrak{LF})$ *nucléaires, bornologiques et complets.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Algèbre multilinéaire, *Act. Sc. Ind.*, 1044, Paris (Hermann).

[2] N. BOURBAKI, Intégration, *Act. Sc. Ind.*, 1175. Paris (Hermann).

[3] J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ, La dualité dans les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{LF})$, *Annales de Grenoble*, 1, (1949), pp. 61-101.

[4] J. DIXMIER, Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert. *Annals of Math.*, 51 (1950), pp. 387-408.

[5] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires à paraître aux *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*

[6] A. GROTHENDIECK, Sur les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{DF})$, à paraître dans *Summa Brasiliensis Mathematicae.*

[7] G. KÖTHE, Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume, *Math. Zeitschrift*, 51 (1948), pp. 317-345.

[8] R. SCHATTEN, A theory of cross-spaces, *Princeton University Press*, 1950.

[9] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, t. 1 et 2, *Act. Sc. et Ind.*, 1091 et 1122, Paris (Hermann).