MÉTHODE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Par Carl STÖRMER

CHRISTIANIA (NORVÈGE).

Dans les applications des équations différentielles sur les problèmes de la nature, où il faut connaître numériquement la valeur d'une intégrale, on est le plus souvent arrêté par le fait qu'il est impossible de trouver pour l'intégrale une expression analytique pouvant servir à un calcul numérique.

Cependant, comme il ne s'agit dans une telle application que d'une approximation plus ou moins grande, on peut avec beaucoup de succès appliquer les méthodes d'intégration numérique. Il y en a toute une série, par exemple les méthodes de Darwin, Runge, etc.

En 1904 j'eus besoin d'une pareille méthode pour calculer les trajectoires des corpuscules électrisés dans un champ magnétique, et en essayant diverses méthodes déjà connues, mais sans les trouver assez commodes pour mon but, je fus conduit moi-même à élaborer une méthode assez simple, dont je me suis servi ensuite. A l'aide de cette méthode, toute une série de trajectoires fut calculée par un travail numérique de mes assistants et de moi-même, qui monta jusqu'à 5.000 heures et qui dura pendant quelques années (1).

(1) Voir mes Mémoires : *Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre avec application aux aurores boréales* (Archives des Sciences physiques et naturelles, Genève, juillet-octobre 1907), et *Résultats des calculs numériques des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire*, I, II, III (Videnskabsselskabets Skrifter, *Math. naturv. kl.* 1913, Nr. 4, 10 et 14, Christiania).

Les calculs originaux, comprenant environt 3.000 pages in-folio avec 358 grandes planches, et encore 3.800 pages de développements mathématiques correspondants, appartiennent maintenant à la collection de manuscrits de la Bibliothèque de l'Université, Christiania.

Dans la pratique, cette méthode se montra très facile à suivre et donna des résultats très exacts.

Un travail récent d'un mathématicien russe, M. Kryloff (1), me donne l'occasion de rappeler de nouveau cette méthode à l'attention des géomètres. En effet, en comparant diverses méthodes d'intégration numérique connues, M. Kryloff arrive à la conclusion que ma méthode est la plus pratique, et qu'elle demande un travail beaucoup moindre que les autres méthodes quand il s'agit d'obtenir la même approximation.

M. Kryloff a aussi généralisé ma méthode à un système du premier ordre, de manière qu'il ne sera pas nécessaire de transformer un tel système en un autre du second ordre avant de commencer le calcul; cela constitue un progrès essentiel.

D'après cela, il me semble que la méthode mérite d'être plus connue, d'autant plus qu'elle peut rendre de réels services aux personnes qui s'occupent de l'application des équations différentielles. Nous allons en donner un court aperçu en renvoyant, pour les détails, aux Mémoires cités plus haut.

I. — Réduction des équations différentielles à une forme convenable pour l'application de la méthode d'intégration numérique.

Soit t la variable indépendante, et $x, y, \ldots u$ les fonctions, définies par un système d'équations différentielles que nous supposons réduit à la forme canonique bien connue :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, \ldots u, t), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, \ldots u, t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{du}{dt} &= h(x, y, \ldots u, t), \end{aligned} \right.$$

les fonctions aux seconds membres étant des fonctions connues de $x, y, \ldots u$ et t, et le nombre d'équations étant égal au nombre de variables dépendantes.

---

(1) *Sur l'intégration numérique approximative des équations différentielles ordinaires* (Archives des Sciences physiques, cahier I et II, 1918, Moscou. En russe). M. G. de Meck, Christiania, a bien voulu me rendre le grand service de traduire ce Mémoire, et je lui exprime ici ma vive reconnaissance.

On en tire, en supposant les seconds membres dérivables par rapport aux variables

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

En y substituant les valeurs des dérivées d'après le système (1), le second membre devient une fonction connue de x, y, ... u, t.

On arrive ainsi au système suivant :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{F}(x, y, \ldots u, t), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{G}(x, y, \ldots u, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^2u}{dt^2} = \mathrm{H}(x, y, \ldots u, t). \end{cases}$$

C'est aux systèmes différentiels de cette forme que la méthode d'intégration numérique est immédiatement applicable.

Un cas particulier est celui où les fonctions au second membre ne contiennent pas t. C'est seulement à ce cas que nous avons jusqu'ici appliqué la méthode ; mais, ainsi que M. Kryloff l'a remarqué, elle s'applique aussi bien aux cas généraux.

II. — Notations empruntées du calcul des différences. Formule caractéristique pour la méthode.

Soit $x(t)$ une fonction de t, et soit $x''(t)$ sa dérivée seconde. Considérons une série de valeurs équidistantes de t :

$$t_k = t_0 + k\Delta t,$$

Δt étant l'intervalle constant et k ayant les valeurs

$$\ldots n-2, \quad n-1, \quad n, \quad n+1, \quad n+2, \ldots.$$

Introduisons les notations :

$$x_k = x(t_k),$$
$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$
$$\Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k$$

et

$$\xi_k = x''(t_k)(\Delta t)^2,$$
$$\Delta \xi_k = \xi_{k+1} - \xi_k,$$
$$\Delta^2 \xi_k = \Delta \xi_{k+1} - \Delta \xi_k,$$
$$\Delta^3 \xi_k = \Delta^2 \xi_{k+1} - \Delta^2 \xi_k,$$
$$\Delta^4 \xi_k = \Delta^3 \xi_{k+1} - \Delta^3 \xi_k.$$

Avec ces quantités formons le tableau suivant :

(3)

t	x	Δx	$\Delta^2 x$		ξ	$\Delta \xi$	$\Delta^2 \xi$	$\Delta^3 \xi$	$\Delta^4 \xi$
t_{n-3}	x_{n-3}		$\Delta^2 x_{n-4}$		ξ_{n-3}		$\Delta^2 \xi_{n-4}$		$\Delta^4 \xi_{n-5}$
		Δx_{n-3}				$\Delta \xi_{n-3}$		$\Delta^3 \xi_{n-4}$	
t_{n-2}	x_{n-2}		$\Delta^2 x_{n-3}$		ξ_{n-2}		$\Delta^2 \xi_{n-3}$		
		Δx_{n-2}				$\Delta \xi_{n-2}$			
t_{n-1}	x_{n-1}		$\Delta^2 x_{n-2}$		ξ_{n-1}				
		Δx_{n-1}							
t_n	x_n								

Supposons qu'il s'agit d'exprimer $\Delta^2 x_{n-1}$ par

$$\xi_n, \quad \Delta \xi_{n-1}, \quad \Delta^2 \xi_{n-2}, \quad \Delta^3 \xi_{n-3} \quad \text{et} \quad \Delta^4 \xi_{n-4},$$

nombres pas écrits ici. mais dont les places sont immédiatement au-dessous des nombres

$$\Delta^2 x_{n-2}, \quad \xi_{n-1}, \quad \Delta \xi_{n-2}, \quad \Delta^2 \xi_{n-3}, \quad \Delta^3 \xi_{n-4} \quad \text{et} \quad \Delta^4 \xi_{n-5}.$$

En développant les différences d'après la formule de Taylor supposée applicable ici, on trouve alors [1], en négligeant les différences $\Delta^5\xi$ du cinquième ordre, la formule approchée, formule qui est caractéristique pour notre méthode :

$$(4) \qquad \Delta^2 x_{n-1} = \xi_n + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{n-2} + \Delta^3\xi_{n-3} + \Delta^4\xi_{n-4} - \frac{1}{20}\Delta^4\xi_{n-4}\right].$$

On trouve aisément que si Δt est infiniment petit du premier ordre, cette formule est exacte aux infiniment petits du septième ordre près [2].

Cela posé, supposons que les nombres du tableau ci-dessus sont connus et que l'on sait calculer

$$\xi_n = x''(t_n)(\Delta t)^2,$$

ce qui aura lieu dans le cas d'intégration du système différentiel (2). Voici alors le procédé pour *calculer approximativement la valeur x_{n+1} à l'aide des nombres du tableau seulement :*

On met ξ_n à sa place, et à l'aide des soustractions on calcule successivement :

$$\Delta\xi_{n-1}, \qquad \Delta^2\xi_{n-2}, \qquad \Delta^3\xi_{n-3} \qquad \text{et} \qquad \Delta^4\xi_{n-4}$$

que l'on met également à leur place.

A l'aide de la formule approximative (4) on calcule alors $\Delta^2 x_{n-1}$. En le mettant à sa place, et en ajoutant Δx_{n-1}, on trouve Δx_n et ensuite $\overline{x}_{n+1}$.

Cette valeur approximative $\overline{x}_{n+1}$ sera, pour Δt assez petit, très peu différente de la vraie valeur x_{n+1}. En effet, leur différence sera [3] :

$$x_{n+1} - \overline{x}_{n+1} = \frac{3}{40} x^{(7)}(t_n)(\Delta t)^7 + \ldots,$$

où $\overline{x}_{n+1}$ est la valeur approximative; donc *si Δt est infiniment petit du premier ordre, cette différence sera infiniment petite du septième ordre.*

---

(1) Voir les Mémoires cités.

(2) Voir *Résultats des calculs numériques*, III, p. 57, déjà cité.

(3) Voir *Résultats des calculs numériques*, III, *l. c.*

III. — La méthode d'intégration numérique.

La méthode d'intégration numérique du système différentiel (2) est maintenant facile à comprendre. Pour chacune des variables dépendantes x, y, ... u on dresse un tableau comme le tableau (3), et on applique la formule approximative (4); les ξ_n se trouvent en substituant pour les dérivées secondes leurs expressions comme fonctions de x, y, ... u et t, et en donnant à ces variables respectivement les valeurs x_n, y_n, ... u_n et t_n.

x_{n+1}, y_{n+1}, ... et u_{n+1} étant ainsi trouvées, on applique de nouveau le même procédé, et cela donne x_{n+2}, y_{n+2}, ... u_{n+2}, et ainsi de suite.

Un exemple fera bien comprendre les détails du calcul. Soit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x + 6y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -3x + 7y$$

et supposons que nous avons déjà calculé les tableaux :

t	x	Δx	$\Delta^2 x$		ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$	$\Delta^4\xi$
—0.3	2030448				36769				
		277334				6418			
—0.2	2307782		43289		43187		1241		
		320623				7659		254	
—0.1	2628405		50972		50846		1495		
		371595				9154			
0	3000000		60150		60000				
		431745							
0.1	3431745								

et

t	y	Δy	$\Delta^2 y$		η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta^4\eta$
—0.3	1289630				29361				
		199421				5639			
—0.2	1489051		35096		35000		1159		
		234517				6798		245	
—0.1	1723568		41915		41798		1404		
		276432				8202			
0	2000000		50142		50000				
		326574							
0.1	2326574								

On a ici, en admettant des indices négatifs :

$$x_1 = 3431745, \qquad \text{et} \qquad y_1 = 2326574,$$
$$\Delta x_0 = 431745, \qquad \Delta y_0 = 326574,$$
$$\Delta^2 x_{-1} = 60150 \qquad \Delta^2 y_{-1} = 50142.$$

On calculera d'abord ξ_1 et η_1 par les formules

$$\xi_1 = \frac{d^2 x}{dt^2}(\Delta t)^2 = (-2x + 6y)(\Delta t)^2,$$
$$\eta_1 = \frac{d^2 y}{dt^2}(\Delta t)^2 = (-3x + 7y)(\Delta t)^2$$

en y posant

$$x = x_1, \qquad x = y_1, \qquad \Delta t = \frac{1}{10},$$

ce qui donne

$$\xi_1 = 70960, \qquad \eta_1 = 59908,$$

et ensuite, par les soustractions, on en déduit :

$$\begin{aligned} \Delta\xi_0 &= 10960, & \text{et} \qquad \Delta\eta_0 &= 9908, \\ \Delta^2\xi_{-1} &= 1806, & \Delta^2\eta_{-1} &= 1706, \\ \Delta^3\xi_{-2} &= 311, & \Delta^3\eta_{-2} &= 302, \\ \Delta^4\xi_{-3} &= 57 & \Delta^4\eta_{-3} &= 57. \end{aligned}$$

Cela posé, $\Delta^2 x_0$ et $\Delta^2 y_0$ seront données par la formule (4) :

$$\Delta^2 x_0 = \xi_1 + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\xi_{-1} + \Delta^3\xi_{-2} + \Delta^4\xi_{-3} - \frac{1}{20}\Delta^4\xi_{-3}\right].$$

$$\Delta^2 y_0 = \eta_1 + \frac{1}{12}\left[\Delta^2\eta_{-1} + \Delta^3\eta_{-2} + \Delta^4\eta_{-3} - \frac{1}{20}\Delta^4\eta_{-3}\right],$$

d'où, en substituant les valeurs

$$\Delta^2 x_0 = 70960 + \frac{1}{12}\left[1806 + 311 + 57 - \frac{1}{20}57\right],$$

$$\Delta^2 y_0 = 59908 + \frac{1}{12}\left[1706 + 302 + 57 - \frac{1}{20}57\right],$$

ce qui donne, en chiffres ronds :

$$\Delta^2 x_0 = 71141,$$

$$\Delta^2 y_0 = 60080.$$

Cela donne ensuite :

$$\Delta x_1 = 431745 + 71141 = 502886,$$

$$\Delta y_1 = 326574 + 60080 = 386654$$

et

$$x_2 = 3431745 + 502886 = 3934631,$$

$$y_2 = 2326574 + 386654 = 2713228$$

qui seront les valeurs correspondant à $t = 0.2$.

En mettant ces valeurs en place, les schèmes deviennent :

t	x	Δx	$\Delta^2 x$		ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	$\Delta^3\xi$	$\Delta^4\xi$
—0.3	2030448				36769				
		277334				6418			
—0.2	2307782		43289		43187		1241		
		320623				7659		254	
—0.1	2628405		50972		50846		1495		57
		371595				9154		311	
0	3000000		60150		60000		1806		
		431745				10960			
0.1	3431745		71141		70960				
		502886							
0.2	3934631								

et

t	y	Δy	$\Delta^2 y$		η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta^4\eta$
—0.3	1289630				29361				
		199421				5639			
—0.2	1489051		35096		35000		1159		
		234517				6798		245	
—0.1	1723568		41915		41798		1404		57
		276432				8202		302	
0	2000000		50148		50000		1706		
		326574				9908			
0.1	2326574		60080		59908				
		386654							
0.2	2713228								

De cette manière on peut continuer, et voici les premières valeurs que donne cette méthode (¹) :

t	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
x	3934631	4521836	5209188	6015718	6964341	8082681	9404075
y	2713228	3171977	3717362	4366995	5142220	6068926	7178531

Dans le cas actuel, il est facile de contrôler l'exactitude de la méthode ; en effet, le système est complètement intégrable, et l'intégrale particulière tabulée ici est la suivante :

$$x = 1000000(2e^t + e^{2t}),$$
$$y = 1000000(e^t + e^{2t}).$$

Voici les valeurs calculées par ces formules :

t	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
x	3934631	4521837	5209191	6015724	6964355	8082704	9404116
y	2713228	3171978	3717366	4367003	5142236	6068952	7178575

Comme on le voit, l'écart n'est pas grand.

Si l'on prend un intervalle égal à la moitié, c'est-à-dire égal à 0,05, et si l'on fait le calcul avec deux chiffres de plus, on arrive pour $t = 0.8$ aux valeurs :

$$x = 9404112,$$
$$y = 7178571$$

qui diffèrent des valeurs exactes de quelques unités seulement.

Dans le Mémoire *Résultats des calculs numériques*, etc., nº III, déjà cité, nous avons aussi appliqué la méthode à un autre exemple, à savoir :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x.$$

Nous avons calculé ici l'intégrale particulière

$$x = 10000000 . \cos t$$

(¹) Voir le Mémoire déjà cité, *Résultats des intégrations numériques*, III.

en commençant avec la valeur 10000000 pour $t = 0$ et en choisissant l'intervalle

$$\Delta t = \frac{\pi}{60} = \text{trois degrés.}$$

En calculant toujours x avec neuf chiffres, on trouve alors, après soixante intervalles de calcul, la valeur extrêmement approchée :

$$x = -10000000{,}26 \quad \text{pour} \quad t = \pi$$

avec une erreur de 0,26 seulement.

Dans le Mémoire de M. Kryloff on trouve des exemples numériques calculés d'après d'autres méthodes, et ensuite d'après la mienne comme comparaison.

Il serait facile de multiplier les exemples, et chacun peut le faire par soi-même; nous ne nous y arrêterons donc pas.

IV. — Remarques générales sur le choix de la variable indépendante. Procédés pour le commencement du calcul et pour la bi-section ou dédoublement de l'intervalle.

Comme la méthode suppose applicable la série de Taylor, et comme, d'autre part, cela aura lieu partout où l'intégrale en question est une fonction holomorphe de t, il *sera bon dès le commencement de choisir une variable indépendante t de manière que les intégrales soient fonctions holomorphes de t dans un domaine aussi étendu que possible.*

Si pendant le calcul on s'approche d'une valeur de t donnant un point singulier de l'intégrale, cela se fera voir d'ailleurs sur les séries de différences, les séries d'ordre croissant ne diminuant pas aussi vite qu'à l'ordinaire, et il faudra alors choisir un intervalle plus petit; en général, la bi-section suffit, c'est-à-dire le choix de l'intervalle $\frac{1}{2}\Delta t$ au lieu de Δt. Pour dresser le schème correspondant, il faut trouver des formules d'interpolation correspondantes. Nous les donnerons ici, en renvoyant pour la démonstration aux Mémoires cités (¹).

$$\begin{aligned} x_{n-\frac{1}{2}} = x\left(t_n - \frac{1}{2}\Delta t\right) = x_n - \frac{\Delta x_n + \Delta x_{n-1}}{4} + \frac{\xi_n}{8} + \frac{\Delta\xi_n + \Delta\xi_{n-1}}{32} \\ + \frac{\Delta^2\xi_{n-1}}{384} - \frac{5}{1536}\left[2^3\Delta\xi_{n-2} + \Delta^4\xi_{n-3}\right] - \frac{\Delta^4\xi_{n-1}}{5120} + \ldots \end{aligned}$$

(²) Voir *Sur les trajectoires*, etc, § 13.

En remplaçant n par $n-1$, on calculera de même $x_{n-\frac{3}{2}}$, et par des soustractions on aura les différences premières et secondes. D'ailleurs ces différences secondes peuvent être calculées indépendamment par la formule approchée :

$$\Delta^2 x_{n-\frac{1}{2}} = \frac{\xi_n}{4} + \frac{\Delta^2 \xi_{n-1}}{32} - \frac{\Delta^4 \xi_{n-2}}{384}.$$

Ensuite on calculera, à l'aide des équations différentielles, les nouvelles ξ :

$$\xi_{n-\frac{1}{2}} = x''\left(t_n - \frac{1}{2}\,\Delta t\right)\frac{(\Delta t)^2}{4}$$

et les schèmes des variables dépendantes $x, y, \ldots u$ avec intervalle $\frac{1}{2}\Delta t$ étant ainsi dressés, le calcul continuera d'après la méthode exposée. Les quantités $\Delta^4\xi$ étant du sixième ordre en Δt, elles seront à peu près $\frac{1}{64}$ part des différences dans le cas de l'intervalle Δt.

Si, d'un autre côté, les différences $\Delta^4\xi$ deviennent trop petites, on peut choisir l'intervalle égal à $2\Delta t$, et la formation des schèmes est alors immédiate.

Quant au commencement du calcul, on peut procéder avec approximations successives jusqu'à ce qu'on ait trouvé un intervalle Δt d'une grandeur convenable et des valeurs assez exactes des différences du schème. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse de calculer l'intégrale correspondant aux conditions initiales suivantes :

$$\left.\begin{array}{llll} x = x_0, & y = y_0, & \ldots & u = u_0 \\ \dfrac{dx}{dt} = x'_0, & \dfrac{dy}{dt} = y'_0, & \ldots & \dfrac{du}{dt} = u'_0 \end{array}\right\} \text{pour} \quad t = 0,$$

où ces équations seront choisies de manière à satisfaire aux intégrales premières, si on les a déjà trouvées; si l'on est par exemple sorti du système (1), il faut choisir les $x_0, y_0, \ldots u_0, x'_0, y'_0, \ldots u'_0$, de manière à satisfaire à ce système pour $t = 0$.

Ces intégrales premières peuvent d'ailleurs servir à l'épreuve quand on veut découvrir des erreurs pendant l'application de la méthode d'intégration numérique; en effet, si pendant ce calcul l'intégrale première cesse d'être vérifiée, cela montre que l'on a commis une erreur de calcul.

Cela posé on calculera, à l'aide des équations différentielles (2), les dérivées secondes.

$$x_0'', \quad y_0'', \quad \ldots \quad u_0'',$$

ce qui donne

$$\xi_0, \quad \eta_0, \quad \ldots \quad \omega_0 \quad (\text{où } \omega_0 = u_0''(\Delta t)^2).$$

En choisissant un Δt assez petit on peut alors calculer les valeurs $x_1, y_1, \ldots u_1$ correspondant à $t = \Delta t$ par la formule de Taylor arrêtée au terme du second ordre :

$$x_1 = x_0 + x_0' \Delta t + \frac{x_0''}{1 \cdot 2} (\Delta t)^2,$$

$$y_1 = y_0 + y_0' \Delta t + \frac{y_0''}{1 \cdot 2} (\Delta t)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_1 = u_0 + u_0' \Delta t + \frac{u_0''}{1 \cdot 2} (\Delta t)^2$$

et la connaissance de ces valeurs approchées permet de calculer $\xi_1, \eta_1, \ldots \omega_1$. En mettant ces nombres en place, on aura ainsi par des soustractions le schème suivant :

t	x	Δx	$\Delta^2 x$		ξ	$\Delta \xi$	$\Delta^2 \xi$	...
o	x_0				ξ_0			
		Δx_0				$\Delta \xi_0$		
Δt	x_1				ξ_1			

et des schèmes pareils pour $y, \ldots$ et u.

Cela posé, on remplace en première approximation la formule (4) par la suivante :

$$(4') \qquad \Delta^2 x_{n-1} = \xi_n$$

et à l'aide de cette formule on calculera

$$\Delta^2 x_0 = \xi_1, \quad \Delta^2 y_0 = \eta_1, \quad \ldots \quad \Delta^2 u_0 = \omega_1$$

qu'on met à leurs places, ce qui donne ensuite, par des additions, les nombres $\Delta x_1, \Delta y_1, \ldots \Delta u_1$ et $x_2, y_2, \ldots u_2$, de manière que le schème pour x devient :

t	x	Δx	$\Delta^2 x$		ξ	$\Delta \xi$	$\Delta^2 \xi$	...
o	x_0				ξ_0			
		Δx_0				$\Delta \xi_0$		
Δt	x_1		$\Delta^2 x_0$		ξ_1			
		Δx_1						
$2\Delta t$	x_2							

Pour $y, \ldots u$ on aura des schèmes pareils.

Une nouvelle application du système (2) donne $\xi_2, \eta_2, \ldots \omega_2$, et à l'aide de l'équation (4') on en déduit $\Delta^2 x_1, \Delta^2 y_1, \ldots \Delta^2 u_1$, qu'on met à leur place; par des additions on en déduit $\Delta x_2, \Delta y_2, \ldots \Delta u_2$, et enfin $x_3, y_3, \ldots u_3$, et ainsi de suite.

On continue de cette manière jusqu'à ce qu'on ait obtenu assez de valeurs pour calculer les différences de $\xi, \eta, \ldots \omega$ jusqu'au quatrième ordre inclusivement, et à l'aide de ces différences, on calculera enfin les dérivées supérieures

$$\begin{array}{llll} x_0''', & x_0^{\text{IV}}, & x_0^{\text{V}}, & x_0^{\text{VI}}, \\ y_0''', & y_0^{\text{IV}}, & y_0^{\text{V}}, & y_0^{\text{VI}}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_0''', & u_0^{\text{IV}}, & u_0^{\text{V}} & \text{et } u_0^{\text{VI}}. \end{array}$$

En effet, on peut dans ce calcul se servir des formules connues suivantes se rapportant au schème (3) et faciles à démontrer [1] :

$$x_n'''.(\Delta t)^3 = \frac{\Delta\xi_n + \Delta\xi_{n-1}}{2} - \frac{\Delta^3\xi_{n-1} + \Delta^3\xi_{n-2}}{12},$$

$$x_n^{\text{IV}}.(\Delta t)^4 = \Delta^2\xi_{n-1} - \frac{1}{12}\Delta^4\xi_{n-2},$$

$$x_n^{\text{V}}.(\Delta t)^5 = \frac{\Delta^3\xi_{n-1} + \Delta^3\xi_{n-2}}{2},$$

$$x_n^{\text{VI}}.(\Delta t)^6 = \Delta^4\xi_{n-2},$$

où l'on a négligé les différences du cinquième ordre de ξ.

En substituant les valeurs des dérivées supérieures dans la formule de Taylor

$$x_1 = x_0 + x_0'\Delta t + \frac{x_0''}{1.2}(\Delta t)^2 + \frac{x_0'''}{1.2.3}(\Delta t)^3 + \ldots,$$

on calculera des valeurs plus exactes de x_1 et de même de $y_1, \ldots u_1$, et on *recommenee le calcul des schèmes.*

Par tâtonnement on arrive ainsi finalement à des valeurs assez exactes pour que l'on puisse continuer avec confiance le calcul d'après la méthode exposée. Δt est alors supposé choisi assez petit pour que les différences du cinquième ordre de $\xi, \eta, \ldots \omega$ soient négligeables.

On peut naturellement aussi trouver des dérivées supérieures en différentiant les

---

[1] Voir le Mémoire *Sur les trajectoires des corpuscules*, etc., § 13, déjà cité.

équations différentielles plusieurs fois, comme on le fait lorsqu'il s'agit de développer l'intégrale en série. Cependant la méthode par approximations successives conduit en général plus vite au but.

L'usage des séries de différences que cette méthode d'intégration numérique a de commun avec plusieurs autres méthodes est très utile dans la pratique; en effet, une erreur dans le calcul se relèvera presque immédiatement en rendant les séries de différences irrégulières, et, d'autre part, on aura, dans le fait que les quatrièmes différences de ξ, η, ... ω sont très petites par rapport à ces quantités elles-mêmes, de bonnes indications que l'intervalle est bien choisi.

Il est inutile de rappeler quel champ immense d'application aura cette méthode d'intégration numérique. Dans le problème des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire, problème fondamental pour la théorie des aurores polaires, la méthode a déjà rendu des services énormes.

D'après M. Kryloff, elle a été appliquée en Russie au problème de la stabilité des navires.

Un problème où elle rendra sans doute aussi de très grands services sera celui *des trois corps*, où l'ancienne méthode de Darwin a déjà été appliquée avec beaucoup de succès (*Acta mathematica*, T. 21). On sait qu'une méthode semblable à la mienne, mais, d'après mon opinion, pas aussi simple, a récemment, dans les mains de l'astronome Elis Strömgren et ses élèves, été extrêmement utile en élucidant plusieurs cas intéressants du problème restreint et même du problème général.