



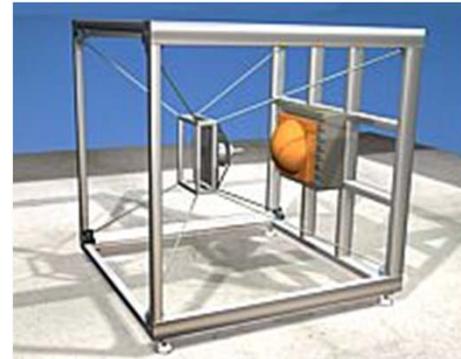
## 6. Kinematiken

### Literatur:

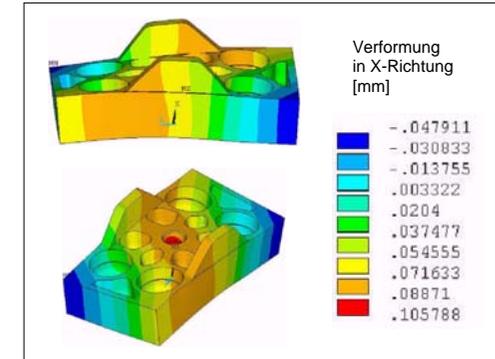
- [Weck06] Weck, M.; Brecher, Ch.:  
Werkzeugmaschinen 3 – Mechatronische Systeme, Vorschubantriebe, Prozessdiagnose.  
6.Auflage, Springer-Verlag Heidelberg, 2006
- [Mer00] Merlet, J.P.: Parallel Robots. Solid mechanics and its applications.  
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000

## Bewegungseinrichtungen:

- **Kinematik:**
  - serielle / parallele / hybride Struktur
  - statisch bestimmt / überbestimmt
  - redundante Achsen
  - Freiheitsgrade



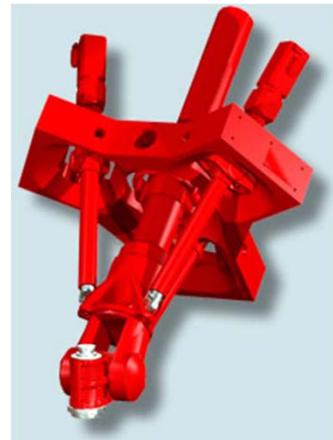
Seilkinematik  
(parallel, statisch überbestimmt)



Statisch überbestimmter Stoßel



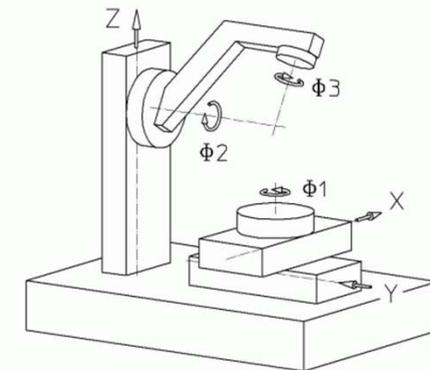
Hexapod (parallel)



Tricept (hybrid)



Industrieroboter (seriell)



Werkzeugmaschine (seriell)



### *Zwanglauf*



### Der Zwanglauf von Mechanismen ist relevant für Fragen, wie z.B.:

- Wie viele **unabhängige Antriebsachsen** sind in einer Kinematik zur Erzeugung definierter Bewegungen erforderlich?
- Ist die **unabhängige Bewegung von Einzelachsen** (ohne Zwängung) möglich?
- Welche **Fertigungs- und Montagetoleranzen** sind für eine Kinematik anzugeben?
- Können bei der **Montage** einer Kinematik Verspannungen auftreten?
- Welcher **Justagebedarf** besteht **bei der Wartung / Montage** einer Kinematik?
- Welche **Abstützung** ist **bei der Montage / Demontage** einer Kinematik nötig?
- Können **eindeutige Achssollwerte für die Ansteuerung** mit der Rückwärtstransformation berechnet werden?
- Sind mit einer Kinematik **redundante Achsbewegungen** möglich?

### Zwanglauf:

- Mechanismus =  $n$  Getriebeglieder (Starrkörper), mit Gelenken verbunden
- pro Getriebeglied  $b = 6$  Freiheitsgrade (FhG/DoF) im Raum ( $b = 3$  in Ebene)  
→ Freiheitsgrade im unverkoppelten Mechanismus  $F_M$  :

$$F_M = b \cdot (n - 1)$$

Gestell ist unbeweglich

- $e$  Gelenke *in allgemeiner Relativlage* zur mech. Kopplung der Getriebeglieder (Gelenktyp, z.B. Schub-, Dreh-, Schraubgelenk, ist unerheblich)
- Gelenkbewegung mit  $f_g$  Freiheiten, d.h.  $u_g = b - f_g$  Unfreiheiten möglich, dadurch Bindung von  $u_g$  Freiheitsgraden der verkoppelten Getriebeglieder.  
→ Gesamtanzahl der Unfreiheiten im Mechanismus  $U_M$  :

$$U_M = \sum_{i=1}^e u_i = e \cdot b - \sum_{i=1}^e f_{gi}$$

- Resultierender Freiheitsgrad des *verkoppelten* Mechanismus  $F$ :

$$F = F_M - U_M = b \cdot (n - 1) - \left( e \cdot b - \sum_{i=1}^e f_{gi} \right) = b \cdot (n - 1 - e) + \sum_{i=1}^e f_{gi}$$

- Freiheitsgrade, die nicht zur Bewegung des Endeffektors (EE) beitragen, werden als sogenannte *identische Freiheitsgrade*  $f_{id}$  berücksichtigt:

$$F = b(n - 1 - e) + \sum_{i=1}^e f_{gi} - \sum f_{id}$$

→ Bei **Zwanglauf** ist mit  $F$  aktiven Gelenken die EE-Pose **ohne innere Verspannungen** definiert.

$F > 0$ : *bewegliches System (in  $F$  unabhängigen Richtungen)*

$F = 0$ : *statisch bestimmtes System (eindeutige EE-Pose)*

$F < 0$ : *statisch überbestimmtes System (innere Spannungen)*

angetriebene Gelenke (Vorschubachsen)

→ **aktive Gelenke**

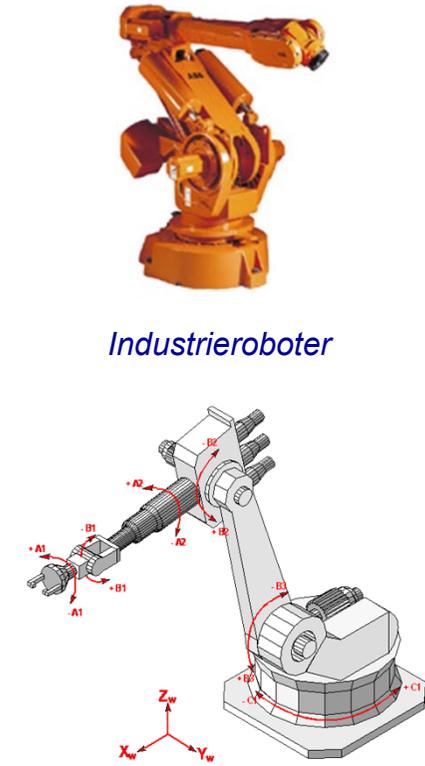
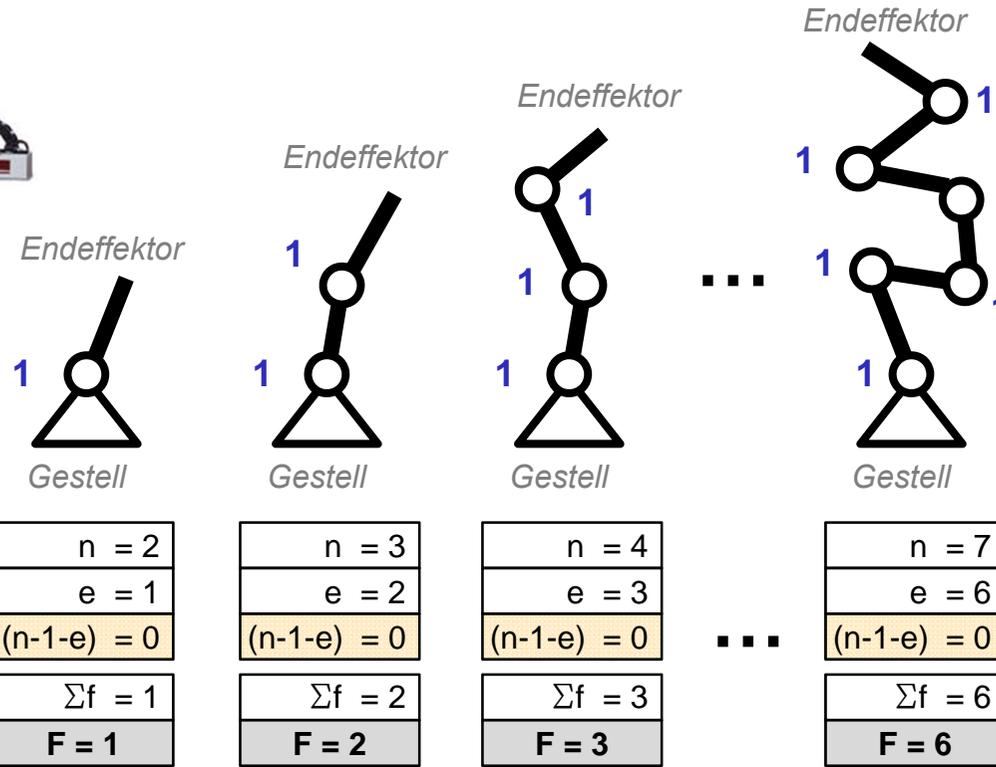
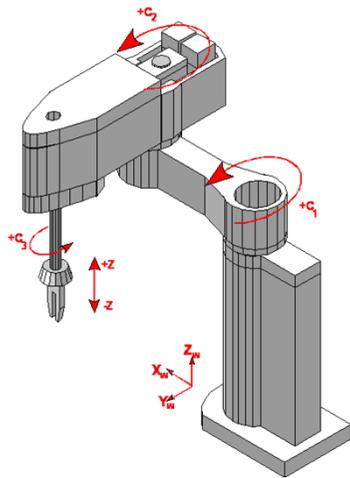
nicht angetriebene Gelenke

→ **passive Gelenke**



### Beispiele für Zwanglauf-Probleme

- Identische Freiheitsgrade
- Zwanglauf an seriellen Strukturen:
  - Serielle Kinematik (IR), redundante Achsen (IR-9)
  - Serielle Kinematik (WZM)
- Zwanglauf an Parallelkinematiken:
  - Gelenke an Hexapod Stabachsen  
→ Varianten der Gelenkaufteilung  
→ Gelenkaufteilung am Hexapod FELIX
  - Montage des Hexapod FELIX
  - Tripod → theoretisch vs. praktisch
  - Tricept „Exechon“ → Fallbeispiel, ebene Teilstrukturen
  - Profilschienenführung → WZM-Tisch mit 4 PSF-Schuhen auf 2 PSF



Für alle **seriellen kinematischen Ketten** gilt:  
 → Der Klammersausdruck  $(n - 1 - e)$  ist immer 0!  
 (= Anzahl kinematischer Schleifen)  
 → Für  $F > 6$  ist die Struktur generell redundant.  
 → Alle Gelenke müssen aktive Gelenke sein.

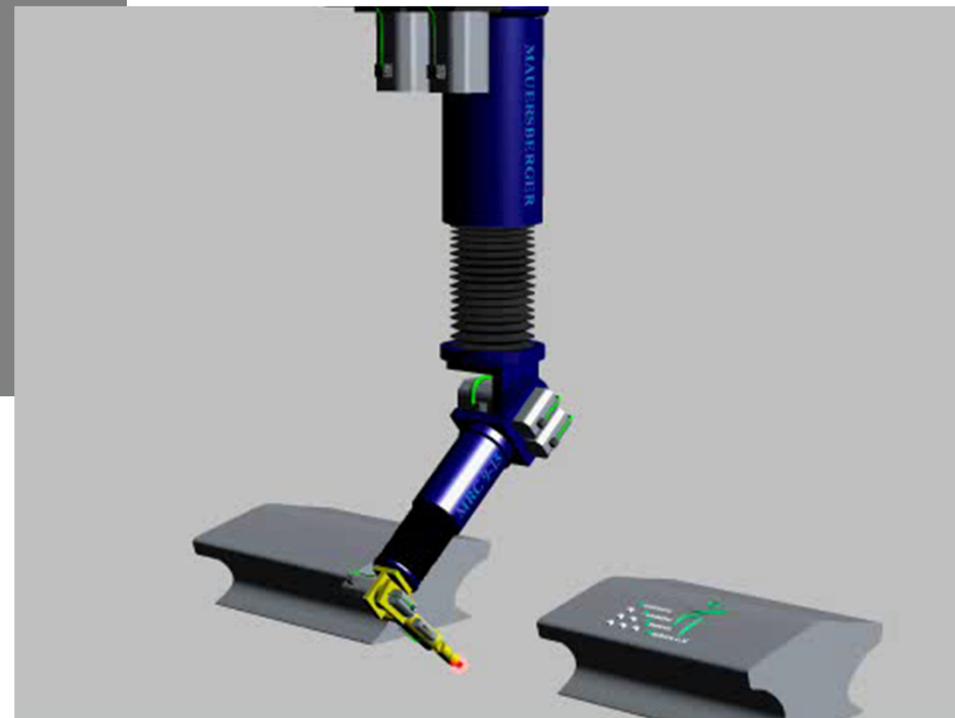
$$F = b(n - 1 - e) + \sum_{i=1}^e f_{gi} = b \cdot 0 + \sum_{i=1}^e f_{gi}$$

$$F = \sum_{i=1}^e f_{gi}$$

## Beispiel: 9achsiger serieller Industrieroboter MRC 9-15 (Fa. Mauerberger)



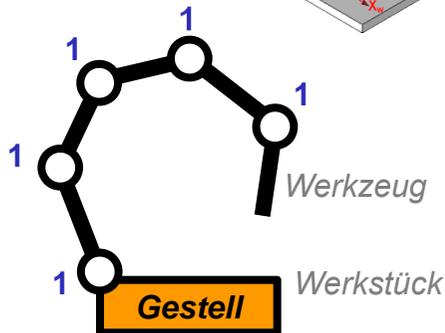
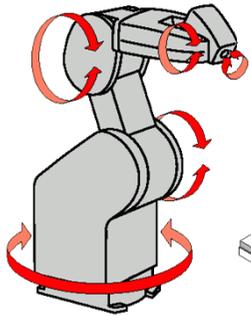
Achsbewegungen am MRC 9-15



Vergrößerter Arbeitsraum  
durch Achsredundanz

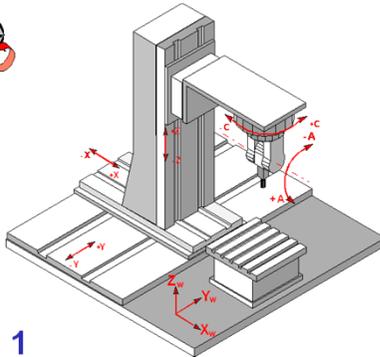
→ Die Lage des Gestells innerhalb der kinematischen Kette ist unerheblich für den Freiheitsgrad F

5-Achsen-  
Knickarm-Roboter

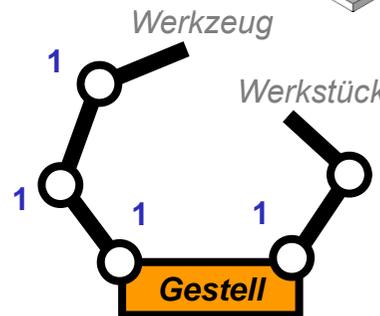
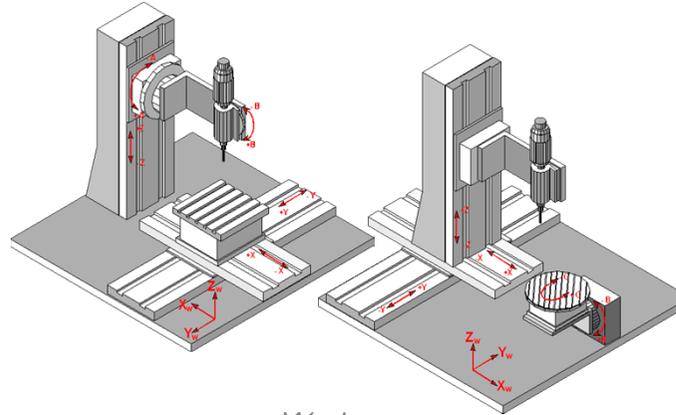


n = 6
e = 5
(n-1-e) = 0
$\Sigma f = 5$
<b>F = 5</b>

5-Achs-Werkzeug-  
maschine

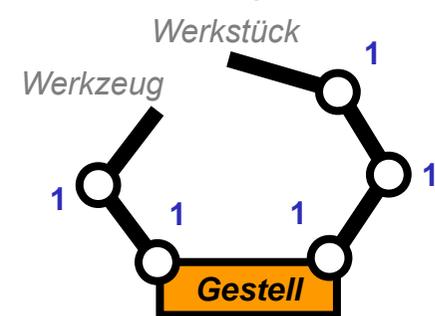
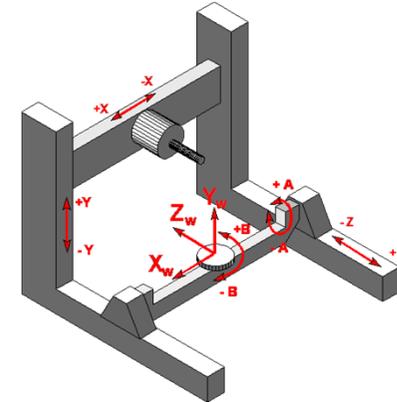


5-Achs-Werkzeug-  
maschinen



n = 6
e = 5
(n-1-e) = 0
$\Sigma f = 5$
<b>F = 5</b>

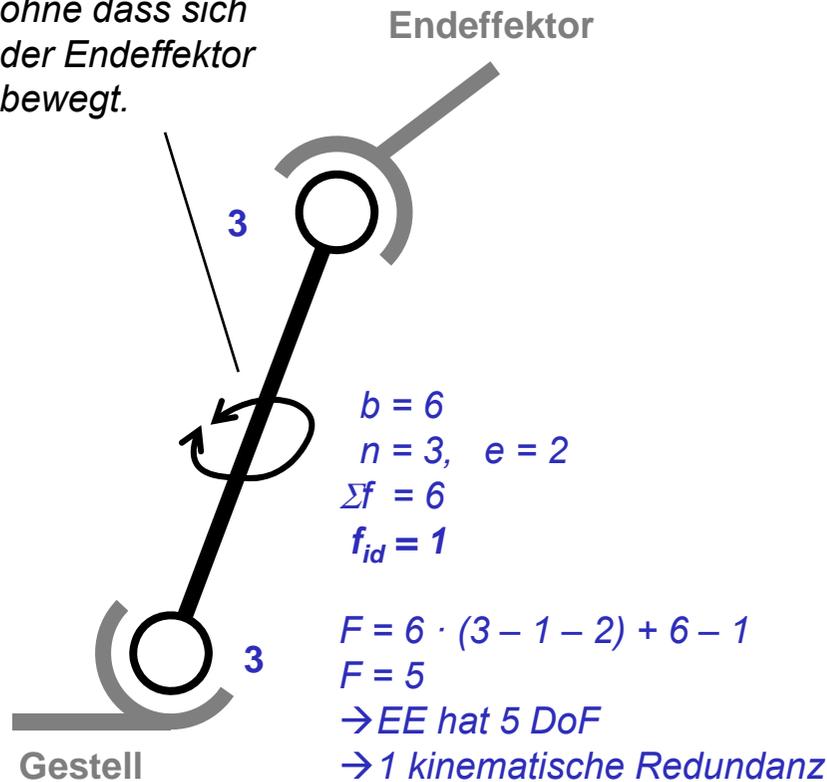
5-Achs-Werkzeug-  
maschine



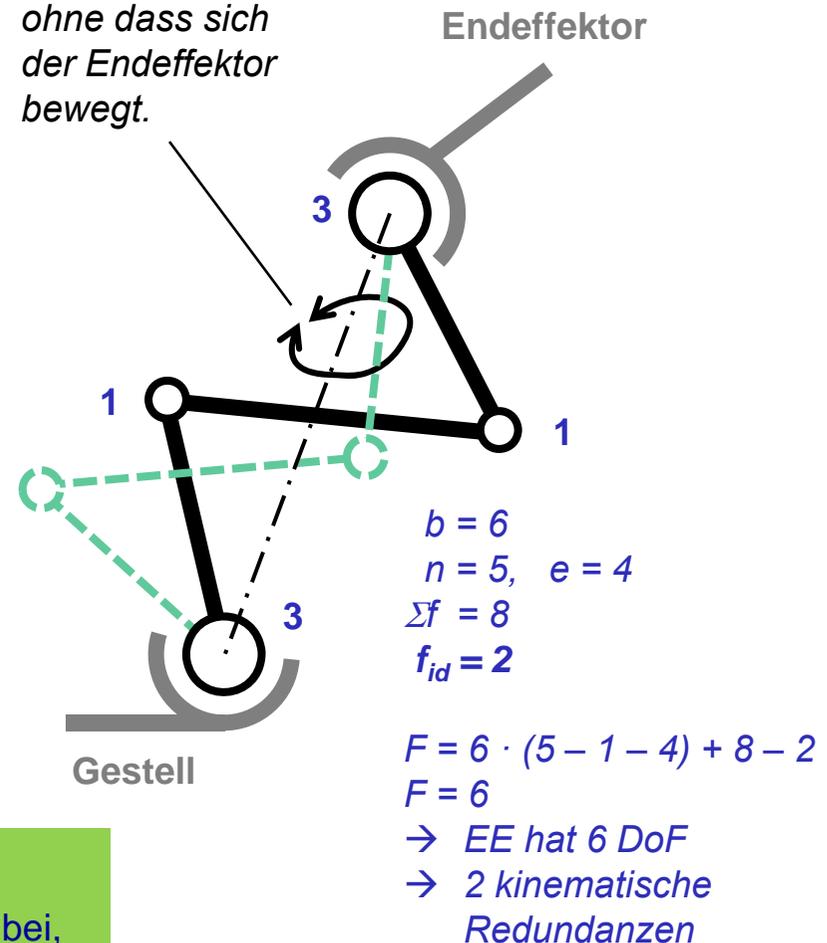
n = 6
e = 5
(n-1-e) = 0
$\Sigma f = 5$
<b>F = 5</b>

Quellen: <http://infosys.beckhoff.com/content/1034/tccnckintrans/html/kintyp1.htm?id=21107>

**Getriebeglied** kann  
sich bewegen,  
ohne dass sich  
der Endeffektor  
bewegt.



**Teilstruktur** kann  
sich bewegen,  
ohne dass sich  
der Endeffektor  
bewegt.

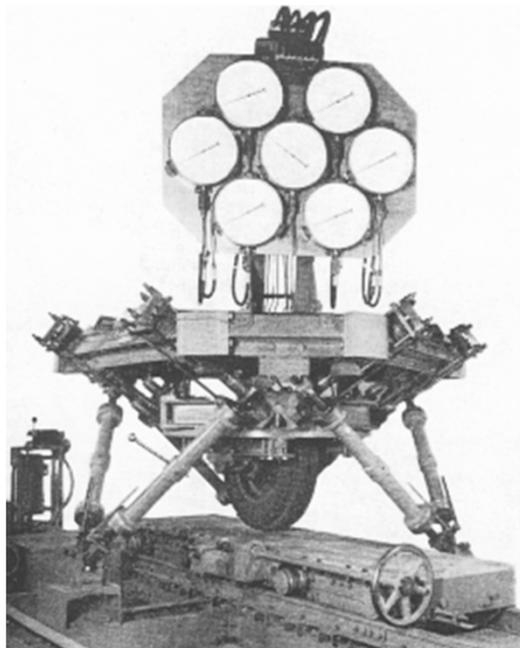


**Identische Freiheitsgrade:**

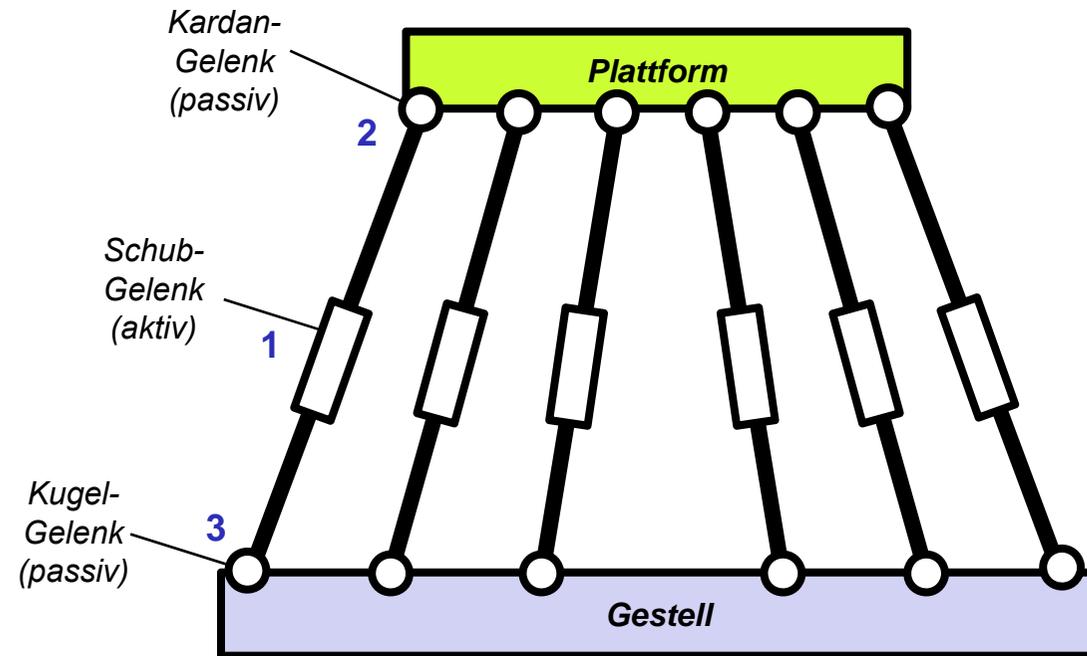
- tragen nicht zur Endeffektor-Bewegung bei,
- verursachen kinematische Redundanz
- sind nicht ohne weiteres (formal) erkennbar.

## Zwanglauf an Parallelkinematiken (PKM)

Bsp.: Hexapod GOUGH-Plattform



Reifenprüfmaschine bei Dunlop (1954)



Für **parallele (und hybride) kinematischen Ketten** gilt:

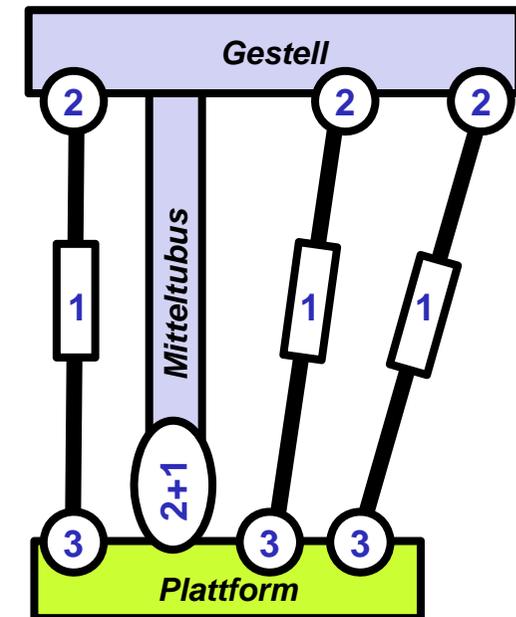
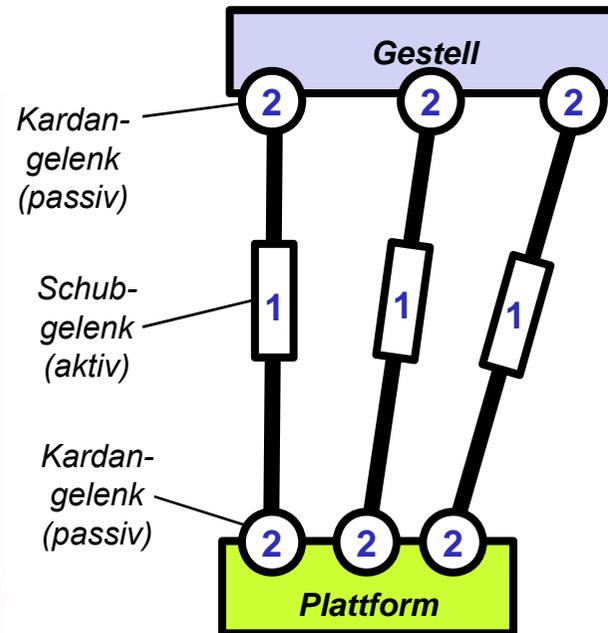
- Der Klammerausdruck  $(n - 1 - e)$  ist ungleich 0
- Er liefert die negative Anzahl der kinematischen Schleifen (= geschlossene kinematische Ketten)

$n = 14$
$e = 18$
$(n-1-e) = -5$
$\sum f = 36$
<b><math>F = 6</math></b>

$b = 6$

Zwanglauf an Parallelkinematiken (PKM)

Bsp.: Tripod



Mitteltubus für höhere Steifigkeit und Lastaufnahme

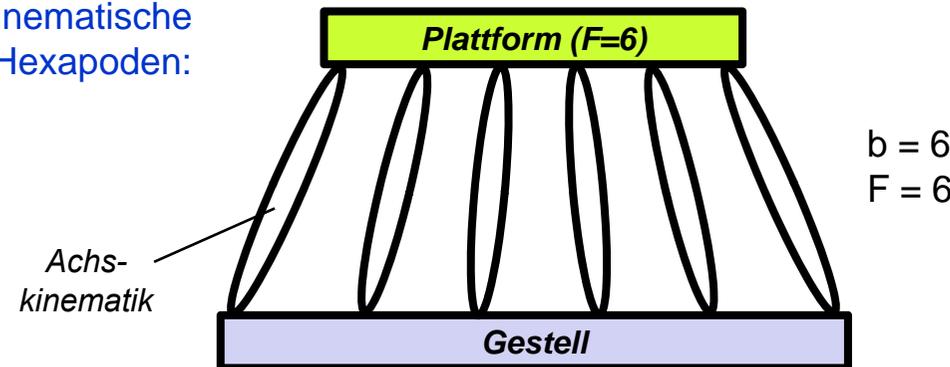
b = 6

n = 8
e = 9
(n-1-e) = -2
$\Sigma f = 15$
<b>F = 3</b>

n = 8
e = 10
(n-1-e) = -3
$\Sigma f = 21$
<b>F = 3</b>

## Beispiel: Auslegung von PKM-Strukturen

Allgemeine kinematische  
Struktur von Hexapoden:



**Anforderung:** 1 Antrieb pro Achse ( $f_{\text{aktiv}} = 1$ )

**Frage:** Wie viele passive Gelenke sind nötig pro Achse ( $f_{\text{passiv}}$ )?

**Lösung:**  $n = 2$   $\rightarrow$   $(n-1-e) = -5$  (Anzahl kinematische Schleifen)  
 $e = 6$

$$\Sigma f = 6 \cdot (f_{\text{aktiv}} + f_{\text{passiv}}) \quad F = b(n-1-e) + 6 \cdot (f_{\text{aktiv}} + f_{\text{passiv}})$$

$$f_{\text{passiv}} = \frac{F - b(n-1-e)}{6} - f_{\text{aktiv}} = \frac{6 - (-30)}{6} - 1 = 5$$

→ In einem Hexapod muss jede Achse 1 aktives und 5 passive Gelenke enthalten, um Zwanglauf zu erreichen.



Gelenktyp	V1	V2	V3	V4	V4
<b><math>f_g = 1</math></b> (z.B. Dreh-, Schub- oder Schraub-gelenk)	1 + 5	1 + 3	1 + 1	1+2	1
<b><math>f_g = 2</math></b> (z.B. Kardangelenke)	-	1	2	-	1
<b><math>f_g = 3</math></b> (z.B. Kugelgelenk)	-	-	-	1	1

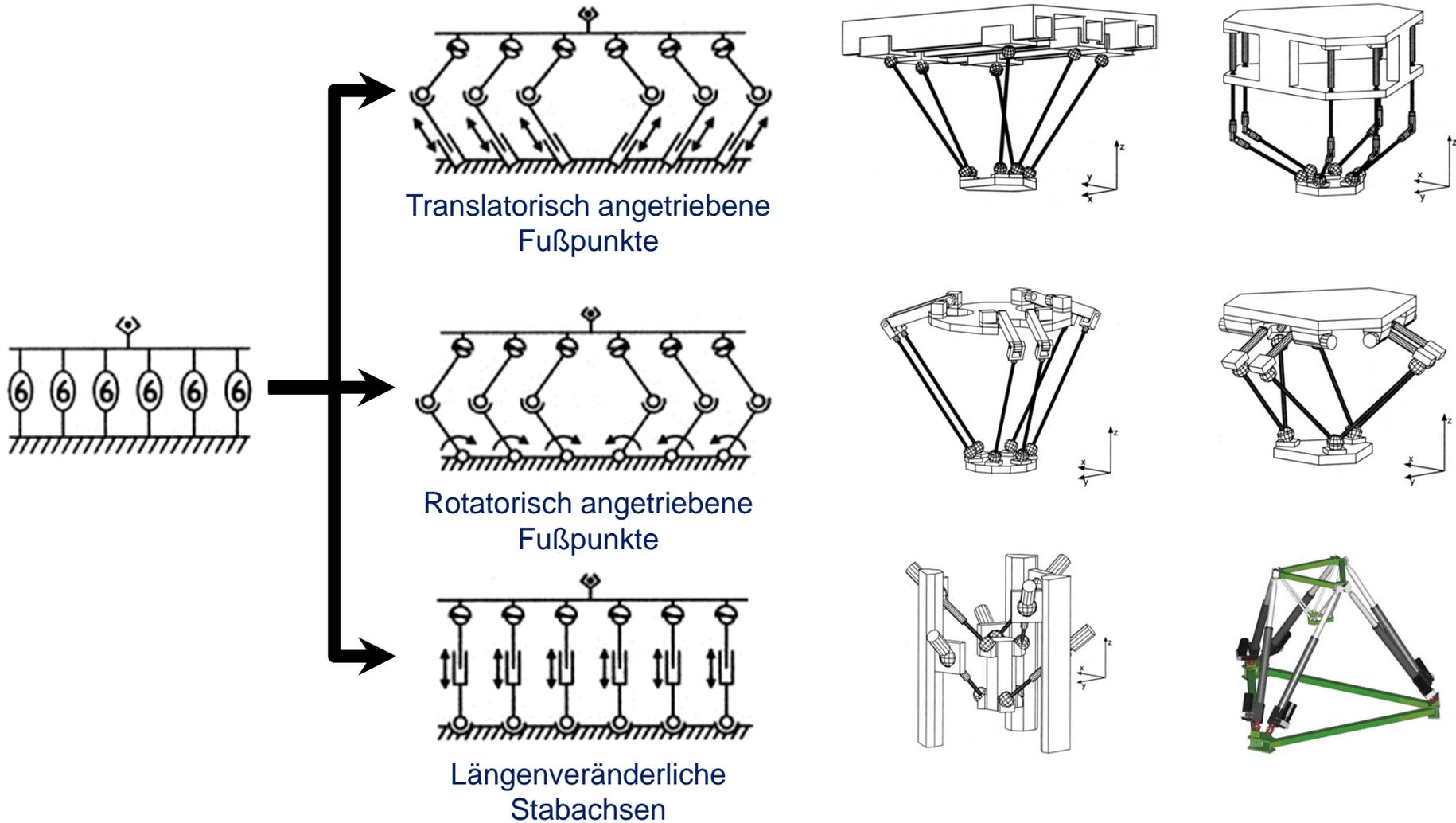
- Es ist mindestens 1 Gelenk mit  $f_g = 1$  als Antrieb erforderlich

*Gough-Plattform*

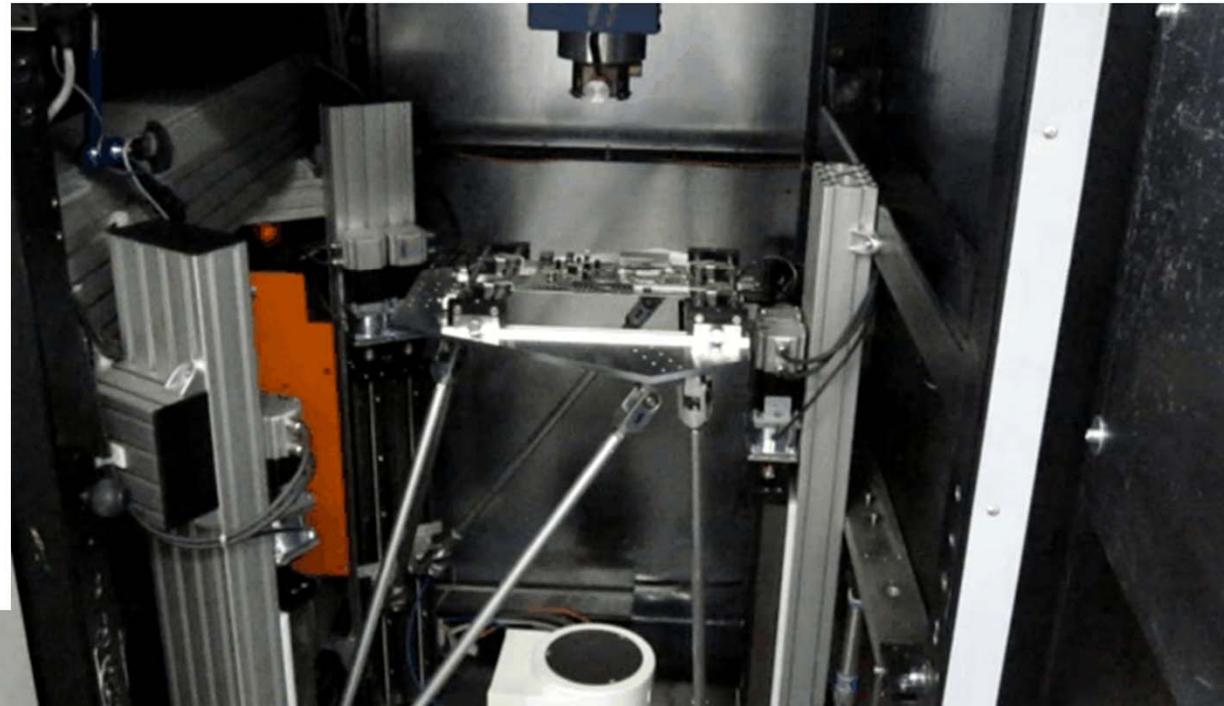
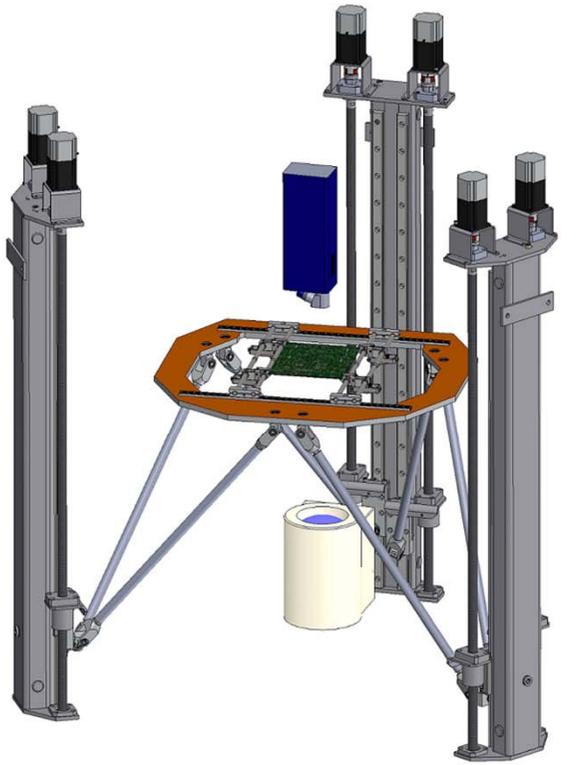
*Hexapod FELIX mit konventionellen Gelenken*

*Hexapod FELIX mit 1 konv. und 1 exzentrischen Gelenk*

*Hexapod FELIX mit je 2 exzentrischen Gelenken*

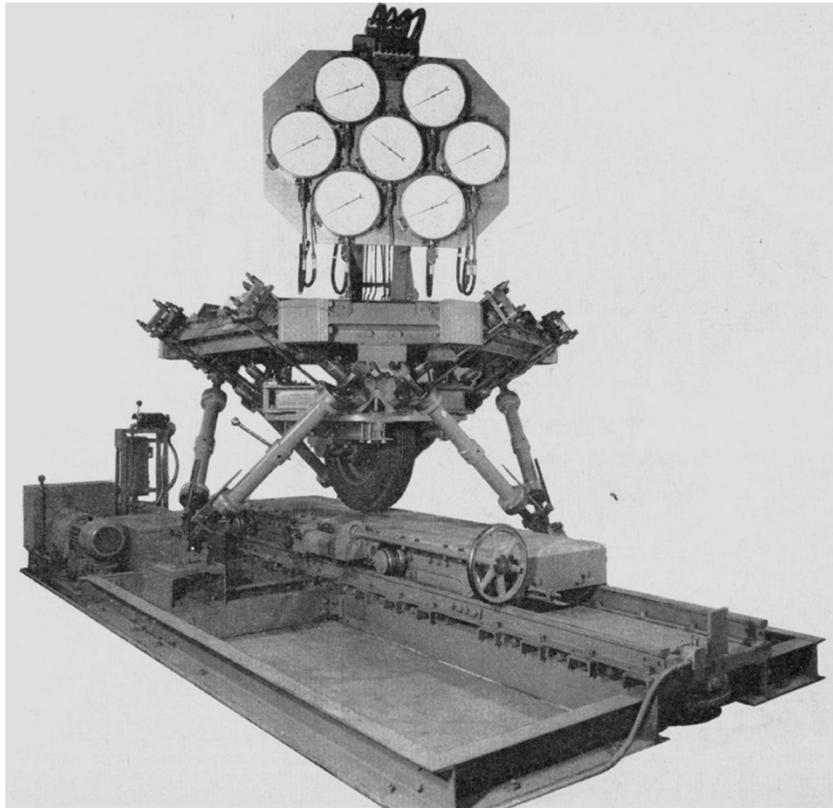


Nach Frindt, M.: Modulbasierte Synthese von Parallelstrukturen für Maschinen in der Produktionstechnik. Dissertation, TU Braunschweig, 2001



## Röntgeninspektionssystem

[Fa. XICRON, <http://xicron.de/wp/de/projekte-und-produkte/>]



### Reifenprüfstand Dunlop (1949)

[Stewart, D. A platform with six degrees of freedom. In Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1965–66, vol. 180, Pt 1 no. 15, pp. 371–386]



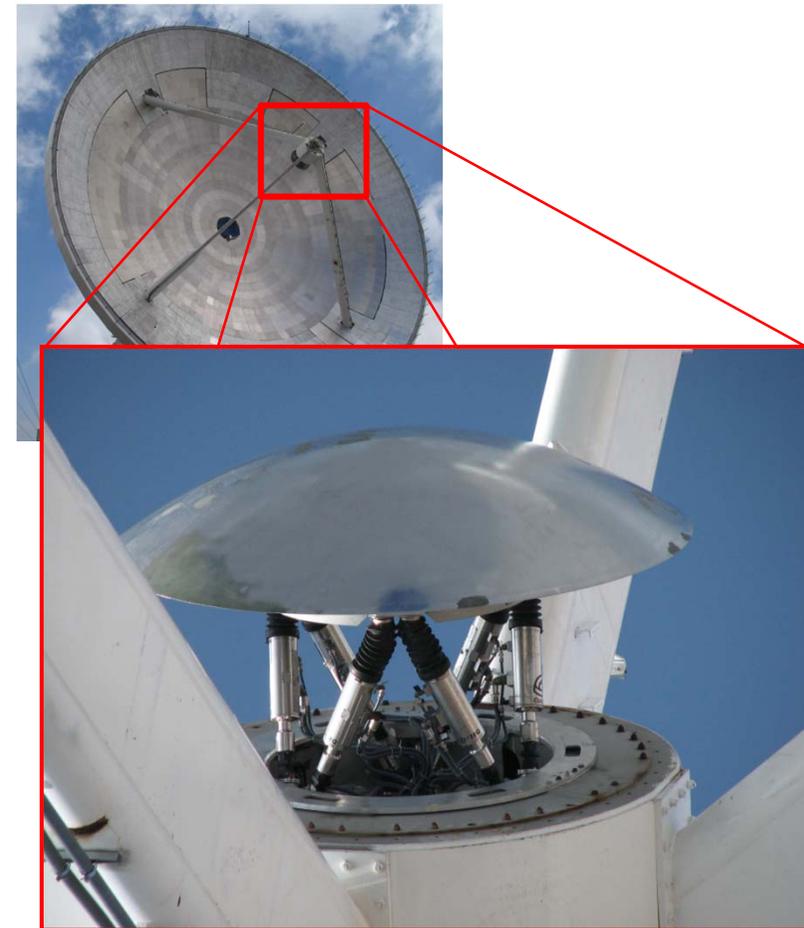
### Lufthansa Flugsimulator, Berlin

[<http://www.gemeinde-schoenefeld.de>]



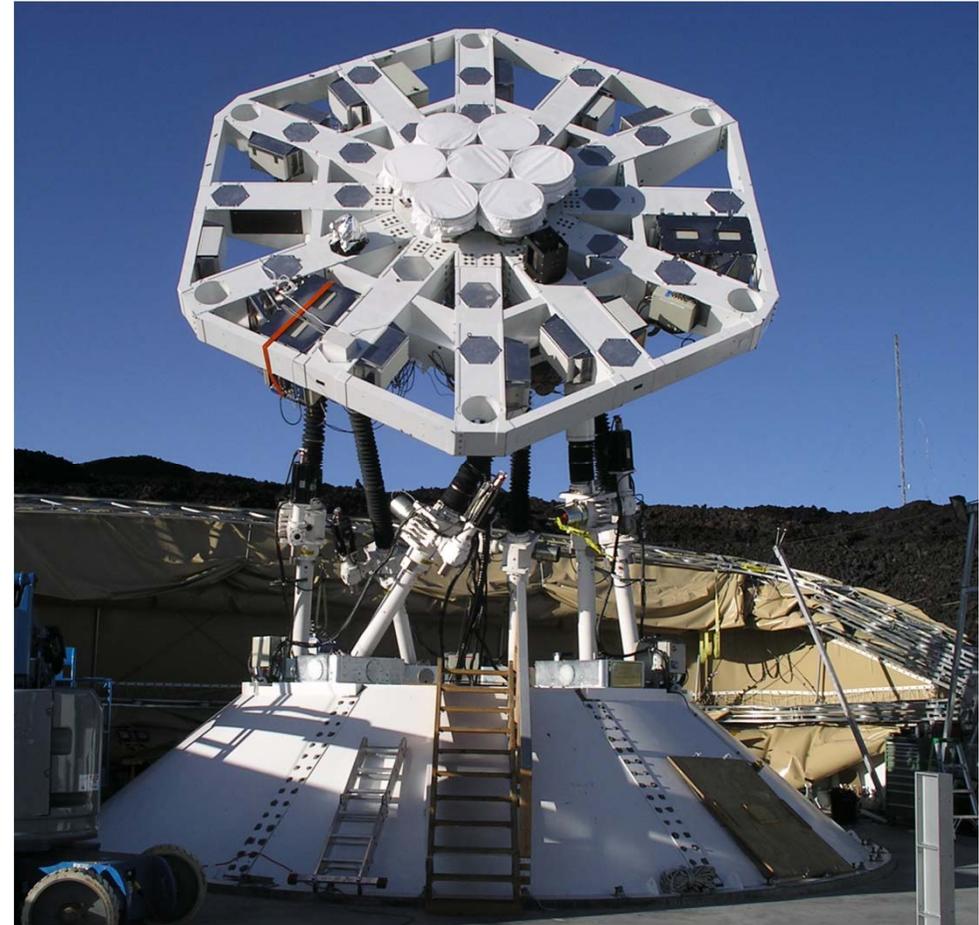
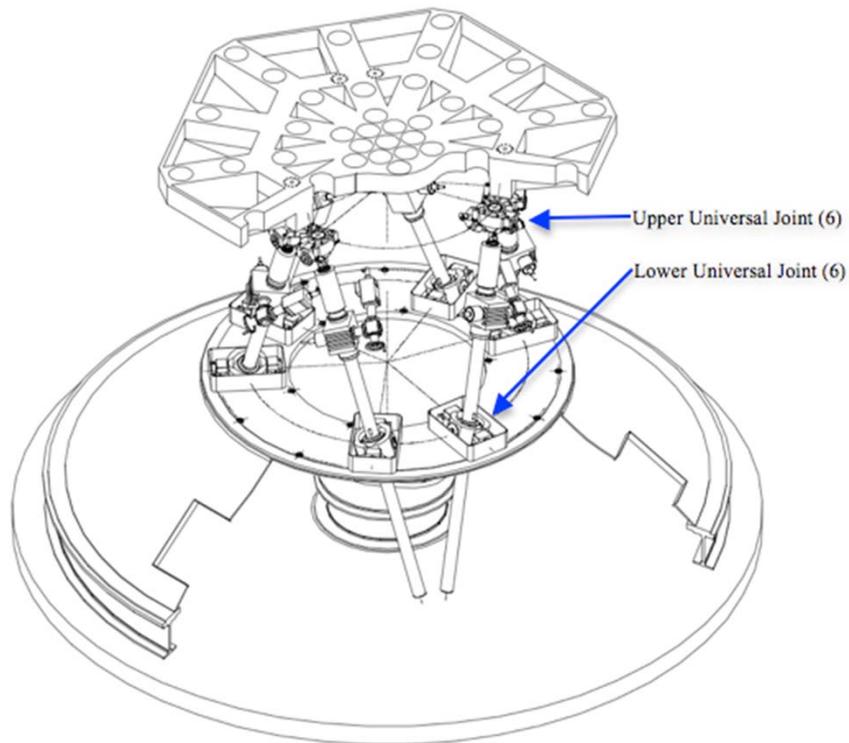
**Teleskopanlage ALMA, Hawaii**

[Physik Instrumente GmbH,  
[www.physikinstrumente.com/applications/hexapods-for-alma.html](http://www.physikinstrumente.com/applications/hexapods-for-alma.html)]



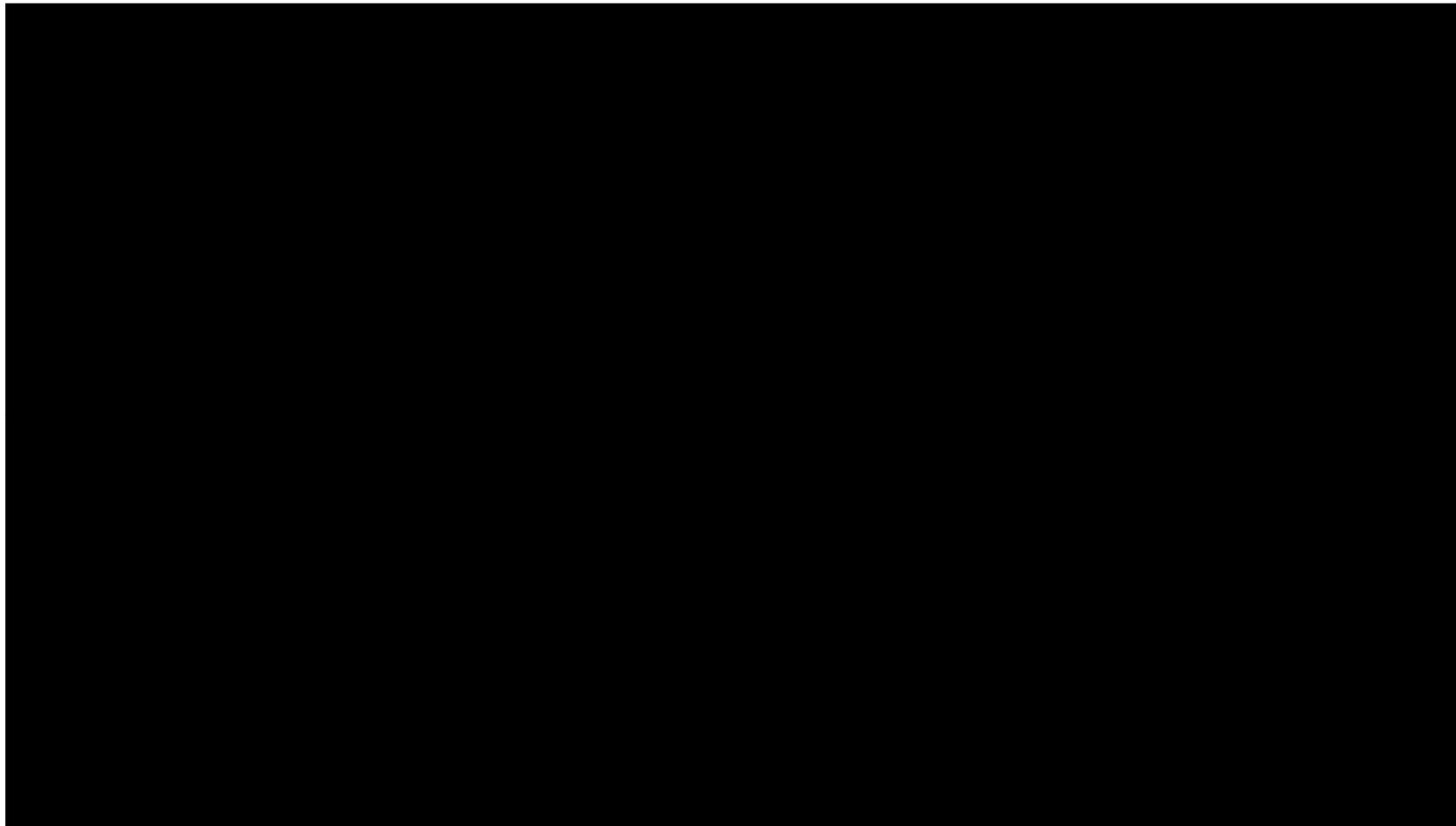
**The Large Millimeter Telescope**

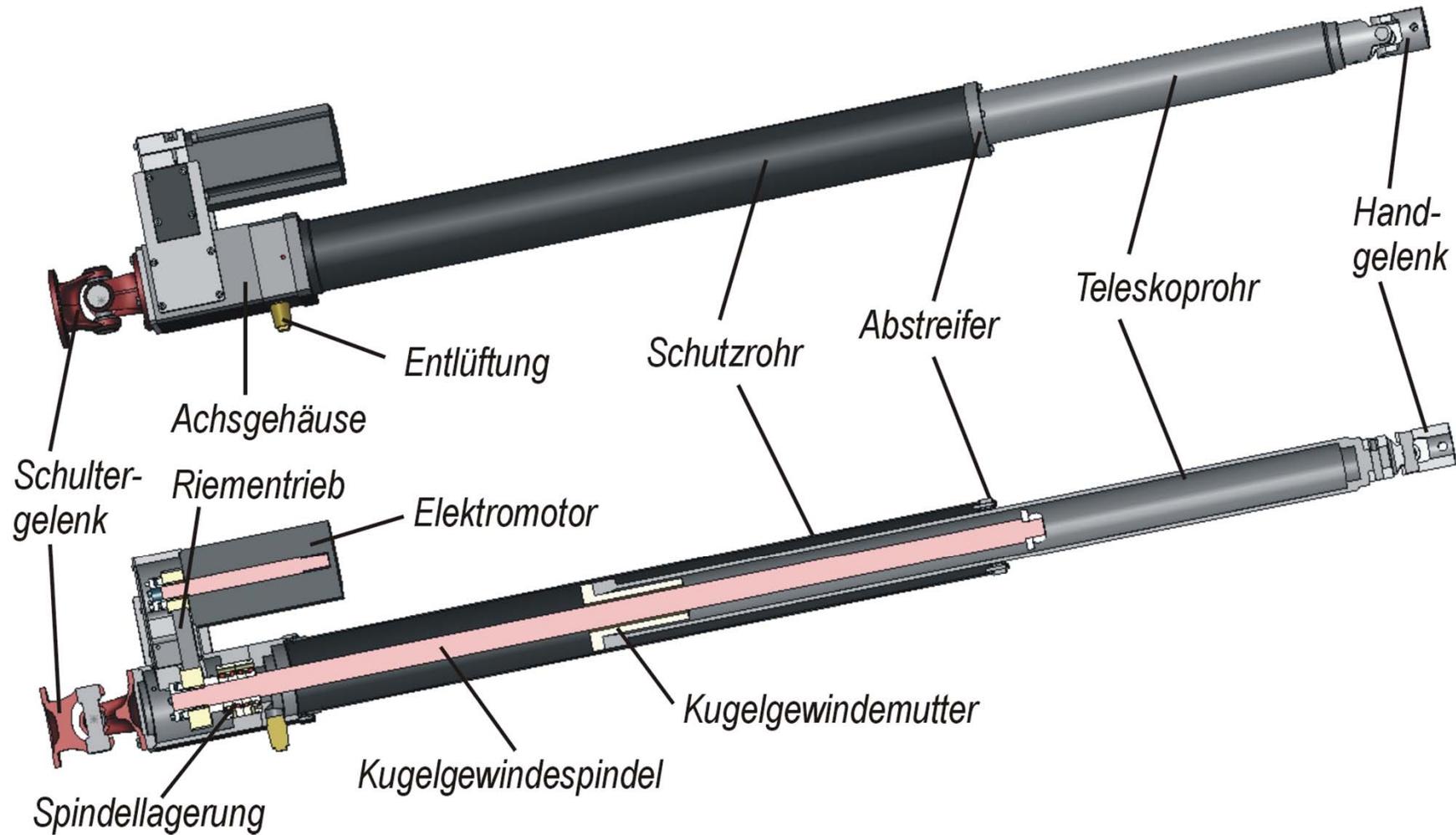
[<http://wiki.lmtgtm.org/telescope.html>]



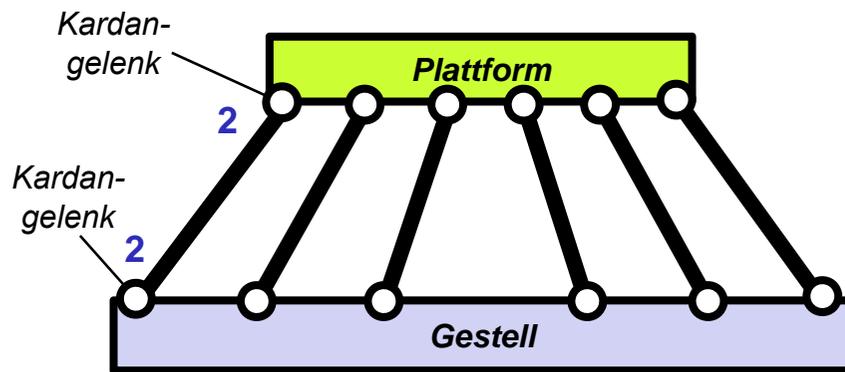
**Yuan-Tseh Lee: Array for Microwave Background Anisotropy (AMiBA)**

[<http://amiba.asiaa.sinica.edu.tw/>]





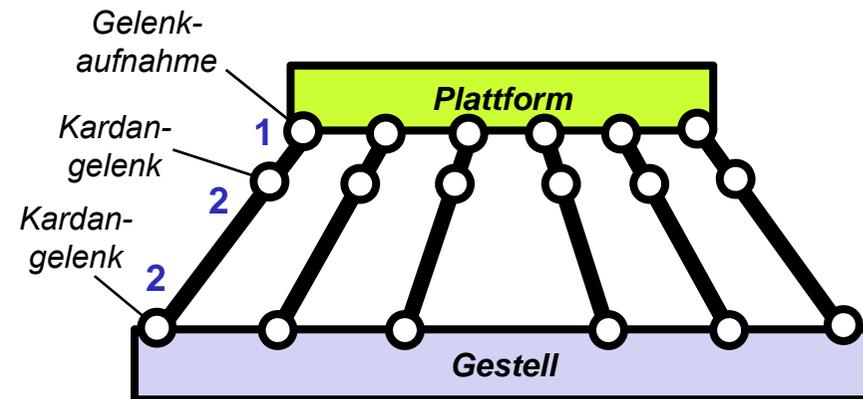
- Nach Referenzierung des Absoluten Messsystems (Motorwelle) auf dem Stabachsprüfstand muss die Längsdrehung des KGT geklemmt werden, bis der Hexapod montiert ist → sonst Referenzverlust
- Über die Motorbremse ist während der Montage das Schubgelenk geklemmt.
- Jede Stabachse hat bei der Montage nur 4 passive Gelenkfreiheiten.



b = 6

Achsen	1	2	3	4
n	3	4	5	6
e	2	4	6	8
n-1-e	0	1	2	3
Σf	4	8	12	16
<b>F</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>-2</b>

- Die Handgelenke werden bei der Montage erst mit dem Spannsatz fixiert, wenn alle 6 Achsen eingesetzt wurden.
- Während der Montage kann sich das Handgelenk in der Plattformaufnahme drehen
- Jede Stabachse hat bei der Montage 5 passive Gelenkfreiheiten

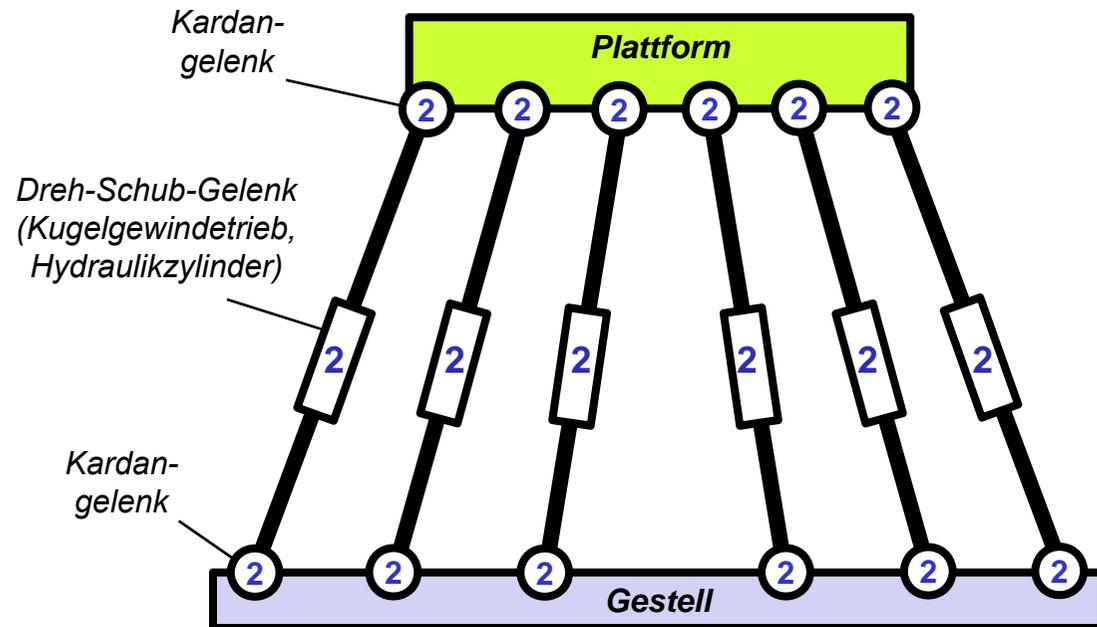


b = 6

Achsen	1	2	3	4	5	6
n	4	6	8	10	12	14
e	3	6	9	12	15	18
n-1-e	0	1	2	3	4	5
Σf	5	10	15	20	25	30
<b>F</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>

## Zwanglauf an Parallelkinematiken (PKM)

Bsp.: Hexapod FELIX  
mit konventionellen Gelenken



Schultergelenk



Handgelenk



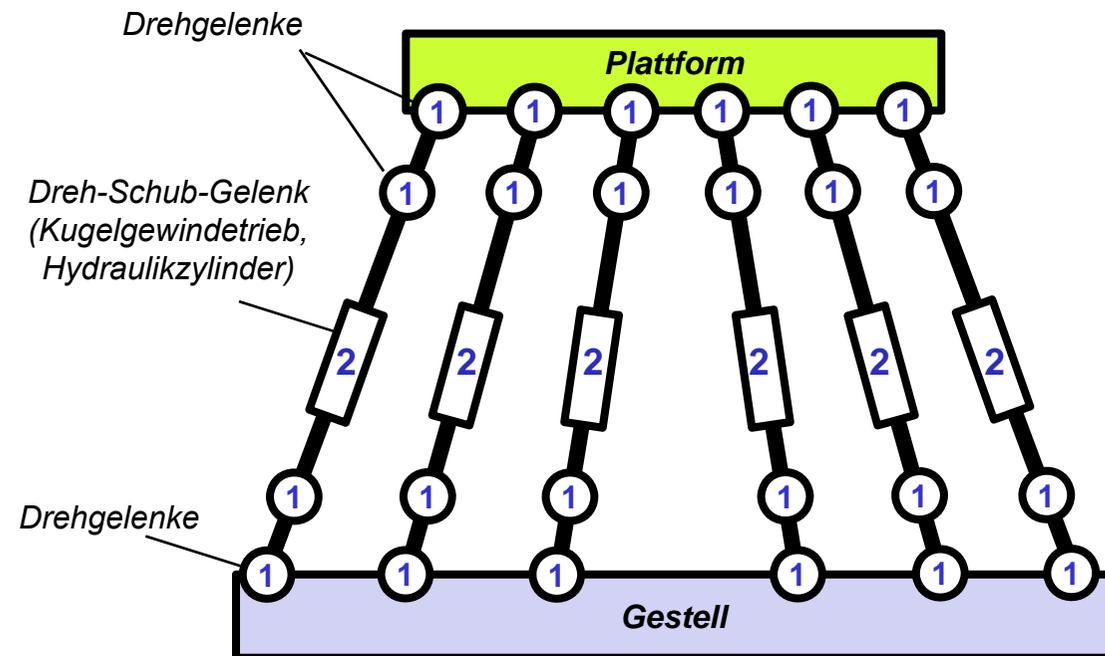
- Drehfreiheitsgrad im KGT bzw. Zylinder wird als passives Gelenk mit genutzt
- Einsparung zusätzlicher konstruktiver Maßnahmen zur Verhinderung der Längsdrehung
- Vermeidung von teuren Kugelgelenken

$$b = 6$$

$n = 14$
$e = 18$
$(n-1-e) = -5$
$\Sigma f = 36$
<b><math>F = 6</math></b>

## Zwanglauf an Parallelkinematiken (PKM)

Bsp.: Hexapod FELIX  
mit exzentrischen Gelenken



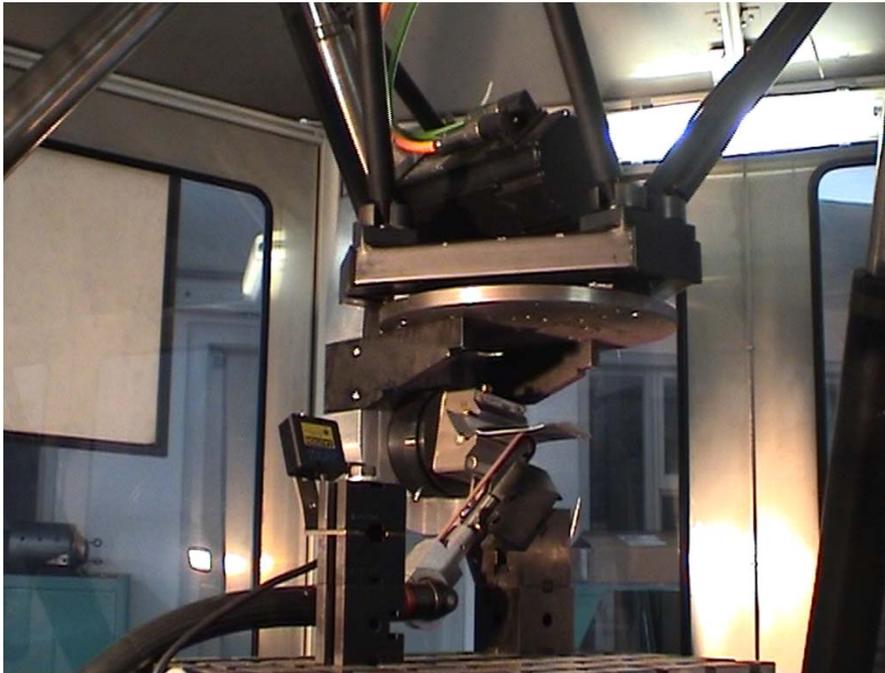
Exzentrische Handgelenke am MiniHex

- Größerer Schwenkbereich der Gelenke (bis +/- 90°)
- Höhere Steifigkeit der Gelenke
- Vorgespannte, spielfreie Wälzlagerung (Kegelrollen- / Nadellager)

$$b = 6$$

$n = 26$
$e = 30$
$(n-1-e) = -5$
$\Sigma f = 36$
<b><math>F = 6</math></b>

### Achsredundanz am Hexapod FELIX durch serielle Zusatzachsen → zur Vergrößerung des Bewegungsbereiches

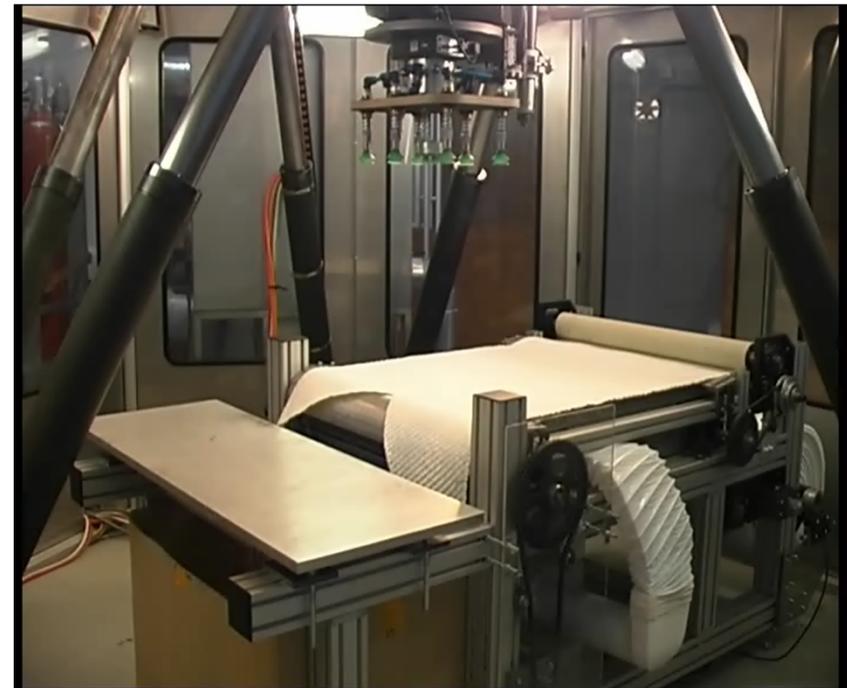


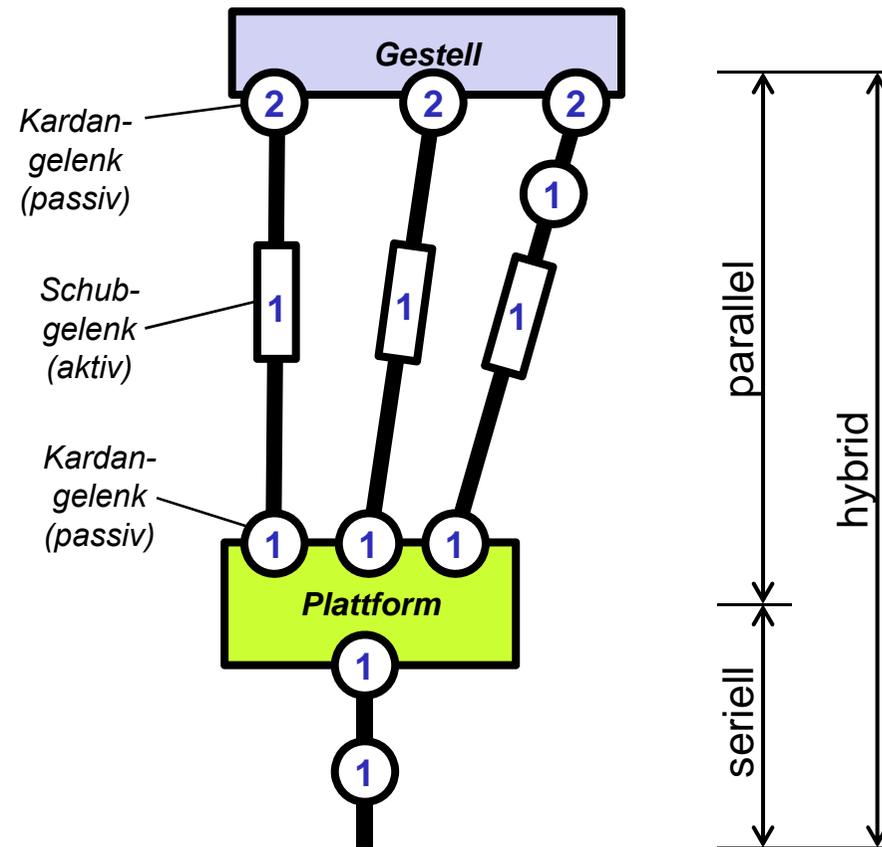
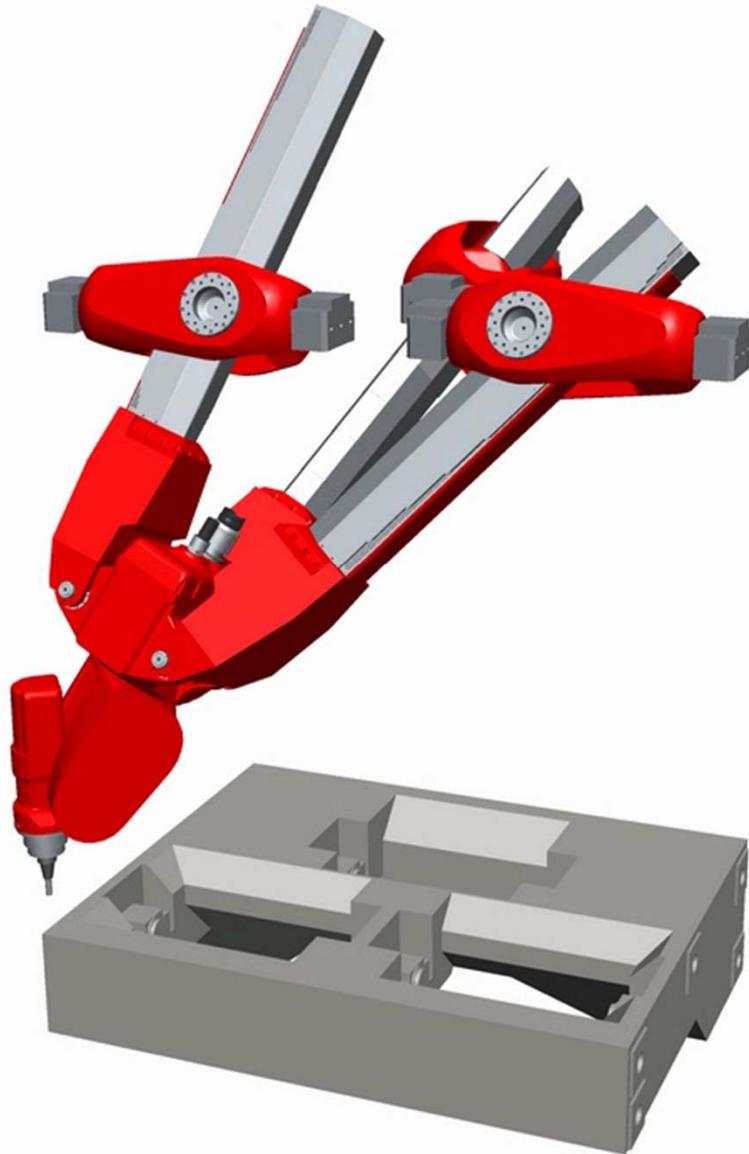
Schleifen von Turbinenschaufeln

- 1 redundante Drehachse (für Schaufel)

Preform-Zentrum

- redundante Drehachse (Sauggreifer)
- redundante Schubachse (Gewebeabzug)

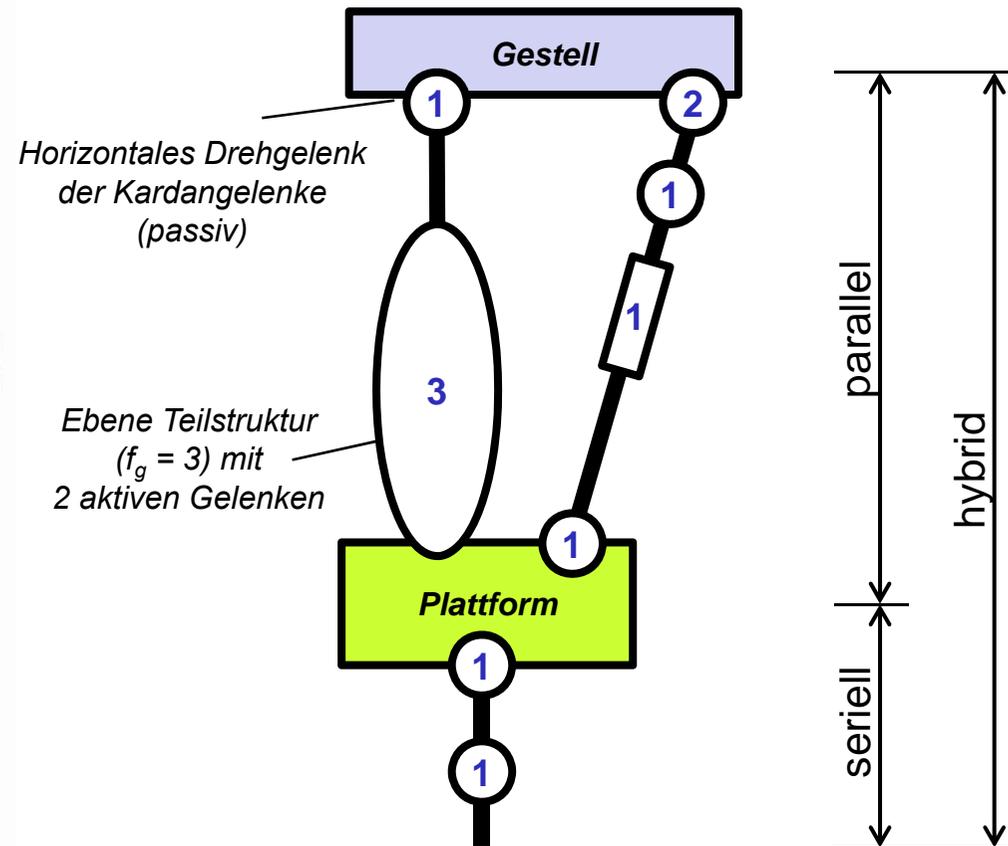
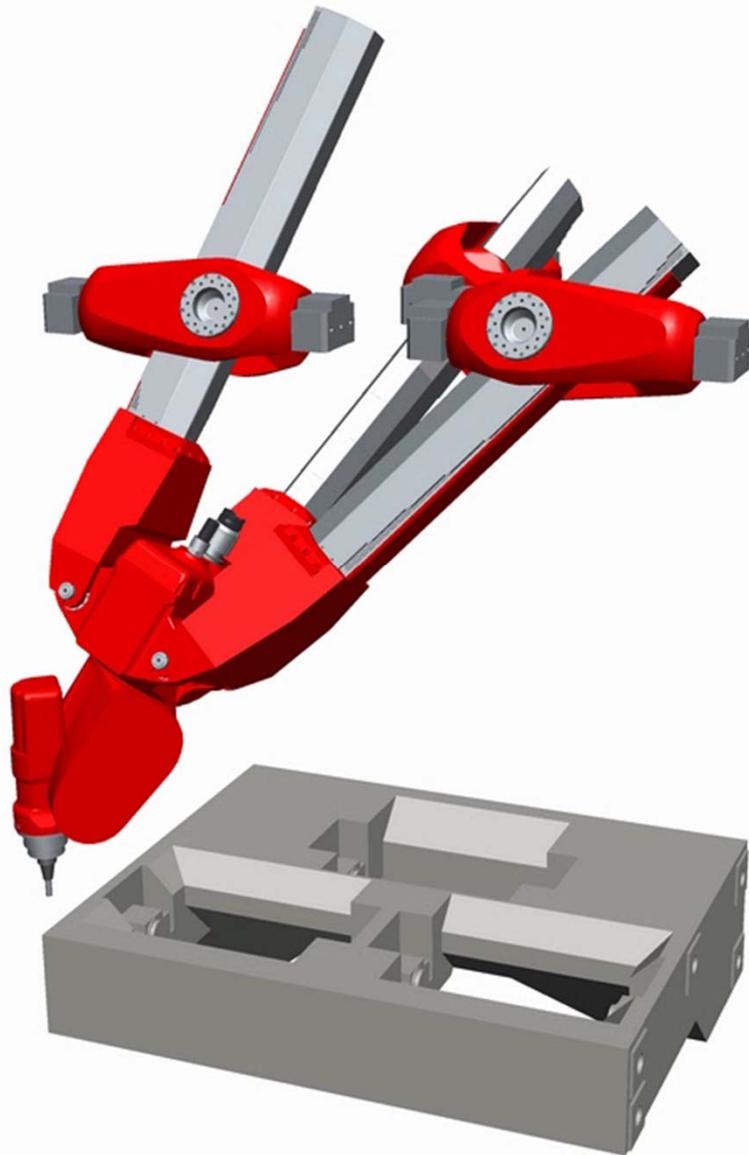




$b = 6$

$n = 11$
$e = 12$
$(n-1-e) = -2$
$\Sigma f = 15$
$F = 3 \neq 5$

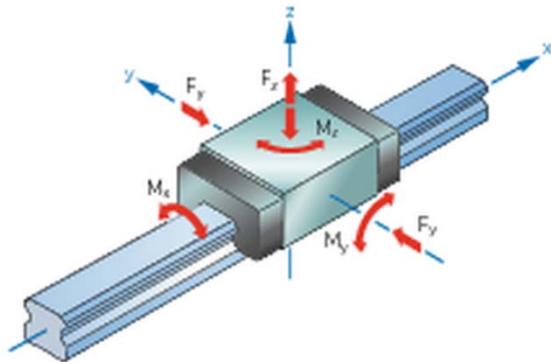
→ Mit 5 aktiven Gelenken ist die Kinematik 2fach überbestimmt !!!



$b = 6$

$n = 8$
$e = 8$
$(n-1-e) = -1$
$\Sigma f = 11$
<b><math>F = 5</math></b>

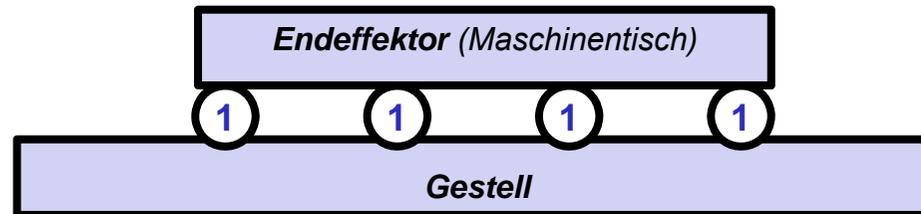
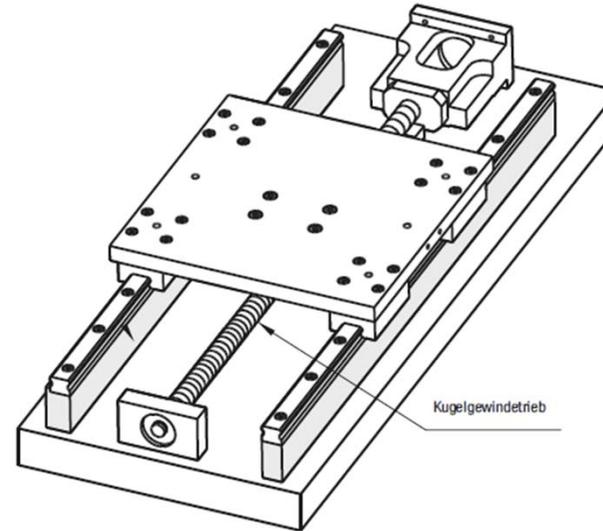
- 2 vordere Stabachsen müssen mit Plattform und vorderen Kardangelenken eine **ebene** Substruktur bilden.
- Horizontale Drehachsen der 2 vorderen Kardangelenke müssen exakt fluchten.
- **Fertigungsgenauigkeit der Drehgelenke!**



$b = 6$

$n = 2$
$e = 1$
$(n-1-e) = 0$
$\Sigma f = 1$
$F = 1$

→ statisch bestimmt



$b = 6$  → Zwanglaufgleichung nimmt beliebige räumliche Lage der Gelenke zueinander an

$n = 2$
$e = 4$
$(n-1-e) = -3$
$\Sigma f = 4$
$F = -14 \neq 1$

→ 15fach statisch überbestimmt !!!

→ Realisierbar über 15 Toleranzforderungen bzgl. der räumlichen Relativlage der Wagen und Schienen zueinander (siehe Katalog: Parallelität, Geradheit, ...) oder elastische „Gelenke“ (= Verformung)



### *Kinematische Transformation*



### Kinematisches Modell

- Abbildung des kinematischen Verhaltens der Bewegungseinrichtung
- Zusammenhänge zwischen Antrieben und Abtrieb  
→ Grundlage für Achstransformationen
- Einbeziehung weiterer Verhaltensbereiche (ELA, THR, DYN) möglich  
→ Grundlage für steuerungsintegrierte Fehlerkorrektur

#### **Vorwärts-Transformation** (Direktes kinematisches Problem - DKP):

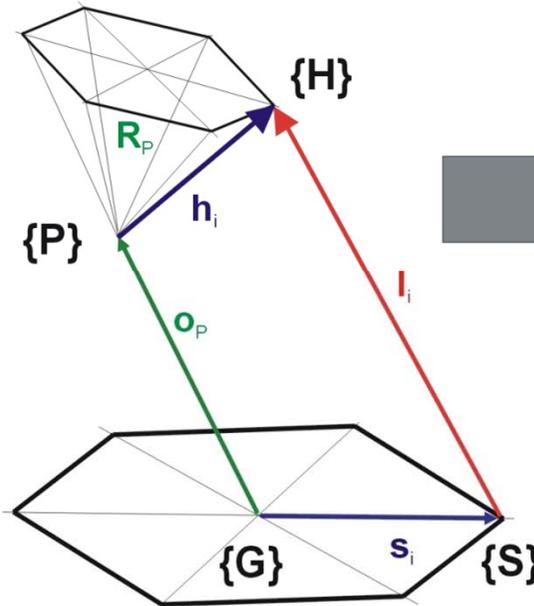
- Vorwärts → von den **Antrieben** auf den **Abtrieb**
- Achssollwerte gegeben → Pose des Endeffektors (TCP) gesucht
- Bestimmung der Ist-Pose nach dem Hochlauf, Fehlersimulation, etc.
- Parallelkinematiken → i.A. nur numerisch (iterativ) lösbar, verkoppelte Gleichungen
- Serielle Kinematiken → i.A. analytisch lösbar, entkoppelte Gleichungen

#### **Rückwärts-Transformation** (Indirektes bzw. Inverses kinematisches Problem - IKP):

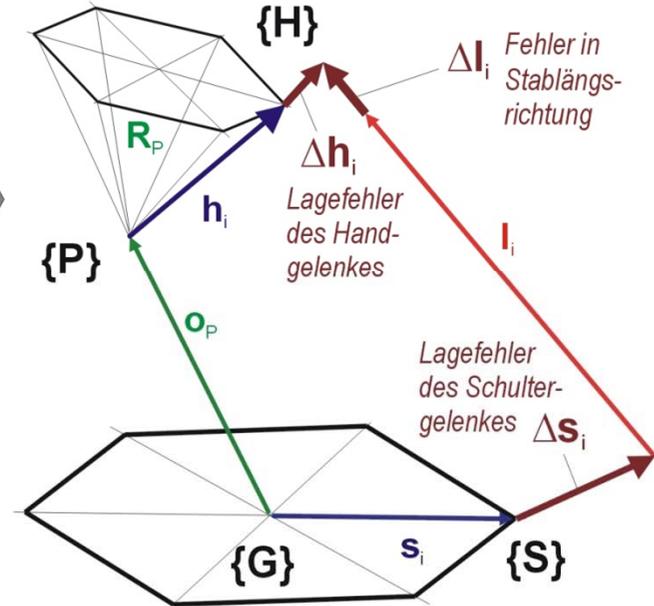
- Rückwärts → vom **Abtrieb** auf die **Antriebe**
- Pose des Endeffektors (TCP) gegeben → Achssollwerte gesucht
- für Ansteuerung und Bahninterpolation
- Parallelkinematiken → i.A. analytisch lösbar, entkoppelte Gleichungen
- Serielle Kinematiken → i.A. numerisch (iterativ) lösbar, verkoppelte Gleichungen



Einfaches kinematisches Modell



Erweitertes kinematisches Modell



Einfach:

$$l_{soll\_i} = | \underline{o}_P + \underline{R}_P \cdot ( {}^P \underline{h}_i ) - ( \underline{s}_i ) |$$

Erweitert:

$$l_{soll\_i} = | \underline{o}_P + \underline{R}_P \cdot ( {}^P \underline{h}_i + {}^P \Delta \underline{h}_i ) - ( \underline{s}_i + \Delta \underline{s}_i ) | - \Delta l_i$$

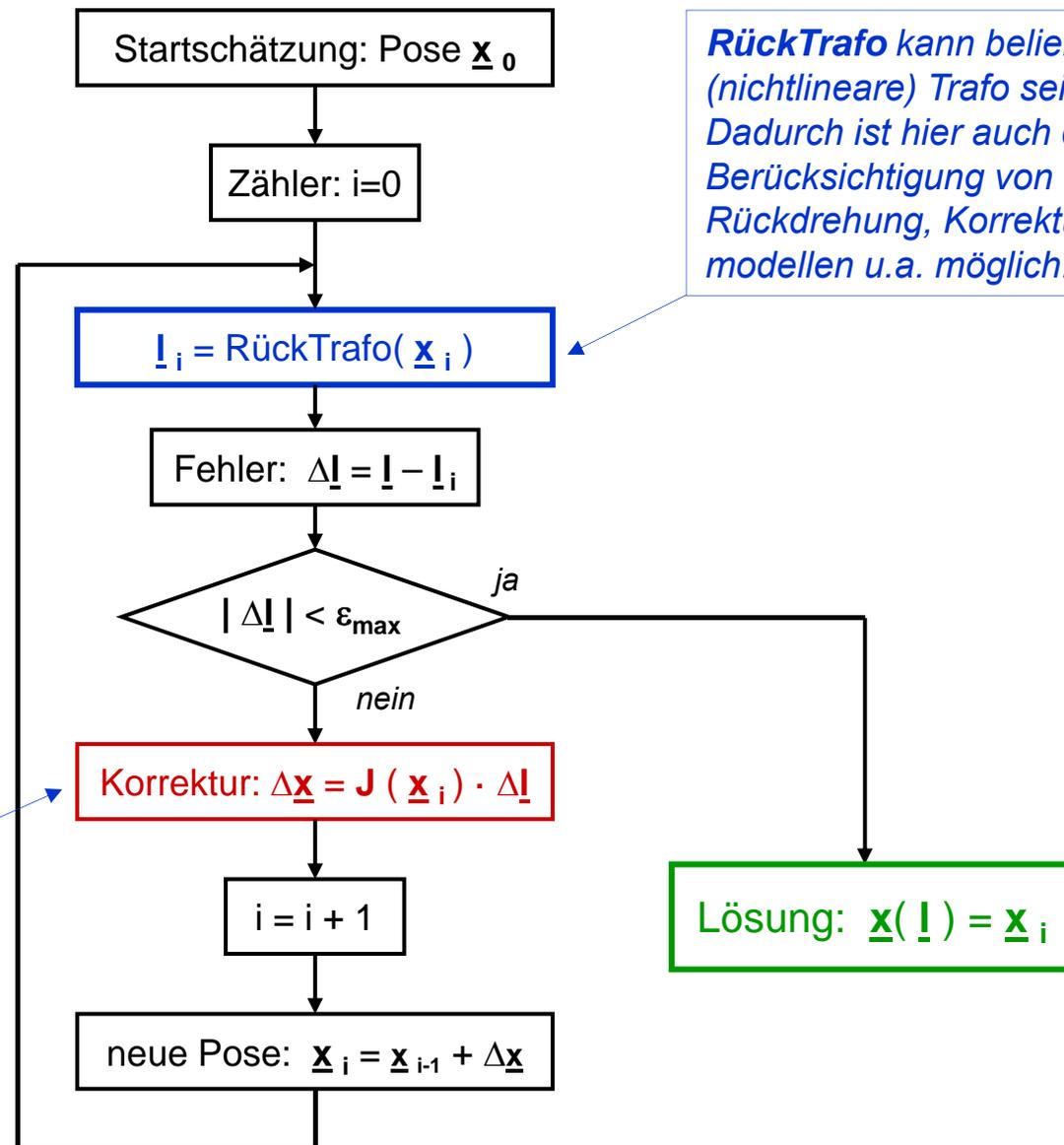
### Vorwärtstrafo:

gegeben: Achssollwerte  $\underline{l}$   
gesucht: Plattformpose  $\underline{x}$

- bei PKM i.A. nicht analytisch möglich
- numerische Berechnung durch Iteration (z.B. nach NEWTON → mittels stückweiser Linearisierung)
- Aufwand: am Hexapod FELIX typ. 3-5 Iterationsschritte

Berechnung der direkten Jacobi-Matrix  $\underline{J} = \delta \underline{x} / \delta \underline{l}$  erfolgt numerisch, z.B. durch:

- einseitigen Differenzenquotient
- zentralen Differenzenquotient
- Approximation auf „0“

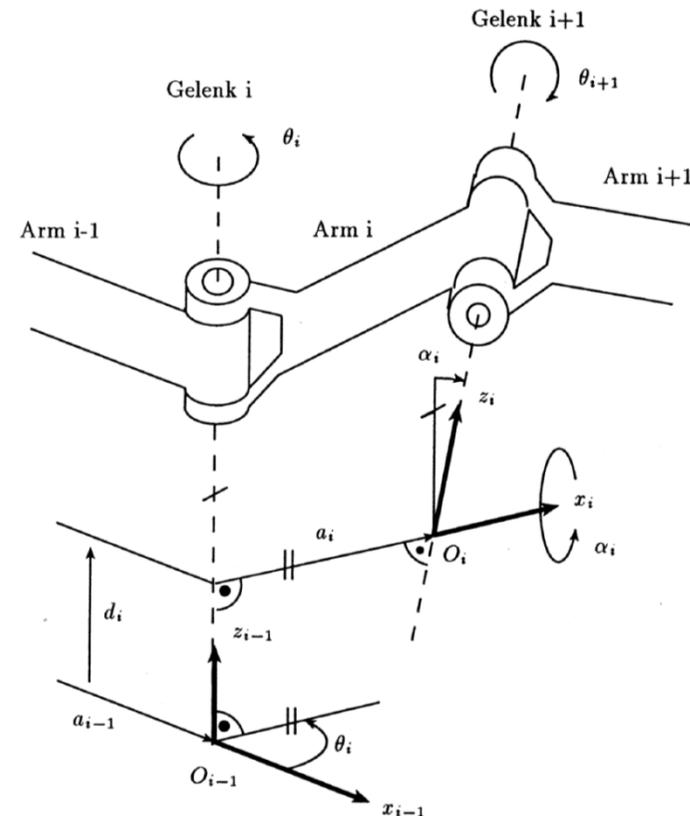


**RückTrafo** kann beliebige (nichtlineare) Trafo sein. Dadurch ist hier auch die Berücksichtigung von Rückdrehung, Korrekturmodellen u.a. möglich!

Lösung:  $\underline{x}(\underline{l}) = \underline{x}_i$

### Denavit-Hartenberg-Konvention:

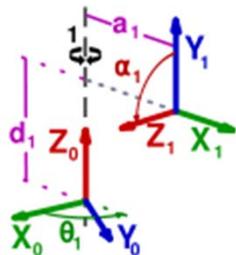
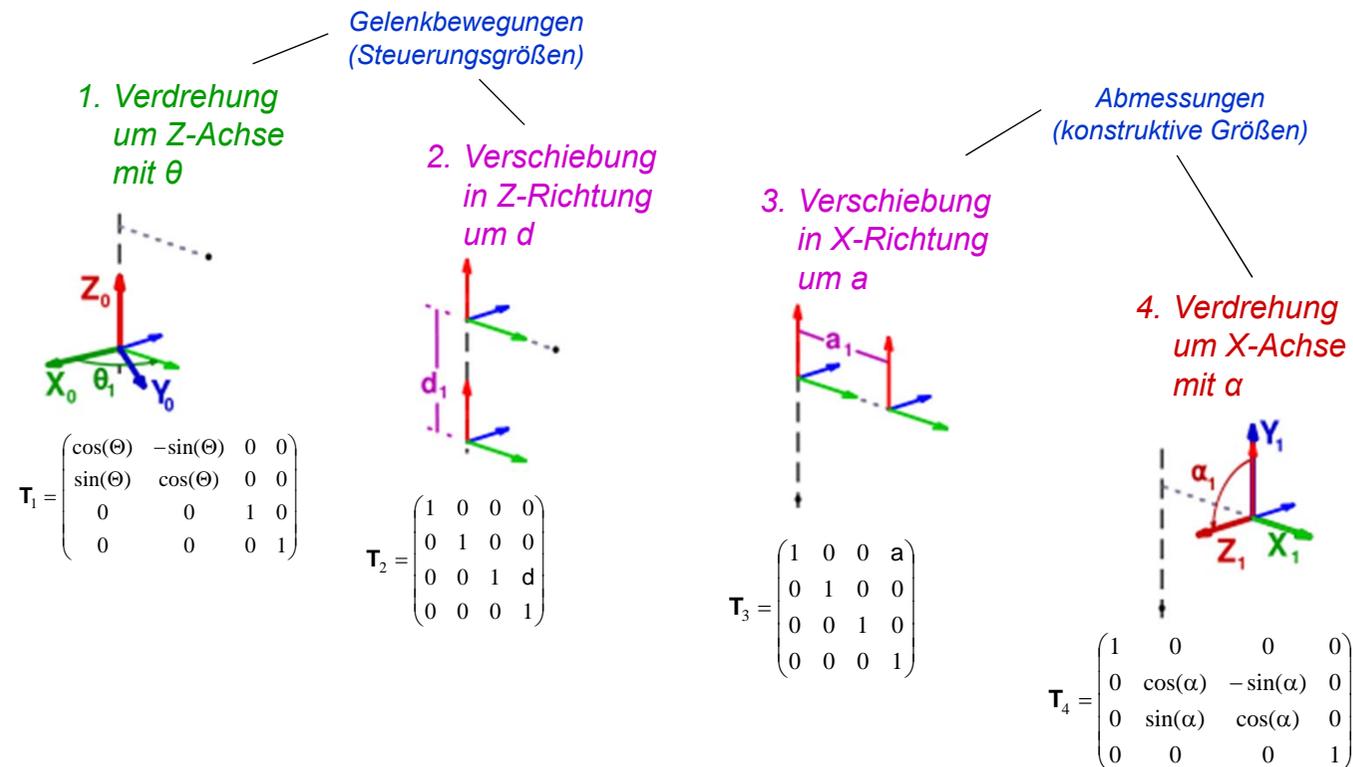
- Spezielle Definition der Koordinatensysteme für die einzelnen Glieder einer **offenen kinematischen Kette** (d.h. serielle Strukturen, z.B. Industrieroboter)
- Hauptanwendungsbereich: Roboter-Programmierung
- Ziel: **Parameter-Reduktion** (6 auf 4)  
Vereinfachung der Vorwärtstransformation
- Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen erfordert mit konv. Darstellungen mindestens **6 Parameter** (3 Position, 3 Orientierung)
- **Denavit-Hartenberg-Parameter** (1955):
  - **4 Parameter** (2 Verschiebungen, 2 Verdrehungen)
  - möglich durch zusätzliche Randbedingungen; dadurch sind lokale KS nicht mehr *frei* wählbar !
- mehrdeutig bei speziellen Achskonfigurationen



### Definition der DH-Koordinatensysteme:

- Die Koordinatensysteme liegen fest in den Bewegungsachsen
- Die  $Z_{(n-1)}$ -Achse (von Glied n-1) liegt entlang der Bewegungsachse von Gelenk n
- Die  $X_{(n)}$ -Achse (von Glied n) steht normal auf der  $Z_{(n-1)}$ -Achse (von Glied n-1) und zeigt von ihr weg → entfällt für KS 0 (i.a. das Gestell)
- Die  $Y_{(n)}$ -Achse ergibt sich durch die Rechte-Hand-Regel

## Reihenfolge der 4 Einzel-Transformationen bei der DH-Konvention



$$T(\theta, d, a, \alpha) = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \cdot \cos(\alpha) & \sin(\theta) \cdot \sin(\alpha) & a \cdot \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \cdot \cos(\alpha) & -\cos(\theta) \cdot \sin(\alpha) & a \cdot \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

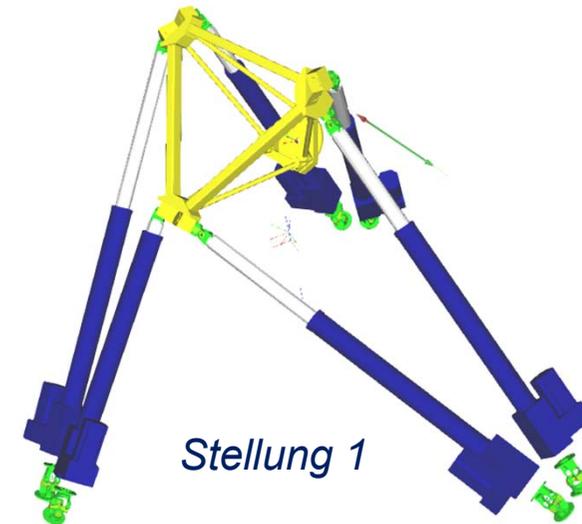
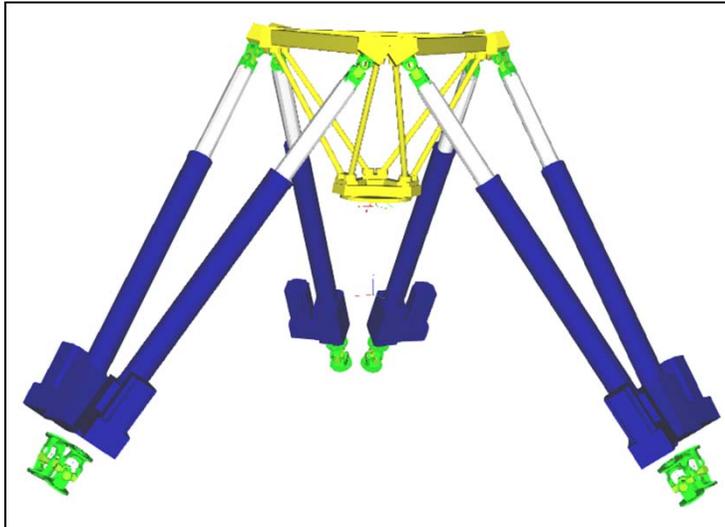


# Bewegungsprüfung und -überwachung

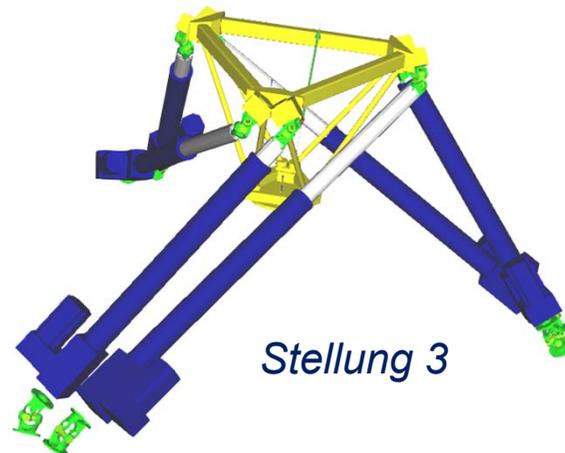
### Beispiele:

- statisch
  - Achsendlagen (aktive Gelenke)
  - Endlagen passiver Gelenke (z.B. Kardanwinkel)
  - geometrische Kollisionen
  - singuläre Stellungen (an Parallelkinematiken)
- dynamisch
  - Bahn- bzw. Achsgeschwindigkeiten
  - Bahn- bzw. Achsbeschleunigungen
  - Bahn- / Achsruck
  - Antriebsmomente

Nullstellung (nicht singular)



Stellung 1



Stellung 3



Stellung 2