1 Talområden och funktioner

1.1 Talmängder och intervall

I detta avsnitt införs talmängderna $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ av naturliga, hela, rationella, reella respektive komplexa tal.

$$\textbf{Naturliga talen,} \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}\,.$$

De naturliga talen kan användas för att beteckna antalet objekt i en mängd M samt för att lösa enkla ekvationer,

$$x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 3 + 2 = 5 \in \mathbb{N}\,.$$

$$\textbf{Hela talen,} \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}\,.$$

En utvidgning av $\mathbb{N}$. Möjliggör lösning av en större mängd av ekvationer,

$$x + 4 = 3 \Leftrightarrow x = 3 + (-4) = -1 \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1\}\,.$$

$$\textbf{Rationella talen,} \quad \mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ och } q \neq 0\}\,.$$

De rationella talen är kvoter av heltal. Framställningen av ett rationellt tal är **mångtydig**,

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \dots\,.$$

Enklaste framställningen $\frac{p}{q}$ fås då vi kräver att p och q saknar gemensamma faktorer förutom ± 1.

I vissa fall kan ett rationellt tal $\frac{p}{q}$ framställas med en **avslutad decimalutveckling**,

$$\frac{5}{8} = 0.625 = 0 + \frac{6}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}.$$

I övriga fall krävs en **oavslutad periodisk decimalutveckling**,

$$\frac{104}{33} = 3.15151515\overline{15}\ldots.$$

Exempel 1.1. Det finns tal som **inte är rationella**, exempelvis lösningen till ekvationen $x^2 - 2 = 0$, $x > 0$, som betecknas $x = \sqrt{2}$. (Se föreläsningsanteckningar).

De **irrationella talen** har en decimalutveckling som är **oavslutad och icke-periodisk**,

$$\sqrt{2} = 1.414213562\ldots,$$

och de kan approximeras godtyckligt noga i $\mathbb{Q}$ med ett avslutat decimalbråk, exempelvis

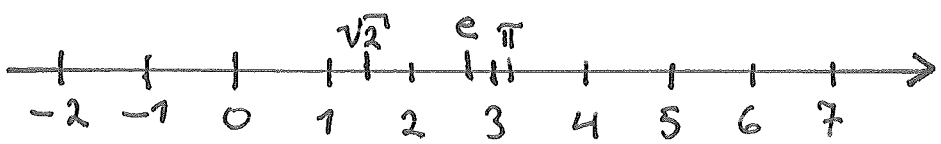
$$\sqrt{2} \approx 1.4142 = \frac{14142}{10000} = \frac{7071}{5000}.$$

Andra välbekanta irrationella tal:

$$\pi = 3.14159265\ldots, \quad e = 2.71828183\ldots \quad \text{(Neperska talet)}.$$

Reella talen, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationella tal}\}$.

De reella talens mängd $\mathbb{R}$ består alltså av alla rationella och irrationella tal, och kan geometriskt åskådliggöras som alla punkter på en tallinje:

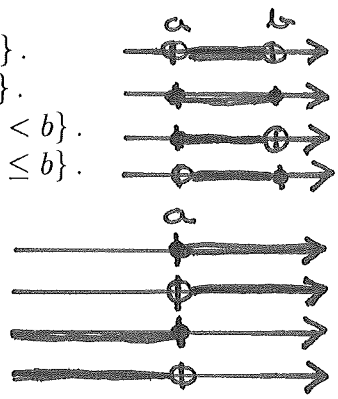


Punkterna på tallinjen är ordnade så att om $a, b \in \mathbb{R}$ och $a \neq b$ och b ligger till höger om a, så gäller det att $a < b$.

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \quad \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}.$$

Med hjälp av punkterna på tallinjen kan vi införa begreppen **öppet, slutet, halvöppet** och **obegränsat intervall**:

Öppet intervall: Med $]a, b[$ avses $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
Slutet intervall: Med $[a, b]$ avses $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
Halvöppet intervall: Med $[a, b[$ avses $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
Halvöppet intervall: Med $]a, b]$ avses $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
Obegränsade intervall:
Med $[a, \infty[$ avses $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.
Med $]a, \infty[$ avses $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.
Med $]-\infty, a]$ avses $\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$.
Med $]-\infty, a[$ avses $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.



Det finns ekvationer som saknar lösning i $\mathbb{R}$, en dylik är ekvationen

$$x^2 + 1 = 0.$$

För att lösa sådana ekvationer måste vi utvidga mängden $\mathbb{R}$ till de **komplexa talens mängd** $\mathbb{C}$,

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R} \text{ och } i = \sqrt{-1}\}.$$

Vi behandlar talmängden $\mathbb{C}$ i detalj i ett senare avsnitt. För de införda talmängderna gäller:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1.2 Mängdsymboler

Repetera: $\in, \{\}, \emptyset, \subseteq, \subset, \cup, \cap, \setminus$.

Exempel 1.2. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

1.3 Implikation och ekvivalens

Implikation: $A \Rightarrow B$,

betyder "A medför B", "Om A så B".

Exempel 1.3.

$$\begin{aligned} x = 2 &\Rightarrow x^2 = 4, \text{ men} \\ x^2 = 4 &\not\Rightarrow x = 2\,. \\ x^2 = 4 &\Rightarrow (x = -2 \text{ eller } x = 2)\,. \end{aligned}$$

Ekvivalens: Om $A \Rightarrow B$ och $B \Rightarrow A$ skriver vi $A \Leftrightarrow B$.

"A är ekvivalent med B", "A och B är ekvivalenta", "A gäller då och endast då B gäller".

Exempel 1.4.

$$\begin{aligned} x^2 = 4 &\Leftrightarrow (x = -2 \text{ eller } x = 2)\,, \\ x^2 = 4 &\not\Leftrightarrow x = 2\,. \end{aligned}$$

Obs! Om man använder implikationspilar vid lösning av ekvationer eller olikheter kan man få en för stor lösningsmängd med felaktiga lösningar. **Kontrollera lösningsmängden om implikationer används!**

Exempel 1.5. Lös för $x \in \mathbb{R}$ ekvationen $2x+1 = \sqrt{3x^2+1}$. (Se föreläsningsanteckningar).

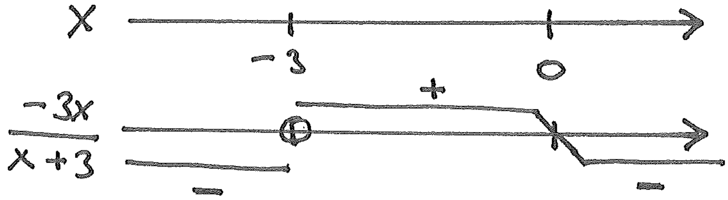
1.4 Olikheter, absolutbelopp och triangelolikheten

Vid lösning av olikheter bör vi minnas att

$$\begin{aligned} a < b \Rightarrow ac < bc, &\quad \text{då } c > 0, \\ a < b \Rightarrow ac > bc, &\quad \text{då } c < 0. \end{aligned}$$

Exempel 1.6. Vilka $x \in \mathbb{R}$ uppfyller olikheten $\frac{x^2}{x+3} \leq x$?
Lösning: Vi utför en omskrivning

$$\frac{x^2}{x+3} \leq x \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3} - x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x}{x+3} \leq 0\,.$$

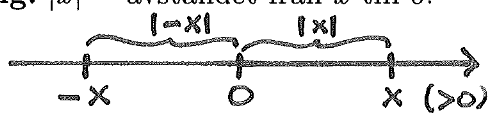


Lösningsmängd: $L = \{x \in \mathbb{R} : x < -3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R} \setminus [-3, 0[\,.$

Definition 1.1. Låt $x \in \mathbb{R}$. Då betecknas **absolutbeloppet** av x med $|x|$ och definieras genom:

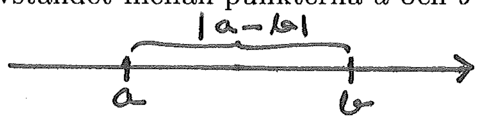
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0, \\ -x, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Geometrisk tolkning: $|x|$ = avståndet från x till 0.



Egenskaper: ($x \in \mathbb{R}$)

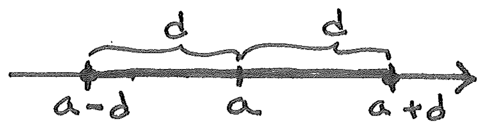
(1) $|-x| = |x|\,,$
(2) $\forall\, x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0,$ och $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0\,,$
(3) $x \leq |x|$ och $-x \leq |x|\,,$
(4) $|x| = \sqrt{x^2}\,,$
(5) $|a - b| =$ avståndet mellan punkterna a och b på tallinjen,



(6) $|ab| = |a||b|\,, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ (b \neq 0)\,.$

Exempel 1.7. Bestäm de $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller $|x{+}1| \leq |x|$. (Se föreläsningsanteckningar)

Exempel 1.8. Beskriv geometriskt mängden $M = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq d$, där $a \in \mathbb{R}$ och $d > 0$.
Lösning: $M = [a - d, a + d]$ = Mängden av punkter på ett avstånd som är mindre än eller lika med d från punkten a.



$a - d \leq x \leq a + d$

Sats 1.1. Triangelolikheten. För alla $x, y \in \mathbb{R}$ gäller

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|\,. \tag{1.1}$$

Bevis: Med stöd av egenskap (3) för absolutbelopp gäller

$$(x \leq |x| \text{ och } y \leq |y|) \Rightarrow x + y \leq |x| + |y|\,,$$
$$(-x \leq |x| \text{ och } -y \leq |y|) \Rightarrow -x + (-y) = -(x + y) \leq |x| + |y|\,.$$

Eftersom $|x + y|$ är lika med antingen $x + y$ eller $-(x + y)$ gäller

$$|x + y| \leq |x| + |y|\,. \quad (*)$$

Byte av y mot $-y$ i $(*)$ ger

$$|x - y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|\,. \quad \square$$

Sats 1.2. Omvända triangelolikheten. För alla $x, y \in \mathbb{R}$ gäller

$$|x \pm y| \geq ||x| - |y||\,. \tag{1.2}$$

Bevis: (Se föreläsningsanteckningar).

Med stöd av satserna 1.1 och 1.2 gäller för alla $x, y \in \mathbb{R}$ olikheterna:

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y| \,. \tag{1.3}$$

Triangelolikheterna är synnerligen viktiga arbetsredskap för olika typer av uppskattningar.

Exempel 1.9. Visa med hjälp av triangelolikheten att $|1 + a| + |1 - a| \geq 2$ för alla $a \in \mathbb{R}$. (Se föreläsningsanteckningar).

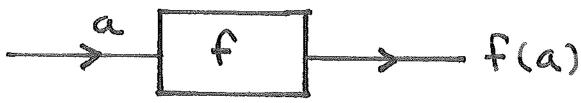
1.5 Funktionsbegreppet

Historiskt har man med en funktion avsett ett uttryck i en eller flera variabler, exempelvis

$$x^2 + 1 \quad \text{eller} \quad (x - y)^2 - 2 \,,$$

som ger en entydig transformationsregel då variabeln (variablerna) väljs ur en viss definitionsmängd.

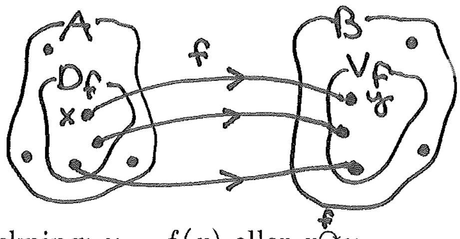
Det moderna funktionsbegreppet är vidare. Med en **funktion** f avses en **regel** eller **procedur** som på ett **väldefinierat** och **entydigt** sätt avbildar element ur en **definitionsmängd** D_f för f på element i en **värdemängd** V_f för f.



Verkan av funktionen f på ett element $a \in D_f$ betecknas $f(a)$ och kallas **värdet** av f i a eller **bilden** av a under f.

Vi skall även ge en mera formell definition av begreppet funktion. Antag att A och B är två icke-tomma mängder.

Definition 1.2. Att f är en **funktion** från A till B betyder att f tillordnar varje element $x \in A$ högst ett element $y \in B$



$f : A \to B$

"f är en avbildning från A till B"

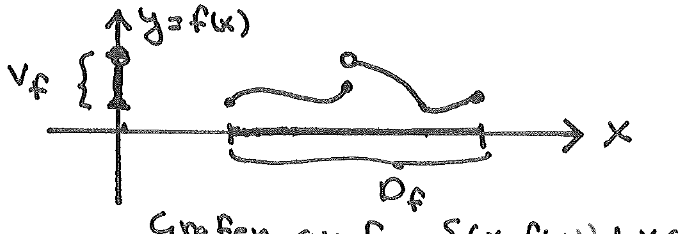
Beteckning: $y = f(x)$ eller $x \overset{f}{\mapsto} y$.
Definitionsmängden och värdemängden för f:

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in A : \text{ det finns ett } y \in B \text{ sådant att } y = f(x)\}, \\ V_f &= \{f(x) : x \in D_f\}. \\ D_f &\subseteq A, \quad V_f \subseteq B. \end{aligned}$$

I fortsättningen är vi främst intresserade av reellvärda funktioner f av en reell variabel, dvs. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. För en dylik avbildning defineras **grafen** av f som mängden

$$\{(x, f(x)) : x \in D_f\}.$$

Med (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, avses ett **ordnat** reellt talpar, med andra ord ett element ur produktmängden $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, som består av alla ordnade reella talpar. Då gäller det att $(a, b) = (c, d)$ om och endast om $a = c$ och $b = d$. Grafen av f kan då framställas i ett rätvinkligt två-dimensionellt koordinatsystem med definitionsmängden på x-axeln och värdemängden på y-axeln,



Grafen av f, $\{(x, f(x)) : x \in D_f\}$

Exempel 1.10. Bestäm definitionsmängden för avbildningen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av regeln $y = f(x) = \sqrt{4x - x^2}$. Ange även värdemängden, samt skissera grafen av f. (Se föreläsningsanteckningar).

1.6 Polynom och rationella funktioner

Ett **polynom** är en funktion av formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vi antar att **koefficienterna** $a_0, \ldots, a_n$ är reella tal. Om $a_n \neq 0$ är polynomets **grad** n, vilket betecknas

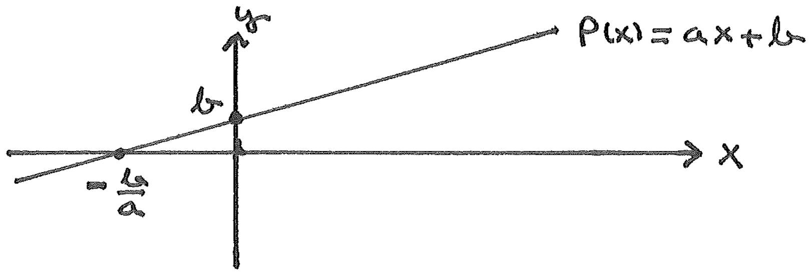
$$\operatorname{grad} p = n.$$

Nollställena till ett polynom $p(x)$ är **rötterna** till ekvationen

$$p(x) = 0.$$

Polynomet $p(x) = a_0$ är ett polynom av grad 0 med en graf som är en rät linje parallell med x-axeln.

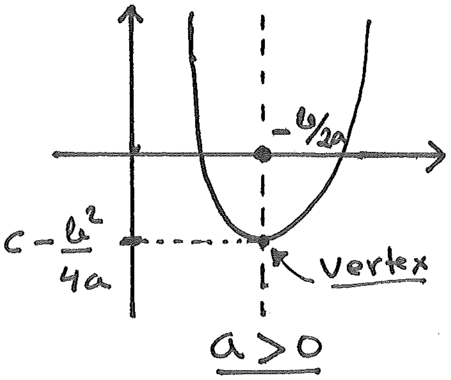
Polynomet $p(x) = ax+b$, $a \neq 0$, är ett **förstagradspolynom** vars graf är en rät linje. Koefficienten a bestämmer linjens **lutning** och kallas **riktningskoefficient**. Koefficienten b anger y-koordinaten för linjens skärningspunkt med y-axeln, medan skärningspunkten med x-axeln ges av $x = -\frac{b}{a}$, som alltså är **nollstälet** till $p(x)$.

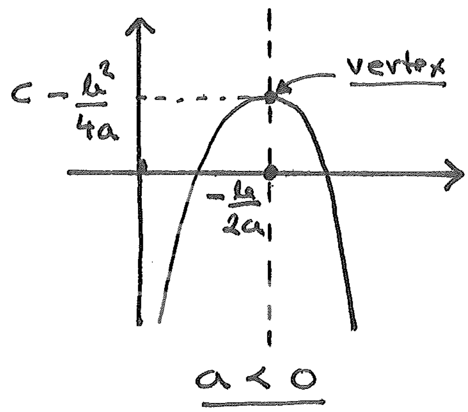


Ett **andragradspolynom** $p(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, kallas en **parabel**. Dess nollställen och graf kan erhållas genom **kvadratkomplettering**,

$$\begin{aligned} p(x) = ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2) \\ &= a((x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2). \end{aligned}$$

Vi ser att $x = -\frac{b}{2a}$ utgör en **symmetriaxel**, ty $p(-\frac{b}{2a} + t) = p(-\frac{b}{2a} - t)$ för $t \geq 0$. Om $a > 0$ antar $p(x)$ ett **minsta** värde $c - \frac{b^2}{4a}$ i punkten $x = -\frac{b}{2a}$, och om $a < 0$ är det ett **största** värde som antas,





Punkten $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$ kallas **vertex** för parabeln.

Av kvadratkompletteringen framgår det att nollställena ges av ekvationen:

$$
\begin{aligned}
&(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.
\end{aligned}
$$

Vi erhåller alltså formeln

$$
x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},
$$

för nollställena x_1 och x_2 till $p(x)$. Nollställena är **reella** tal då $b^2 - 4ac \geq 0$, annars är de **komplexa** tal. Om $b^2 - 4ac = 0$ har vi ett nollställe med multipliciteten 2, dvs. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Man kan även ange (komplicerade) allmänna lösningsformler för nollställena till tredje- och fjärdegradspolynom, men om gradtalet är > 4 finns inga allmänna lösningsformler, utan man får vanligen nöja sig med närmevärden till nollställena som beräknas med någon numerisk procedur.

Sats 1.3. Antag att $p_1(x)$ och $p_2(x)$ är två polynom med grad $p_2 \geq 1$. Då finns det två polynom $q(x)$ och $r(x)$, kallade **kvoten** respektive **resten** vid division av $p_1(x)$ med $p_2(x)$, sådana att

$$\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} p_2$$

och

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{p_2(x)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$p_1(x) = p_2(x)q(x) + r(x)\,.$$

Om resten $r(x) = 0$ säger vi att divisionen går jämnt ut. Då har vi

$$p_1(x) = p_2(x)q(x)\,,$$

så $p_2(x)$ och $q(x)$ är **faktorer** i $p_1(x)$. En **divisionsalgoritm** för bestämning av kvoten och resten beskrivs i följande exempel.

Exempel 1.11. Vi gör systematiska omskrivningar av följande rationella uttryck för att erhålla kvoten och resten:

$$\begin{aligned}
\frac{3x^4+4x^2-5}{x^2+x+1} &= \frac{3x^2(x^2+x+1)+(-3x^3+x^2-5)}{x^2+x+1} = 3x^2 + \frac{-3x^3+x^2-5}{x^2+x+1} \\
&= 3x^2 + \frac{-3x(x^2+x+1)+(4x^2+3x-5)}{x^2+x+1} \\
&= 3x^2 - 3x + \frac{4x^2+3x-5}{x^2+x+1} \\
&= 3x^2 - 3x + \frac{4(x^2+x+1)+(-x-9)}{x^2+x+1} \\
&= 3x^2 - 3x + 4 + \frac{-x-9}{x^2+x+1}\,.
\end{aligned}$$

Alltså: $q(x) = 3x^2-3x+4$ och $r(x) = -x-9$. Motsvarande omskrivningar kan också utföras med hjälp av ett **räkneschema**, (Se föreläsningsanteckningar).

Sats 1.4. Faktorsatsen. Om talet x_0 är en rot till polynomekvationen $p(x) = 0$, så är polynomet $x - x_0$ en faktor i $p(x)$,

$$p(x) = (x - x_0)\, q(x)\,,$$

för något polynom $q(x)$.

Bevis: Antag att $p(x_0) = 0$. Division av $p(x)$ med förstagradspolynomet $x - x_0$ ger med stöd av Sats 1.3 en rest $r(x)$ av gradtal 0. Alltså är $r(x) = C$ för någon konstant C och

$$p(x) = (x - x_0)q(x) + C\,.$$

Antagandet att $p(x_0) = 0$ medför att $0 = p(x_0) = (x_0 - x_0)q(x_0) + C$, vilket ger att $C = 0$ och $p(x) = (x - x_0)q(x)$. □

Faktorsatsen kan exempelvis användas vid bestämning av rötter till polynomekvationer. Om vi har funnit en rot x_0 till ekvationen $p(x) = 0$, så kan vi reducera ekvationens gradtal genom att dividera $p(x)$ med faktorn $(x - x_0)$.

Exempel 1.12. Lös fullständigt ekvationen $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$. (Se föreläsningsanteckningar).

Vanligen är det omöjligt att gissa sig till en rot för en polynomekvation av gradtal ≥ 3. Om ekvationen har heltalskoefficienter, så finns det ett systematiskt tillvägagångssätt för att utreda om ekvationen har rationella rötter.

Sats 1.5. Antag att polynomet

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

har heltalskoefficienter och låt $x_0 = \frac{p}{q}$ vara ett rationellt tal skrivet så att heltalen p och q saknar gemensamma faktorer, förutom ± 1. Om x_0 är en rot till ekvationen $f(x) = 0$, så måste p vara en faktor i a_0 och q en faktor i a_n.

Bevis: Antagandet $f(x_0) = 0$ ger

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{p^n}{q^n} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \\
& \Leftrightarrow \\
& a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n \\
& \Leftrightarrow \\
& p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n\,.
\end{aligned}$$

Då p är en faktor i vänstra ledet, måste p även vara en faktor i högra ledet $-a_0q^n$. Nu saknar p och q^n gemensamma faktorer (utom ± 1), vilket medför att p är en faktor i a_0. På motsvarande vis, genom att istället flytta a_np^n till högra ledet, fås att q är en faktor i a_n. □

Exempel 1.13. Bestäm de rationella rötterna till ekvationen

$$8x^3 + 20x^2 - 2x - 5 = 0\,.$$

Lösning: Med stöd av föregående sats får vi för en möjlig rationell rot $x_0 = \frac{p}{q}$ alternativen:

$$p = \pm 1,\ \pm 5 \quad \text{och} \quad q = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8\,.$$

Därmed löns det att testa

$$x_0 = \pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{8},\ \pm 5,\ \pm\frac{5}{2},\ \pm\frac{5}{4},\ \pm\frac{5}{8}\,.$$

Av dessa alternativ finner vi att $\pm\frac{1}{2}$ och $-\frac{5}{2}$ är rationella rötter till tredjegradsekvationen.

Om talet x_0 är en rot till polynomekvationen $p(x) = 0$ så ger faktorsatsen att $x - x_0$ är en faktor i $p(x)$. Antalet gånger faktorn $x - x_0$ innehålls i $p(x)$ kallas **multipliciteten** av roten x_0. Ekvationen

$$(x-5)(x+2)^2(x-1)^3 = 0$$

har tre rötter, roten 5 med multipliciten 1, en **enkelrot**, roten -2 med multipliciteten 2, en **dubbelrot**, och roten 1 med multipliciteten 3, en **trippelrot**.

En **rationell funktion** är av formen

$$\frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

där f och g är polynom. Med stöd av Sats 1.3 kan en rationell funktion skrivas på formen

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}\,,$$

där kvoten q är ett polynom och resten r är ett polynom med grad $r <$ grad g.

En rationell funktion är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$, förutom de reella nollställena till nämnarpolynomet $g(x)$.

Utseendet på den rationella funktionens graf beror dels av nämnarens nollställen och för stora värden på $|x|$ på förhållandet mellan täljar- och nämnargradtalen. Vi betraktar några exempel.

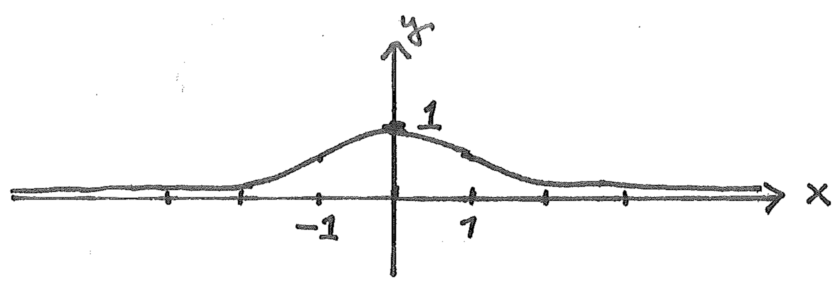
Exempel 1.14. Den rationella funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$$

har definitionsmängden $D_f = \mathbb{R}$. Vi har att $f(-x) = f(x)$, så f är symmetrisk med avseende på y-axeln. För stora värden på $|x|$ är funktionsvärdena små och närmar sig 0 då $|x|$ växer. Det gäller då att $f(x)$ går mot 0 då x går mot (plus) och (minus) oändligheten. (Detta beteende är typiskt då nämnarens gradtal är större än täljarens). Vi skriver:

$$f(x) \to 0 \text{ då } x \to +\infty \quad \text{och} \quad f(x) \to 0 \text{ då } x \to -\infty\,.$$

Största värdet antas i $x = 0$, där $f(0) = 1$. Grafens ungefärliga utseende:



Exempel 1.15. En rationell funktion där täljar-och nämnargradtalena är lika,

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 + x^2}\,.$$

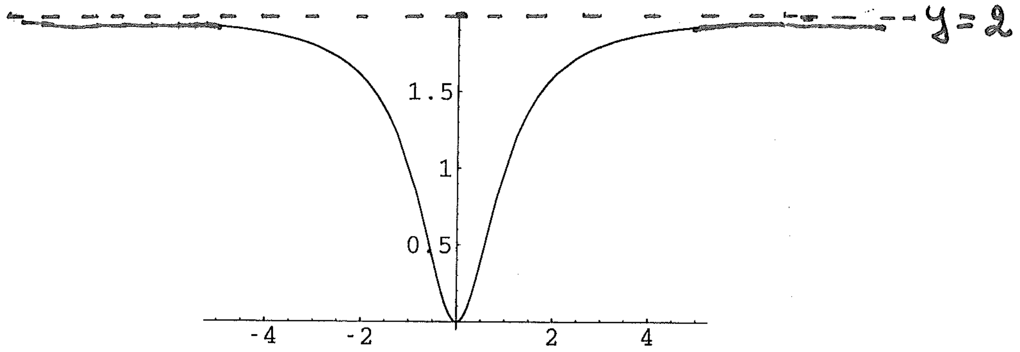
Igen är $D_f = \mathbb{R}$ och $f(x) = f(-x)$. Vi gör omskrivningen

$$f(x) = \frac{2(x^2+1)-2}{1+x^2} = 2 - \frac{2}{1+x^2},$$

och observerar att $f(0) = 0$ är det minsta funktionsvärdet, att $f(x) < 2$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och att $f(x) \to 2$ då $x \to \pm\infty$. En graf av f (producerad med det symboliska programpaketet Mathematica på Aton):

```
In[1]:= f[x_] := 2 x^2 / (1 + x^2);

In[7]:= Plot[f[x], {x, -5, 5}]
```



Exempel 1.16. En rationell funktion med täljargradtal större än nämnargradtal och två singulariteter av vilka en hävbar:

$$f(x) = \frac{-x^3+1}{x^2-1}.$$

Nu är $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Undantagspunkterna ± 1 kallas **singulariteter** eller **poler** för $f(x)$. Även täljaren har nollstället $x = 1$. Faktorsatsen ger att både täljaren och nämnaren innehåller faktorn $x - 1$, som kan förkortas bort,

$$f(x) = \frac{-(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-(x^2+x+1)}{x+1}, \qquad (*)$$

och vi säger att $x = 1$ är en **hävbar** singularitet.

För att se hur $f(x)$ beter sig "långt från 0" gör vi en omskrivning där täljare och nämnare divideras med den ledande termen (högstagradstermen) x i nämnaren,

$$f(x) = \frac{-(x + 1 + \frac{1}{x})}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Vi ser då att

$$f(x) \to -\infty \text{ då } x \to +\infty \quad \text{och} \quad f(x) \to +\infty \text{ då } x \to -\infty.$$

Hur uppför sig $f(x)$ i en närhet av singulariteten -1? Om $x > -1$ och närmar sig -1 "från höger", betecknat $x \to -1^+$, ser vi i formel $(*)$ att nämnaren är ett litet positivt tal (som närmar sig 0) och täljaren närmar sig -1. Då fås att

$$f(x) \to -\infty \text{ då } x \to -1^+.$$

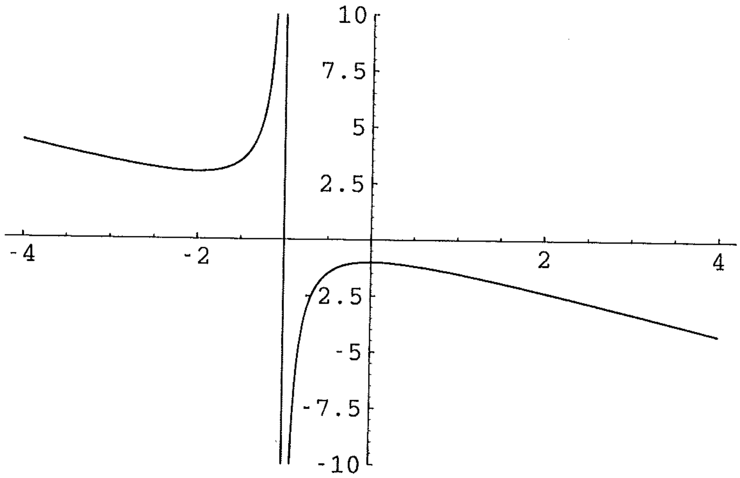
Om $x < -1$ och närmar sig -1 "från vänster", betecknat $x \to -1^-$, blir nämnaren ett litet negativt tal (som närmar sig 0) och täljaren närmar sig -1. Då gäller

$$f(x) \to +\infty \text{ då } x \to -1^-.$$

Grafen av f har utseendet:

```
In[1]:= f[x_] := -(x^2 + x + 1) / (x + 1)

In[4]:= Plot[f[x], {x, -4, 4}, PlotRange -> {-10, 10}]
```



1.7 Geometrisk summa och binomialsatsen

Varje polynom av formen $x^n - 1$ kan faktoriseras på formen

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)\,,$$

vilket inses genom att multiplicera ihop parenteserna i högra ledet. Speciellt för $n = 2$ erhålls **konjugatregeln**

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)\,.$$

En summa av formen

$$a + ax + ax^2 + \ldots + ax^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ax^k$$

kallas en **geometrisk summa**. Kvoten mellan två på varandra följande termer är lika med x, som kallas kvot.
Om $x = 1$ gäller

$$\sum_{k=0}^{n-1} ax^k = n\,a\,.$$

Om $x \neq 1$ erhålls

$$\sum_{k=0}^{n-1} ax^k = a(1 + x + \ldots + x^{n-1}) = a\,\frac{x^n - 1}{x - 1}\,.$$

Exempel 1.17. Beräkna summan $S = \sum_{k=4}^{20} (\frac{1}{3})^k$.
Lösning:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \ldots + \frac{1}{3^{20}} = \frac{1}{3^4}(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^{16}}) \\ &= \frac{1}{3^4}\,\frac{(\frac{1}{3})^{17} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{2 \cdot 3^3}(1 - \frac{1}{3^{17}}) \approx 0.0185\,. \end{aligned}$$

För varje heltal $k > 0$ införs beteckningen $k!$, (uttalas "k-**fakultet**"), för heltalet

$$k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \,.$$

Vidare definieras

$$0! = 1 \,.$$

En kombinatorisk tolkning av talet $k!$ är följande: Antag att vi har k olika objekt som skall numreras med k olika nummerlappar. Den första nummerlappen kan fästas på k olika sätt. Därefter kan den andra nummerlappen fästas på $k-1$ olika sätt. De två första nummerlapparna kan alltså fästas på $k(k-1)$ olika sätt. Ett fortsatt analogt resonemang ger att vi har

$$k(k-1)(k-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1 = k!$$

olika möjligheter att fästa alla k nummerlappar.

För heltalen $n \geq k \geq 0$ definieras **binomialkoefficienterna** $\binom{n}{k}$, (uttalas "n över k"), genom

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \,.$$

Då vi har definierat $0! = 1$ erhålls

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \,.$$

Vidare inses lätt att

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \,.$$

Talet $\binom{n}{k}$ kan kombinatoriskt tolkas som antalet sätt att välja ut k objekt ur n stycken objekt utan hänsyn till ordning.

I grundkursen i sannolikhetslära bevisas följande användbara sats.

Sats 1.6. Binomialsatsen. För varje $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Speciellt för $y = 1$ erhålls

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Följande egenskap, som gäller för alla heltal $n \geq 2$ och $1 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k},$$

kan verifieras genom direkt uträkning. Formeln ger upphov till **Pascals triangel,**

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\iddots & & & \vdots & & & \ddots
\end{array}$$

där varje tal är lika med summan av de två tal som står närmast ovanför, och längs yttersidorna står det ettor. Mera explicit erhålls

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\iddots & & & & \vdots & & & & \ddots
\end{array}$$

Med hjälp av binomialsatsen och Pascals triangel kan vi då lätt utveckla t.ex. uttrycket $(a+b)^4$,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

1.8 Potens- och exponentialfunktioner

Låt $a \neq 0$ vara ett godtyckligt reellt tal, samt antag att $n \in \mathbb{N}$. I **potensen**

$$a^n$$

kallas a **bas** och n **exponent**. För $n = 0$ definieras

$$a^0 = 1$$

och för $n > 0$

$$\begin{aligned} a^n &= a \cdot a \cdot \ldots \cdot a, \quad (n \text{ stycken a:n}), \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}. \end{aligned}$$

Ur definitionerna fås direkt räknelagarna

$$a^m a^n = a^{m+n}, \ (a^m)^n = a^{mn} \text{ och } (ab)^n = a^n b^n.$$

Som nästa steg vill vi för en positiv reell bas $a > 0$ definiera en rationell exponent. För heltaligt $q > 0$ definieras

$$a^{1/q}$$

som den entydigt bestämda **positiva** lösningen x till ekvationen

$$x^q = a.$$

Man använder även beteckningen $\sqrt[q]{a}$ för $a^{1/q}$.

Nu utvidgas definitionen till **rationella exponenter** $\frac{p}{q}$, $q > 0$, genom att för $a > 0$ definiera

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p.$$

För $a > 0$ och godtycklig reell exponent α kan man definiera

$$a^\alpha$$

genom att approximera α med en oändlig följd rationella tal $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots$, sådan att $\frac{p_n}{q_n} \to \alpha$ då $n \to \infty$, och $q_1, q_2, \ldots$ är positiva heltal. Som a^α tar vi "gränsvärdet" av följden $a^{p_1/q_1}, a^{p_2/q_2}, \ldots, a^{p_n/q_n}, \ldots$.

De ovan givna räknelagarna gäller i varje steg av denna utvidgning och vi får allmänna **potenslagar** som gäller för reella $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ och reella $a \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}$:

$$a^0 = 1\,, \tag{1.4}$$
$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}\,, \tag{1.5}$$
$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}\,, \tag{1.6}$$
$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}\,, \tag{1.7}$$
$$a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha\,. \tag{1.8}$$

Därutöver gäller det att

$$a > 1 \text{ och } \alpha < \beta \Rightarrow a^\alpha < a^\beta\,, \tag{1.9}$$
$$0 < a < b \text{ och } \alpha > 0 \Rightarrow a^\alpha < b^\alpha\,. \tag{1.10}$$

Exempel 1.18. Förenkla uttrycket

$$f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x}}\,\sqrt[7]{\frac{1}{x^3}}\,(x^2)^{2/3}\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar).

Låt nu exponenten α vara fixerad och betrakta basen x som variabel. Då får vi **potensfunktionen**

$$f(x) = x^\alpha\,, \quad x > 0\,,$$

med exponent α.

Antag först att exponenten är positiv, $\alpha > 0$. Då ger formel (1.10) att $f(x)$ är **strängt växande**:

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\,.$$

Speciellt gäller för alla $y > 0$ att

$$x > y^{1/\alpha} \Rightarrow f(x) = x^\alpha > (y^{1/\alpha})^\alpha = y\,.$$

För godtyckligt stort y gäller att $f(x) > y$ för alla $x > y^{1/\alpha}$. Alltså gäller det att

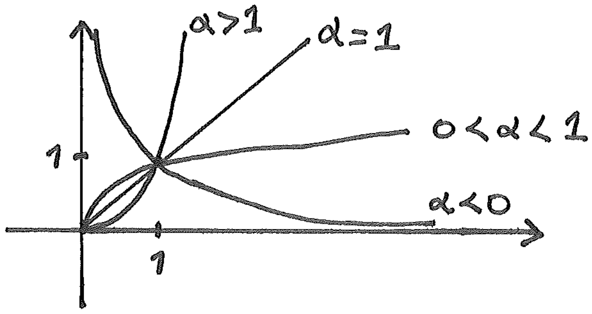
$$f(x) = x^\alpha \to +\infty \text{ då } x \to +\infty .$$

Då

$$x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}},$$

inser vi att för $\alpha < 0$ är $f(x)$ strängt avtagande och $f(x) \to 0$ då $x \to +\infty$.

Grafer av olika potensfunktioner:



Om vi håller basen $a > 0$ fixerad får vi **exponentialfunktionen**

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

med basen a.

Antag att $a > 1$. Då ger formel (1.9) att $f(x)$ är **strängt växande**. Vi kan skriva $a = 1 + p$, $p > 0$. Nu gäller

$$a^x = (1+p)^x \geq (1+p)^n ,$$

där $n = [x]$ = heltalsdelen av x, dvs. det största heltal som är $\leq x$. Då gäller

$$x - 1 < n \leq x .$$

Med stöd av binomialsatsen får vi nu att

$$a^x \geq (1+p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k > n\,p > (x-1)\,p$$

för alla $x > 1$. Då p är ett fixt positivt tal gäller då $a > 1$ att

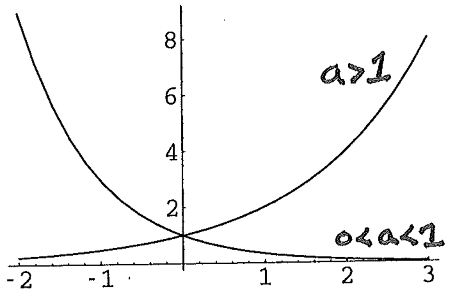
$$a^x \to +\infty \text{ då } x \to +\infty\,.$$

Om $0 < a < 1$ så överför omskrivningen

$$a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$$

behandlingen på fallet $a > 1$.

Grafer av $f(x)$ då $a > 1$ och $0 < a < 1$:



Den mest använda exponentialfunktionen har basen e, det Neperska talet,

$$e = 2.7182818\ldots\,.$$

Vi återkommer senare till definitionen av talet e. Då vi i fortsättningen refererar till "exponentialfunktionen" avses i allmänhet

$$f(x) = e^x\,.$$

Följande sats, som är användbar vi beräkning av gränsvärden, ger en jämförelse av tillväxthastigheterna hos potens- och exponentialfunktioner.

Sats 1.7. Antag att $a > 1$. Då gäller det att

$$\frac{a^x}{x^\alpha} \to +\infty, \text{ då } x \to +\infty\,, \tag{1.11}$$

$$\frac{x^\alpha}{a^x} \to 0, \text{ då } x \to +\infty\,. \tag{1.12}$$

Bevis: Klart att gränsvärdena gäller för $\alpha \leq 0$. Antag att $\alpha = 1$. Beteckna $a = 1 + p$, $p > 0$, och sätt $n = [x]$. Nu ger binomialsatsen uppskattningen

$$a^x = (1+p)^x \geq (1+p)^n > \binom{n}{2} p^2 = \frac{n(n-1)}{2} p^2\,.$$

För $x > 2$ gäller då

$$\frac{a^x}{x} \geq \frac{n(n-1)}{2x} p^2 > \frac{(x-1)(x-2)}{2x} p^2 = (\frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}) p^2\,,$$

och vi ser att

$$\frac{a^x}{x} \to +\infty \text{ då } x \to +\infty\,.$$

Om $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, gör vi omskrivningen

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{(a^{1/\alpha})^x}{x}\right)^\alpha,$$

där $a^{1/\alpha} > 1$, och utnyttjar det vi redan bevisat. $\square$

Exempel 1.19. Hur uppför sig funktionen

$$f(x) = \frac{2^x + x^{50} + 10}{4^x + x}$$

för stora värden på x?

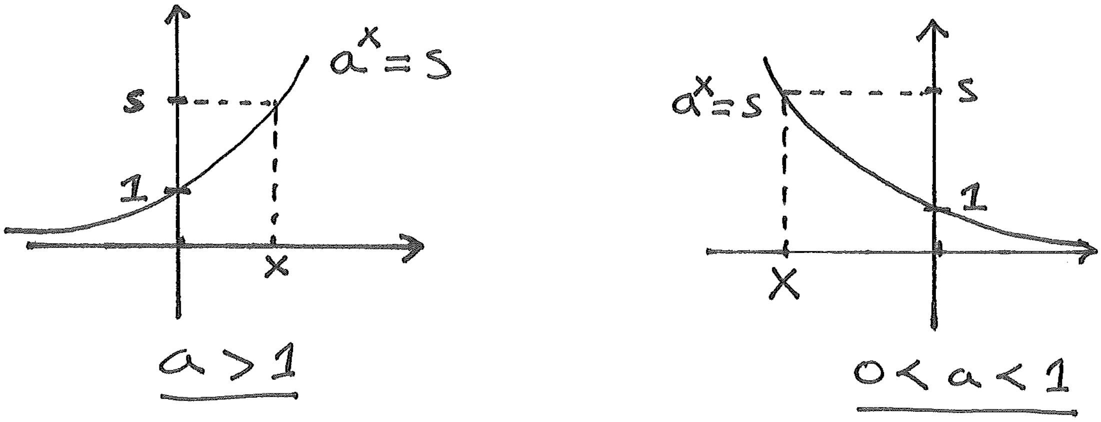
1.9 Logaritmfunktioner

Antag att $a > 0,\ a \neq 1$. Då exponentialfunktionen a^x är strängt växande för $a > 1$ och strängt avtagande för $0 < a < 1$, har ekvationen

$$a^x = s$$

en entydigt bestämd lösning x för alla $s > 0$. Lösningen kallas a-**logaritmen** för s och betecknas

$$x = {}^{a}\log s\,.$$



Talet a kallas **basen** för logaritmen. Vi erhåller formeln

$$a^{{}^{a}\log s} = s\,, \tag{1.13}$$

" ${}^{a}\log s$ är det tal som a skall upphöjas till för att resultatet skall bli s ". För $s = a^t$ gäller då

$${}^{a}\log a^t = t\,. \tag{1.14}$$

Den viktigaste logaritmen har talet $e = 2.718\ldots$ som bas och kallas den **naturliga logaritmen** med beteckningen

$$\ln s = {}^{e}\log s\,.$$

Även 10-**logaritmen** har en egen beteckning,

$$\lg s = {}^{10}\log s\,.$$

Exempel 1.20. Några förenklingar av logaritmer:

$$
\begin{aligned}
&{}^{2}\!\log 32 = {}^{2}\!\log 2^5 = 5\,,\\
&5^{{}^{25}\!\log 13} = (25^{1/2})^{{}^{25}\!\log 13} = (25^{{}^{25}\!\log 13})^{1/2} = \sqrt{13}\,,\\
&\ln(\sqrt[3]{e}) = \ln e^{1/3} = \frac{1}{3}\,,\\
&\lg 100 = \lg 10^2 = 2,\ \lg 0.001 = \lg 10^{-3} = -3\,.
\end{aligned}
$$

För $a > 0$, $a \neq 1$ och $s > 0$, $t > 0$ gäller följande **räknelagar för logaritmer**, som kan bevisas med hjälp av formlerna (1.4) – (1.8) för räkning med potenser,

$$
{}^{a}\!\log 1 = 0\,, \tag{1.15}
$$

$$
{}^{a}\!\log st = {}^{a}\!\log s + {}^{a}\!\log t\,, \tag{1.16}
$$

$$
{}^{a}\!\log \frac{s}{t} = {}^{a}\!\log s - {}^{a}\!\log t\,, \tag{1.17}
$$

$$
{}^{a}\!\log s^t = t\,{}^{a}\!\log s\,, \tag{1.18}
$$

$$
{}^{b}\!\log s = \frac{{}^{a}\!\log s}{{}^{a}\!\log b}\,, \tag{1.19}
$$

där (1.19) ger formeln för basbyte i en logaritm.

Exempel 1.21. Lös ekvationen

$$
{}^{2}\!\log \sqrt{x-1} + {}^{4}\!\log(x+1) = 1\,, \quad x > 1\,.
$$

Lösning: Vi utför basbyte enligt formel (1.19),

$$
{}^{4}\!\log(x+1) = \frac{{}^{2}\!\log(x+1)}{{}^{2}\!\log 4} = \frac{1}{2}\cdot {}^{2}\!\log(x+1)\,.
$$

Vidare ger (1.18) att

$$
{}^{2}\!\log(x-1)^{1/2} = \frac{1}{2}\cdot {}^{2}\!\log(x-1)\,.
$$

Formel (1.16) ger att

$$
\frac{1}{2}\cdot {}^{2}\!\log(x-1) + \frac{1}{2}\cdot {}^{2}\!\log(x+1) = \frac{1}{2}\cdot {}^{2}\!\log(x-1)(x+1)\,.
$$

Vår ekvation kan då omskrivas i formen

$$\frac{1}{2} \cdot {}^2\log(x-1)(x+1) = 1 \Leftrightarrow {}^2\log(x-1)(x+1) = 2\,.$$

Alltså krävs det att

$$\begin{aligned}(x-1)(x+1) = 2^2 &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 5 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}\,.\end{aligned}$$

Den enda lösningen till vår ekvation är då $x = \sqrt{5}$. (Hur uppkom den falska roten $x = -\sqrt{5}$?)

Exempel 1.22. Lös ekvationen

$$2^x + 2^{x+2} = 3^x\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar.)

Om vi i uttrycket

$${}^a\log x$$

håller basen $a > 1$ fixerad och låter x variera får vi **logaritmfunktionen** med bas a,

$$f(x) = {}^a\log x\,, \quad x > 0\,.$$

Definitionen på logaritm ger att

$$y = {}^a\log x \Leftrightarrow x = a^y\,.$$

Logaritmfunktionen $f(x)$ med bas $a > 1$ har definitionsmängden:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

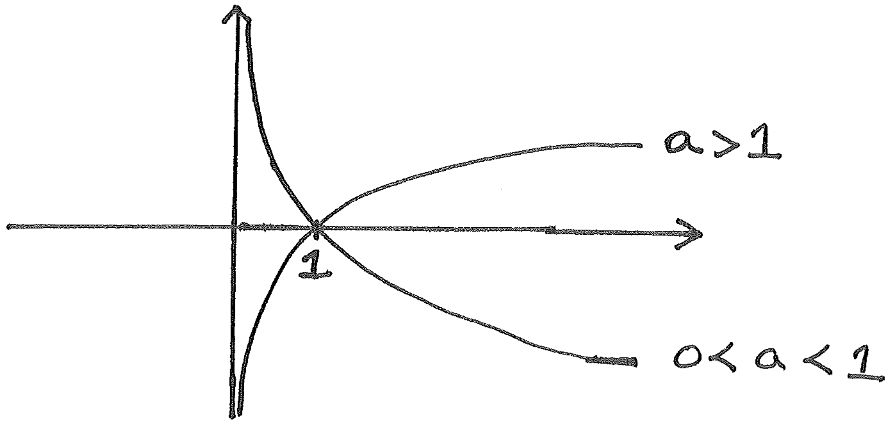
och är **strängt växande** med

$${}^a\log 1 = 0$$

och

$$
\begin{aligned}
{}^{a}\!\log x &\to +\infty, \text{ då } x \to +\infty, &(1.20)\\
{}^{a}\!\log x &\to -\infty, \text{ då } x \to 0^{+}. &(1.21)
\end{aligned}
$$

Om basen a uppfyller $0 < a < 1$, så är $f(x)$ **strängt avtagande**. Graferna har utseendet:



Vi kan nu, i analogi med Sats 1.7, göra en jämförelse av tillväxthastigheterna av x^α och ${}^{a}\!\log x$ för stora värden på x.

Sats 1.8. Antag att $\alpha > 0$ och $a > 1$. Då gäller att

$$
\begin{aligned}
\frac{x^\alpha}{{}^{a}\!\log x} &\to +\infty \text{ då } x \to +\infty, &(1.22)\\
\frac{{}^{a}\!\log x}{x^\alpha} &\to 0 \text{ då } x \to +\infty. &(1.23)
\end{aligned}
$$

Bevis: Sätt ${}^{a}\!\log x = t$. Då är $x = a^t$ och

$$\frac{x^\alpha}{{}^{a}\!\log x} = \frac{(a^t)^\alpha}{t} = \frac{(a^\alpha)^t}{t}.$$

I täljaren har vi en exponentialfunktion med basen $a^\alpha > 1$ och i nämnaren potensfunktionen t. Nu ger formel (1.20) att $t \to +\infty$ då $x \to +\infty$. Då ger Sats 1.7, formel (1.11), att

$$\frac{x^\alpha}{{}^{a}\!\log x} = \frac{(a^\alpha)^t}{t} \to +\infty \text{ då } x \to +\infty. \quad \square$$

Satserna 1.7 och 1.8 ger då en rangordning i avseende på tillväxthastighet för logaritm-, potens- och exponentialfunktionerna

$$^{a}\log x, \quad x^{\alpha} \text{ och } b^{x},$$

då $a > 1$, $\alpha > 0$ och $b > 1$. Speciellt gäller då också

$$\frac{b^x}{^{a}\log x} \to +\infty \text{ då } x \to +\infty,$$
$$\frac{^{a}\log x}{b^x} \to 0 \text{ då } x \to +\infty.$$

Exempel 1.23. Beräkna gränsvärdet av

$$f(x) = \frac{e^x + x^5 - \ln x}{2e^x + 2^x},$$

då $x \to +\infty$. (Se föreläsningsanteckningar.)

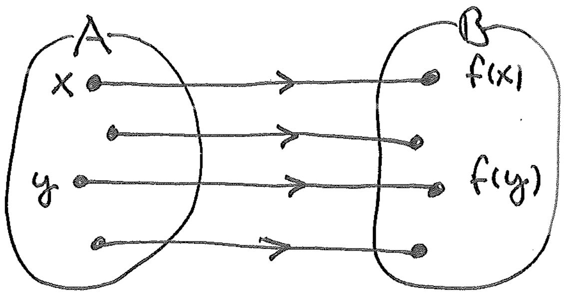
1.10 Invers funktion

Exempel 1.24. Låt mängden A bestå av alla människor som varit inskrivna vid Åbo Akademi. Mängden B må beteckna mängden av alla matrikelnummer. Då varje inskriven student tilldelas ett matrikelnummer kan vi definiera en avbildning $f : A^{\frown}B$ genom:

$$x \in A \Rightarrow f(x) = \text{ matrikelnumret för } x.$$

Vi har då att $D_f = A$ och $V_f = B$. Då två olika inskrivna individer inte kan ha samma matrikelnummer gäller tre **ekvivalenta** utsagor:

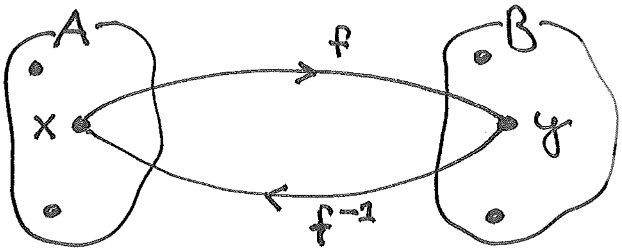
1. $(x, y \in A \text{ och } x \neq y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, (1.24)
2. $(x, y \in A \text{ och } f(x) = f(y)) \Rightarrow x = y$, (1.25)
3. $\forall y \in B$ har ekvationen $f(x) = y$ en **entydig** lösning $x \in A$. (1.26)



Vi säger då om någon, (och därmed alla), av (1.24) - (1.26) gäller, att f är en **injektiv** avbildning, eller en $1-1$ **avbildning**. Då även $V_f = B$ säger vi att f är en **surjektiv** avbildning, dvs. en avbildning till hela B.

Då f är injektiv säger vi att f är **omvändbar**, och vi kan bilda en **invers funktion**, betecknad f^{-1}, från B till A sådan att för $x \in A$ och $y \in B$ gäller:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)\,.$$



Vi ger en mera formell definition på invers funktion.

Definition 1.3. Antag att funktionen $f : A^\frown B$ är injektiv. Den **inversa funktionen** till f, betecknad $f^{-1} : B^\frown A$, definieras för varje $y \in V_f$ genom

$$f^{-1}(y) = x\,,$$

där x är det **entydiga** element i D_f för vilket $f(x) = y$.

Det gäller då för alla $x \in D_f$, $y \in V_f$ att

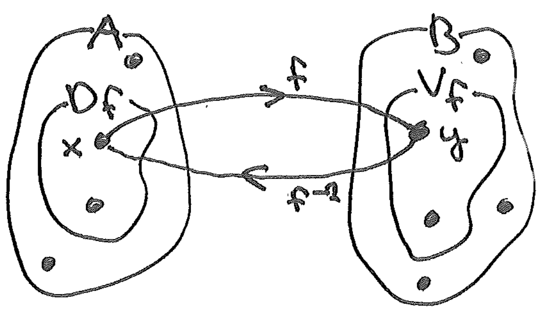
$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)\,. \tag{1.27}$$

Vidare gäller:

$$D_{f^{-1}} = V_f \quad \text{och} \quad V_{f^{-1}} = D_f\,, \tag{1.28}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x\,, \quad \text{då } x \in D_f\,, \tag{1.29}$$

$$f(f^{-1}(y)) = y\,, \quad \text{då } y \in V_f\,. \tag{1.30}$$



Exempel 1.25. Formel (1.9) ger att exponentialfunktionen

$$f(x) = a^x ,$$

med basen $a > 1$ är strängt växande. Då gäller $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, så $f(x)$ är injektiv och därmed omvändbar med invers f^{-1}. Inversens värde i en punkt $s > 0$ är definitionsmässigt den entydiga lösningen till ekvationen

$$a^x = s ,$$

men den lösningen ges ju av $x = {}^a\!\log s$, så vi har att

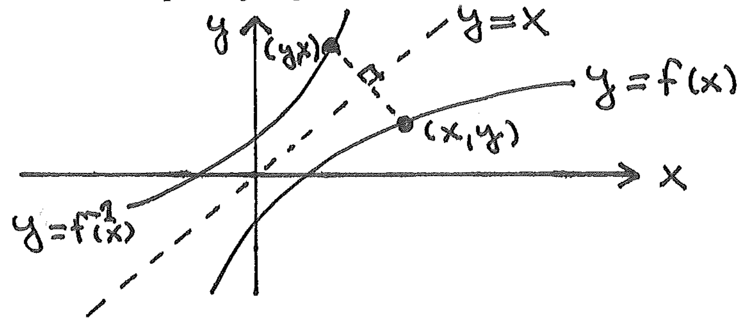
$$f^{-1}(s) = {}^a\!\log s ,$$

och därmed är logaritmen med bas a invers till exponentialfunktionen med bas a. Formlerna (1.29) och (1.30) motsvaras i detta fall av

$${}^a\!\log a^t = t, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{och} \quad a^{{}^a\!\log s} = s, \ s > 0 .$$

Exempel 1.26. Givet funktionen $f(x) = (x-1)^2$, $x \geq 1$. Visa att f har en invers f^{-1} och bestäm denna. (Se föreläsningsanteckningar.)

Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är omvändbar. Då är **graferna** för f och f^{-1} varandras **spegelbilder** med avseende på linjen $y = x$.



Alltså $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, dvs. punkten (x, y) tillhör grafen för f om och endast om punkten (y, x) tillhör grafen för f^{-1}.

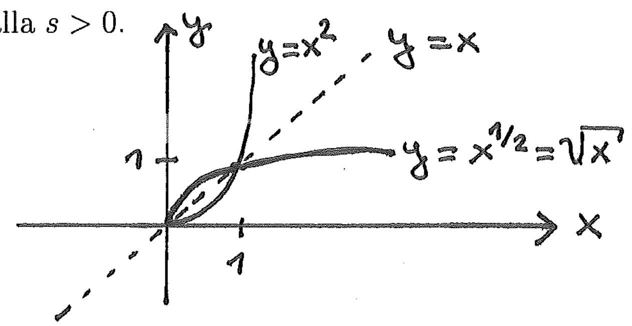
Exempel 1.27. Inversen till potensfunktionen

$$y = x^\alpha , \quad x > 0 ,$$

ges av potensfunktionen

$$y = x^{1/\alpha} , \quad x > 0 ,$$

ty $x^\alpha = s \Leftrightarrow x = s^{1/\alpha}$ för alla $s > 0$.



1.11 Monotona funktioner

Definition 1.4. Låt $f : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$. Antag att $x_1, x_2 \in D_f$. Då är funktionen f

växande, om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
strängt växande, om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
avtagande, om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
strängt avtagande, om $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

En **monoton** funktion är växande eller avtagande. En **strängt monoton** funktion är strängt växande eller strängt avtagande.

Sats 1.9. Varje **strängt monoton** funktion f har en invers f^{-1}. Om f är strängt växande (avtagande) så är även f^{-1} strängt växande (avtagande).

Bevis: 1) Antag att f är strängt växande och att $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in D_f$. Om $x_1 < x_2$ så är $f(x_1) < f(x_2)$ och om $x_1 > x_2$ så är $f(x_1) > f(x_2)$. Alltså $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, så f är injektiv och därmed omvändbar med invers f^{-1}.

2) Antag att inversen f^{-1} inte är strängt växande. Då finns det $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}$ sådana att

$$y_1 < y_2 \text{ och } f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2).$$

Eftersom f är strängt växande gäller då

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2,$$

vilket ger en motsägelse! Därmed är f^{-1} strängt växande. Beviset utförs analogt för strängt avtagande f. □

Exempel 1.28. Visa att funktionen $f(x) = (x-1)^2$, $x \geq 1$, är omvändbar.
Lösning: Vi har att

$$1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2.$$

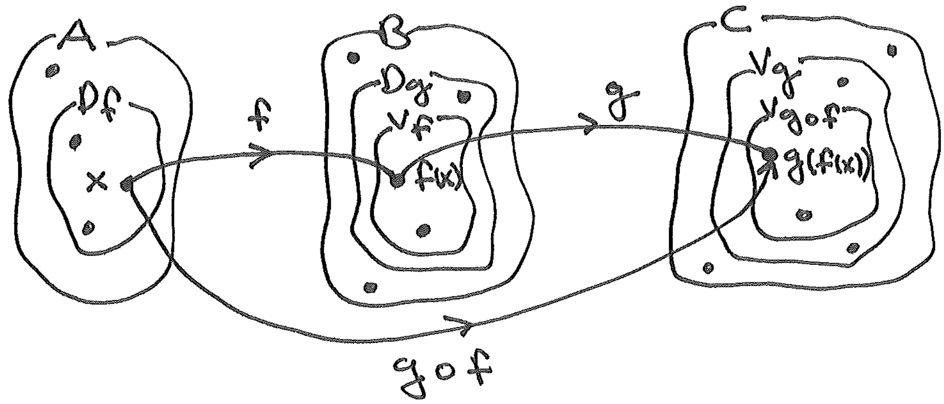
Därmed är f strängt växande då $x \geq 1$ och har därmed, med stöd av Sats 1.9, en invers f^{-1}. □

1.12 Sammansatta funktioner

Givet funktionerna $f : A \curvearrowright B$ och $g : B \curvearrowright C$, med $V_f \subseteq D_g$.

Definition 1.5. Funktionen $g \circ f : A \curvearrowright C$ definieras genom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{för alla } x \in D_f .$$



Då gäller det att $D_{g \circ f} = D_f$ och $V_{g \circ f} \subseteq V_g$.

Exempel 1.29. Givet $f(x) = x^2 + 2$ och $g(x) = x - 1$, för $x \in \mathbb{R}$. Bestäm $(f \circ g)(x)$ och $(g \circ f)(x)$.
Lösning: Direkt tillämpning av definitionen ger:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = x^2 + 2 - 1 = x^2 + 1\,,\\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3\,.\end{aligned}$$

Vi ser att $f \circ g \neq g \circ f$, vilket vanligen är fallet.

Exempel 1.30. Av vilka delar är funktionen

$$f(x) = \sqrt{1 + e^{x^2}}\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

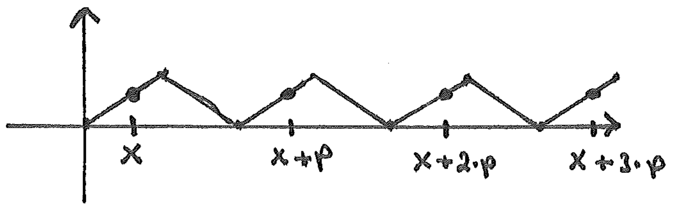
sammansatt av? (Se föreläsningsanteckningar.)

1.13 Trigonometriska funktioner

Om det för varje $x \in D_f$ och alla $k \in \mathbb{Z}$ gäller att

$$f(x) = f(x + k \cdot p),$$

så är funktionen f **periodisk** med **perioden** $p\,(\in \mathbb{R})$.



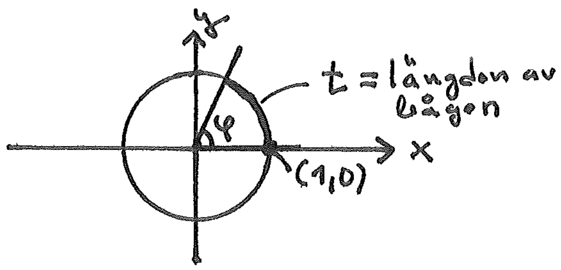
En funktion kallas **jämn** om

$$f(-x) = f(x) \text{ för alla } x \in D_f,$$

och **udda** om

$$f(-x) = -f(x) \text{ för alla } x \in D_f.$$

Mätning av vinklar i radianer (= bågmått)



Som mått på vinkeln φ använder vi längden t av bågen mellan vinkelbenen i enhetscirkeln. Detta mått kallas **radianer**, $\varphi = t$ radianer.

När vi går moturs från punkten (1,0) **växer** t, och när vi går medurs **avtar** t. Om vi går ett helt varv moturs är $t = 2\pi$.

Om φ är vinkelns mått i radianer och g är måttet i grader gäller:

$$\frac{g}{360} = \frac{\varphi}{2\pi} .$$

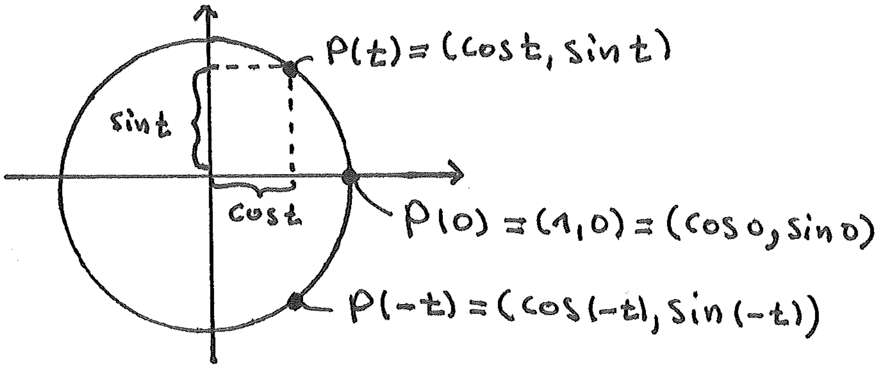
Några vanliga vinkelmått i grader och radianer:

$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$
$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Definition 1.6. Låt $P(t)$ vara den punkt på enhetscirkelns periferi som svarar mot en cirkelbåge av längden t mätt moturs med punkten $(1, 0)$ som utgångspunkt. Vi definierar de reella talen

$$\cos t \text{ och } \sin t$$

som x- respektive y-koordinat för $P(t)$.



Funktionerna $t \curvearrowright \cos t$ och $t \curvearrowright \sin t$ är definierade för alla reella tal,

$$D_{\cos t} = D_{\sin t} = \mathbb{R} ,$$

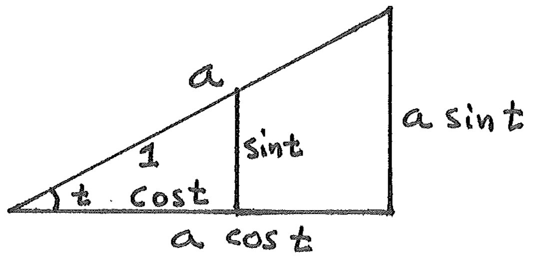
och värdemängderna för funktionerna är

$$V_{\cos t} = V_{\sin t} = [-1, 1] .$$

Eftersom punkten $(\cos t, \sin t)$ ligger på enhetscirkeln ger pythagoras sats:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 . \tag{1.31}$$

För rätvinkliga trianglar gäller att $\cos t$ är förhållandet mellan närliggande katet och hypotenusa och $\sin t$ är förhållandet mellan motstående katet och hypotenusa.



Vi har att $P(t) = P(t{+}n2\pi)$ för alla $n \in \mathbb{Z}$, så $\sin t$ och $\cos t$ är **periodiska** med **perioden** 2π,

$$\cos t = \cos(t + n2\pi) \text{ och } \sin t = \sin(t + n2\pi)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.32}$$

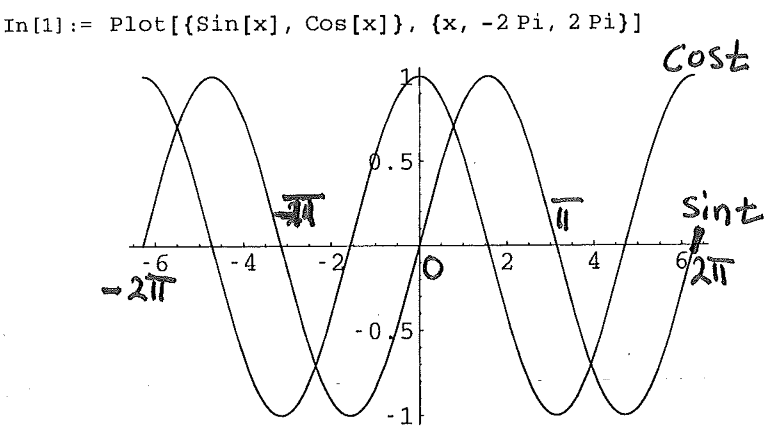
$P(t)$ och $P(-t)$ har samma x-koordinat, så $\cos t$ är en **jämn** funktion,

$$\cos t = \cos(-t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{1.33}$$

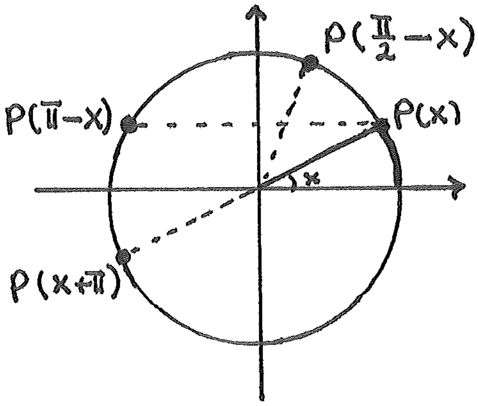
y-koordinaterna för $P(t)$ och $P(-t)$ är till beloppet lika stora, men av motsatta tecken, så $\sin t$ är en **udda** funktion,

$$\sin t = -\sin(-t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{1.34}$$

Graferna av $\sin t$ och $\cos t$:



Samband som framgår direkt ur enhetscirkeln (eller graferna)

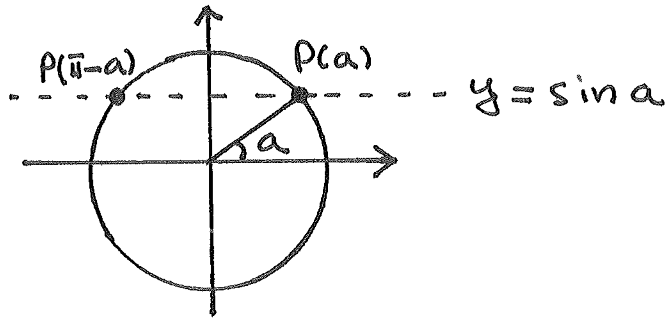


$$\cos(\pi - x) = -\cos x\,, \tag{1.35}$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x\,, \tag{1.36}$$
$$\cos(x + \pi) = -\cos x\,, \tag{1.37}$$
$$\sin(x + \pi) = -\sin x\,, \tag{1.38}$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x\,, \tag{1.39}$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x\,. \tag{1.40}$$

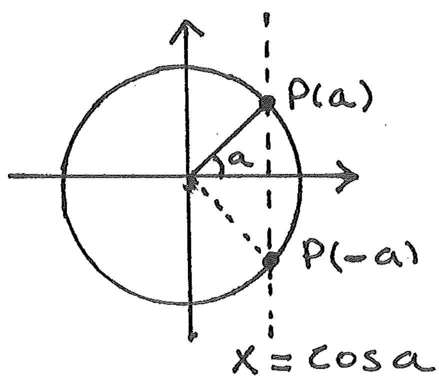
Trigonometriska ekvationer

Många trigonometriska ekvationer kan reduceras till någondera av följande två ekvivalenser.

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow (x = a + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad x = \pi - a + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}\,.)$$



$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + n \cdot 2\pi\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$



Exempel 1.31. Lös ekvationen $\sin 3x = \sin x$. (Se föreläsningsanteckningar.)

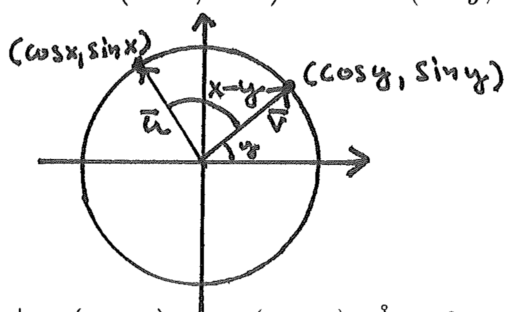
Exempel 1.32. Lös ekvationen $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Se föreläsningsanteckningar.)

Trigonometriska formler

Subtraktionsteoremet för cosinus:

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y\,. \tag{1.41}$$

Bevis: Betrakta vektorerna $\overline{u} = (\cos x, \sin x)$ och $\overline{v} = (\cos y, \sin y)$.



Då gäller: $\overline{u}\cdot\overline{v} = |u||v|\cos(x-y) = \cos(x-y)$. Å andra sidan har vi:

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = (\cos x, \sin x)\cdot(\cos y, \sin y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y\,,$$

så formel (1.41) gäller. □

Följande formler fås med hjälp av (1.41) och de tidigare formlerna.

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y\,, \tag{1.42}$$
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y\,, \tag{1.43}$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y\,, \tag{1.44}$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x\,, \tag{1.45}$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x\,, \tag{1.46}$$
$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}\,, \tag{1.47}$$
$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}\,. \tag{1.48}$$

Med hjälp av (1.41) - (1.44) visar man produktformlerna

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))\,, \tag{1.49}$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))\,, \tag{1.50}$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))\,. \tag{1.51}$$

Vidare gäller:

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}\,, \tag{1.52}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\,, \tag{1.53}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}\,, \tag{1.54}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\,. \tag{1.55}$$

Exempel 1.33. Lös ekvationen

$$\cos 2x - \frac{5}{2} \cos x + \sin^2 x + 1 = 0\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar.)

Metoden med hjälpvinkel

Betrakta funktionen

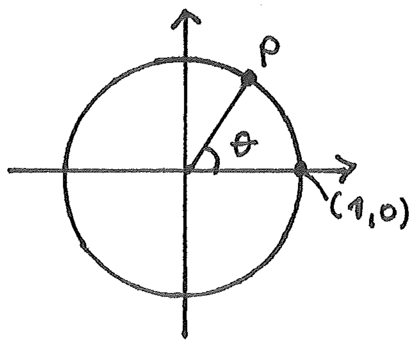
$$f(x) = a \sin cx + b \cos cx\,. \tag{1.56}$$

Bryt ut uttrycket $\sqrt{a^2+b^2}$,

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin cx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos cx\right).$$

Punkten P med koordinaterna $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ ligger på enhetscirkeln, ty

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1\,.$$



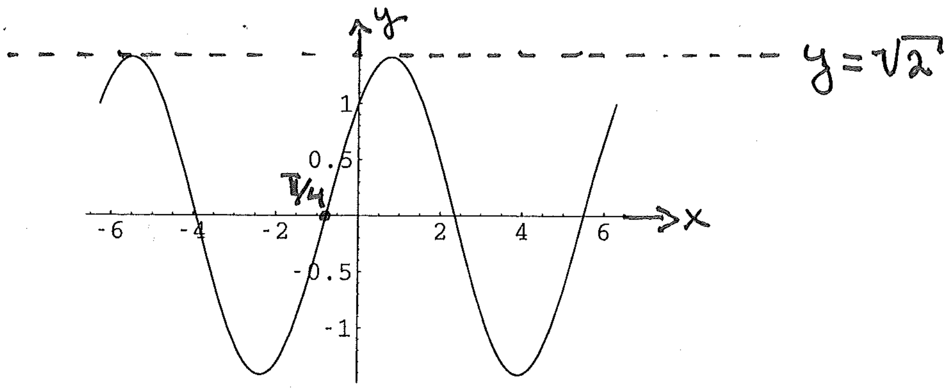
Vinkeln θ bestäms av sambanden

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta \quad \text{och} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta\,. \tag{1.57}$$

Vi har då, med stöd av formel (1.43), att

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta \sin cx + \sin\theta \cos cx) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(cx+\theta)\,.$$

Konstanten $\sqrt{a^2+b^2}$ kallas **amplituden** för $f(x)$ och vinkeln θ **fasförskjutningen**.



$a = b = c = 1, \quad \theta = \pi/4.$

Exempel 1.34. Lös ekvationen

$$\sqrt{3}\,\sin x + \cos x = 1\,.$$

(Se föreläsningsanteckningar.)

1.14 Tangens och cotangens

Med hälp av $\sin x$ och $\cos x$ definierar vi funktionerna $\tan x$ och $\cot x$ genom

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq n\pi,$$

där $n \in \mathbb{Z}$. Vi ser direkt att för $x \in D_{\tan} \cap D_{\cot}$ gäller sambandet

$$\tan x = \frac{1}{\cot x}. \tag{1.58}$$

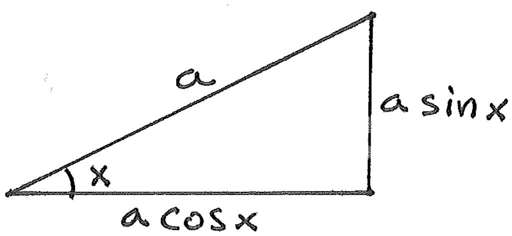
Vidare visar man lätt additionsteoremet för tangens med hjälp av motsvarande teorem för cosinus och sinus,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, \tan y}, \tag{1.59}$$

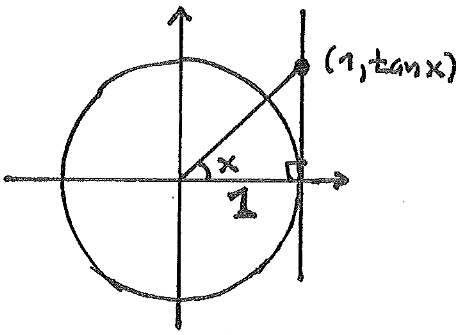
och genom att sätta $y = x$ i (1.59) erhålls teoremet för dubbla vinkeln,

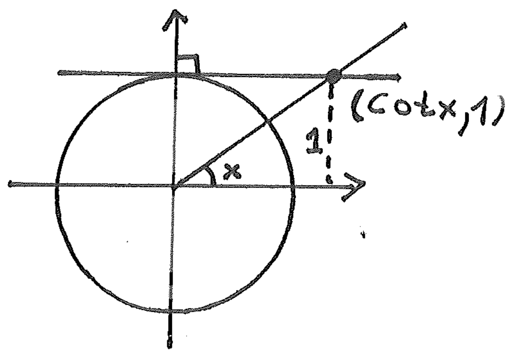
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}. \tag{1.60}$$

Geometrisk tolkning av $\tan x$ och $\cot x$ med rätvinkliga trianglar



ger att $\tan x$ ($\cot x$) är förhållandet mellan motstående (närliggande) och närliggande (motstående) kateter. I första kvadranten gäller då



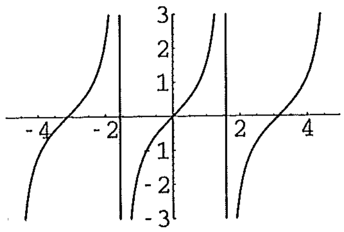


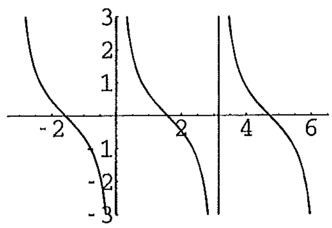
Vidare har vi att

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x\,,$$
$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x\,,$$

så $\tan x$, och analogt $\cot x$, är **udda** funktioner som är periodiska med **perioden** π.

Graferna för $\tan x$ och $\cot x$ har utseendet





tanx , $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ cotx, $-\pi < x < 2\pi$

För lösning av ekvationer har vi sambanden

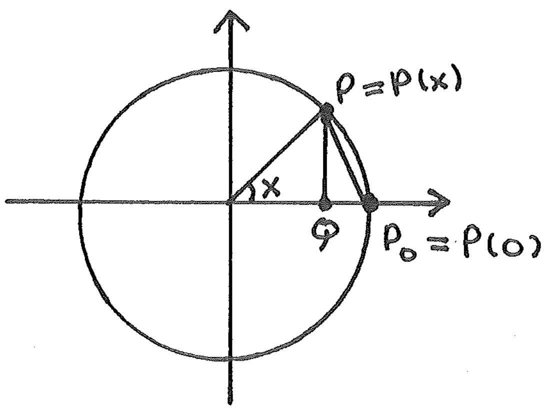
$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + n\pi\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \cot x \;= \cot a \Leftrightarrow x = a + n\pi\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$

Exempel 1.35. Lös ekvationen $\tan x + 1 = 0$. (Se föreläsningsanteckningar.)

Sats 1.10. För $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gäller

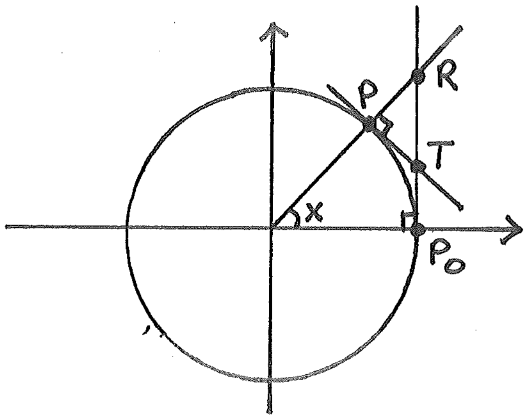
$$\sin x < x < \tan x\,. \tag{1.61}$$

Bevis: 1) Visar först att $\sin x < x$. Betrakta figuren



Sträckan $PQ = \sin x <$ sträckan $P_0P <$ bågen $P_0P = x$. Alltså $\sin x < x$.

2) Visar nu att $x < \tan x$.



Nu gäller $x <$ sträckan $PT+$ sträckan $TP_0 <$ sträckan $RT+$ sträckan $TP_0 =$ sträckan $RP_0 = \tan x$. □

Följande sats visar att "nära 0" är funktionerna x, $\sin x$ och $\tan x$ approximativt lika.

Sats 1.11. Det gäller att

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, \quad \text{då } x \to 0\,, \tag{1.62}$$

$$\frac{\tan x}{x} \to 1, \quad \text{då } x \to 0\,. \tag{1.63}$$

Bevis: 1) Antag att $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Då ger Sats 1.10 att $\sin x < x < \tan x$, så vi erhåller, (då $\tan x / \sin x = 1/\cos x$), att

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\,. \quad (*)$$

Då $\cos x$ och $\frac{\sin x}{x}$ är jämna funktioner gäller olikheterna i formel $(*)$ även då $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Då $\cos x \to 1$ då $x \to 0$ inser vi från $(*)$ att även $\frac{\sin x}{x} \to 1$ då $x \to 0$.

2) det gäller att

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \to 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{då } x \to 0\,,$$

vilket avslutar beviset. □

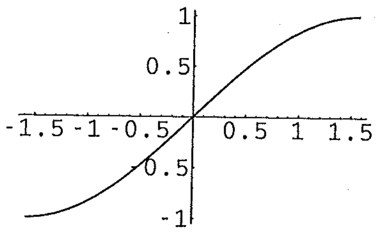
1.15 Arcusfunktionerna

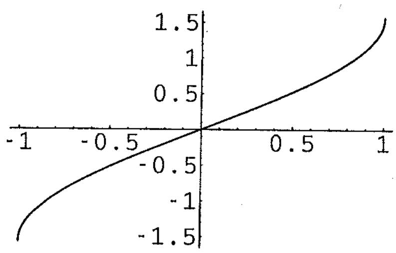
Funktionen $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$ har ingen invers, ty den är inte injektiv. Om vi däremot betraktar **restriktionen** av $f(x)$ till intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$f(x) = \sin x\,, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

så är denna funktion **strängt växande** och har en strängt växande invers enligt Sats 1.9. Inversen kallas **arcussinus** och betecknas

$$f^{-1}(x) = \arcsin x\,, \quad D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]\,,$$
$$V_{\text{arcsin}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,.$$





$\sin x\,,\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\arcsin x\,,\ -1 \leq x \leq 1$

Vi noterar att $\arcsin x$ är en udda funktion,

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x\,.$$

Då $\arcsin x$ och restriktionen av $\sin x$ till $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ är varandras inverser gäller sambanden

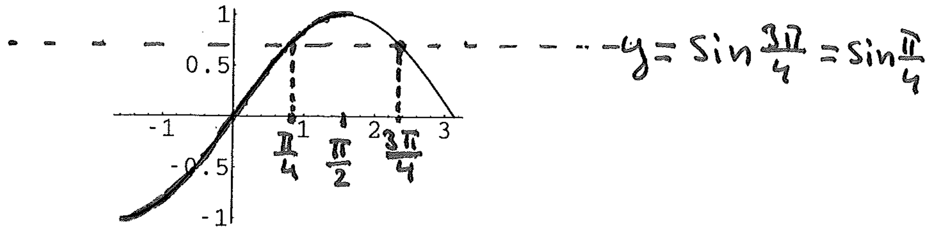
$$\arcsin(\sin x) = x\,, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,, \tag{1.64}$$
$$\sin(\arcsin x) = x\,, \quad -1 \leq x \leq 1\,. \tag{1.65}$$

Vi har med andra ord

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y\,, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Observera att $\arcsin(\sin x) \neq x$ då $x \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Exempelvis är

$$\arcsin(\sin \frac{3\pi}{4}) = \arcsin(\sin \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}\,.$$



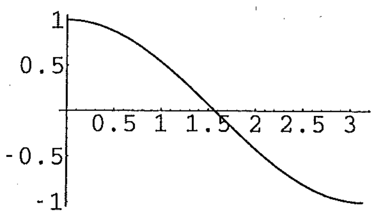
Exempel 1.36. $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}$.

Funktionen $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, har ingen invers. Restriktionen

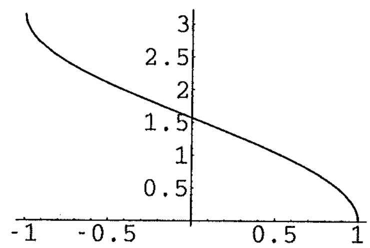
$$f(x) = \cos x\,, \qquad 0 \leq x \leq \pi\,,$$

är **strängt avtagande** och har inversen **arcuscosinus** betecknad

$$f^{-1}(x) = \arccos x\,, \quad D_{\text{arccos}} = [-1, 1]\,,$$
$$V_{\text{arccos}} = [0, \pi]\,.$$



cos x, 0 ≤ x ≤ π



arc cos x, −1 ≤ x ≤ 1

Vi har då sambanden

$$\arccos(\cos x) = x\,, \quad 0 \leq x \leq \pi\,, \tag{1.66}$$
$$\cos(\arccos x) = x\,, \quad -1 \leq x \leq 1\,, \tag{1.67}$$

och

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y\,, \quad 0 \le y \le \pi\,.$$

Observera att $\arccos(\cos x) \neq x$, då $x \in \mathbb{R} \setminus [0, \pi]$. Exempelvis är

$$\arccos(\cos(-\frac{\pi}{4})) = \arccos(\cos\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Kopplingen mellan $\arcsin x$ och $\arccos x$ ges av

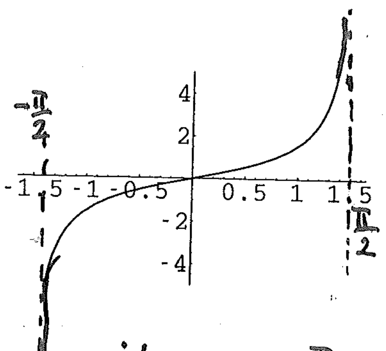
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x\,, \quad -1 \le x \le 1\,. \tag{1.68}$$

Restriktionen av tangens,

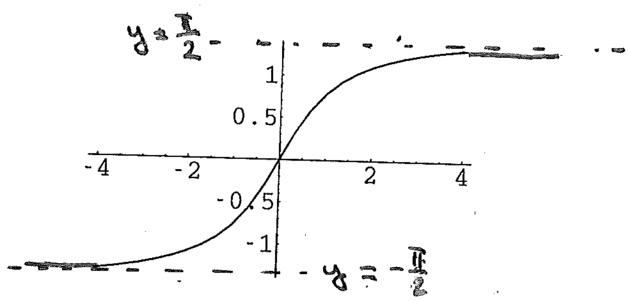
$$f(x) = \tan x\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,,$$

är **strängt växande** och har inversen **arcustangens**,

$$f^{-1}(x) = \arctan x\,, \quad D_{\arctan} = \mathbb{R}\,,$$
$$V_{\arctan} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\,.$$



$\tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



$\arctan x,\ x \in \mathbb{R}$

Vi har att

$$\arctan(\tan x) = x\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,,$$
$$\tan(\arctan x) = x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

och

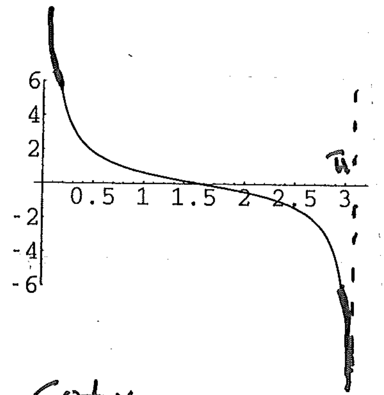
$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y\,, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\,.$$

Restriktionen av cotangens,

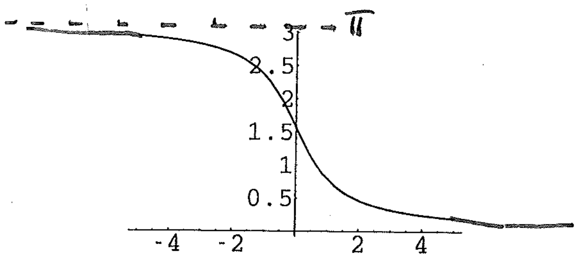
$$f(x) = \cot x\,, \quad 0 < x < \pi\,,$$

är **strängt avtagande** och har inversen **arcuscotangens**,

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x\,, \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\,,$$
$$V_{f^{-1}} =]0, \pi[\,.$$



Cot x, 0<x<π



arccot x, x ∈ ℝ

Vi har att

$$\operatorname{arccot}(\cot x) = x\,, \quad 0 < x < \pi\,,$$
$$\cot(\operatorname{arccot} x) = x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

och

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y\,, \quad 0 < y < \pi\,.$$

Kopplingen mellan $\arctan x$ och $\operatorname{arccot} x$ ges av

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

1.16 Hyperboliska funktionerna

Funktionerna **cosinus-**, **sinus-**, **tangens-**, och **cotangenshyperbolicus** definieras genom

$$
\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0 .
\end{aligned}
$$

Funktionen $\cosh x$ är jämn och de övriga är udda, (se graferna nedan). Följande formler kan lätt verifieras för de hyperboliska funktionerna:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,, \tag{1.69}$$

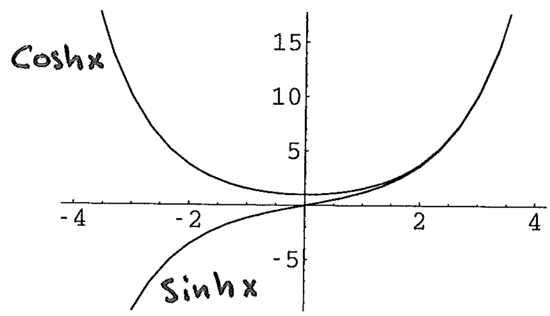
$$\cosh(x+y) = \cosh x \, \cosh y + \sinh x \, \sinh y\,, \tag{1.70}$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \, \cosh y + \cosh x \, \sinh y\,, \tag{1.71}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x\,, \tag{1.72}$$

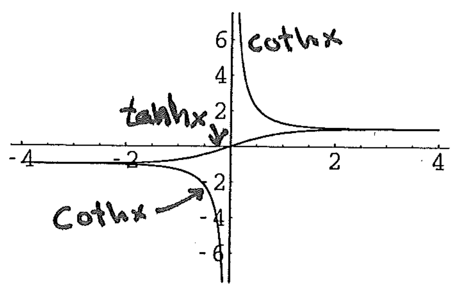
$$\sinh 2x = 2 \, \sinh x \, \cosh x\,. \tag{1.73}$$

```
In[1]:= Plot[{Sinh[x], Cosh[x]}, {x, -4, 4}]
```




```
Out[1]= - Graphics -

In[2]:= Plot[{Tanh[x], Coth[x]}, {x, -4, 4}]
```



1.17 Komplexa tal

Ekvationen

$$x^2 = -1$$

har ingen lösning i de reella talens mängd $\mathbb{R}$. Kan vi utvidga talområdet $\mathbb{R}$ så att varje polynomekvation

$$P_n(x) = 0\,,$$

där polynomet P_n är av gradtal n, har exakt n stycken lösningar då multipliciteten beaktas?

Betrakta mängden

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}\,,$$

i vilken **addition** definieras genom

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,,$$

och **multiplikation** genom

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2, x_1\, y_2 + x_2\, y_1)\,.$$

Mängden $\mathbb{C}$ försedd med de ovanstående räkneoperationerna kallas de **komplexa talen**.

Exempelvis gäller:

$$(2, 3) \cdot (-3, 1) = (2 \cdot (-3) - 3 \cdot 1, 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3)) = (-9, -7)\,.$$

Man kan visa att alla räkneregler som gäller för addition och multiplikation i $\mathbb{R}$ även gäller i $\mathbb{C}$ med dess definitioner av addition och multiplikation. Exempelvis gäller

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2)\,.$$

Likhet av två tal i $\mathbb{C}$ ges av

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \text{ och } b_1 = b_2)\,.$$

$\mathbb{R}$ som delmängd av $\mathbb{C}$

Betrakta delmängden M av $\mathbb{C}$ given av

$$M = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Vi observerar att M är sluten under addition och multiplikation,

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0) \in M,$$
$$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 \cdot a_2 - 0 \cdot 0, a_1 \cdot 0 + 0 \cdot a_2) = (a_1 \cdot a_2, 0) \in M.$$

Vi identifierar det komplexa talet $(a, 0)$ med det reella talet a och mängden M med de reella talen $\mathbb{R}$,

$$(a, 0) = a, \quad M = \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Ekvationen $z^2 = -1$ har en lösning $z = (0, 1) \in \mathbb{C}$, ty

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Vi definierar symbolen i genom

$$i = (0, 1) \in \mathbb{C}.$$

Då erhålls sambandet

$$i^2 = -1.$$

För $\lambda \in \mathbb{R}$ gäller

$$\lambda\,(a, b) = (\lambda, 0)(a, b) = (\lambda \cdot a - 0 \cdot b, \lambda \cdot b + 0 \cdot a) = (\lambda \cdot a, \lambda \cdot b).$$

Vi ser då att

$$\begin{aligned}(-i)^2 = (0, -1)^2 = (0, -1)(0, -1) &= (0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1), 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0) \\ &= (-1, 0) = -1,\end{aligned}$$

så $z = i$ och $z = -i$ är rötter till ekvationen

$$z^2 = -1.$$

Vi kan för $a, b \in \mathbb{R}$ skriva

$$a + b \cdot i = (a, b),$$

ty

$$a + b \cdot i = (a, 0) + b\,(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b).$$

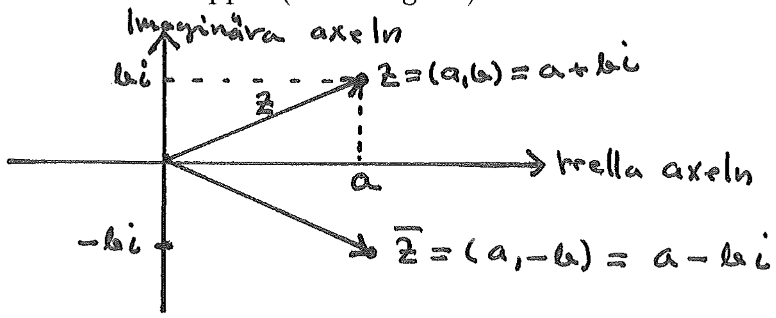
Nu kan vi räkna med formen $a + b \cdot i$ och med vanliga räkneregler som gäller i $\mathbb{R}$, **bara vi beaktar att** $i^2 = -1$, exempelvis

$$(2 + i)(3 - i) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot i + 3 \cdot i - i^2 = 6 + i - (-1) = 7 + i.$$

<u>Komplexa talplanet</u>

Låt $z = x + i\,y$ beteckna ett godtyckligt komplext tal. Då inför vi följande beteckningar:

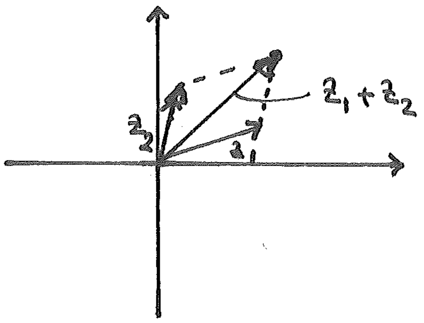
$x = \operatorname{Re} z$,	realdelen av z,
$y = \operatorname{Im} z$,	imaginära delen av z,
$\overline{z} = x - i\,y$,	konjugattalet till z,
$\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$,	absolutbeloppet (eller längden) av z.

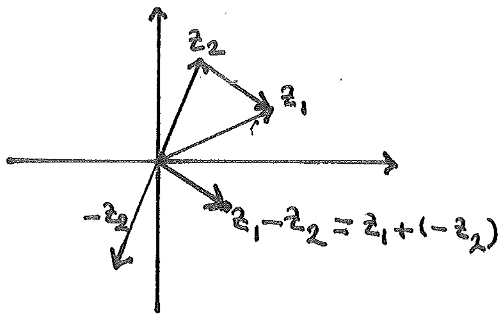


Räkneregler: $(z, z_1, z_2 \in \mathbb{C})$

1. $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$,
2. $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
3. $\lvert z\rvert^2 = z \cdot \overline{z}$,
4. $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$, $\quad \overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$,
5. $\lvert z_1 \cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert$,
6. $\lvert z_1 \pm z_2\rvert \le \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$, (triangelolikheten).

Addition och subtraktion av komplexa tal kan tolkas som addition och subtraktion med vektorer.





Division

Kvoten mellan ett komplext tal u och ett reellt tal $a \neq 0$ definieras som

$$\frac{u}{a} = \frac{1}{a} \cdot u\,.$$

Betrakta ekvationen

$$w\,z = u\,, \quad w \neq 0\,,$$

där u och w är komplexa tal. Om z och z' är lösningar till ekvationen har vi att

$$wz - wz' = u - u = 0 \Leftrightarrow w(z - z') = 0 \Leftrightarrow z = z'\,,$$

så ekvationen har en **entydigt bestämd lösning**. Denna lösning ges av

$$z = \frac{\overline{w}\,u}{|w|^2}\,,$$

ty

$$w \cdot z = w \cdot \frac{\overline{w}\,u}{|w|^2} = u\,\frac{w\,\overline{w}}{|w|^2} = u\,\frac{|w|^2}{|w|^2} = u\,.$$

Eftersom $|w|^2 = w\,\overline{w}$ kan kvoten beräknas som

$$\frac{u\,\overline{w}}{w\,\overline{w}}\,,$$

exempelvis är

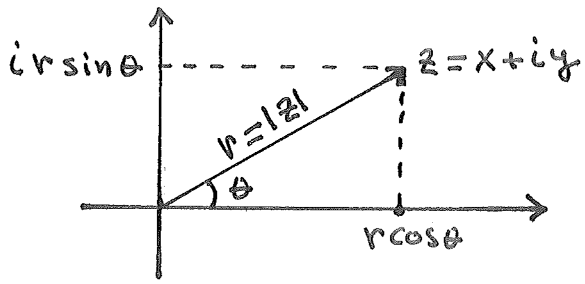
$$\frac{4-i}{2+3i}=\frac{(4-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{5-14i}{13}=\frac{5}{13}-\frac{14}{13}i\,.$$

Räkneregler vid division:

$$\begin{aligned}\frac{u_1}{w_1}\cdot\frac{u_2}{w_2}&=\frac{u_1u_2}{w_1w_2}\,,\\ \frac{u_1}{w_1}+\frac{u_2}{w_2}&=\frac{u_1w_2+u_2w_1}{w_1w_2}\,,\\ \overline{\left(\frac{u}{w}\right)}&=\frac{\overline{u}}{\overline{w}}\,,\\ \left|\frac{u}{w}\right|&=\frac{|u|}{|w|}\,.\end{aligned}$$

Komplexa tal på polär form

Vi inför **polära koordinater** r och θ i planet enligt följande figur,



och erhåller den **polära framställningen** av talet z,

$$z=r\,\cos\theta+i\,r\,\sin\theta=r\,(\cos\theta+i\,\sin\theta)\,,$$

där r är **längden** av z och θ är **vinkeln mellan** z **och positiva reella axeln**. Vinkeln θ kallas **argumentet** av z, betecknat $\arg z$. Vinkeln θ är inte entydigt bestämd. Argument som skiljs åt av en heltalsmultipel av 2π identifieras,

$$\theta_1=\theta_2\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{Z}:\theta_1=\theta_2+n\,2\pi\,.$$

Vi har följande formler för att beräkna argumentet θ av talet $z = x + i\,y$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad \text{då } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \tag{1.74}$$

$$\theta = \pi + \arctan \frac{y}{x}, \quad \text{då } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}. \tag{1.75}$$

Vi inför det **exponentiella skrivsättet**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta\,.$$

Den polära framställningen av z blir då

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) = r\,e^{i\theta}\,,$$

där $r = |z|$ och $\theta = \arg z$.

Exempel 1.37. Vi har att

$$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\,\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1\,,$$

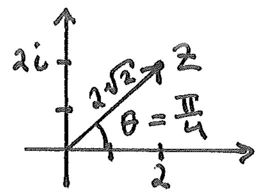
så $e^{i\theta}$ genomlöper enhetscirkeln då $0 \le \theta < 2\pi$.

Exempel 1.38. Vi skriver talet $z = 2 + 2\,i$, (som är i rektangulär form), i polär form.

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,,$$

$$\theta = \arctan\frac{2}{2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,.$$



Exempel 1.39. Vi har likheterna

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}\,.$$

Den första likheten följer av att $e^{i\theta}$ ligger på enhetscirkeln,

$$1 = |e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta}\,\overline{e^{i\theta}}\,.$$

Den andra likheten ges av

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{(\cos\theta + i\,\sin\theta)} = \cos\theta - i\,\sin\theta = \cos(-\theta) + i\,\sin(-\theta) = e^{-i\theta}\,.$$

Sats 1.12. det gäller att

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}\,.$$

Bevis: Genom att utnyttja cosinus och sinus additionsteorem erhålls

$$\begin{aligned} e^{i\theta}\, e^{i\varphi} &= (\cos\theta + i\,\sin\theta)(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \\ &= \cos\theta\,\cos\varphi - \sin\theta\,\sin\varphi + i\,(\cos\theta\,\sin\varphi + \sin\theta\,\cos\varphi) \\ &= \cos(\theta+\varphi) + i\,\sin(\theta+\varphi) \\ &= e^{i(\theta+\varphi)}\,. \quad \square \end{aligned}$$

Upprepad användning av Sats 1.12 för $n \in \mathbb{Z}_+$ ger att

$$\begin{aligned} (e^{i\theta})^n &= e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdot \ldots \cdot e^{i\theta} = e^{2i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdot \ldots \cdot e^{i\theta} = \ldots = e^{in\theta}\,, \\ (e^{i\theta})^{-n} &= \frac{1}{(e^{i\theta})^n} = \frac{1}{e^{in\theta}} = e^{-in\theta}\,. \end{aligned}$$

Därmed gäller De Moivres formel:

Sats 1.13. För varje $n \in \mathbb{Z}$ gäller

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}\,.$$

Exempel 1.40. Skriv talet $(\sqrt{3}+3i)^{18}$ i formen $a + i\,b$.
Lösning: Vi sätter först $z = \sqrt{3} + 3i$. Då erhålls

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\,, \\ \arg z &= \arctan\frac{3}{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}\,, \end{aligned}$$

så

$$z = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}\,.$$

Då får vi

$$(\sqrt{3}+3i)^{18} = z^{18} = (2\sqrt{3})^{18}(e^{i\frac{\pi}{3}})^{18} = (\sqrt{12})^{18} e^{i\frac{18\pi}{3}} = 12^9\, e^{i6\pi} = 12^9\,.$$

Andragradsekvationer

Betrakta ekvationen

$$z^2 + 2uz + w = 0\,,$$

där u och w är kända **komplexa** konstanter och z är obekant. Kvadratkomplettering ger:

$$z^2 + 2uz + u^2 + w - u^2 = 0 \Leftrightarrow (z+u)^2 = u^2 - w\,.$$

Vi kan betrakta $z+u$ som obekant. Om vi byter beteckningar, har vi således reducerat problemet till lösning av en ekvation av formen

$$z^2 = w\,,$$

där w är en känd komplex konstant och z är en obekant variabel.

Lösning på rektangulär form: Sätt $w = a + ib$ och antag att vi söker en lösning av formen $z = x + iy$. Då gäller

$$(x+iy)^2 = a + ib \Leftrightarrow x^2 - y^2 + i\,2xy = a + ib\,.$$

Identifiering av reella och imaginära delarna ger:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a\,, \\ 2xy &= b\,. \end{aligned}$$

Vi erhåller ett tredje nyttigt samband ur kravet att $|z^2| = |a+ib|$, nämligen

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Exempel 1.41. Lös ekvationen $z^2 - (2+2i)\,z + 3 + 6i = 0$.
Lösning: Kvadratkomplettering av vänsterled ger att $(z-(1+i))^2 - (1+i)^2 + 3 + 6i = 0$. Med andra ord gäller

$$(z-(1+i))^2 = -3 - 4i\,.$$

Sätt nu $x + iy = z - (1+i)$. Insättning i ekvationen ger:

$$x^2 - y^2 + i2xy = -3 - 4i\,,$$

så vi erhåller sambanden

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3\,, \\ \quad 2xy = -4\,, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5\,. \end{cases} \tag{1.76}$$

Första och tredje ekvationen ger:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ y^2 = 5 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2\,. \end{cases}$$

Vi måste beakta tecknen på x och y så att $2xy = -4$ gäller! Då är

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

de eftersökta lösningarna som uppfyller **alla tre kraven** i (1.76). Därmed är

$$z = 2 - i \quad \text{och} \quad z = 3i$$

lösningarna till vår ursprungliga ekvation.

Binomiska ekvationer

Den enklaste typen av ekvation av gradtal n är den **binomiska ekvationen**

$$z^n = w\,,$$

där w är en komplex konstant. Vid lösning av en dylik ekvation utnyttjas den polära framställningen av komplexa tal. Sätt

$$z = re^{i\theta} \quad \text{och} \quad w = \rho e^{i\varphi}\,.$$

Sats 1.13, (de Moivres formel), ger då att

$$r^n\, e^{in\theta} = \rho\, e^{i\varphi}\,.$$

Identifiering av belopp och argument i båda leden ger

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \varphi + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \dfrac{\varphi}{n} + k\,\dfrac{2\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Då får vi precis n **stycken olika lösningar** svarande mot $k = 0, 1, \ldots, n-1$. För övriga $k \in \mathbb{Z}$ sammanfaller lösningarna med dessa.

Geometriskt bildar lösningarna hörn i en regelbunden n-hörning med medelpunkt i origo och ett hörn i punkten $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}$ svarande mot $k = 0$.

Exempel 1.42. Lös ekvationen $z^3 = 8i$.
Lösning: Sätt $z = r\, e^{i\theta}$,

$$r^3 e^{i3\theta} = 8i = 8\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 8e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Alltså erhålls

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} + k\,\dfrac{2\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

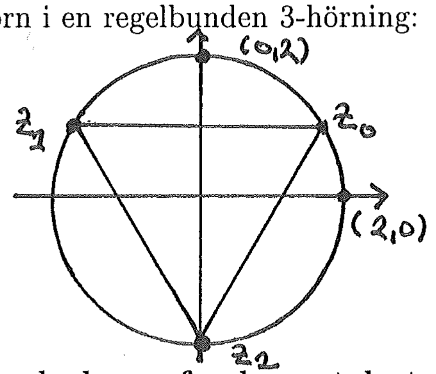
Vi får tre olika lösningar

$$z_k = 2\, e^{i(\frac{\pi}{6} + k\,\frac{2\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2,$$

explicit utskrivna

$$z_0 = 2\, e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_1 = 2\, e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

Lösningarna bildar hörn i en regelbunden 3-hörning:



Följande sats kallas **algebrans fundamentalsats** och bevisades 1799 av Gauss.

Sats 1.14. Varje komplex polynomekvation $p(z) = 0$, där gradtalet för $p(z)$ är n, har exakt n stycken rötter då rötternas multipliciteter beaktas.