Séminaire BOURBAKI Juin 2001
53ème année, 2000–2001, n° 892

GÉOMÉTRIE NON COMMUTATIVE, OPÉRATEUR DE SIGNATURE TRANSVERSE ET ALGÈBRES DE HOPF

[d'après A. Connes et H. Moscovici]

par **Georges SKANDALIS**

L'un des thèmes de la géométrie non commutative (*cf.* [13, 27]) est de transposer les outils de la géométrie à des algèbres non commutatives naturelles, qui peuvent être considérées comme algèbres de fonctions sur des « variétés non commutatives ». L'exemple de base, qui guide les travaux dans le domaine depuis une vingtaine d'années, est celui de la « variété non commutative » V/F, espace des feuilles d'un feuilletage F sur une variété V. En se plaçant sur une transversale (ouverte) M, on est amené à considérer le produit croisé de l'algèbre $C_c^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact sur M par un (pseudo-)groupe de difféomorphismes.

Plaçons-nous donc dans le cas d'un groupe dénombrable Γ de difféomorphismes d'une variété M de dimension n de classe C^∞. Le but du travail de Connes-Moscovici dont il est question dans ce rapport est d'établir un théorème de l'indice dans ce cadre. Le premier problème que l'on rencontre est que, dans le cas général, il n'y a pas de métrique sur M invariante par Γ, de sorte qu'il n'existe aucun opérateur différentiel elliptique dont le symbole principal soit invariant par Γ. Pour cela, les auteurs se placent dans l'espace P des métriques sur M, c'est-à-dire l'ensemble des repères du fibré tangent, quotienté par l'action de $O(n)$. Ils arrivent alors à construire un opérateur pseudodifférentiel D *hypoelliptique* qui est « presque invariant » par *tous les difféomorphismes* de M.

La formule d'indice de ces opérateurs est un cocycle cyclique φ sur le produit croisé $C_c^\infty(P)\rtimes\Gamma$. On peut donner une formule de l'indice construite à l'aide de la trace d'opérateurs. Cependant, celle-ci ne dépendra pas seulement du symbole (total) de D et sera donc peu calculable car non-locale. Pour remédier à cela, les auteurs démontrent une formule de l'indice locale, qui est basée sur des résidus de Wodzicki (généralisés). Cette formule s'écrit en termes de résidus de prolongements méromorphes de fonctions de la forme $z \mapsto \mathrm{Tr}(b|D|^{-z})$; elle se généralise dans un cadre abstrait, donnant une formule « locale » utile dans de nombreux cadres.

À ce stade, on n'est pas encore au bout de nos peines... La formule de l'indice ainsi obtenue comporte un nombre énorme de termes : même dans le cas où M est de dimension 1 (pour les feuilletages de codimension 1), cette formule donne lieu à un millier de termes - dont la plupart ont une contribution nulle et qu'il faut absolument savoir supprimer pour pouvoir passer en dimension n arbitraire. Pour cela, Connes et Moscovici introduisent une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ non commutative et non cocommutative de «champs de vecteurs transverses» sur $\mathbf{R}^n$ qui joue le rôle de groupe (quantique) de symétries de la situation. Cela permet de simplifier *a priori* les calculs. Mieux : ils construisent une cohomologie cyclique $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n)$ d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_n$ et un cocycle universel $\Phi \in \mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n)$; ils montrent que la formule d'indice (le cocycle cyclique φ) provient du cocycle Φ à l'aide d'une application «classifiante»

$$\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{HC}^*(C_c^\infty(P)\rtimes\Gamma).$$

De plus, ils montrent que la cohomologie cyclique $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n)$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie de Gel'fand-Fuchs $H^*(WO(n))$(1). Enfin, ils calculent la classe de Φ dans la cohomologie de Gel'fand-Fuchs.

Pour faire agir l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$, on doit d'abord choisir un recouvrement de notre transversale M par des ouverts de $\mathbf{R}^n$. On peut en fait court-circuiter cette étape en construisant une nouvelle algèbre de Hopf $\mathcal{H}_M$, qui est plutôt un objet genre «groupoïde quantique» permettant de définir l'application classifiante en termes d'une connexion affine (sans torsion) quelconque.

Nous commençons cet exposé par quelques rappels, notamment sur la cohomologie cyclique, la K-homologie et le résidu de Wodzicki. Nous expliquons ensuite la formule d'indice locale abstraite. Puis, nous discutons la construction de l'opérateur de signature transverse, et plus généralement d'un calcul pseudodifférentiel «invariant par difféomorphismes». Dans la dernière section, nous donnons la construction de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ et expliquons comment on peut en déduire le calcul du cocycle cyclique donné par la formule d'indice locale appliquée à l'opérateur de signature transverse.

Je remercie Alain Connes et Henri Moscovici ainsi que Saad Baaj pour leur aide et leurs conseils durant la préparation de ce rapport et pour leur lecture attentive d'une version préliminaire du manuscrit.

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. Puissances complexes des opérateurs pseudodifférentiels. Résidu de Wodzicki (*cf.* [39], [44], [32])

Soit M une variété compacte de classe C^∞ de dimension n. Soit P un opérateur (pseudo-)différentiel elliptique «classique» d'ordre $m > 0$. On suppose que P est injectif et positif (en tant qu'opérateur non borné dans L^2). L'opérateur P^s pour $s \in \mathbf{C}$ est le

(1) Plus précisément, elle est égale à une variante $H^*(WSO(n))$.

prototype d'un opérateur pseudodifférentiel d'ordre complexe ms. Si Q est un autre opérateur pseudodifférentiel «classique» d'ordre k, la fonction $s \mapsto m^{-1}\operatorname{Tr}(QP^{-s})$, définie si la partie réelle de s est assez grande (si $m\operatorname{Re}(s) > k+n$), admet un prolongement méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec des pôles au plus simples aux points $k+n-\ell m$, où $\ell \in \mathbf{N}$. Le résidu $\operatorname{res} Q$ en $s=0$ de cette fonction ne dépend pas du choix de P. C'est le résidu de Wodzicki de Q. Celui-ci peut être donné par une «formule locale» $\operatorname{res} Q = \int_M s_Q$ où s_Q est une densité sur M qui se calcule à l'aide du symbole (total) de Q : pour $x \in M$, $s_Q(x)$ est l'intégrale sur la sphère de l'espace cotangent en x du symbole d'ordre $-n$ de Q (dans n'importe quelle carte de M). De plus, ce résidu est une trace : si P, Q sont des opérateurs pseudodifférentiels, on a $\operatorname{res} PQ = \operatorname{res} QP$. C'est d'ailleurs l'unique trace sur l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels sur M.

1.2. Cohomologie cyclique (*cf.* [10], [42], [13], [7])

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbf{C}$ (associative et unifère). Considérons l'espace des formes multilinéaires $\mathcal{A}^{n+1} \to \mathbf{C}$ comme l'espace $C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ des n-cochaines sur le $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$-bimodule $\mathcal{A}^*$. Le bord b de Hochschild s'écrit donc

$$(b\varphi)(a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \varphi(a_0, \ldots, a_k a_{k+1}, \ldots, a_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1}\varphi(a_{n+1}a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Pour $\varphi \in C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$, on note $\varphi^\lambda = \lambda(\varphi) \in C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ la forme donnée par

$$\varphi^\lambda(a_0, a_1 \ldots, a_n) = (-1)^n \varphi(a_1, \ldots, a_n, a_0).$$

On note $C^n_\lambda(\mathcal{A})$ le sous-espace de $C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ formé par les formes *cycliques*, *i.e.* telles que $\varphi^\lambda = \varphi$. On vérifie facilement que $b\big(C^n_\lambda(\mathcal{A})\big) \subset C^{n+1}_\lambda(\mathcal{A})$. La cohomologie cyclique de $\mathcal{A}$ est la cohomologie du complexe

$$\ldots \xrightarrow{b} C^n_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{b} C^{n+1}_\lambda(\mathcal{A}) \xrightarrow{b} \ldots$$

Soient $\varphi \in C^{2n}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ un cocycle cyclique et $e \in \mathcal{A}$ un idempotent. On peut vérifier que la quantité $\varphi(e, e, \ldots, e)$ ne dépend que de la classe de φ dans la cohomologie cyclique $\mathrm{HC}^{2n}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ et de celle de e dans la K-théorie de $\mathcal{A}$. On obtient ainsi un accouplement entre la cohomologie cyclique de $\mathcal{A}$ et sa K-théorie.

La cohomologie cyclique de $\mathcal{A}$ est aussi la cohomologie du bicomplexe suivant : $(C_{p,q}, b, B)_{p,q\in\mathbf{N};\ q\le p}$ où l'on pose $C_{p,q} = C^{p-q}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ et $B : C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \to C^{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ est l'application $A \circ t \circ D$ où :

$$D = \mathrm{id} - \lambda : C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \to C^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*),\ A = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k : C^{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \to C^{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$$

et $(t\varphi)(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \varphi(1, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Un n-cocycle C dans ce bicomplexe est donc une suite φ_{n-2j} pour $0 \leq j \leq [n/2]$, où pour tout j, $B\varphi_{n-2j} = -b\varphi_{n-2j-2}$. Si n est pair, l'accouplement de C avec un idempotent e est

$$\langle C|e\rangle = \sum_{j=0}^{n/2} (-1)^j \frac{(2j)!}{j!}\, \varphi_{2j}\big(e - \frac{1}{2}, e, \ldots, e\big).$$

La *cohomologie cyclique périodique* $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{per}}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est la cohomologie du bicomplexe $(C_{p,q}, b, B)_{p,q\in\mathbf{Z};\ q\leq p}$ qui est évidemment périodique de période 2. L'accouplement de $\mathrm{HC}^*(\mathcal{A})$ avec la $\mathcal{K}$-théorie de $\mathcal{A}$ se factorise par l'homomorphisme naturel $\mathrm{HC}^*(\mathcal{A}) \to \mathrm{HC}^*_{\mathrm{per}}(\mathcal{A})$.

1.3. K-homologie ; cycles p-sommables (*cf.* [1, 6, 31, 10])

Le point de départ de la géométrie non commutative est la K-homologie décrite en termes d'opérateurs pseudodifférentiels abstraits par Atiyah [1] et développée ensuite par Brown-Douglas-Fillmore en termes d'extensions de C^*-algèbres ([6]) et surtout par Kasparov ([31]).

Rappelons que les cycles de la K-homologie d'une C^*-algèbre A sont donnés par un couple (π_+, π_-) de représentations de A dans des espaces de Hilbert (H_+, H_-) et un opérateur de Fredholm $T : H_+ \to H_-$ qui entrelace les représentations $\pi_\pm$ aux opérateurs compacts près, *i.e.* tel que, pour tout $a \in A$, on ait $\pi_-(a)T - T\pi_+(a) \in \mathcal{K}(H_+, H_-)$. Ce cycle $(H_\pm, \pi_\pm, T)$ définit un homomorphisme ψ de $K_0(A)$ dans $\mathbf{Z}$ de la façon suivante : si $e \in A$ est un idempotent, l'opérateur $T_e = \pi_-(e)T\pi_+(e)$ de $\pi_+(e)H$ dans $\pi_-(e)H$ est de Fredholm ; on pose $\psi([e]) = \mathrm{ind}(T_e)$. Si e est un idempotent de $M_n(A)$, on se ramène au cas précédent en remplaçant $H_\pm$ par $H_\pm^n$ muni de la représentation naturelle de $M_n(A)$.

On a souvent besoin de supposer que T est lui-même inversible, ce qui est possible quitte à changer $H_\pm$ par des espaces de dimension finie (et à renoncer à la condition $\pi_\pm(1) = 1$). À l'aide du calcul fonctionnel, on peut aussi se ramener au cas où T est unitaire (*i.e.* satisfait $T^{-1} = T^*$).

Il est commode d'adopter des notations $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-graduées : on considère l'espace $H = H_+ \oplus H_-$, la représentation $\pi : a \mapsto \begin{pmatrix} \pi_+(a) & 0 \\ 0 & \pi_-(a) \end{pmatrix}$ et l'opérateur $F = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Dans ces notations, les cycles sont donc des triplets (H, π, F), où H est un espace hilbertien $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-gradué, $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ est une représentation telle que, pour tout $a \in A$, l'opérateur $\pi(a)$ est de degré 0 pour la graduation (*i.e.* préserve la graduation), $F \in \mathcal{L}(H)$ est de degré 1 pour la graduation, $F^2 = 1$ et, pour tout $a \in A$, on a $[\pi(a), F] \in \mathcal{K}(H)$. On identifie en général A avec son image par l'homomorphisme π.

Une première observation faite par Connes au début des années 1980 est que, pour un idempotent $e \in A$, si on suppose que $[F, e]$ est dans une classe de Schatten $\mathcal{L}^p(H)$ (*i.e.* que l'opérateur $|[F, e]|^p$ soit à trace), on peut écrire l'indice de T_e comme une trace

$$\mathrm{ind}(T_e) = \mathrm{Tr}(\gamma e[F, e]^{2k})\,, \tag{1}$$

où γ est l'opérateur de graduation $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbf{N}$ satisfait $2k \geq p$. Cette formule s'écrit aussi $\mathrm{ind}(T_e) = \varphi(e, e, e, \dots, e)$, où φ est la forme $2k+1$ linéaire sur la sous-algèbre $\mathcal{A} = \{a \in A;\ [F, a] \in \mathcal{L}^p(H)\}$ de A donnée par $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_{2k}) = \mathrm{Tr}(\gamma a_0 [F, a_1] \dots [F, a_{2k}])$. Il est facile de voir que φ est un cocycle cyclique. C'est en analysant les propriétés de φ qui permettent de lui associer un homomorphisme de la K-théorie de $\mathcal{A}$ vers $\mathbf{C}$ que Connes a été conduit à construire la cohomologie cyclique.

En général, la sous-algèbre $\mathcal{A}$ est distincte de A. On dit que le cycle (H, F) est *p-sommable* si $\mathcal{A}$ est dense dans A. Dans ce cas, la K-théorie de $\mathcal{A}$ est égale à celle de A.

L'exemple commutatif de base d'un cycle p-sommable est le suivant :
– $A = C(M)$ est l'ensemble des fonctions continues sur une variété M compacte de classe C^∞.

– H est l'espace de Hilbert des sections L^2 d'un fibré et F est un opérateur pseudo-différentiel «classique» elliptique d'ordre 0.

Dans ce cas, pour $f \in C(M)$ de classe C^∞, le commutateur $[f, F]$ est pseudo-différentiel, d'ordre 0 et son symbole principal est nul : il est donc d'ordre -1. Or tout opérateur d'ordre $< -n$ (où n est la dimension de M) est à trace ; on en déduit que $[f, F] \in \mathcal{L}^p(H)$ pour tout $p > n$. Le cycle (H, F) est donc p-sommable.

Il n'est pas vrai que toute classe de K-homologie peut être représentée par un cycle p-sommable. La cohomologie cyclique entière de [12] permet de donner une formule de l'indice sous forme d'une série convergente pour des cycles plus généraux (voir aussi [29]).

2. FORMULE DE L'INDICE LOCALE (*cf.* [19])

Il peut être utile de donner une autre formule de l'indice que la formule (1) ci-dessus. Dans l'exemple d'un opérateur pseudodifférentiel, celle-ci comporte plusieurs inconvénients :

1. Les opérateurs que l'on rencontre le plus naturellement en relation avec les problèmes d'indice (opérateur de signature, opérateur de Dirac, opérateur $\overline{\partial}$,...) sont des opérateurs différentiels d'ordre 1. On peut évidemment les rendre d'ordre 0 par calcul fonctionnel, mais ce passage ajoute des difficultés de calcul. De plus, si l'opérateur pseudodifférentiel obtenu est d'ordre 0, donc borné, il a l'inconvénient de ne plus être différentiel - et cela rend plusieurs calculs plus difficiles.

2. Cette formule invoque la trace des opérateurs : le cocycle cyclique φ est donc sensible à un changement de F en F' avec $F - F'$ régularisant - alors que sa classe dans la cohomologie cyclique ne l'est pas. En d'autres termes, cette formule ne dépend pas que du symbole total de F : elle n'est pas locale.

C'est pour ces raisons que Connes et Moscovici ont donné une formule pour ce cocycle qui, bien que plus compliquée *a priori,* est locale. Celle-ci se place dans un cadre abstrait, modelé sur les opérateurs différentiels ou pseudodifférentiels sur une variété.

DÉFINITION 1 (*cf.* [14]). — *Un triplet spectral est un triplet* $(H, \mathcal{A}, D)$ *où :*
– H *est un espace hilbertien* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$*-gradué,*
– $\mathcal{A}$ *est une sous-algèbre involutive de l'algèbre* $\mathcal{L}(H)^{(0)}$ *des opérateurs continus de* H *dans* H *préservant la graduation,*
– D *est un opérateur auto-adjoint (non borné) injectif de degré* 1 *pour la graduation, tels que :*
1. *l'algèbre* $\mathcal{A}$ *est contenue dans le domaine de la dérivation non bornée* $x \mapsto [D, x]$ *(définie sur une sous-algèbre de* $\mathcal{L}(H)$*), ainsi que de tous les itérés de la dérivation non bornée* $x \mapsto [|D|, x]$ *;*
2. *l'opérateur* $|D|^{-1}$ *appartient à une classe de Schatten ;*
3. *pour tout* P *dans la plus petite sous-algèbre de* $\mathcal{L}(H)$ *contenant* $\mathcal{A}$*, les éléments de la forme* $[D, a]$ *avec* $a \in \mathcal{A}$*, l'opérateur de graduation* γ*, et stable par commutateur avec* $|D|$*, la fonction* $z \mapsto \mathrm{Tr}(P|D|^{-z})$ *admet un prolongement holomorphe en dehors d'un sous-ensemble* S *de* $\mathbf{C}$ *appelé* spectre de dimension *du triplet spectral (en général* S *est une partie discrète de* $\mathbf{C}$*).*

On dit de plus que le spectre de dimension est simple *si tous les pôles apparaissant dans ces formules sont simples.*

La condition 1 ci-dessus dit que :
– tout $a \in \mathcal{A}$ laisse le domaine de D invariant et l'application $x \mapsto Dax - aDx$, définie pour $x \in H$ dans le domaine de D, se prolonge par continuité sur tout H ;
– pour tout $a \in \mathcal{A}$, l'application $t \mapsto e^{it|D|}ae^{-it|D|}$ est de classe C^∞ (en norme) de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{L}(H)$.

Si $\mathcal{A}$ n'est pas unifère, on remplace la condition 2 par la condition :

2'. il existe $p \in \mathbf{R}_+^*$ *tel que, pour tout* $a \in \mathcal{A}$*, l'opérateur* $a|D|^{-p}$ *soit à trace.*

Les conditions ci-dessus sont exactement modelées sur celles satisfaites par un opérateur (pseudo-)différentiel elliptique d'ordre 1 sur une variété compacte. Elles sont aussi satisfaites dans des cadres plus singuliers, comme les opérateurs de Fuchs sur les variétés avec singularités coniques (*cf.* [5, 35, 36]).

Soit $(H, \mathcal{A}, D)$ un triplet spectral. On peut définir les espaces de Sobolev pour D (pour $s \geq 0$, H^s est le domaine de $|D|^s$; pour $s \leq 0$, H^s est le complété de H pour la norme $x \mapsto \|x\|_s = \|(|D|^s x)\|$). Notons H^∞ le domaine C^∞ de D, c'est-à-dire l'intersection de tous les espaces de Sobolev et $H^{-\infty}$ la réunion de tous les H^s. Remarquons que, par la condition 1, tout élément de $\mathcal{A}$ préserve chaque H^s. Enfin, notons $\mathcal{P}$ l'algèbre des « opérateurs pseudodifférentiels », c'est-à-dire l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}, D$ et $|D|^{-1}$. Elle opère naturellement sur $H^{-\infty}$ et laisse H^∞ invariant.

Pour $a \in \mathcal{P}$, on pose $\delta(a) = [D^2, a]$ et, pour $i \in \mathbf{N}$, on note $a^{(i)} = \delta^i(a)$.

Pour $P \in \mathcal{P}$, notons $⨍ P$ le résidu en 0 de la fonction méromorphe qui, pour $\operatorname{Re} s$ assez grand, vaut $\operatorname{Tr}(\gamma P|D|^{-s})$.

THÉORÈME 1. — *Soit $(H, \mathcal{A}, D)$ un triplet spectral. On suppose que le spectre de dimension est discret et simple.*
a) Pour $a \in \mathcal{A}$, notons $\varphi_0(a)$ le résidu en 0 de la fonction $z \mapsto z^{-1} \operatorname{Tr}(\gamma a|D|^{-z})$. Pour $n \in \mathbf{N}$ non nul, posons

$$\varphi_n(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{k \in \mathbf{N}^n} c_{n,k} ⨍ a_0[D, a_1]^{(k_1)} \ldots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-n-2|k|}$$

où on a posé $|k| = \sum_j k_j$ et

$$c_{n,k} = \frac{(-1)^{|k|}\, 2\, \Gamma\Big(|k| + \frac{n}{2}\Big)}{k!\, (k_1 + 1)(k_1 + k_2 + 2) \ldots (k_1 + \ldots + k_n + n)}.$$

La famille $\varphi = (\varphi_{2p})_{p \in \mathbf{N}}$ est un cocycle dans le bicomplexe (b, B).

Notons $F = D|D|^{-1}$ la phase de D.
b) La classe de φ dans le bicomplexe (b, B) coïncide avec celle du cocycle cyclique $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \mapsto \operatorname{Tr}(\gamma a_0[F, a_1] \ldots [F, a_n])$.

Quelques commentaires sur cette formule :

– Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $k \in \mathbf{N}^n$, l'opérateur $a_0[D, a_1]^{(k_1)} \ldots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-|k|}$ est borné. Donc si $n + |k| \geq p$, l'opérateur $a_0[D, a_1]^{(k_1)} \ldots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-n-2|k|}$ est à trace, donc le résidu $⨍ a_0[D, a_1]^{(k_1)} \ldots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-n-2|k|}$ est nul. La formule d'indice comporte donc un nombre fini de termes.

– On a supposé que D est exactement inversible. Dans la pratique, il arrive que l'opérateur dont on part ne soit pas exactement inversible, mais possède un noyau de dimension finie. Dans ce cas, on interprète $|D|^{-s}$ comme étant nul sur le noyau de D. Avec cette convention, tous les termes de la formule restent inchangés - il faut juste ajouter à la forme φ_0 un terme $a \mapsto \operatorname{Tr}(\gamma a p)$ où p est le projecteur sur $\ker D$.

– Dans tous les exemples naturels construits jusqu'ici, le spectre de dimension est simple. On peut généraliser cette formule au cas où le spectre de dimension n'est pas simple : on doit juste réinterpréter les termes en changeant

$$\Gamma\Big(|k| + \frac{n}{2}\Big) ⨍ a_0[D, a_1]^{(k_1)} \ldots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-n-2|k|}$$

en le résidu en $s = |k| + \frac{n}{2}$ de la fonction

$$z \mapsto \Gamma(z)\ \operatorname{Tr}\Big(\gamma a_0[D, a_1]^{(k_1)} \ldots [D, a_n]^{(k_n)} |D|^{-2z}\Big)$$

ce qui donne une somme de termes faisant apparaître des dérivées de la fonction Γ, donc des valeurs de la fonction ζ. On aurait pu espérer utiliser ces formules et l'intégralité de l'indice pour obtenir des équations algébriques invoquant $\zeta(2k+1)$. Cependant on peut utiliser un procédé de «renormalisation» et remplacer, sans changer la classe de cohomologie, tous ces termes par des termes rationnels (*cf.* [19]).

3. L'OPÉRATEUR DE SIGNATURE DIFF-INVARIANT (*cf.* [19])

Soit (V, F) une variété feuilletée. Le fibré transverse n'a pas toujours de structure hermitienne invariante par holonomie : en général il n'existe donc pas d'opérateur pseudodifférentiel transversalement elliptique d'ordre $\neq 0$ dont le symbole principal soit invariant par holonomie. Une façon équivalente de poser le problème, en se plaçant sur une transversale M du feuilletage, est de construire un opérateur elliptique invariant par un (pseudo-)groupe de difféomorphismes Γ de M. Un tel opérateur n'existe pas en général : le groupe des difféomorphismes qui fixent le symbole principal d'un tel opérateur doit fixer une métrique.

La solution de ce problème s'obtient par l'introduction du fibré des métriques sur le fibré tangent à M. Cette idée, qui vient de [11] où elle a servi à construire des cocycles cycliques «prolongeables à la C^*-algèbre du feuilletage», a été utilisée aussi dans [28] pour construire des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 presque invariants.

Soit M une variété compacte orientée de dimension n. Notons R l'espace total du fibré des repères positifs de M. Le groupe $GL^+(n)$ opère naturellement sur R et l'on a $M = R/GL^+(n)$. Notons $P = R/SO(n)$ l'espace des métriques sur M.

Soit Γ un groupe de difféomorphismes de M, préservant l'orientation ; il opère naturellement sur R et sur P. Cette action préserve la fibration $p : P \to M$; le fibré tangent TP de P contient donc un sous-fibré «vertical» L invariant par Γ. De plus, le fibré L et le quotient TP/L possèdent tous deux des métriques Γ-invariantes : la métrique de L provient d'une métrique $GL^+(n)$-invariante sur $GL^+(n)/SO(n)$; le fibré TP/L est isomorphe à $p^*(TM)$; un point de P *est* une métrique sur ce fibré.

3.1. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et l'algèbre $\mathcal{A}$

Dans l'opérateur de signature sur P que nous allons construire, nous distinguerons les directions verticale (le long des fibres de la fibration $P \to M$) et horizontale (transverse à cette fibration). Cet opérateur ne va pas agir sur le fibré $\Lambda(T^*P)$ des formes sur P, mais plutôt sur le produit tensoriel $p^*(\Lambda(T^*M)) \otimes \Lambda L^*$ de l'espace des formes sur M avec l'algèbre extérieure sur le fibré dual de L. Notons que ce fibré est hermitien, contrairement au fibré $\Lambda(T^*P)$.

Les fibrés $p^*(\Lambda(T^*M))$ et ΛL^* admettent des opérateurs de graduation γ_H et γ_V donnés, comme pour l'opérateur de signature classique, par une opération $*$ définie (à une phase près) par l'égalité $\langle *\omega, \omega' \rangle v = \omega \wedge \omega'$ pour des formes réelles ω, ω' où v est la forme volume de norme 1 positive (on utilise l'orientation de ces fibrés).

L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est l'espace des sections L^2 de ce fibré, relativement à la mesure Γ-invariante sur P donnée par la forme volume $v_V \otimes v_H$. L'opérateur de graduation de notre fibré, et donc de $\mathcal{H}$, est $\gamma = \gamma_H \otimes \gamma_V$.

L'algèbre $\mathcal{A}$ est le produit croisé $C_c^\infty(P) \rtimes \Gamma$: elle est engendrée par les opérateurs de la forme fU_g, où :
– $f \in C_c^\infty(P)$ est une fonction C^∞ à support compact sur l'espace total P vue comme opérateur de multiplication sur $\mathcal{H}$;
– $g \in \Gamma$ et $g \mapsto U_g$ est la représentation unitaire naturelle de Γ dans $\mathcal{H}$ donnée par une formule

$$(U_g\omega)(x) = g.\omega(g^{-1}x) \qquad (x \in P).$$

La principale formule algébrique que satisfont ces opérateurs est $U_g f = (g.f)U_g$, où $g.f : x \mapsto f(g^{-1}(x))$.

3.2. Partie verticale de l'opérateur de signature

En un point x de M on considère l'opérateur de signature $d_V + d_V^*$ sur la variété $P_x = p^{-1}(x)$, à coefficients dans le fibré trivial $E = \Lambda(T_x^*M)$. L'opérateur ainsi obtenu est différentiel, d'ordre 1 et Γ-invariant.

Notons que le fibré E est trivial mais que sa structure hermitienne n'est pas constante ; donc l'opérateur $d_V^* + \gamma d_V \gamma$ n'est pas nul, mais est d'ordre 0. En ce sens, l'opérateur $d_V + d_V^*$ anticommute avec γ et est donc de degré 1 pour la graduation.

Pour une raison qui va apparaître ci-dessous, on a aussi besoin de considérer un opérateur de signature vertical d'ordre 2 : on prend $Q_V = d_V^* d_V - d_V d_V^*$, qui anticommute aussi avec γ et dont le symbole principal définit la même classe de K-théorie que celui de $d_V + d_V^*$.

3.3. Partie horizontale de l'opérateur de signature

Cet opérateur s'écrit $Q_H = d_H + d_H^*$. Cependant, pour le construire, on doit choisir une connexion, c'est-à-dire une section $s : TP/L \to TP$. À l'aide de celle-ci, on a un isomorphisme $T^*P \simeq L^* \oplus p^*(T^*M)$, donc un isomorphisme $\Lambda(T^*P) \simeq p^*(\Lambda(T^*M)) \otimes \Lambda L^*$ dont on se sert pour construire d_H. Notons que l'action de Γ ne laisse pas la section s invariante. On en déduit que d_H n'est pas Γ-invariant. Cependant, le symbole *horizontal* de d_H, c'est-à-dire la restriction de son symbole principal à $p^*(\Lambda(T^*M)) \subset T^*P$ est invariant. En effet, le symbole principal de d_H en un point $(y, \xi) \in T^*P$ $(y \in P,\ \xi \in T_y^*P)$ est

$$\omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto \left({}^t(s \circ p)(\xi) \wedge \omega_1\right) \otimes \omega_2$$

pour $\omega_1 \in \Lambda(T_{p(y)}^*M)$ et $\omega_2 \in \Lambda(L_y^*)$.

3.4. Le triplet spectral

On pose $Q = Q_V + Q_H = (d_V^* d_V - d_V d_V^*) + \gamma_V(d_H + d_H^*)$. On démontre que cet opérateur est autoadjoint (ceci n'est pas si facile car Q n'est pas elliptique et P n'est pas compacte).

Pour $f \in C_c^\infty(P)$, l'opérateur $[f, Q_H]$ est différentiel d'ordre 0 : il est donc borné. L'opérateur $[f, Q_V]$ est différentiel d'ordre 1 mais son symbole horizontal est nul. C'est donc un opérateur «longitudinal» le long de la fibration $P \to M$.

L'opérateur Q_V est Γ-invariant, donc, pour $g \in \Gamma$, on a $[U_g, Q_V] = 0$. L'opérateur $[U_g, Q_H]U_g^{-1}$ est différentiel d'ordre 1 et son symbole horizontal est nul.

Comme Q_V est longitudinalement elliptique d'ordre 2, les opérateurs différentiels longitudinaux d'ordre 1 (à support compact) sont dominés par $|Q_V|^{1/2}$, donc par $|Q|^{1/2}$.

À l'aide du calcul fonctionnel, on définit un opérateur D tel que $Q = D|D|$. D'après les considérations qui précèdent, et en utilisant l'égalité

$$D = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} Q(Q^2 + \mu)^{-1} \mu^{-1/4} d\mu$$

on vérifie que, pour tout $h \in \mathcal{A}$, le commutateur $[h, D]$ est borné.

Théorème 2 (*cf.* [19]). — *Le triplet* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ *est un triplet spectral.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise de façon cruciale le calcul pseudodifférentiel des variétés de Heisenberg (qui sont des variétés munies d'un sous-fibré du fibré tangent, *cf.* [5]). Le sous-fibré qui nous intéresse ici est le fibré (intégrable) tangent aux fibres de la fibration p. Notons que l'on rencontre ici plusieurs difficultés liées à la non compacité de P.

Signalons que l'on peut démontrer (à l'aide de [5]) que les opérateurs hypoelliptiques «naturels» sur une variété de Heisenberg non nécessairement intégrable donnent aussi des triplets spectraux (*cf.* [38]).

4. L'ALGÈBRE DE HOPF «TRANSVERSE» (*cf.* [20, 21])

Soient M une variété et Γ un groupe de difféomorphismes de M. Nous avons à présent à notre disposition un opérateur de signature D agissant sur l'espace total du fibré P des métriques de M. On en déduit une formule de l'indice locale. Le problème est que cette formule comporte un nombre colossal de termes : dans le cas où M est de dimension 1, l'espace P est de dimension 2 et l'ordre de sommabilité de D est 3 (*i.e.* $f|D|^{-z}$ est à trace pour $f \in C_c^\infty(P)$ si $\operatorname{Re} z > 3$) ; cette formule donne lieu à un calcul gigantesque, où il faut traiter un millier de termes. Si le traitement de chacun d'entre eux est relativement aisé, il est absolument impossible d'écrire une démonstration acceptable à l'aide de ces formules pour $n \geq 2$!

Pour cela, Connes et Moscovici construisent une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$, ne dépendant que de la dimension n de M, qui va tenir le rôle du groupe de symétries en permettant d'éliminer dès le début plusieurs termes inutiles. Comme de plus l'opérateur de signature transverse provient en un sens de l'action de $\mathcal{H}_n$, le cocycle cyclique donné par la formule d'indice locale associée à cet opérateur provient d'un cocycle d'une cohomologie cyclique d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_n$ à l'aide d'une application «classifiante»

$$\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{HC}^*(\mathcal{A})$$

associée à l'action de $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{A}$.

La cohomologie cyclique de $\mathcal{H}_n$ se calcule à l'aide d'un théorème de type van Est : c'est la cohomologie de Gel'fand-Fuchs $H^*(WO(n))$.

Une algèbre de Hopf exactement du même type que l'algèbre $\mathcal{H}_1$ de Connes-Moscovici a été construite par Kreimer ([33]) puis améliorée par Connes-Kreimer ([16, 17, 18]).

La construction de cette algèbre de Hopf est analogue à une construction d'algèbres de Hopf qui remonte aux travaux de G.I. Kac : celle de «couple assorti» (matched pair) de groupes que nous rappelons maintenant.

4.1. Couples assortis de groupes (*cf.* [30])

Soit G un groupe (fini) et G_1, G_2 deux sous-groupes tels que l'application $(x, y) \mapsto xy$ soit une bijection de $G_1 \times G_2$ sur G. On peut alors construire une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ de la façon suivante.
– En identifiant G_2 à $G_1\backslash G$ et G_1 à G/G_2, on a des actions naturelles de G sur G_2 (à droite) et sur G_1 (à gauche).
– En tant qu'algèbre, $\mathcal{H}$ est isomorphe au produit croisé $C(G_1)\rtimes G_2$ de l'algèbre (pour le produit ponctuel) des fonctions sur G_1 par l'action de G_2.
– L'algèbre duale de la structure de cogèbre sur $\mathcal{H}$ est le produit croisé $\widehat{\mathcal{H}} = C(G_2)\rtimes G_1$. La dualité entre ces deux algèbres s'écrit

$$\langle \varphi U_s | U_g f \rangle = f(s)\varphi(g)\,,$$

pour $s \in G_1$, $g \in G_2$, $f \in C(G_1)$ et $\varphi \in C(G_2)$.
– Le coproduit $\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ de $\mathcal{H}$ s'écrit de la manière suivante : pour $f \in C(G_1)$, $\Delta(f) \in C(G_1 \times G_1) = C(G_1) \otimes C(G_1) \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est la fonction $(s, t) \mapsto f(st)$; la formule de $\Delta(U_g)$ pour $g \in G_2$, est un peu plus compliquée : elle s'écrit

$$\Delta(U_g) = \sum_{s \in G_1} U_g \delta_s \otimes U_{p(gs)}\,,$$

où $\delta_s \in C(G_1)$ est la fonction caractéristique de s et pour $x \in G$, on a noté $p(x) \in G_2$ l'unique élément tel que $xp(x)^{-1} \in G_1$.

– L'antipode $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est l'antihomomorphisme donné pour $s \in G_1$ et $g \in G_2$ par $S(\delta_s U_g) = U_{p(gs)} \delta_{s^{-1}}$.

Remarques. — 1. On peut aussi tordre l'exemple de « groupe quantique » ainsi construit ci-dessus par un cocycle.
2. Cet exemple a été étudié par plusieurs auteurs, et généralisé au cas où G est un groupe localement compact et G_1, G_2 sont des sous-groupes fermés tels que l'application $(s,g) \mapsto sg$ soit un homéomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur G, voire sur une partie ouverte et dense de G (*cf.* [41], [37], [2], [3], [43]).

Remarquons que la formule du coproduit de $\mathcal{H}$ s'étend à l'algèbre $\mathcal{R} = C(G_1) \rtimes G \supset \mathcal{H}$: on définit $\Delta_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \mathcal{R} \otimes \mathcal{H}$ en posant, pour $f \in C(G_1)$, $\Delta_{\mathcal{R}}(f) = \Delta(f) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \subset \mathcal{R} \otimes \mathcal{H}$ et, pour $g \in G$,

$$\Delta_{\mathcal{R}}(U_g) = \sum_{s \in G_1} U_g \delta_s \otimes U_{p(gs)}.$$

L'application ainsi étendue est encore un homomorphisme d'algèbres et vérifie encore la propriété d'associativité $(\Delta_{\mathcal{R}} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{\mathcal{R}} = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta_{\mathcal{R}}$: c'est une coaction de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ sur l'algèbre $\mathcal{R}$. Remarquons que l'on peut ici remplacer $\mathcal{R}$ par l'algèbre $C(G_1) \rtimes \Gamma$ pour tout sous-groupe Γ de G.

Une façon équivalente de voir la coaction de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}$ est au travers de l'algèbre de Hopf duale $\widehat{\mathcal{H}} = C(G_2) \rtimes G_1$: pour $\alpha \in \widehat{\mathcal{H}}$ et $x \in \mathcal{R}$ on pose $\alpha \cdot x = (\mathrm{id} \otimes \alpha)\Delta_{\mathcal{R}}(x) (\in \mathcal{R})$. Puisque le produit de $\mathcal{H}'$ est dual au coproduit de $\mathcal{H}$, la propriété de co-associativité de $\Delta_{\mathcal{R}}$ donne la propriété d'action $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (pour $\alpha, \beta \in \widehat{\mathcal{H}}$ et $x \in \mathcal{R}$). Puisque le coproduit Δ' de $\mathcal{H}'$ est dual au produit de $\mathcal{H}$, le fait que $\Delta_{\mathcal{R}}$ est un homomorphisme se traduit par la formule

$$m\big(\Delta'(\alpha) \cdot (x \otimes y)\big) = \alpha \cdot (xy) \tag{2}$$

(pour $\alpha \in \widehat{\mathcal{H}}$ et $x, y \in \mathcal{R}$ - on a noté $m : \mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ la multiplication de $\mathcal{R}$).

Sur les générateurs de $\widehat{\mathcal{H}}$ on obtient les formules suivantes :

$$(U_s \varphi) \cdot (U_g f) = U_g \varphi\big(p(gs)\big) f^s \tag{3}$$

pour $s \in G_1$, $g \in G$, $f \in C(G_1)$ et $\varphi \in C(G_2)$, où l'on a noté f^s l'application $t \mapsto f(ts)$.

4.2. L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ (*cf.* [**20**])

L'exemple des couples assortis va surtout servir de guide pour tout ce qui concerne l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$. Ici, le groupe G est le groupe de tous les difféomorphismes de $\mathbf{R}^n$ préservant l'orientation ; le sous-groupe G_1 sera le groupe $\mathbf{R}^n \rtimes GL^+(n)$ des difféomorphismes affines ; le sous-groupe G_2 sera le groupe des difféomorphismes f de $\mathbf{R}^n$ tels que $f(0) = 0$ et $df_0 = \mathrm{id}$. Remarquons que G/G_2 est l'espace des repères sur $\mathbf{R}^n$.

L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ peut être considérée comme une sorte de produit croisé de l'algèbre des fonctions sur G_2, polynomiales en les jets d'ordre fini d'un difféomorphisme, par l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G_1. On va en fait la voir par son action sur l'algèbre $\mathcal{R} = C_c^\infty(G_1) \rtimes G$, en s'aidant des formules (2) et (3) pour comprendre l'action et définir le coproduit de $\mathcal{H}_n$. Notons que l'algèbre de Hopf avait dans un premier temps été construite « à la main » au moyen de son action sur $\mathcal{R}$. Le lien avec les couples assortis de groupes clarifie plusieurs calculs.

L'action de $GL^+(n)$ commute avec celle de G : on en déduit que, si Y est un élément de l'algèbre de Lie de $GL^+(n)$, on a $\Delta(Y) = Y \otimes 1 + 1 \otimes Y$. Soit X_i un générateur de l'algèbre de Lie de $\mathbf{R}^n$. Faisant agir X_i sur un produit fU_g, on trouve $X_i(fU_g) = X_i(U_g(f^g)) = U_g(X_i(f^g)) = (X_i(f^g))^{g^{-1}}U_g$. En comparant avec $X_i(f)U_g$, on voit que le coproduit de X_i va s'écrire sous la forme $\Delta(X_i) = X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i + \sum Y_{j,k} \otimes \delta_{i,j,k}$ où $\delta_{i,j,k}$ est une fonction sur G_2. Le coproduit de ces éléments donne $\Delta(\delta_{i,j,k}) = \delta_{i,j,k} \otimes 1 + 1 \otimes \delta_{i,j,k}$.

À partir des X_i, des $Y_{i,j}$ et des $\delta_{i,j,k}$ on peut engendrer toute l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$. En particulier, on construit de nouveaux éléments

$$\delta_{I,\alpha} = \Big[X_{i_1}, \big[X_{i_2}, \dots [X_{i_k}, \delta_\alpha] \dots\big]\Big], \qquad I = (k, i_1, \dots, i_k), \quad \alpha \in \{1, \dots, n\}^3.$$

Ces éléments agissent par multiplication sur $\mathcal{R}$ et forment l'algèbre commutative des fonctions sur G_2.

L'algèbre $\mathcal{H}_n$ est l'espace vectoriel engendré par les produits xy où x est un élément de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G_1 et y est un élément de l'algèbre des polynômes en les variables $\delta_{I,\alpha}$. Le coproduit de $\mathcal{H}_n$ se définit inductivement sur les générateurs. On vérifie que, pour $\alpha \in \{1, \dots, n\}^3$, on a $\Delta(\delta_\alpha) = \delta_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \delta_\alpha$. La co-unité ε est l'unique caractère nul sur les X_i, les $Y_{i,j}$ et les δ_α. L'antipode est l'unique antiautomorphisme S de $\mathcal{H}_n$ tel que $S(Y_{i,j}) = -Y_{i,j}$, $S(\delta_\alpha) = -\delta_\alpha$ et $S(X_i) = -X_i + \sum_{j,k} \delta_{i,j,k} Y_{j,k}$.

4.3. Cohomologie cyclique d'algèbre de Hopf (*cf.* [21, 22])

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf (au sens de [40]). Notons Δ son coproduit, $\varepsilon : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ sa co-unité et $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ son antipode. En général, on n'a pas $S^2 = \mathrm{id}$. On est donc amené à se donner une *paire modulaire* $(F, \widehat{F})$, où $F \in \mathcal{H}$ est un élément de type « group like », *i.e.* tel que $\Delta(F) = F \otimes F$ et $\widehat{F} : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ est un caractère, *i.e.* un homomorphisme d'algèbres. On pose $\widetilde{S} = (\widehat{F} \otimes S) \circ \Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. On suppose de plus que $\widehat{F}(F) = 1$ et, pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$\widetilde{S}^2(h) = FhF^{-1} \tag{4}$$

On a alors les formules

– $\Delta \circ \widetilde{S} = (S \otimes \widetilde{S}) \circ \sigma \circ \Delta$, où $\sigma : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est l'application $x \otimes y \mapsto y \otimes x$.

– $\varepsilon \circ \widetilde{S} = \widehat{F}$ et $\widehat{F} \circ \widetilde{S} = \varepsilon$.

Remarque. — Une telle paire modulaire est naturellement construite dans le contexte des groupes quantiques localement compacts de [34] : dans ce cadre F et $\widehat{F}$ représentent respectivement la dérivée de Radon-Nykodym de la mesure de Haar à droite par rapport à la mesure de Haar à gauche pour $\mathcal{H}$ et son dual $\widehat{\mathcal{H}}$. Il arrive cependant dans ce cadre que $\widehat{F}(F) \neq 1$. Quelques modifications mineures sont alors nécessaires dans ce qui suit. On peut en fait toujours se ramener au cas $\widehat{F}(F) = 1$ à l'aide d'une construction de «carré modulaire». Cependant, la paire modulaire de tout couple assorti de groupes satisfait la propriété $\widehat{F}(F) = 1$ (*cf.* [3, 43]).

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf munie de la paire modulaire $(F, \widehat{F})$. On peut naturellement lui associer une cohomologie cyclique donnée par un bicomplexe $(C_{p,q}, b, B)$ défini comme suit.

– Pour $p \geq q \geq 0$, on pose $C_{p,q} = \mathcal{H}^{\otimes p-q}$.

– On définit, pour $k \in \mathbf{N}$ et $0 \leq j \leq k+1$, des applications $b_j : \mathcal{H}^{\otimes k} \to \mathcal{H}^{\otimes k+1}$ en posant $b_0(h) = 1 \otimes h$, $b_{k+1}(h) = h \otimes F$ et, pour $1 \leq j \leq k$, $b_j = \mathrm{id}_{\mathcal{H}^{\otimes j-1}} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}^{\otimes k-j}}$. On pose enfin $b = \displaystyle\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j b_j$.

– On utilise aussi l'application $\Delta^j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{\otimes j+1}$ définie par $\Delta^1 = \Delta$, $\Delta^2 = (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \circ \Delta = (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \circ \Delta) \circ \Delta$ (par coassociativité) et $\Delta^{j+1} = (\Delta^j \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{H}}) \circ \Delta = (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} \circ \Delta^j) \circ \Delta$.

– L'opération de permutation cyclique $\lambda : \mathcal{H}^{\otimes k} \to \mathcal{H}^{\otimes k}$ est définie par

$$\lambda(h_1 \otimes \ldots \otimes h_k) = (-1)^k \big(\Delta^{k-1} \circ \widetilde{S}(h_1)\big)\big(h_2 \otimes \ldots \otimes h_k \otimes F\big).$$

À l'aide de la formule (4), on démontre que λ^{k+1} est l'identité.

– L'application $B : \mathcal{H}^{\otimes k+1} \to \mathcal{H}^{\otimes k}$ est l'application $A \circ u \circ D$ où

$$D = \mathrm{id} - \lambda : \mathcal{H}^{\otimes k+1} \to \mathcal{H}^{\otimes k+1}, \;\; A = \sum_{j=0}^{k} \lambda^j : \mathcal{H}^{\otimes k} \to \mathcal{H}^{\otimes k}$$

et $u(h_1 \otimes \ldots \otimes h_{k+1}) = \big(\Delta^{k-1} \circ \widetilde{S}(h_1)\big)\big(h_2 \otimes \ldots \otimes h_{k+1}\big)$.

Définition 2 (*cf.* [21, 22] - *cf.* aussi [24]). — *La cohomologie cyclique d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}$ est la cohomologie $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H})$ du bicomplexe (b, B) défini ci-dessus.*

4.4. L'application classifiante

Les formules de b et B pour la cohomologie d'algèbre de Hopf sont exactement construites pour pouvoir définir une application classifiante. Soit donc $\mathcal{R}$ une algèbre munie d'une action de $\mathcal{H}$. On suppose donnée une F-*trace* sur $\mathcal{R}$, c'est-à-dire une application $\tau : \mathcal{R} \to \mathbf{C}$ satisfaisant $\tau(xy) = \tau\big(y(F \cdot x)\big)$ pour $x, y \in \mathcal{R}$. On dira de plus que τ est $\widehat{F}$-*invariante* si on a $\tau(h \cdot x) = \widehat{F}(h)\tau(x)$ pour $x \in \mathcal{R}$ et $h \in \mathcal{H}$. Une formulation équivalente de la $\widehat{F}$-invariance est $\tau\big((h\cdot x)y\big) = \tau\big(x(\widetilde{S}(h)\cdot y)\big)$ pour $x, y \in \mathcal{R}$ et $h \in \mathcal{H}$.

Soit τ une F-trace, $\widehat{F}$-invariante. L'application qui à $H = h_1 \otimes \ldots \otimes h_k \in \mathcal{H}^{\otimes k}$ associe la forme $\varphi_H : (a_0, \ldots, a_k) \mapsto \tau\big(a_0(h_1\cdot a_1)\ldots(h_k\cdot a_k)\big)$ est, par construction, un morphisme de bicomplexes. On en déduit donc un homomorphisme

$$\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}) \to \mathrm{HC}^*(\mathcal{R})$$

appelé *application classifiante.*

4.5. Cohomologie cyclique de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ (*cf.* [20])

Dans le cas d'un biproduit croisé (de groupes localement compacts), la paire modulaire $(F, \widehat{F})$ est décrite en termes des modules δ_1, δ_2 et δ des groupes G_1, G_2 et G (*cf.* [3, 43]). Ce sont des éléments respectivement de $C(G_1) \subset \mathcal{H}$ et $C(G_2) \subset \widehat{\mathcal{H}}$ donnés par $F(s) = \delta_1(s)\delta(s)^{-1/2}$ et $\widehat{F}(g) = \delta_2(g)\delta(g)^{-1/2}$.

Dans le cas de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$ (qui est l'algèbre $\widehat{\mathcal{H}}$ du couple assorti G_1, G_2 décrit ci-dessus), le groupe G_2 est «nilpotent» et le groupe G est simple, donc les fonctions δ_2 et δ sont égales à 1. Il s'ensuit que $F = 1$ et $\widehat{F}$ est donné par le module de G_1. On trouve $\widehat{F}(X_i) = \widehat{F}(\delta_\alpha) = 0$ et $\widehat{F}(Y_{i,j}) = \mathrm{Tr}(Y_{i,j}) = \delta_i^j$.

Un théorème de type Van Est permet de calculer la cohomologie cyclique périodique $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{per,Hopf}}(\mathcal{H}_n)$ d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_n$: c'est la cohomologie de Gel'fand-Fuchs de l'algèbre de Lie de dimension infinie $\mathfrak{g}$ de G.

THÉORÈME 3 (*cf.* [20]). — *Pour $j = 0, 1$, on a un morphisme de complexes qui induit un isomorphisme*

$$\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} H^{j+2i}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per,Hopf}}(\mathcal{H}_n).$$

Dans le cas de l'action de l'algèbre $\mathcal{H}_n$ sur $\mathcal{R} = C_c^\infty(G_1)\rtimes G$, la forme linéaire définie par $f \mapsto \int_{G_1} f(s)\,ds$ et $fU_g \mapsto 0$ si $g \neq \mathrm{id}$ est une trace $\widehat{F}$-invariante. On en déduit des homomorphismes

$$\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{HC}^*(\mathcal{R}) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i\in\mathbf{N}} H^{j+2i}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per,Hopf}}(\mathcal{H}_n) \to \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per}}(\mathcal{R}).$$

Cependant, l'algèbre qui nous intéresse n'est pas $\mathcal{R}$ mais plutôt $\mathcal{A}_n = C_c^\infty(P_n)\rtimes G$ où $P_n = G_1/SO(n)$ est l'espace des métriques. L'algèbre $\mathcal{A}_n$ est l'algèbre des points fixes de $\mathcal{R}$ sous l'action du groupe $SO(n)$. On utilise ici une application classifiante relative

$$\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} H^{j+2i}(\mathfrak{g}; SO(n)) \simeq \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per,Hopf}}(\mathcal{H}_n; SO(n)) \to \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per}}(\mathcal{A}_n).$$

La cohomologie $H^k(\mathfrak{g}; SO(n))$ est la cohomologie de Gel'fand-Fuchs $H^*(WSO(n))$ (*cf.* [25, 26]). Elle est engendrée par des classes de Pontrjagyn et des classes secondaires.

Revenons enfin à la situation qui nous intéressait au départ : soit M une variété et Γ un pseudogroupe de difféomorphismes de M préservant une orientation. Notons $P = P_M$ l'espace total du fibré des métriques de M. On peut remplacer M par un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M et le pseudogroupe Γ par un pseudogroupe Γ' de difféomorphismes locaux de $\Omega = \coprod_{i\in I} U_i$. L'algèbre obtenue $C_c^\infty(P_\Omega)\rtimes\Gamma'$ est équivalente à $C_c^\infty(P_M)\rtimes\Gamma$ au sens de Morita, de sorte que ces deux algèbres ont même cohomologie cyclique. Puisque Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, on obtient l'homomorphisme classifiant voulu :

$$\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} H^{j+2i}(\mathfrak{g}; SO(n)) \to \mathrm{HC}^j_{\mathrm{per}}(C_c^\infty(P_M)\rtimes\Gamma).$$

4.6. Le cocycle cyclique Φ (*cf.* [**20**])

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un cocycle cyclique Φ dans la cohomologie $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n; SO(n))$ dont l'image par l'application classifiante sera le cocycle cyclique φ de la formule d'indice locale associée à l'opérateur de signature transverse D. Pour cela on utilise les observations suivantes :

1. On peut remplacer dans cette formule l'opérateur D (qui est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 dans le calcul pseudodifférentiel des variétés de Heisenberg) par l'opérateur différentiel $Q = D|D|$ d'ordre 2. La classe de cohomologie cyclique ne changera pas.

2. L'opérateur Q provient de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)$ de l'algèbre de Lie de $G_1 = \mathbf{R}^n \rtimes GL^+(n)$, qui est incluse dans $\mathcal{H}_n$. C'est d'ailleurs grâce à cette observation que l'on démontre aisément que Q est autoadjoint. Le cocycle φ s'écrit donc comme combinaison de termes

$$(a_0, \dots, a_k) \mapsto \int\!\!\!\!\!\!- a_0 R_1 a_1 \dots R_k a_k T\,,$$

où $R_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)$ et T est un opérateur pseudodifférentiel dans le calcul pseudodifférentiel de Heisenberg.

3. En faisant commuter successivement les champs de vecteurs apparaissant dans les R_j avec des éléments de $\mathcal{A}$, on se ramène à des termes de la forme

$$(a_0, \dots, a_k) \mapsto \int\!\!\!\!\!\!- a_0(h_1 \cdot a_1) \dots (h_k \cdot a_k) T\,,$$

où T est un opérateur pseudodifférentiel dans le calcul de Heisenberg.

4. On suppose que le (pseudo-)groupe Γ agit librement dans les repères de $\mathbf{R}^n$. On en déduit l'annulation de tous les termes $\int\!\!\!\!\!\!- (f_k U_{g_0})(h_1 \cdot (f_1 U_{g_1}) \dots (h_k \cdot (f_k U_{g_k}))T$ tels que $g_0 g_1 \dots g_k \neq 1$.

5. Si $f \in C_c^\infty(P)$, le résidu de Wodzicki généralisé $\int\!\!\!\!\!\!- fT$ s'écrit $\int_P f\alpha$ où α est une forme volume sur P obtenue en intégrant le symbole d'ordre $-n(n+3)/2$ de T (dans le calcul

de Heisenberg ; $n(n+3)/2$ est la dimension critique) sur la « sphère ». De plus, l'opérateur Q étant invariant par l'action de G_1, l'opérateur T dans l'étape 3 est aussi invariant par l'action de G_1, donc α est la forme volume. Cela montre que φ peut s'exprimer comme somme de termes

$$(a_0,\ldots,a_k)\mapsto \tau(a_0,\ldots,a_k)\mapsto \tau\big(a_0(h_1\cdot a_1)\ldots(h_k\cdot a_k)\big).$$

6. Ce qui précède montre que φ est l'image d'un élément Φ par l'homomorphisme classifiant de bicomplexes

$$\chi : \bigoplus_k \mathcal{H}_n^{\otimes k}\to \bigoplus_k C_k(\mathcal{R},\mathcal{R}^*).$$

Comme le morphisme χ est injectif, Φ est un cocycle cyclique.

4.7. Calcul de Φ ([2])

Il est assez facile de calculer l'accouplement du cocycle cyclique φ avec des éléments de K-théorie de l'algèbre $C_c^\infty(P)\rtimes\Gamma$ provenant de l'application de Baum-Connes. On peut en déduire assez facilement les classes de Pontrjagyn qui apparaissent. Par ailleurs, Connes et Moscovici montrent que les classes secondaires ne peuvent pas intervenir dans cette formule.

4.8. Une variante de l'algèbre de Hopf (*cf.* [**23**])

Pour construire l'application classifiante $H^*(WSO(n))\to \mathrm{HC}^*_{\mathrm{per}}(\mathcal{A})$, on a d'abord dû remplacer M par un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Il est possible de modifier un peu cette étape de la manière suivante.

Pour construire l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_n$, on a utilisé le sous-groupe G_1 du groupe des difféomorphismes de $\mathbf{R}^n$ qui opère librement et transitivement sur les repères. Un tel groupe n'existe pas pour une variété M quelconque. On peut par contre considérer le groupoïde $R\times R$, où R est l'espace des repères sur M. Cela donne lieu à une algèbre de Hopf qui est plutôt un groupoïde quantique $\mathcal{H}_M$. On peut alors construire une cohomologie d'algèbre de Hopf $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_M)$, ainsi qu'une application classifiante $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_M)\to \mathrm{HC}^*(\mathcal{A})$ et un cocycle $\Phi_M\in \mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_M)$ dont l'image est φ.

On montre enfin que le morphisme canonique $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_n)\to \mathrm{HC}^*_{\mathrm{Hopf}}(\mathcal{H}_M)$ est un isomorphisme.

Remarque (*cf.* [4]). — Il n'est en fait pas difficile de construire ainsi un « groupoïde quantique » associé à une action transitive d'un groupe G sur un espace X, dans la ligne exposée en 4.1.

([2]) Cette partie n'est pas encore écrite. Elle est présentée ici d'après des explications orales des auteurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. Atiyah, *Global theory of elliptic operators,* Proc. Int. Conf. Functional Analysis and Related Topics. Univ. Tokyo Press (1970), 21-30.

[2] S. Baaj et G. Skandalis, *Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*-algèbres,* Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4e série **26** (1993), 425-488.

[3] S. Baaj et G. Skandalis, *Transformations pentagonales,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327**, no. 7 (1998), 623-628.

[4] S. Baaj et G. Skandalis, *en préparation.*

[5] R. Beals and P. Greiner, *Calculus on Heisenberg manifolds,* Annals of Mathematics Studies **119**, Princeton University Press, Princeton, NJ (1988).

[6] L.G. Brown, R.G. Douglas and P.A. Fillmore, *Extensions of C^*-algebras and K-homology,* Ann. of Math. **105** (1977), 265-324.

[7] P. Cartier, *Homologie cyclique : rapport sur des travaux récents de Connes, Karoubi, Loday, Quillen…,* Sém. Bourbaki, 1983/84, Astérisque **121-122**, Soc. Math. France (1985), 123-146.

[8] J. Cheeger, *Spectral geometry of singular Riemannian spaces,* J. Differential Geom. **18**, no. 4 (1983), 575-657.

[9] A. Connes, *Sur la théorie non commutative de l'intégration,* Lect. Notes in Math. **725** (1979), 19-143.

[10] A. Connes, *Non commutative differential geometry. Chapter I : The Chern character in K-homology. Chapter II : De Rham homology and non commutative algebra,* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **62** (1985), 257-360.

[11] A. Connes, *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation,* Geometric methods in operator algebras (Kyoto, 1983), Longman Sci. Tech., Harlow, Pitman Res. Notes Math. Ser. **123** (1986), 52-144.

[12] A. Connes, *Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of θ-summable Fredholm modules,* K-Theory **1**, no 6 (1988), 519-548.

[13] A. Connes, *Non commutative geometry,* Academic Press, Inc., San Diego, CA (1994).

[14] A. Connes, *Geometry from the spectral point of view,* Letters in Mathematical Physics **34** (1995), 203-238.

[15] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function,* Selecta Math. (N.S.) **5**, no. 1 (1999), 29-106.

[16] A. Connes and D. Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry,* Comm. Math. Phys. **199**, no. 1 (1998), 203-242.

[17] A. Connes and D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I : The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem,* Comm. Math. Phys. **210**, no. 1 (2000), 249-273.

[18] A. Connes and D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II : The β-function, diffeomorphisms and the renormalization group,* Comm. Math. Phys. **216**, no. 1 (2001), 215-241.

[19] A. Connes and H. Moscovici, *The local index formula in noncommutative geometry,* Geom. Funct. Anal **5**, no 2 (1995), 174-243.

[20] A. Connes and H. Moscovici, *Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem,* Comm. Math. Phys. **198**, no. 1 (1998), 199-246.

[21] A. Connes and H. Moscovici, *Cyclic cohomology and Hopf algebras,* Letters in Mathematical Physics **48** (1999), 97-108.

[22] A. Connes and H. Moscovici, *Cyclic Cohomology and Hopf Algebra Symmetry,* Letters in Mathematical Physics **52** (2000), 1-28.

[23] A. Connes and H. Moscovici, *Differentiable cyclic cohomology and Hopf algebraic structures in transverse geometry* (preprint 2001).

[24] M. Crainic, *Cyclic Cohomology of Hopf algebras and a Noncommutative Chern-Weil Theory* (preprint 1998).

[25] I.M. Gel'fand and D.B. Fuks, *Cohomologies of the Lie algebra of formal vector fields (Russian),* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34** (1970), 322-337.

[26] G. Godbillon, *Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels,* Sém. Bourbaki, 1971/72, exp. n° 421, *Lect. Notes in Math.* **383** (1974), 69-87.

[27] J. Gracia-Bondía, J. Várilly and H. Figueroa, *Elements of noncommutative geometry,* Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher, Boston, MA (2001).

[28] M. Hilsum et G. Skandalis, *Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov,* Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4e série **20** (1987), 325-390.

[29] A. Jaffe, A. Lesniewski and K. Osterwalder, *Quantum K-theory. I. The Chern character,* Comm. Math. Phys. **118**, no. 1 (1988), 1-14.

[30] G.I. Kac, *Extensions of groups to ring groups,* Math U.S.S.R. Sbornik **5** (1968), 451-474.

[31] G.G. Kasparov, *The operator K-functor and extensions of C^*-algebras,* Math. USSR Izv. **16** (1981), n° 3, 513-572. *Translated from :* Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Mat.44, (1980), 571-636.

[32] C. Kassel, *Le résidu non commutatif (d'après M. Wodzicki),* Séminaire Bourbaki, vol. 1988/89, exposé n° 708, Astérisque **177-178** (1989), 199-229.

[33] D. Kreimer, *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories,* Adv. Theor. Math. Phys. **2**, no. 2 (1998), 303-334.

[34] J. Kustermans and S. Vaes, *Locally compact quantum groups,* Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4e série **33** (6) (2000), 837-934.

[35] J-M. Lescure, *Triplets spectraux pour les pseudovariétés à singularité conique isolée,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327**, no. 10 (1998), 871-874.

[36] J-M. Lescure, *Triplets spectraux pour les pseudo-variétés avec singularité conique isolée. Thèse* (preprint 1997).

[37] S. Majid, *Hopf-von Neumann algebra bicrossproducts, Kac algebra bicrossproducts, and the classical Yang-Baxter equations,* J.F.A. **95**, no. 2 (1991), 291-319.

[38] R. Ponge, *Calcul hypoelliptique sur les variétés de Heisenberg, résidu non commutatif et géométrie pseudo-hermitienne. Thèse* (preprint 2000).

[39] R. T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator. Singular Integrals,* Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill. (1966) Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1967), 288-307.

[40] M.E. Sweedler, *Hopf algebras,* Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., New York (1969).

[41] M. Takeuchi, *Matched pairs of groups and bismashed product of Hopf algebras,* Comm. Alg. **9** (1981), 841-882.

[42] B.L. Tsygan, *Homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology (en russe),* Uspekhi Mat. Nauk **38**, n^{o} 2 (230) (1983), 217-218.

[43] S. Vaes and L. Vainerman, *Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction* (preprint 2001).

[44] M. Wodzicki, *Noncommutative residue. I. Fundamentals,* K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984-1986), Lecture Notes in Math. **1289** (Springer, Berlin) (1987), 320-399.

Georges SKANDALIS

UMR 7586 du C.N.R.S.
Université de Paris VII
U.F.R. de Mathématiques
Case Postale **7012**
2, place Jussieu
F-75251 Paris cedex 05 PARIS

E-mail : skandal@math.jussieu.fr