

Zum 1. Teil (S. 309)

Zum Inhaltsverzeichnis

44. ANALYSEOS TETRAGONISTICAE PARS TERTIA

1. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 18 Bl. 3. 1 Bl. 2°. Ca 12/5 S. Das zweite Blatt des ursprünglichen Bogens hat Leibniz in hannoverscher Zeit mit Aufzeichnungen zur Infinitesimalrechnung beschrieben und abgetrennt (Cc 2, Nr. 847; Druck in einem späteren Band der Reihe). Nach Tinte und Duktus ist dabei wohl auch die Anmerkung Z. 19 f. verfasst worden. — Gedr.: 1. GERHARDT, *Brief*, 1851, S. 354–358; 2. GERHARDT, *Analysis*, 1855, S. 127–131; 3. LBG, 1899, S. 157–160; 4. (engl. Übers. von 1.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 84–90.

Cc 2, Nr. 1106₁

1. Novemb. 1675

Analyseos Tetragonisticae pars III.
Usus Centrobarycae

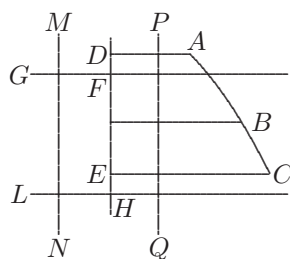


fig. 1.

15 Diu est quod observavi dato curvae ABC vel figurae curvilineae $DABCE$ momento ex duabus rectis inter se parallelis ut GF, LH ; (vel MN, PQ .) haberi aream figurae, quoniam duo momenta different inter se cylindro figurae cujus altitudo distantia

12f. *Rechts daneben:* Prima erat 25. Octob. 2^{da} 29. Octob.

Unter Fig. 2, in anderer Tinte u. anderem Duktus: Scheda 2^{da} notanda de differentiali calculo tunc mihi rudiis cognito, et satis tantum quantum ad scopum.

13 Usus Centrobarycae erg. *L*

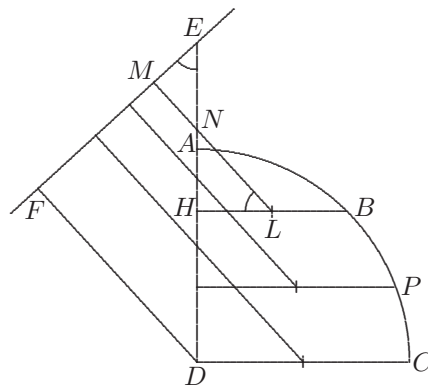
15 observavi: vgl. z. B. VII, 4 N. 45 S. 767. 18 Prima: N. 38; 2^{da}: N. 40.

parallelarum. Hoc verum est in omnibus progressionibus, sive Numericis sive linearibus. Id est etiamsi non adhibeantur figurae curvilineae sed polygona ordinata. Id est tametsi differentiae inter terminos non sint infinite parvae. Sit quaelibet quantitas ordinata, ut z . sit numerus ordinalis x . erit $\overline{b\text{omn}z} \mp \text{omn} \overline{zx} + \text{omn} \overline{z} \wedge x + \overline{b}$. idque per se patet ex solo calculo. Ope hujus regulae inveniuntur summae terminorum progressionis Arithmeticae replicatae reciprocae. Et haec multiplicatio locum habet, cum quaeritur momentum ordinarum ex recta ad axem perpendiculari.

5

Sed si quaeratur momentum ex alia recta, regula generalis haec est: ex quantatum quarum summae momentum quaeritur, singularum centris gravitatis ducatur perpendicularis ad rectam librationis. Summa rectangulorum sub distantis sive perpendicularibus et quantitatibus aequabitur momento ex recta data. Unde si sit recta aequilibrii axi eadem, statim sequitur momentum figurae ex axe, aequari summae quadratorum dimidiatorum. Et cum axi parallela est, ab eo differre data quantitate: sed sumamus aliam rectam in circulo exempli causa fig. 2.

10



[Fig. 2]

15

Sit quadrans $ABCD$. vertex A . centrum D . Detur alia recta EF . ita scilicet, ut data sit DF perpendicularis et FE quo diameter ei occurrit, adeoque et DE . Sit ordinata

1 parallelarum. (1) | Hinc si qva *streicht Hrsg.* | sit series (2) Hoc $L = 4 \mp \text{omn} \overline{zx} \mp \text{omn} \overline{z} \wedge x + \overline{b}$
 L ändert Hrsg. 6 reciprocae. (1) Sed si (a) numerus non sit (b) momentum qvaeratur (aa) in plano
 (bb) ex rectae in in eodem plano sitae non axi perp (2) Et $L = 10$ rectam (1) (planum in solido (2)
 aeqvil (3) librationis. (a) Harum (aa) summa (bb) in ipsas datas ductarum summa (b) summa L
 16 vertex | B. ändert Hrsg. | centrum L

5 inveniuntur: s. VII, 3 N. 382 S. 384.

circuli HB . cujus dimidium punctum L . Ducatur LM perpendicularis ad FE . patet ∇^{1a} EFD . et EMN (N punctum intersectionis ML . AD) et LHN esse similia. Sit

$HD \sqcap x$. erit $HL \sqcap \frac{y}{2} \sqcap \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$. Jam ob triangula similia $\frac{NH}{HL} \sqcap \frac{DF \sqcap d}{FE \sqcap f}$. Ergo

$NH \sqcap \frac{d}{2f} \sqrt{a^2 - x^2} \sqcap \frac{y}{2} \frac{d}{f}$. Ergo $EN \sqcap DE (\sqcap e) - HD (\sqcap x) - NH (\sqcap \frac{d}{2f} y)$. Ergo $EN \sqcap$

$$5 \quad e - x - \frac{dy}{2f}. \text{ Jam } NL \sqcap \sqrt{NH^2 + HL^2} \sqcap \sqrt{\frac{d^2}{4f^2} y^2 + \frac{y^2}{4}} \sqcap \frac{y}{2} \sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}. \text{ et } \frac{MN}{EN} \sqcap \frac{NH}{NL}.$$

$$\text{sive } MN \sqcap \frac{NH, EN}{NL}. \text{ adeoque } MN \sqcap \frac{\frac{yd}{2f}, \sim e - x - \frac{dy}{2f}}{\frac{y}{2} \sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}} \sqcap \frac{d}{f \sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}} \frac{1}{e - x - \frac{dy}{2f}}.$$

$$\text{et } ML \sqcap MN + NL \sqcap \frac{d}{f \sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}} \frac{1}{e - x - \frac{dy}{2f} + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}}. (e \sqcap \sqrt{f^2 - d^2}) \text{ sive}$$

$$ML \sqcap \frac{d \sqrt{f^2 - d^2} - x - \frac{d}{2f} y + \frac{d^2 + f^2}{2f} y}{\sqrt{d^2 + f^2}} \sqcap \frac{d \sqrt{f^2 - d^2} - x + \frac{f}{2} y}{\sqrt{d^2 + f^2}}. \text{ Qui calculus cuilibet}$$

curvae communis est sumta semper x . pro abscissa, et y pro ordinata.

10 Rectangulum ergo sub ML et $HB (\sqcap y)$ sive momentum cujusque ordinatae ex recta

$$EF \text{ ponderatae sive } \omega a \text{ erit } \sqcap \frac{d \sqrt{f^2 - d^2} y - xy + \frac{f}{2} y^2}{\sqrt{d^2 + f^2}}.$$

2 ML . (1) ND (2) AD) (a) esse (aa) communia (bb) similia. Ergo (b) et L 11–313,1 erit \sqcap

$$\left| \frac{d \sqrt{f^2 - d^2} y - xy + \frac{f}{2} y^2}{\sqrt{d^2 + f^2}} \text{ ändert Hrsq.} \right|. (1) \text{ Unde patet ad habendum curvae momen (2) Ergo (a) | ex}$$

streicht Hrsq. | dat (b) omn. L

7 $e \sqcap \sqrt{f^2 - d^2}$: Richtig wäre $e \sqcap \sqrt{f^2 + d^2}$. Leibniz rechnet konsequent mit dem falschen Wert bis S. 313 Z. 17; dies beeinträchtigt jedoch nicht die allgemeinen Überlegungen.

Ergo omn. ω . habebuntur ex datis omn. y . omn. xy . et omn. y^2 . vel etiam si ex his quatuor dentur tres dabitur quartum. Jam omn. xy . aequantur momento figurae ex vertice. omn. y^2 . aequantur [duplo] momento figurae ex axe. Ergo datis tribus figurae momentis, ex duabus scilicet rectis inter se perpendicularibus, et tertia qualibet datur ejus area. Sed hoc tamen theorema minus generale est, quam prius in prima hujus Schediasmatis pagina, ubi nihil refert quis sit angulus rectorum, modo dentur tria momenta. Intelligitur autem semper, in eodem plano. (Hoc interim theorema sufficit ad curvam Hyperbolae primariae.[1]) Si f sit infinita seu si FE et ED . parallelae, fiet $dy + \frac{y^2}{2} \propto \omega a$. quod dudum constat.

Notandum diversis calculis hac schediasmatis plagula, et prima[1,] aream quantitatis cujus centrum gravitatis (etsi NB. non ipsa tota) in plano dato positum est, ex datis tribus momentis ex tribus ejusdem plani rectis inveniri. Unde videndum an non comparati inter se eventus quiddam novum praebeant. Si non figurae sed curvae ut omnium BP, PC etc. momenta quaerantur ex punctis $B. P. C$. tantum ad rectam dimittendae perpendiculares sive ordinatae. Nihil enim refert ex extremo an medio ipsius BP . v. g. ducantur, differentiae enim infinite parvae inter duas ejusmodi perpendiculares. Ergo curvae elementum appellando z . momentum curvae ex recta EF , fiet: $\frac{d\sqrt{f^2 - d^2z} - dxz + fyz}{\sqrt{d^2 + f^2}}$.

Pleraque theorematum Geometriae indivisibilium quae apud Cavalerium, Vincentium, Wallisium, Gregorium, Barrovium extant statim ex calculo patent, ut v. g. perpendi-

7 f. *Am Rande*: NB. ista ad curvam si applicentur, [*bricht ab*]

5 Sed (1) hic calculus tamen minus (2) hoc L 13 praebeant. (1) Vel ideo quoniam duorum v. g. in curva (2) si L 19–314,1 v. g. (1) superficiem ex axe aequari summae superfici (2) perpendiculares L

5 f. prima . . . pagina: N. 38 S. 267 Z. 2–4. 18 Cavalerium: B. CAVALIERI, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635. 18 Vincentium: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647. 19 Wallisium: J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO I S.* 355–478); *Mechanica*, 1670–1671 (*WO I S.* 570–1063). 19 Gregorium: J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667; *Geometriae pars universalis*, 1688; *Exercitationes geometricae*, 1668 [Marg.]; vgl. N. 47. 19 Barrovium: I. BARROW, *Lectiones geometricae*, 1672 [Marg.]; vgl. N. 43.

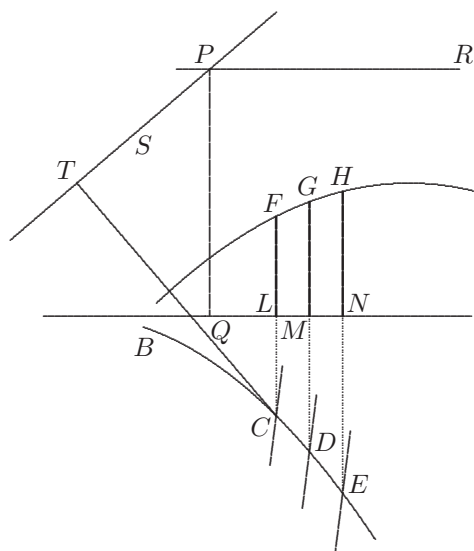
culares ad axem aequari superficiei seu momento curvae ex axe; patet calculo. Nam invenies perpendicularem aequari rectangulo ex curvae Elemento in ordinatam. Talia igitur theoremata non aestimo, quemadmodum illa quoque de applicationibus interceptarum in axe, (inter tangentes et ordinatas) ad basin. Talia ergo theoremata nihil novi detegunt; nec nisi calculi compendias praebent. At meum theoremata de dimensione segmentorum rem detegit novam, quia spatium cujus quaeritur dimensio aliter resolvit, nempe non tantum in ordinatas sed in triangula. Centrobaryca etiam forte aliquid detegunt novum. Poterit forte facilis methodus tradi, qua sine figuris calculo deducantur ex figura quae ex ea pendent. Gregorii theoremata, de ductibus parabolarum subalternis aequalibus cylindro patet statim ex calculo, nam circuli ordinata $y \propto \sqrt{a^2 - x^2}$, id est $\propto \sqrt{a+x}$ in $\sqrt{a-x}$, eodem modo $\sqrt{2av - v^2} \propto y$. ergo $y \propto \sqrt{v}$ in $\sqrt{2a-v}$. quae duo eodem redeunt.

Si eadem ordinata y per quandam quantitatem z , multiplicetur, et postea per eandem z cognita sive constante b , erit differentia summarum productorum aequalis cylindro figurae: ut $zy, -zy + by \propto by$. Hoc etsi per se manifeste pateat in genere, applicationes tamen non semper manifestae, sit v. g., $\frac{x^2}{ax - b^2}$. id est $\frac{x, x}{\sqrt{ax+b}, \sqrt{ax-b}} \propto y$. multiplicando per $\sqrt{ax+b}$ fiet $\odot \frac{x^2}{\sqrt{ax-b}}$. et multiplicando per $\sqrt{ax-b}$ fiet: $\frac{x^2}{\sqrt{ax+b}} \mathfrak{D}$. Quoniam autem pro $\frac{ax^2}{ax - b^2}$, fieri potest $x + \frac{b^2x}{ax - b^2}$ quae pendet ex quadratura hyperbolae, itaque una ex his duabus data, \mathfrak{D} . et \odot . dabitur et altera supposita hyperbolae quadratura. $\frac{x^2}{\sqrt{ax+b}} \propto x\sqrt{ax} - \frac{bx\sqrt{ax}}{\sqrt{ax+b}}$.

14 f. *Dazu am Rande:* Idem est si sit $z + b$ et $z + d$.

1 f. calculo (1), si valorem super (2) nam invenies (a) superfi (b) perpendicularem L

5 theoremata: vgl. VII, 4 N. 39₁ S. 617–620. 9 Gregorii theoremata: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, lib. VII, prop. LXXXIV, S. 762 f. 20 $\frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}$: Es müsste $\frac{ax^2}{\sqrt{ax+b}}$ heißen.



[Fig. 3]

Suppone curvae cuidam in aliquo plano positae $BCDE$, in punctis C, D, E , imponi alterius curvae FGH ordinatas, perpendiculariter ad planum, et ita ut medium ordinatae punctum incidat in planum. Patet ipsas LC, MD, NE , ductas in FL, GM, HN , id est in C, D, E , impositas curvae $BCDE$ seu rectangula, FLC, GMD, HNE , sive ductum horum duorum planorum in seinvicem, aequari momento omnium LC, MD, NE , etc. Unde si PR sit alius axis et intervallum a QL . recta PQ . momentum ex PR , differet a momento ex QL , cylindro ipsarum LC, MD etc. in PQ . Quod si jam tum ex recta PQ

5

3 Über perpendiculariter: (imo et aliter)

7 si (1) PQ sit recta constans, et momentum ex (2) PR L 7 a |QE. ändert Hrsg. | recta L

6–8 momento ... PQ : Die Produkte $FL \cdot LC, GM \cdot MD, HN \cdot NE$ etc. geben nicht das Moment der LC, MD, NE etc., sondern dasjenige der mit ihrem Schwerpunkt nach C, D, E etc. verschobenen Längen FL, GM, HN , etc. bzgl. der Achse QL . Dementsprechend unterscheiden sich die Momente bzgl. der Achsen PR und QL nicht um das Produkt des Achsenabstandes PQ und der Längen LC, MD, NE etc., sondern um dasjenige von PQ und den Längen FL, GM, HN etc., d. h. der längs der Kurve CDE errichteten krummlinigen Fläche.

tum alias ex alia recta ut TS . aliud haberetur momentum ejusdem figurae ordinarum
 LF , in C impositarum, tunc haberetur etiam cylinder omnium LF . quod probo: Quia
appellando $QL, x. CL, y$. erit $TC \sqcap \frac{f}{a}x + \frac{g}{a}y + h$. quae ducta in ipsam z . dabit: $\frac{f}{a}zx +$
 $\frac{g}{a}yz + hz$. Jam zx . datur, supposito momento ex PQ . quod semper idem sive sint ipsae
5 z . ubi erant in LF, MG , etc. sive sint positae in $C. D. E$. Datur et yz . sive rectangulum
pro FLC , sive ductus ex hypothesi. Ergo si detur adhuc unum momentum, ordinarum
curvae in $C. D. E$ impositarum, sit ipsum aequale $\frac{f}{a}zx + \frac{g}{a}yz + hz$. dabitur hz . seu cylinder
quaesitus. Hinc eligendae curvae $BCDE$, tales, ut per diversas earum ordinatas vel in
axem QL , vel in axem TS . multiplicari possint ordinatae curvae datae, cum utilitate
10 quadam seu simplicitate. Ad quod eae curvae utiles, quae plures habent axes utiles,
ut Hyperbola Circularis, seu primaria quae duas habet asymptotos, et axem, et axem
conjugatum.

3 Am Rande: LF , vel $MG \sqcap z$.

1 ejusdem (1) curvae quae eodem modo p (2) figurae L

De Curvis protensis

Linea quam R. P. Berthet imaginatus est. Centro A . radio AB . Circulus BCE . Radio AC producto adjiciatur recta CD aequalis arcui BC . Et curva quae transeat per omnia puncta D . designetur. Visa mihi est haec curva satis elegans, ac digna in qua methodos meas experirer.

Ac primum quaeramus ejus tangentem in $A(C)(D)$. Sit $A(C)F \cap ACD$. Jungantur $DF, C(C), D(D)$. et $(D)D$ producta occurrat diametro AB in G .

Sed brevior longe atque pulchrior constructio haec est. In producta arcus generatoris $B(C)$ tangente ad diametrum in (C) . sumatur $(C)L$ quae sit ad $(C)(D)$ arcum ut DF est ad $F(D)$ id est ut DF est ad $C(C)$, id est ut AF summa arcus et radii est ad radium. Constructio ergo huc redit, in tangente ultima id est ad (C) arcus generatoris $B(C)$ producta in eam partem a qua incipit curvae generatio id est versus B sumatur $(C)L$ quae sit ad arcum extensum CF , ut FA summa arcus extensi et radii est ad radium CA . Juncta $(D)L$ est tangens quaesita ob Triangula similia $(D)FD (D)(C)L$. Si curva BC non sit arcus circuli, et arcus sumatur in curvae perpendiculari producta, eadem locum

19 Zur Stufe (2) der Variante, über similia: Error. Dazu am Rande: Non sunt similia, quia angulus $(D)FD$ non est rectus. At inquires parallelus est tangenti arcus circuli CL , qui normalis ad radium AC . R. Non est normalis ad hunc radium, $A(C)$.

7f. in G (1) pro (2) quaeratur recta AG . Habemus Triangula similia $(D)GA, (D)FD$. (a) Ergo (b) item DFA , et $C(C)A$. Ergo $\frac{DF}{C(C) \cap \beta} \cap (aa)^z \cap (bb) \frac{a+z \cap a + \text{arc } BC}{a}$. Ergo $DF \cap \frac{a+z}{a}\beta$. et $(D)F \cap \beta$. Ergo $(D)D \cap \sqrt{\beta^2 + \frac{2az + a^2 + z^2}{a^2}\beta^2}$ et $\frac{A(D) \cap a+z+\beta}{(D)G} \cap \frac{D(D)}{(D)F \cap \beta}$ et $DG \cap \frac{a\beta + z\beta + \beta^2}{(D)D} \cap \frac{za + a^2}{\sqrt{a^2 + 2a+z}}$ (aaa) Ergo $\frac{DG}{z+a \cap DA} \cap (bbb)$ Itaque per punctum (ccc) Itaque per punctum curvae D ducatur recta arcus | circuli, *gestr.* | generatoris tangenti CL parallela in qua sumatur HF aequalis radio circuli, jungatur AH fiatque DG ad DA , ut HF ad HA , (aaaa) erit DG tangens (bbbb) centro D radio DG descriptus circulus secabit diametrum productum AB in G . erit (aaaaa) DG (bbbb) juncta DG tangens quaesita (3) sed L

habebit constructio. Sed punctum A . non erit constans. Sin punctum A sit constans, et arcus sumatur simpliciter in recta AC . producta, qualiscunque illa sit, tunc loco tangentis $(C)L$. dicendum est cum punctum A fixum sumendam perpendicularem ad ipsam AC .

Descriptio hujusmodi Curvarum uno tractu

Sit filum curvae circumplicatum, et in regula mobili circa centrum A , ad verticillum sive orbiculum veniens quem ambit, et inde reflexum in ipsam AC longitudinem extenditur et in quoddam mobile desinit, quod semper in repta AC progredi conatur. Mota ergo regula circa centrum A , si verticillus esset immobilis, et AC non semper eadem (quod in solo circulo contingit) alia describeretur curva, et distantia verticilli a curva protensioni arcus decederet, quas curvas etiam considerare licet. Sin vero verticillus ita sit mobilis susque deque in recta AC . ut semper sequatur curvam materialem et ea cohaereat, tunc filum evolutum a protrahente extendetur in rectam AC . et describetur curva desiderata. 5 10

Quadratura Spatii

Patet Triangula ADF spatium complere, secta ergo curva Circuli in partes aequales, patet Rectas AD crescere arithmetice, $a + z$. ponendo z . arithmetice proportionales seu arcus, ipsae autem DF sunt $\frac{a+z}{a}\beta$. et $\nabla^{\text{lum}} ADF$ est: $\frac{a+z}{a}\beta \sim \frac{a+z}{2}$ sive 15

1 *Zu* habebit: Imo non habebit.

3 *Daneben*: Error. Alio accedere debent. Nam si recta AC perpendicularis ad curvam non concurrent duae perp. in A . Si duae rectae concurrent in A . non sunt $(D)F$ et $C(C)$ aequales.

3 (C)L. (1) adhibenda est perpendicularis (2) dicendum est | cum ... fixum *erg.* | sumendam L
 4 (1) Gen (2) Descriptio L 10 etiam (1) calculare lic (2) considerare L 12 a (1) protendente ext (2) | protrahende *ändert Hrsq.* | extendetur L

17 non habebit: Die verallgemeinerte Konstruktion ist zulässig, wenn A als der variable Krümmungsmittelpunkt der Kurve aufgefasst wird.

$\frac{a^2 + 2az + z^2}{2a}\beta$. Summa omnium $\frac{a^2}{2a}\beta$ est $\frac{a}{2}z$. Summa omnium $\frac{2a\beta z}{2a}$ est $\frac{z^2}{2}$. Denique
 summa omnium $\frac{z^2\beta}{2a}$ est $\frac{z^3}{6[a]}$. Duplum ergo Spatii $AB(D)$ est rectangulum $A(D)(C)$,
 auctum alio rectangulo quod sit ad ipsum ut quadratum ab ipsa $(D)(C)$ est ad triplum
 rectangulum $(D)A(C)$ sive $az + z^2 + \frac{z^3}{3a}$. posita $z \sqcap (C)D$ et $a \sqcap A(C)$.

2-4 Nebenrechnung: $\frac{z^2 + az}{\frac{z^3}{3a}} \sqcap \frac{3az + 3a^2}{z^2}$

46. METHODI TANGENTIUM INVERSAE EXEMPLA

11. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 9 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 3 1/2 S. Untere Hälfte von Bl. 2 v° leer. Die verblassten Ziffern der Datumsangabe 11. Novemb. 1675 sind zu einem unbekanntem Zeitpunkt von nicht identifizierter Hand (möglicherweise von Leibniz selbst) in Tinte nachgezogen worden. Dabei wurde die 5 der Jahreszahl mit einer 3 überschrieben. Es wird die ursprüngliche Datumsangabe wiedergegeben. — Gedr.: 1. GERHARDT, *Differentialrechnung*, 1848, S. 32–40; 2. GERHARDT, *Analysis*, 1855, S. 132–139; 3. *LBG*, 1899, S. 161–167; 4. (englische Übersetzung von 1.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 93–103. Cc 2, Nr. 1120

5

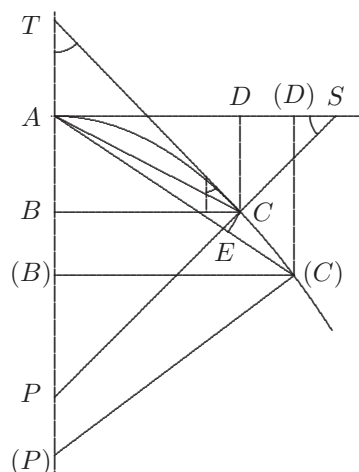
10

11. Novemb. 1675.

Methodi tangentium inversae exempla.

Jam superiore anno mihi proposueram quaestionem quae inter difficillimas totius Geometriae haberi potest, vel ideo quod nihil conferunt methodi hactenus vulgatae: Ejus hodie solutionem reperi cujus analysisin dabo.

15



[Fig. 1]

12f. Novemb. (1) 1675 (2) | 1673 in unbekannter Hand, ändert Hrsg. | Methodi L 15f. Eius ... dabo erg. L

14 superiore anno: vgl. z. B. N. 15, dat. Dezember 1674.

Nimirum quaeritur curva $C(C)$ in qua ipsae BP intervalla ordinatarum BC , et perpendicularium ad curvam, PC , in axe $AB(B)$ sumta, sint ipsis ordinatis BC reciproce proportionalia. Sit alia recta $AD(D)$ ad ipsam $AB(B)$ axem normalis, in quam ducantur ordinatae CD ita ut ipsae AD abscissae ex axe $AD(D)$, sint ipsis BC ordinatis ad axem $AB(B)$, aequales. Erunt et CD ordinatae ad axem $AD(D)$ aequales ipsis AB abscissis ex axe $AB(B)$. Appellemus $AD \cap BC \cap y$. et $AB \cap DC \cap x$. Ipsam BP vocemus ω et ipsam $B(B)$ vocemus z .

Constat ex alibi a me demonstratis: esse $\int \overline{\omega z} \cap \frac{y^2}{2}$. sive esse $\omega z \cap \frac{y^2}{2d}$. At ex quadratura Trianguli patet esse $\frac{y^2}{2d} \cap y$. Ergo $\omega z \cap y$. Jam ex hypothesi est $\omega \cap \frac{b}{y}$. Ita enim erunt ipsae ω ipsis y reciproce proportionales. Ergo fiet: $\frac{bz}{y} \cap y$. Adeoque $z \cap \frac{y^2}{b}$. Jam $\int z \cap x$. Ergo $x \cap \int \frac{y^2}{b}$. At $\int \frac{y^2}{b} \cap \frac{y^3}{3ba}$ ex quadratura Parabolae; ergo $x \cap \frac{y^3}{3ba}$. quae est aequatio explicans relationem inter ordinatas y et abscissas x , curvae quaesitae $C(C)$. Inventam ergo habemus curvam, quae est Analytica, et uno verbo Parabola Cubica, cujus vertex A .

Videbimus ergo an verum sit hoc Theorema sane memorabile:

9 Am Rand: \int summa d differentia

7 \cap x. (1) Constat ex alibi (a) ex (b) a me demonstratis (aa) ex (bb) omn (2) ipsam ... ω (a) Constat ex alibi a me demonstratis, esse (aa) $\overline{\omega z} \cap \frac{y^2}{2}$. Ergo $\omega \cap \frac{y^2}{2d}$. (bb) $\int \omega \cap (b)$ et L 9 esse (1) omn (2) $\int \overline{\omega z} L$ 9 $\frac{y^2}{2d}$. (1) porro ex hypothesi debet esse (2) At L 10 quadratura (1) parabolae patet (2) Trianguli L 14 est (1) Geometrica (2) Analytica L

9 alibi: s. Erl. zu N. 40 S. 292 Z. 3. 9 $\frac{y^2}{2d}$: Im vorliegenden Stück benutzt Leibniz zunächst noch $\frac{x}{d}$ für „Differenz der x “ und geht dann ab S. 324 Z. 1 allmählich zu dx über.

„ In Parabola Cubica $C(C)$ sunt BP intervalla perpendicularium ad curvam PC
 „ et ordinarum BC ad axem, in axe ABP sumta ipsis ordinatis BC , reciproce
 „ proportionalia.

Hoc calculus tangentium facile ostendet. Aequatio Parabolae Cubicae: $xc^2 \sqcap y^3$.
 ponendo c latere recto, sive pro c^2 ponendo $3ba$, sive $c \sqcap \sqrt{3ba}$, fiet: $3xba \sqcap y^3$. Ergo ex
 5 methodo tangentium Slusii erit $t \sqcap \frac{3y^3}{3ba}$. ponendo $BT \sqcap t$ intervallo inter tangentem et
 ordinarum in axe: Jam $BP \sqcap \omega$ est $\sqcap \frac{y^2}{t}$. Ergo $\omega \sqcap \frac{y^2}{\frac{y^3}{3ba}} \sqcap \frac{ba}{y}$. Sunt ergo ipsae ω ipsis y .
 $\frac{y^2}{t}$
 $\frac{y^3}{3ba}$
 $\frac{ba}{y}$

reciproce proportionales quod desiderabatur.

Analyseos hujus artificium in eo fuit, quod ex ordinata abscissam fecimus; cujus
 stratagematis antea non venerat in mentem. Non est difficilior quaestio, si quaeratur
 10 Curva in qua ipsae BP intervalla ordinarum et perpendicularium sint ipsis AB abscissis

reciproce proportionales. Nempe $\omega \sqcap \frac{a^2}{x}$. Jam $\int \omega \sqcap \frac{y^2}{2}$. Ergo $y \sqcap \sqrt{2 \int \omega}$ vel $\sqrt{2 \int \frac{a^2}{x}}$.

Jam $\int \omega$ non potest inveniri nisi ope curvae logarithmicae. Ergo et figura, quae satisfaciat
 est in qua ordinatae sunt in subduplicata ratione logarithmorum ab abscissis; quae figura
 est ex numero Transcendentium. 15

At revera difficilior est quaestio, cum quaeritur ut ipsae AP sint ipsis BC ordinatis
 reciproce proportionales. Nempe $x + \omega \sqcap \frac{a^2}{y}$ et $\omega z \sqcap \frac{y^2}{2d}$. et $\int z \sqcap x$ sive $z \sqcap \frac{x}{d}$ sive
 fiet: $\omega \frac{x}{d} \sqcap \frac{y^2}{2d}$. et $\omega \sqcap \frac{y^2}{2d} \smile, \frac{x}{d}$. Et fiet: $x + \frac{y^2}{2d} \smile, \frac{x}{d} \sqcap \frac{a^2}{y}$. Ponendo ipsas x arithmeticas,
 erit $\frac{x}{d} \sqcap z$ constans et fiet: $x + \frac{y^2}{2d} \sqcap \frac{a^2}{y}$ et $\int x \sqcap \int \frac{a^2}{y} - \frac{y^2}{2}$. et $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \sqcap \int \frac{a^2}{y}$. sive

10 mentem. (1) difficilior paulo videtur (2) Non L 14 est (1) logarithmorum seu (2) in subdu-
 plicata ratione logarithmorum ab (3) in L 16 BC (1) abscissis reciproce (2) ordinatis L 19 $\int \frac{a^2}{y}$.
 (1) sive quaeritur figura in qua momentum ordinarum ex axe, et abscissarum ex vertice (2) sive (3)
 sive L

6 methodo tangentium Slusii: s. *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/
 1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059).

$\sqrt{dx^2 + y^2} \sqcap \frac{2a^2}{y}$. Jam junctae $AC, A(C)$ sunt $\sqcap \sqrt{x^2 + y^2}$. Centro A , radio AC , describatur arcus CE , ita ut E cadat in rectam $AE(C)$, erunt ipsae $E(C)$ differentiae inter AC et $A(C)$, sive $EC \sqcap e \sqcap \sqrt{dx^2 + y^2}$. Ergo $e \sqcap \frac{2a^2}{y}$. Si ergo liceret y sumere Arithmeticae progressionis haberemus quaesitum, videtur tamen nihil referre etsi x progressionis arithmeticae sumserimus.

Sumtis enim x progressionis Arithmeticae, sequitur ipsis AD sive y , ipsas EC sive e reciproce proportionales esse. Quod si autem sunt semel, erunt semper. Summae autem infinitarum reciproce proportionalium, habentur quacunquē sint progressionē ex quibus reciproce proportionales sumuntur, neque enim hic rectangulorum ulla ratio habetur, ubi aequali altitudine opus est, sed Summa linearum, omnium scilicet $E(C)$ initur. Sed jam video difficultatem ipsam omnium e summam sive omnes $\frac{2a^2}{y}$, sive ipsas $A(C)$ non haberi, nisi sciatur cujus progressionis sint ipsae y . Quod hoc loco ignoratur. Quoniam ipsas x necesse est esse progressionis Arithmeticae non ipsas y .

Sin jam in aequatione superiore $x + \frac{y^2}{2d}, \sim \frac{x}{d} \sqcap \frac{a^2}{y}$ faciamus y . progressionis Arithmeticae, fiet: $x + \frac{y}{d\bar{x}} \sqcap \frac{a^2}{y}$. et $xy + \frac{y^2}{dx} \sqcap a^2$. Imo generaliter neutri assignando progressionem, fiet: $xy + \frac{yd\frac{y^2}{2}}{dx} \sqcap a^2$. \odot

15 Nota idem est dx . et $\frac{x}{d}$. id est differentia inter duas x proximas.

3 $e \sqcap (1) \sqrt{x}$ (2) $\sqrt{dx^2 + y^2}$. L 15 fiet: (1) $x + \frac{x}{d}$ (2) $x + (a) yd\bar{x} \sqcap \frac{a^2}{y}$. et $xy + y^2d\bar{x} \sqcap a^2$.

Imo generaliter neutri assignando progressionem, fiet: $xy + yd\bar{x}d\frac{y^2}{2} \sqcap a^2$. (b) $\frac{y}{d\bar{x}} L$

3 $\sqrt{dx^2 + y^2}$: Leibniz vergisst das Wurzelzeichen. Dadurch wird die nachfolgende Gleichung für e inkorrekt; der fehlerhafte Ausdruck für e wird bis Z. 13 beibehalten.

Sed nondum quicquam praestitimus, considerandum ergo ex doctrina indivisibilium, producta PCS . dum ipsi AD occurrat in S . esse summam omnium AP applicatarum ad AB , aequalem summae omnium AS applicatarum ad AD . id est vocando DS , π v . fiet $dy \int y + dy \int v \pi dx \int x + dx \int \omega$. sive $dy \int y + dy \int v \pi dx \int \frac{a^2}{y}$. ex hypothesi quaestionis. Ponendo jam y . progressionis Arithmeticae, fiet: $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} \pi dx \overline{\text{Log } y}$. At paulo ante eadem facta suppositione ipsarum y progressionis Arithmeticae fuit $xy + \frac{y^2}{dx} \pi a^2$. Fiet: $dx \pi \frac{y^2}{a^2 - yx}$ et nunc: $dx \pi \frac{y^2 + x^2}{2 \overline{\text{Log } y}}$. Ergo habemus denique aequationem in qua solae supersunt x . et y . extra vincula, nempe: $\overline{y^2 + x^2}$, $a^2 - yx \pi 2y^2 \overline{\text{Log } y}$. Quae aequatio cum sit determinata locum dabit quaesitum. Et valde memorabilis est haec methodus, cum enim non sit hic in nostra potestate tot aequationes habere quot incognitas, poterimus tamen saepe plusculas obtinere aequationes, et earum ope quosdam terminos elidere, ut hoc loco $d\bar{x}$. Quae sola nobis obstabat. Singulae aequationes totam includebant quaestionis naturam, nec tamen ex iis erui poterat solutio, quod media facilia hactenus desint, conjunctio duarum aequationum rem compendio dedit.

Videor idem aliter obtinere potuisse per momenta. Ubi in mentem venit consideratio nova non inelegans.

In fig. 2. est $BC \pi y$. $FC \pi d\bar{y}$. Sit punctum G medium ipsius FC . Patet momentum ipsius FC , esse rectangulum sub FC et BG , id est rectangulum BFC . Nam cum sit

2f. esse (1) AP ad (a) basin (b) axem, s (2) omnes AP applicatas (3) summam ... AP | applicatas ändert Hrsg. | ad L 4 $dx \int \omega$. (1) Jam $dy \int y \pi \frac{y^2}{2}$. et (2) sive L 5 $+\frac{x^2}{2} \pi (1) dx \overline{\text{Log } a^2}$ (2) $dx \overline{\text{Log } y} L$ 6 $xy + (1) y^2 d\bar{x} \pi a^2$ fiet: $d\bar{x} \pi \frac{a^2 - xy}{y^2}$ at (a) supra (b) paulo ante (2) $\frac{y^2}{dx} L$ 8 nempe: (1) $2 \overline{\text{Log } ya^2} - 2 \overline{\text{Log } yxy} \pi y^4 + y^2 x^2$ (2) $\overline{y^2 + x^2}$, L

5 fiet: Die nachfolgende Gleichung ist falsch. Leibniz benutzt sie konsequent weiter bis Z. 8. Die Überlegungen zum Ansatz, durch Heranziehen einer weiteren Differentialgleichung und Anwendung eines Eliminationsverfahrens bei der Lösung der inversen Tangentenaufgabe weiterzukommen, werden davon jedoch nicht beeinträchtigt.

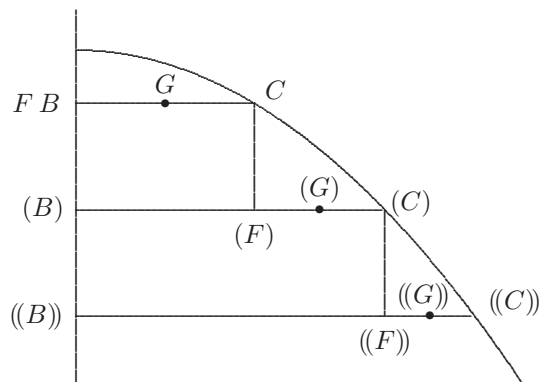


fig. 2.

$BFC + GFC$. posterius quippe prioris ratione infinite parvum negligi potest, adeoque erit $\int y \overline{dy} \sqcap \frac{y^2}{2}$. Sive momentum omnium differentiarum FC , aequabitur ultimi termini

momento. Et $y dy \sqcap d \frac{y^2}{2}$ et $y^2 dy \sqcap \frac{y d y^2}{2}$. Porro supra in aeq. \odot faciendo x arithmeticam,

5 fuit $y d \frac{y^2}{2} \sqcap a^2 - xy$ sive $d \frac{y^2}{2} \sqcap \frac{a^2 - xy}{y}$ at idem $\sqcap y \overline{dy}$. Fiet ergo $y \overline{dy} \sqcap \frac{a^2 - xy}{y}$. et erit

$\int y \overline{dy} \sqcap \int \frac{a^2}{y} - \int x \frac{x^2}{2}$. At jam invenimus esse $\int y \overline{dy} \sqcap \frac{y^2}{2}$. Fiet ergo $y^2 + x^2 \sqcap 2 \int \frac{a^2}{y}$.

ut ante, vel $dy^2 + 2x \sqcap \frac{2a^2}{y}$. Ubi patet res notabilis in his aequationibus in quibus reperiuntur \int . et d . ubi jam una, v. g. hic x . pro arithmetice procedente sumta est, non

posse jam inverti, nec dici nos habere valorem ipsius x , nempe $x \sqcap \frac{2a^2}{y} - \overline{dy^2}$. quia

10 $\overline{dy^2}$ non potest intelligi nisi determinata progressionis natura, ipsius y . Ipsius y . autem progressio, ut $\overline{dy^2}$ serviat[is] talis sumi debet, ut sint x progressionis Arithmeticae, ergo

4 f. arithmeticam, (1) fiet: $\int y d \frac{y^2}{2} \sqcap \int a^2 - \int xy$ (2) fuit $L \quad 7$ vel $|dy^2 + x \text{ ändert Hrsg.}| \sqcap \frac{2a^2}{y} L$

11 sumi (1) potest, (2) debet L

4 aeq. \odot : vgl. S. 324 Z. 16.

ipsae $d\bar{y}$ supponunt ipsas x , non ergo per ipsas invenietur x . Caeterum hac arte multa poterunt praeclara haberi theorematum de curvis alias intractabilibus, jungendo scilicet plures ejusmodi aequationes.

Ut in hujusmodi quaestionibus sane difficillimis simus exercitatiores utile erit adhuc unam experiri, ut scilicet ipsae AP sint ipsis AB reciproce proportionales. Fiet: $x + \omega \propto$

$$\frac{a^2}{x} \text{ et } z\omega \propto \frac{d\bar{y}^2}{2} \text{ et } z \propto dx. \text{ Adeoque fiet: } \omega \propto \frac{d\bar{y}^2}{z} \propto \frac{d\bar{y}^2}{dx} \text{ et denique } x + \frac{d\bar{y}^2}{dx} \propto \frac{a^2}{x}.$$

Cujus jam non difficilis solutio est, nam ponendo x arithmeticas, fiet: $\int x + \frac{y^2}{2} \propto \int \frac{a^2}{x}$,

sive fiet: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \propto \overline{\text{Log } y}$ sive $\sqrt{x^2 + y^2} \propto AC \propto \sqrt{2 \overline{\text{Log } AD}}$. Quae expressio curvae satis est simplex. Requiritur autem ipsae AB progressionis arithmeticae. Contra si sint

y progressionis arithmeticae fieret: $x + \frac{y}{dx} \propto \frac{a^2}{x}$. Sed hinc non facile habebitur natura curvae.

Videamus an possit esse curva in qua ipsae AC ipsis BP aequales, fiet: $\sqrt{x^2 + y^2} \propto \omega$.

et $\omega \propto \frac{d\bar{y}^2}{2d\bar{x}}$. Sit x progressionis arithmeticae, fiet: $(\int \sqrt{x^2 + y^2} \propto) \int AC \propto y^2$ sed hoc non sufficit nisi ad curvam mechanice describendam, per puncta scilicet proxime accedentia.

Ut sit $x \propto 1$. sit $BC \propto (y)$ erit $\sqrt{1 + (y^2)} \propto (y^2)$ sive $1 + (y^2) \propto (y^4)$. Unde habetur

$$(y) \text{ nempe } y^4 - y^2 + \frac{1}{4} \propto 1 + \frac{1}{4} \text{ sive } (y^2) \propto \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ et } (y) \propto \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{2}}.$$

4 simus (1) accuratiores, (2) exercitatiores L 6 $z\omega \propto (1) y^2 (2) z (3) |d\bar{y}^2 \text{ ändert Hrsg.}|$ et L
 6 fiet: (1) $x + d\bar{x}, \frac{d\bar{y}^2}{2}$ (2) ω L 8 quae (1) species (2) expressio L 9 ipsae $|AP \text{ ändert Hrsg.}|$
 progressionis (1) Geometricae (2) arithmeticae L 10 $\frac{a^2}{x}$. (1) Nota autem dx in x esse (2) sed L
 14 ad (1) infinita (2) curvam L

8 $\overline{\text{Log } y}$: Es müsste $a^2 \log x$ und in der folgenden Gleichung $\sqrt{2a^2 \overline{\text{log } AB}}$ heißen. 13 $\propto y^2$:
 Richtig wäre $\frac{y^2}{2}$. Der Rechenfehler wirkt sich, zusammen mit weiteren Versehen, bis S. 328 Z. 3 aus,
 ohne die Überlegung grundsätzlich zu beeinträchtigen.

$\sqrt{4 + ((y^2))} + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}} \cap ((y^2))$. Ita rursus poterit inveniri $((y))$. Et hujus ope reperietur
 AC $A(C)$

tertia AC , et ita reperietur polygonum aliquod curvilineo quaesito eo similis, quo minor assumpta est unitas.

- x . esse progressionis Arithmeticae significat motum (inter describendum) in axe AB .
 5 esse uniformem. Descriptiones autem quae supponunt motum aliquem esse uniformem, non sunt prorsus in nostra potestate. Neque enim possumus producere motum uniformem, nisi continue interruptum.

- Videndum an $dx dy$ idem sit quod $d\overline{xy}$ et an $\frac{dx}{dy}$ idem quod $d\frac{x}{y}$ et videtur ut sit. Sit
 $y \cap z^2 + bz$. et x . sit $cz + d$. fiet $dy \cap \underbrace{z^2} + 2\beta z \underbrace{+\beta^2}, \underbrace{+bz} + b\beta, \underbrace{-z^2} \underbrace{-bz}$ et fiet
 10 $dy \cap \overline{2z + b\beta}$. Eodem modo $dx \cap +c\beta$. Et ita erit $dy dx \cap \overline{2z + bc\beta^2}$. At idem produces si statim facias $d\overline{xy}$. Nam in singulis factoribus separatim destructio fit, altero in alterum non influente. Idem est de divisoribus. Sed jam cum earum summae quaeruntur discrimen an sit videndum est, $\int \overline{dx} \cap x$. $\int \overline{dy} \cap y$. $\int \overline{dxy} \cap xy$. Si jam sit aequatio v. g. $dx dy \cap x$. erit $\int \overline{dxy} \cap \int x$. Jam $\int x \cap \frac{x^2}{2}$. Ergo $\int \overline{dxy} \cap \frac{x^2}{2}$. sive $xy \cap \frac{x^2}{2}$. sive $\frac{x}{2} \cap y$. Quod
 15 satisfacit aequationi $dx dy \cap x$. Nam pro y ponendo ejus valorem fiet: $dx d\frac{x}{2} \cap x$. sive $\frac{dx^2}{2} \cap x$. Quod verum esse constat.

In summis haec non procedunt, nam $\int x \int y$. non est idem quod $\int \overline{xy}$. Ratio est, quod differentia est quantitas unica, at summa est quantitatum plurium aggregatum.

8–16 *Am Rand:* Error vide infra.

10 ita (1) patet esse idem (2) erit | dzdx ändert Hrsg. | $\cap \overline{2z + bc\beta^2}$ L 11 separatim (1) quaerenda quae destruunt, idem in divisoribus (2) destructio L 12f. quaeruntur (1) differentiam video (2) discrimen (a) video, aliud enim est s (b) an L

14 xy : Die Ersetzung von $\int \overline{dxy}$ durch xy setzt die Regel $dx dy = dxy$ voraus. Dasselbe gilt für die Gleichsetzung von $dx d\frac{x}{2}$ mit $d\frac{x^2}{2}$ in Z. 15 f. 19 infra: vgl. S. 330 Z. 7.

Summa differentiarum est terminus novissimus. At ex summis facientium, invenire summas productorum, nondum analytice, certa ratione possumus, et quae in eo genere fecit Wallisius non demonstratione, sed felici inductione nituntur. Demonstrationem tamen eorum invenire magni res foret momenti. Sint $\int \overline{zy}$ quae quaeruntur. Ponatur $\int \overline{zy} \sqcap \omega$. Erit $zy \sqcap d\overline{\omega}$, et $y \sqcap \frac{d\overline{\omega}}{z}$ et $\int y \sqcap \int \frac{d\overline{\omega}}{z}$. Eodem modo $\int z \sqcap \int \frac{d\overline{\omega}}{y}$. Ponatur $\int y$ nota 5
 $\sqcap v$. et $\int z$ nota $\sqcap \psi$. Fiet $y \sqcap dv \sqcap \frac{d\overline{\omega}}{z}$ et $z \sqcap d\psi \sqcap \frac{d\overline{\omega}}{y}$. et $\frac{dv}{d\psi} \sqcap \frac{z}{y}$. Unde sequi videtur $\frac{dv}{d\psi} \sqcap \frac{z}{y}$. Adeoque $\frac{v}{\psi} \sqcap \int \frac{z}{y}$. Ergo foret $\int \frac{z}{y} \sqcap \int \frac{z}{y}$. Quod est absurdum. Unde sequitur $\int \frac{dv}{d\psi}$ non esse $\frac{v}{\psi}$. Quid ergo erit? Differentia ipsarum v , divisa per differentiam ipsarum ψ . summanda est. Non ergo quaelibet differentiarum, adeoque et tota v , dividenda erit per singulas ipsius ψ . Non inquam, quia singulae tantum per singulas respondententes sibi 10
 dividuntur, non quaelibet per omnes. Ergo aliud est $\int \frac{dv}{d\psi}$. quam $\frac{\int dv \sqcap v}{\int d\psi \sqcap \psi}$.
 Ergone aliud erit $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$? Si idem est etiam $\int d\frac{v}{\psi}$ erit $\sqcap \int \frac{dv}{d\psi}$ sive $\frac{v}{\psi} \sqcap \int \frac{dv}{d\psi} \sqcap \int \frac{dv}{d\psi}$. Quod absurdum est. Eodem modo an $d\overline{v\psi} \sqcap dv d\psi$. Ergo $\int d\overline{v\psi}$ sive $v\psi \sqcap \int d\overline{v\psi}$. Jam $v\psi \sqcap \int dv \int d\psi$. Ergo $\int d\overline{v\psi} \sqcap \int dv \int d\psi$. Quod est absurdum. Ergo absurdum esse videtur $dv d\psi$. idem esse quod $d\overline{v\psi}$, itemque $\frac{dv}{d\psi} \sqcap d\frac{v}{\psi}$. Quod tamen paulo 15
 ante asserueram, et quod videtur demonstrativum. Difficilis nodus.

4 Sint (1) $\int z \int y$ quae quaerun (2) $\int \overline{zy} L$ 4f. $\sqcap \omega$. (1) porro sit $\int z \sqcap$ (2) Erit L 7 $\frac{\int z}{\int y}$.

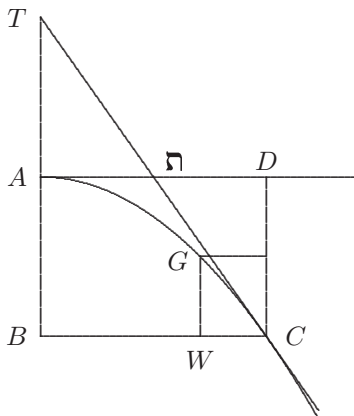
(1) Unde sequi (2) quod L 12 $\frac{dv}{d\psi}$? (1) Non puto sed est idem. Ergo (2) Si L

3 Wallisius: vgl. J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. LXXII S. 58 f. (WO I S. 498).

6 $\frac{z}{y}$: Hier sind Zähler und Nenner vertauscht. Der Fehler beeinträchtigt die Richtigkeit von Leibniz' Schlussfolgerung nicht.

Sed jam distinguendum video: si sit v . et ψ . et faciant $v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$ quantitatem aliquam v. g. $\mathfrak{N} \sqcap v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$, sintque valores tam ipsius v . quam ipsius ψ rationales per unam quandam, v. g. abscissam x . expressi, tunc calculus semper docebit eandem produci differentiam, sive idem fore $d\mathfrak{N}$ et $dvd\psi$ vel $\frac{dv}{d\psi}$.

5 Sed jam video ista nunquam procedere, nec per partes in his iri posse, nam v. g. sit $x + \beta$, $\hat{\ } x + \beta$, $-x$, x , fiet $2\beta x$. Quod longe aliud est quam $x + \beta$, $-x$, $\hat{\ } x + \beta$, $-x$. quod daret β^2 . Concludendum ergo aliud esse $d\overline{v\psi}$ quam $dvd\psi$, aliudque $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$.



[Fig. 3]

$D\mathfrak{N} \sqcap \theta$. $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $TB \sqcap t$.

10 Primus gradus[:] $a + bx + cy \sqcap 0$. Ordinando et accommodando ad tangentes, fiet:

$bt \sqcap -cy$. et $t \sqcap \frac{-cy}{b}$. Eodem modo: $\theta \sqcap \frac{-bx}{c}$. Sit $WC \sqcap \omega$ et $GW \sqcap \beta$. Patet esse:

$\frac{t}{y} \sqcap \frac{\beta}{\omega}$. et fiet: $\omega \sqcap \frac{-\beta b}{c}$. Eodem modo $\beta \sqcap \frac{-\omega c}{b}$.

Secundus gradus: $a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fyx \sqcap 0$. Ordinando ad tangentes, fiet: $bt + 2dxt + fyt \sqcap -cy - 2ey^2 - fyx$. Adeoque $t \sqcap \frac{-cy - 2ey^2 - fyx}{b + 2dx + fy}$. Unde facile patet semper

7–10 $\frac{dv}{d\psi}$ | $D\mathfrak{N} \dots t$ erg. | (1) Sit $ax^2 + by^2 + cy$ (2) primus L 11 et | GC ändert Hrsg. | $\sqcap \beta L$

t per y , (et θ per x) dividi posse et quoniam $\omega \propto \frac{\beta y}{t}$. ideo fiet hic $\omega \propto \frac{\overline{\beta b + 2dx + fy}}{-c - 2ey - fx}$.

Adeoq̄ue fiet: $y \propto \frac{-\overline{\omega c + fx}, \wedge -\overline{\beta b + 2dx}}{f + 2e}$. At paulo ante $y \propto \frac{-a - bx - dx^2}{c + ey + fx}$ et fiet:

$$y \propto \frac{-\overline{\omega, c + fx}, \wedge -\overline{\beta b + 2dx}, \wedge \overline{c + fx},, + \overline{f + 2e} \wedge \overline{a + bx + dx^2}}{-\overline{\omega c + fx}, \wedge -\overline{\beta b + 2dx}, \wedge -e}$$

$$\propto \frac{-\overline{\omega c + fx}, \wedge -\overline{\beta b + 2dx}}{f + 2e}.$$

Habemus ergo aequationem in qua nulla est amplius y . Et omnes figurae, quarum 5
aequatio ex hac aequatione pro varia explicatione literarum constantium formari potest,
quadrari possunt. Illae item quae ipsi per methodos alias ostendi possunt $\sigma\upsilon\gamma\upsilon\omega\tau\omicron\iota$.

$$4f. \frac{-\overline{\omega c + fx}, \wedge -\overline{\beta b + 2dx}}{f + 2e}. \quad (1) \text{ quem valorem inventum inserendo in } (a) \omega \text{ } (b) \text{ valore ipsius } \omega,$$

habebimus aequationem in qua nulla y . quod ut fiat commodius, quaeramus rursus per partes in exiguis:

$yx \propto a$. differentia erit $yt \propto -yx$. et $t \propto -x$. et $\theta \propto -y$ Jam $(aa) \langle \omega \rangle \propto (bb) y \propto \frac{a}{x}$. erit: $\omega \propto \frac{-\beta a}{x^2}$. et

$\beta \propto \frac{-a\omega}{y^2}$. (2) Habemus L 6 literarum (1) cognitarum (2) constantium L 7 possunt (1) sygnotae

(2) $\sigma\upsilon\gamma\upsilon\upsilon$ (3) $\sigma\upsilon\gamma\upsilon\omega\tau\omicron\iota$: L

2 fiet: $y \propto$: Der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite müsste $\beta f + 2e\omega$ lauten. Im Zähler wäre das Multiplikationszeichen zu streichen. Die Fehler wirken sich auf die Rechenausdrücke bis Z. 4 aus.

47. MARGINALIEN IN GREGORYS EXERCITATIONES GEOMETRICAE

[Ende Januar 1673 – 1716 (?)]

Überlieferung: *LiH* Marginalien in J. GREGORY, *Exercitationes geometricae*, London, 1668:
 HANNOVER *Leibniz-Bibl.* Ms IV 377.
 Cc 2, Nr. 00

5

Datierungsgründe: Leibniz hat Gregorys *Exercitationes geometricae* zusammen mit der Ausgabe von Mercators *Logarithmotechnia* und Riccis *Exercitatio geometrica de maximis et minimis* (London 1668) sowie weiteren Werken während seines ersten Londonaufenthalts zwischen Ende Januar und Ende Februar 1673 erworben. Die *Exercitationes* wurden später mit den Schriften von Mercator und Ricci zusammengebunden und die Ränder unter Aussparung der Marginalien beschnitten. Während die Randnotizen zur *Logarithmotechnia* und zur *Exercitatio geometrica* sämtlich frühen Datums anzunehmen sind (Druck in VII, 4 N. 3) und ein intensiveres Studium der *Exercitationes geometricae* bereits kurz nach Erwerb des Buches nachweisbar ist (s. VII, 4 N. 8, 16₁, 17, 22 sowie 24), stammen die Marginalien zu Gregorys Schrift infolge der verwendeten Infinitesimalsymbolik vorwiegend von frühestens November 1675. Für die beiden entfernten Marginalien in der Praefatio sowie die eingefügten Linien auf S. 2 ist eine Datierung auf die Zeit ab Februar 1673 nicht ausgeschlossen. Die zuerst geschriebenen Marginalien zu Prop. V (S. 21 f.) enthalten das Gleichheitszeichen = und weisen enge Bezüge zur Untersuchung *Trigonometria inassignabilium*, VII, 4 N. 27, vom Sommer 1673 auf. Sie dürften daher auch aus dieser Zeit stammen. Die später geschriebenen Marginalien entstanden wahrscheinlich in Zusammenhang mit der Untersuchung *De Quadratura quadratricis* (LH 35 XIII 1 Bl. 236–239), dat. 6. Juli 1677, in der auf sie verwiesen wird. Das Marginalalexemplar wird als Haupttext wiedergegeben, dem die Seitenzählung in eckigen Klammern vorangestellt wird. Leibniz' Marginalien erscheinen als Fußnoten zum Text bzw. zu den Figuren, Unterstreichungen werden durch Sperrung hervorgehoben. Zur Wiedergabe von Leibniz' Ergänzungen von Linien sowie einer Punktbezeichnung innerhalb Gregorys Fig. 3 wird der ursprünglichen Abbildung ein Ausschnitt einer entsprechend erweiterten Figur gegenübergestellt.

10

15

20

25

[Praefatio Bl. A2 v^o – A3 v^o]

... Quae interim objiciuntur a praestantissimo Geometra contra nostram Doctrinam, hic resolvere conabor. *Admitto* (inquit) *in Prop. 11 Demonstratum esse, quod Sector ABIP non sit analytice compositus a triangulo ABP et Trapezio ABFP; sed non video ubi demonstretur Sectorem ABIP non esse analytice compositum ex aliis quantitibus.* Ego facile agnosco infinitas alias esse quantitates, e quibus analytice componitur Sector

30

 31–333,3 *Ausriss am Rand; Verbindungslinie zwischen Risskante und Virum.*

28 inquit: s. den Brief von J. Wallis an J. Collins vom 8. (18.) September 1668; WALLIS, *Correspondence* II, S. 596–601, insbes. S. 599 f. 28 *Prop. 11*: J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, S. 25–28.

ABIP, sed R. Virum interrogo, quomodo innotescant illae quantitates e datis solummodo triangulo *ABP* et Trapezio *ABFP*, nam hae Problema determinant, et proinde aliae frustra dantur: si autem inveniuntur; inveniuntur vel analytice vel non analytice; si posterius, concedo totum; si autem analytice inveniuntur e quantitatibus *ABP*, *ABFP*, et Sector rursus analytice componatur ex illis; Idem Sector etiam analytice componetur ex quantitatibus *ABP*, *ABFP*, quod est absurdum, nempe contra Prop. 11, quae admittitur. Si autem insistatur, Sectorem posse componi analytice ex aliis quantitatibus, quae illum determinant praeter *ABP*, *ABFP*: dico *ABP*, *ABFP*, vel posse componi analytice ex aliis illis quantitatibus vel non; si posterius, concedo totum, sed tales quantitates exhiberi desidero; si prius, Analyseos tenorem examinando, satis constabit alias illas quantitates etiam analytice componi ex *ABP*, *ABFP*, et ita ad primum casum relabimur. Satis etiam sciunt Geometrae, perinde esse quo ad solutionem, quomodocunque determinetur problema; . . .

[S. 1]

Appendicula Ad Veram Circuli et Hyperbolae Quadraturam. 15

...

[S. 2 f.]

<i>2L</i>		<i>A</i>	$\overline{\quad}$	<i>B</i>	
<i>M</i>	<i>a</i>	<i>C</i>	$\overline{\quad}$	<i>D</i>	20
<i>P</i>	<i>2Q</i>	<i>E</i>	<i>F</i>		
<i>R</i>	<i>4S</i>	<i>G</i>	<i>H</i>		
<i>T</i>	<i>8V</i>	<i>I</i>	<i>K</i>		
<i>X</i>	<i>16Y</i>	<i>N</i>	<i>O</i>		
		<i>Z</i>			25

Prop. I.

Inter *A*, *B* quantitates arbitrarias sit media Geometrica *C*, item inter *C*, *B* sit media harmonica *D*, et continuetur series convergens, ut sit ejus terminatio, seu Circuli, Ellipseos vel Hyperbolae sector *Z*. . .

1 *Leibniz ergänzt R. zu Rev.*
 9–12 *Randstreifen abgeschnitten.*
 19f. *Linien von Leibniz eingetragen.*

[S. 14]

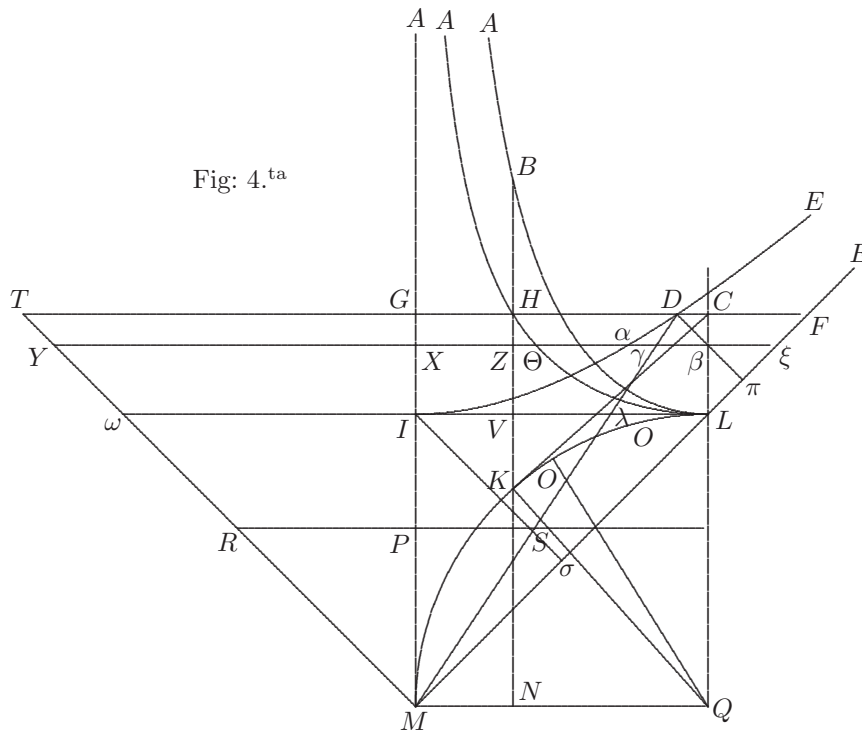
Prop. I. Theorema.

Sit Circuli quadrans TQZ , cujus pars sit arcus QI : super arcu QI imaginetur portio superficiei Cylindrici recti talis naturae, ut (sumpto in arcu QI quolibet puncto O) perpendicularis ad planum TZQ ex puncto O ad summitatem portionis superficiei cylindricae excitata semper fiat aequalis secanti arcus OQ . Deinde sit mixtilineum $AIYTQ$ talis naturae, ut (ducta in eo recta XD radio QT parallela et arcum quadrantis secante in puncto ad libitum O) recta DX , secans arcus OQ , et radius TQ sint continue proportionales. Dico mixtilineum $AYTQ$ esse aequale dictae portioni superficiei cylindricae: ...

5

10

[Fig. 4 zu S. 16–19]



[Fig. 2]

[S. 16]

Prop. II. Theorema.

Sit Circuli quadrans QML , sitque mixtilineum $AHLQM$ talis naturae, ut (ducta
 5 recta ad libitum HN radio LQ parallela et quadrantis arcum secante in K) recta HN
 aequalis sit secanti arcus LK , sitque mixtilineum $ABLQMA$ talis naturae, ut (pro-
 ducta arbitraria NH in B) rectae LQ , NH , NB , sint continue proportionales: deinde sit
 Semihyperbola IDE cujus axis MA , vertex I et asymptoton MLE : ducatur ad libitum
 10 radio LQ parallela recta NB , curvas LKM , LHA , LBA , secans in punctis K , H , B ; et
 per punctum H ducatur radio MQ recta parallela HF Hyperbolae occurrens in puncto
 D . Dico Sectorem Hyperbolicum IMD aequalem esse semissi Figurae $BLQN$, quae Fi-
 gura (ut in antecedente demonstratum est) aequalis est superficiei cylindricae conflatae
 ex omnibus secantibus arcuum infinitorum OL plano LMQ in debitis suis punctis O
 normaliter insistentibus. ...

[S. 17]

15 ... est igitur Figura $BLQN$ dupla sectoris Hyperbolici MID , quod demonstrare
 oportuit.

Consectarium.

Hinc sequitur, quod Figura $BLQN$ semper sit dupla Logarithmi differentiae inter
 tangentem et secantem arcus KL , posito radio LI loco unitatis, quod sic probo. Ex
 20 punctis I , D , in asymptoton ME demittantur perpendiculares $I\sigma$, $D\pi$; ex demonstratis

3 Über $AHLQM$: $\int \overline{\omega d\bar{x}}$.

5 Am Rande: $\frac{1}{r} \int \overline{\omega^2 dx}$.

16 Daneben: $BLQN \sqcap 2MID \sqcap 2, ID\pi\omega$.

20 demonstratis: J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, prop. 26, S. 41.
 21 f. Leibniz setzt $\omega = HN$, $x = MN$ und $r = LQ$.

in Circ. et Hyperb. Quad. manifestum est sectorem MID esse aequalem Figuræ $ID\pi\sigma \dots$

[S. 17f.]

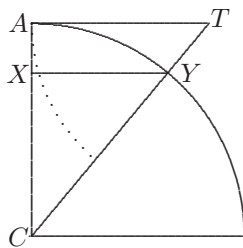
Prop. III. Theorema.

Linea Meridiana Planisphaerii Nautici *est Scala Logarithmorum excessuum, quibus* 5
Secantes Latitudinum superant earundem Tangentes, posito radio loco unitatis.

... Logarithmus excessus quo secans arcus KL superat ejusdem tangentem, est
 ad Logarithmum excessus quo secans arcus OL superat suam tangentem, ut arcus KL
 in latitudine ad arcum OL in latitudine ab Aequatore Planisphaerii Nautici in linea
 recta computatis; et ideo linea Meridiana Planisphaerii Nautici analoga est Logarithmis 10
 excessuum, quibus Secantes latitudinum superant suas Tangentes, quod demonstrare
 oportuit.

...

7–12 Dazu am Rande:



$$\begin{aligned}
 & \frac{t}{AT} : \frac{y}{XY} :: \frac{r}{AC} : \frac{r-x}{CX}. \quad t : y :: r : r-x. \quad t = yr : r-x. \quad \frac{CT}{s} : \frac{CY}{r} :: r : r-x \text{ seu } s = \\
 & rr : r-x. \quad s-t = r \cdot \overline{r-y} : \overline{r-x}. \text{ Sit } r-x = z \text{ fiet } s-t = r \cdot \overline{r-y} : z = r^2 - r\sqrt{rr-zz}, : z. \\
 & \overline{s-t}^2 = r^4 - 2r^3\sqrt{rr-zz} + r^4 - r^2z^2, : zz \text{ seu } = r^4 - 2r^3y + rryy, : \overline{rr-yy} \text{ seu} \\
 & = r^4 - r^3y + r^4 - r^3y + r^2y^2, : r^2 - y^2 = \frac{r^3 - r^2y}{r+y} + \frac{r^4}{r^2 - y^2}.
 \end{aligned}$$

17f. seu =: Auf der rechten Seite ist im Zähler ein r^4 zuviel; Leibniz rechnet konsequent weiter.

[Fig. 6 zu S. 21–23]

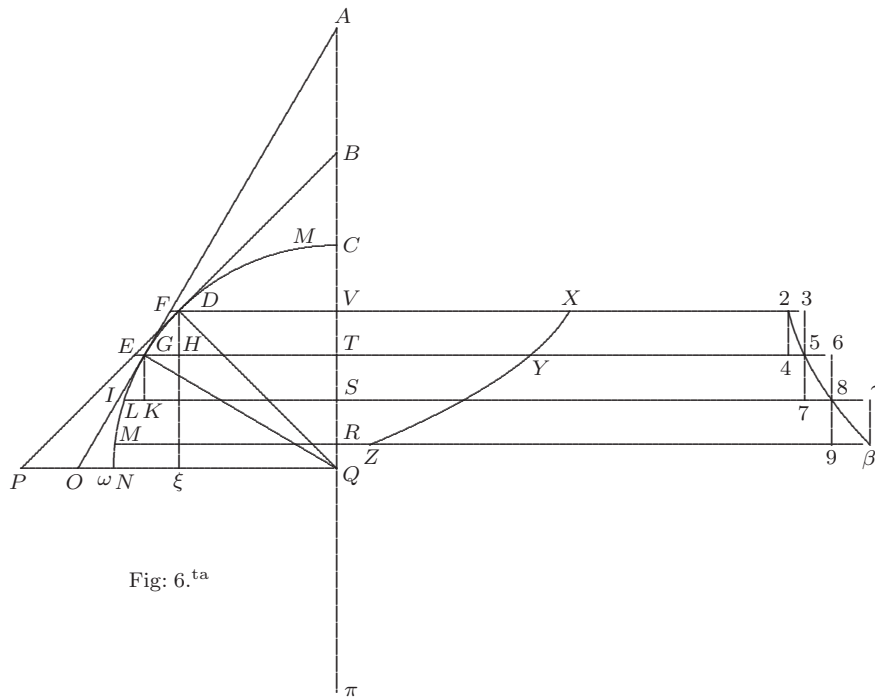
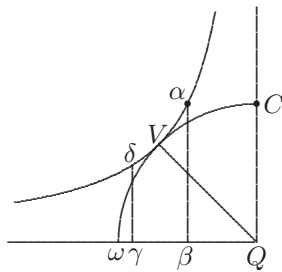


Fig: 6. ta

[Fig. 3]

2 Rechts innerhalb der Figur: $TY \parallel GO$. $XVRZX \parallel D\xi N$. $Y5 \parallel GA$.
 Links unterhalb der Figur: $\alpha\beta \parallel QC \parallel QV$. V vertex Hyperbolae. $\delta\gamma \parallel QA - AG$.
 Spatium $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$ duplum demto rectangulo GT in CQ aequabitur summae tangentium arcus CG axi CQ insistentium. Vide pag. 23.



[S. 21 f.]

Prop. V. Theorema.

Sit circuli quadrans $QC\omega$ bifariam divisus in puncto D . Sit arcus DM minor quam $D\omega$, super quo imaginetur superficies Cylindrici recti talis naturae ut (sumpto in arcu DM quolibet puncto G) perpendicularis ad planum $QC\omega$ ex puncto G ad summitatem superficiei Cylindricae excitata semper fiat aequalis secanti arcus GC . In radium QC demittantur rectae perpendiculares DV , MR , quae producantur in 2 et β ; fiatque mixtilineum $V2\beta R$ talis naturae, ut (ducta recta quacunquē $GT5$ rectae DV parallela) tangentes arcuum GC , $G\omega$, simul, nempe recta AO , aequales sint rectae $T5$. Dico mixtilineum $V2\beta R$ aequale esse superficiei cylindricae super curva DM ...

5

10

4–6 *Am Rande, durch Verweissymbol hinter GC angefügt:* = sum. tang. vel conchoeid. auctam momento arcus ex basi.

Darunter, später geschrieben: $GA \propto t$. $GO \propto \theta$. $QC \propto r$. $QV \propto y$. $VD \propto x$.

$$\frac{t}{r} \propto \frac{y}{x} \propto \frac{r}{\theta} \propto \frac{d\bar{a}}{d\bar{x}} \text{ et } \frac{d\bar{a}}{d\bar{y}} \propto \frac{x}{y} \propto \frac{r}{t} \propto \frac{\theta}{r}.$$

9f. *Über mixtilineum, gestrichen:* Est $\langle - \rangle$ spatium [*bricht ab*]

Am Rande: Quia Tang. compl. = momento arcus ex basi.

Darunter, später geschrieben: $V2\beta R \propto \int \overline{td\bar{x} + \theta d\bar{x}}$. Sup: Cyl. $\propto \int \overline{sd\bar{a}}$ seu $\int \overline{sd\bar{a}} \propto \int \overline{td\bar{x}} + \int \overline{\theta d\bar{x}}$. Patet ex triangulis similibus AQO et GKI . Et quia ut mox ostendetur

$\int \overline{\theta d\bar{x}} \propto r^2 - ry$. fiet $\int \overline{sd\bar{a}} \propto \int \overline{td\bar{x}} + r^2 - ry$. At per prop. 1. hujus: $\int \overline{sd\bar{a}} \propto \int \overline{\frac{s^2}{r} d\bar{y}}$ idque

mihi aliunde uno intuitu patet. Et per prop. 2. hujus $\int \overline{\frac{s^2}{r} d\bar{y}}$ seu $BLQNB$ in fig. 4 \propto spatio Hyperbolico duplicato $ID\pi\sigma I$ in fig. 4.

18 GLI *LiH ändert Hrsq.*

11f. vel conchoeid.: Leibniz verwendet diese irreführende Bezeichnung für die Konchoidenfläche ohne das halbe Kreissegment; vgl. VII, 4 N. 27 prop. 8. S. 468. 14 $\frac{t}{r} \propto$: Richtig wären $\frac{t}{r} = \frac{x}{y} = \frac{r}{\theta} =$

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{da}{dx} = \frac{t}{x} = \frac{r}{y}$ bzw. $\frac{da}{dy} = \frac{r}{x} = \frac{\theta}{y}$. — Vgl. insgesamt zur Marginalie *De Quadratura quadraticis*, dat. 6. Juli 1677. 17 $V2\beta R \propto$: Im Folgenden vertauscht Leibniz die Rollen von x und y . — Vgl. insgesamt *a. a. O.*

[S. 23]

Sit mixtilineum $VXZR$ talis naturae, ut (ducta recta quacunq̄ue GTY rectae DX parallela) recta TY semper aequalis fiat tangenti GO ; manifestum est (ex Geomet. part. univ. Prop. 4.) mixtilineum $VXZR$ aequale esse superficiei trunci cylindrici recti resectae a plano basem seminormaliter secante in recta PQ , atque (ex Geom. part. univ. Prop. 3.) evidens est eandem trunci superficiem aequalem esse rectangulo $N\xi$ in CQ , et ideo mixtilineum $VXZR$ eidem rectangulo est aequale. Ex praedictis evidens est mixtilineum $X2\beta Z$ talis esse naturae ut $Y5$ semper sit aequalis tangenti GA ; et proinde mixtilineum $X2\beta Z$ una cum portione quadrantis $DVRM$ aequale est spatio conchoidali resecto a rectis DV , MR , cujus conchoidis vertex est C , norma PQ , polus π , $CQ = Q\pi$: ex hac Prop. et hujus 2 evidens est sequens consecrarium spatio conchoidali quadrando satis expeditum.

Consecrarium.

Si in praedicta conchoide accipiatur spatium contentum a curva conchoidali et rectis CT , $T6$; erit praedictum spatium aequale duplo spatii hyperbolici (cujus asymptotae QA , QP , semiaxis QC) contenti a curva hyperbolica una asymptota et rectis QC , $QA - GA$, alteri asymptotae parallelis, una cum semisegmento circulari CGT dempto rectangulo QC in GT . Aliarum conchoideon spatia (nempe quando vertex et polus non aequaliter distant a normali) possunt mensurari per Analogiam a Wallisio in Epist. Com. pag. 171 demonstratam.

2f. Daneben: $\int \theta d\bar{x} \cap r^2 - ry$.

15 Über hyperbolici, gestrichen: $\langle - \rangle$

15–17 Daneben: Vide quae figurae ascripsi.

4 Prop. 4: J. GREGORY, *Geometriae pars universalis*, 1668, prop. 4, S. 13. 6 Prop. 3: *a. a. O.*, prop. 3, S. 8. 20 Epist. Com.: J. WALLIS, *Commercium epistolicum*, 1658, S. 170f. (*WO* II S. 849f.).

48. METHODI TANGENTIUM DIRECTAE COMPENDIUM

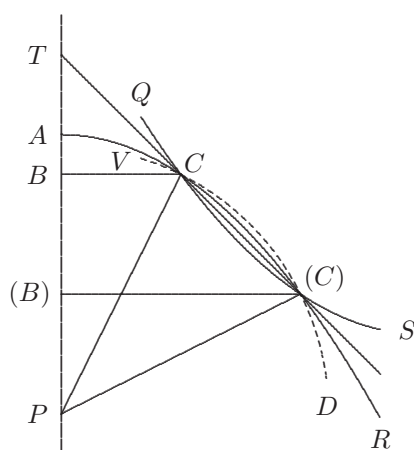
22. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 8 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 1 r°, 7 Z. auf Bl. 1 v°. Das Blatt hing ursprünglich zusammen mit LH 35 XII 2 Bl. 119 (gedr. VII, 3 N. 51). — Gedr. (unter Verschmelzung von Fig. 1 und 2): 1. GERHARDT, *Differentialrechnung*, 1848, S. 46 bis 48; 2. (engl. Übers. von 1.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 111–114. Cc 2, Nr. 1125

22. Nov. 1675.

Methodi tangentium directae compendium calculi,
dum jam inventis aliarum curvarum tangentibus utimur. 10
Quaedam et de inversa methodo.

Sub fin. pag. 21. Nov. notavi quae in mentem venere circa tangentium methodum.
Quae huc redit.



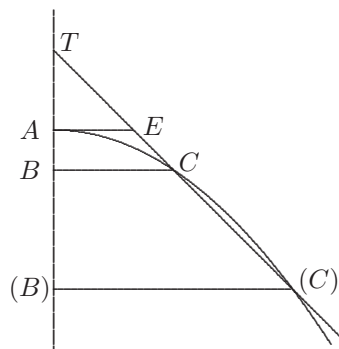
[Fig. 1]

Sint duae lineae $ACCR$, et $QCCS$. se secantes in punctis uno duobus pluri- 15
bus C, C . Sit axis $AB(B)$, ordinatae $AB \sqcap x$ abscissae $BC \sqcap y$. Habebimus duas aequa-

8 22. Nov. 1675. *erg. L* 9–11 Methodi ... methodo *erg. L*

12 notavi: nicht gefunden.

tiones ad duas lineas, duarum unamquamque incognitarum capitalium. Quod si jam sint earum aequationum radices aequales, seu aequationes duos habeant valores aequales[,] lineae se tangent. Cartesius jam pro linea $QCCS$, elegit arcum circuli $VCCD$ cujus centrum P . ut PC sit minima quae a puncto P duci possit. Idem proveniet et saepe simplicius, si sumas non arcum circuli sed rectam TCC . tangentem, id est maximam quae ex puncto dato T duci potest ad Curvam.



[Fig. 2]

Sit $TA \sqcap b$. $AE \sqcap e$. quasi datae. AB, BC , quaesitae, aequationes duae, una ad curvam ACC , $ax^2 + cy^2 + \text{etc.} \sqcap 0$. altera ad lineam rectam TCC , quae erit quod $\frac{TA}{AE} \sqcap$
 10 $\frac{TB}{BC}$. sive $\frac{b}{e} \sqcap \frac{b \mp x}{y}$ sive $\mp x \sqcap \frac{b}{e} y - b$, sive $y \sqcap \mp \frac{e}{b} x + e$. Ita valor alterutrius incognitarum semper haberi potest pure, adeoque statim sine exaltatione aequationis ad curvam propositam ACC , tolli potest, et statim habebitur aequatio ad unam incognitam, quam superest tantum, ut ad duas radices aequales determinemus. Et hoc sine dubio Slusianae methodi principium est.

15 Si $VCCD$ adhibeatur arcus circuli centro P , cum Cartesio, tunc erit aequatio altera ad circulum haec: posito PC radio $\sqcap s$. et $PB \sqcap v - x$ fiet: $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx$.
 x^2

3 QCCR L ändert Hrsg.

3 Cartesius: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–48, insbesondere S. 43–45.
 4f. minima . . . maximam: vgl. die Erl. zu S. 449 Z. 20–23. 7 Fig. 2: Eine verworfene Vorstufe wird nicht wiedergegeben. 14 methodi: vgl. R.-Fr. de Sluses Beschreibung in den *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673 S. 5143–47 (Nachtrag in VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059). 15 cum Cartesio: vgl. Erl. zu Z. 3.

Ex hoc patet nobis electionem esse aut circuli aut lineae rectae; et cum in aequatione curvae datae extat sola quadratica potestas ipsius y , ut in conicis semper fieri potest, tunc utilius adhiberi aequationem ad circulum, ita enim ope duorum ipsius y^2 valorum statim tolletur incognita x , at pro omnibus aequationibus ad curvas rationali aequatione expressas, utilius methodus ad rectam.

Hinc jam pergo et dico posse non tantum rectam et circulum, sed et quamlibet Curvam pro arbitrio assumi, modo notus sit modus ducendi tangentes ad assumtam, ita enim ejus ope inveniri possunt tangentes ad datam. Hoc jam usus habebit praeclaros tum ad calculos evitandos aut contrahendos, tum ad demonstrationes et constructiones Geometricas elegantes; ita enim itur a curvis facillioribus ad difficiliore, et proposita aequatione ad unam curvam, semper eligi potest aequatio ad aliam curvam notarum tangentium, cujus ope facillime tollatur una incognitarum, ut si sit aequatio data $hy^2 + y^3 \sqcap cx^3 + dx^2 + ex + f$. ad curvam cujus quaeruntur tangentes sumatur curva cujus aequatio: $hy^2 + y^3 \sqcap gx + q$. cujus jam datur tangens, tollendo y fiet aequatio talis: $gx + q \sqcap cx^3 + dx^2 + ex + f$. Quae determinabitur ad duas radices aequales vel Cartesiana methodo per comparationes, vel Huddeniana per arithmetica progressionem. Atque ita tollendo x , invenietur valor ipsius g vel q . et una ex his duabus literis g . vel q . pro arbitrio sumi potest: Habebitur ergo modus describendi curvam illam alteram quae datam tangat; ea jam descripta, ad punctum quod ei cum curva proposita commune est, ducatur tangens, quam notam supponimus, ea tangens etiam ipsam curvam propositam tanget. Et credo generaliter hoc modo calculare licebit sumendo semper curvam aliam ut hoc loco fecimus quae unam incognitam plane tollat, hinc credo calculum elegantem derivabimus pro nova tangentium regula quae adhuc sit Slusiana melior, quae scilicet plane statim alterutram incognitam tollat, quod non facit Slusiana.

Haec jam generalissima a(m)plissimaque facultas sumendi curvam aliquam pro arbitrio, facit, ut prope credam hinc aliquid ad methodum tangentium inversam et quadraturas duci posse. Nimirum data sit quaedam proprietas tangentium cur-

26 f. *Am Rande*: NB.

4 aequationibus (1) rationalibus (2) ad L 8 possunt (1) aequationes (2) tangentes L
 17 et (1) uno sumto alterum (2) | unum ändert Hrsg. | ex L 21 Et (1) utile (2) credo (a) hoc (b) generaliter L 22 quae (1) omnes (2) tot (3) unam L

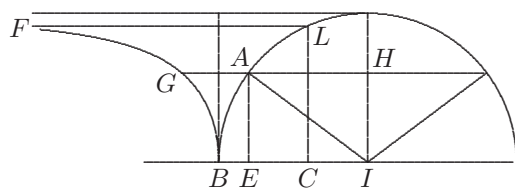
15 Cartesiana: vgl. Erl. zu S. 342 Z. 3. 16 Huddeniana: vgl. J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, DGS I S. 433–439 u. S. 507–516.

vae cujus ordinarum ad abscissas relatio quaeritur. Inde deduci poterit aequatio, in qua erunt incognitae capitales x , y , et incidentes semper duae, v. g. s . et v . vel b et e . et similes. Opus jam aequatione proprietatem tangentium continente, per quam s . et v . relationem ad tangentes habere exprimatur. Sumatur in eam rem quaelibet nova curva pro arbitrio, et s . atque v , etiam ad ejus tangentes quandam nobis notam habebunt relationem. Ope jam hujus novae aequationis pro arbitrio assumptae, poterimus datam ad tangentes pro curva quaesita pro lubitu nostro mutare, nempe alterutram incognitarum pro lubitu tollendo; et rem in eum statum deducendo, ut facilius appareat calculus inversus. Res eo redit, ergo, ut datis tangentium figurae quaesitae proprietatibus examinemus quas eadem tangentes habeant relationes ad alterius figurae quae pro data sumitur ordinatas aut tangentes. Hoc etiam serviet ad figurarum quadraturas ex se invicem ducendas, sed exemplo opus, ut talia clarius intelligantur. Est enim res subtilissimae intricacionis.

5 tangentes (1) eandem habe (2) qvandum L

[Teil 2]

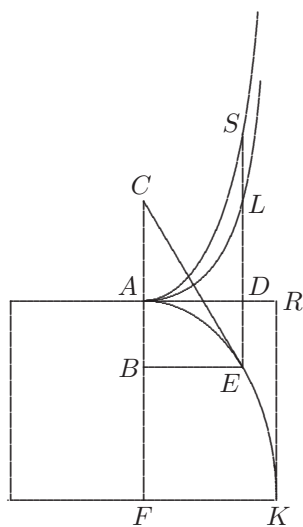
[Tschirnhaus]

 $BLC \approx BLF$

[Fig. 2]

5

10



$LS \approx AB$
 $LE \approx CB$
 $ASD \approx \square ADEB$

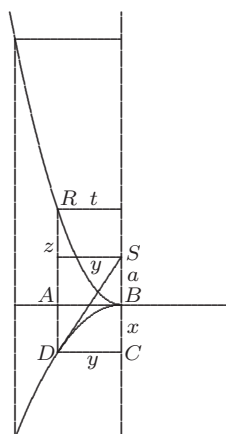
Infinitae $CB \approx^{\text{tur}} AFK$.

Infinitae $AB \approx^{\text{tur}} ARK$.

Ergo summa infinitarum $CB + AB \approx^{\text{tur}} ARKF$.

[Fig. 3]

7 $ASD \approx \square ADEB$: Richtigerweise müsste auf der linken Seite ASE stehen. 12 Fig. 3: vgl. Tschirnhaus' Brief an Pieter van Gent vom 19. Dezember 1675 (AMSTERDAM *Universiteitsbibliotheek* MS IIA38, S. 14) und J. GREGORY, *Geometriae pars universalis*, 1668, prop. 11, S. 27–29.



[Fig. 4]

$$\begin{aligned}
 rz &\neq tt \\
 CS &3^{pla} BC \\
 rx &\neq yy \\
 \frac{r}{3} \\
 \frac{tt}{r} - a \\
 z &\neq \frac{r}{2}
 \end{aligned}$$

5

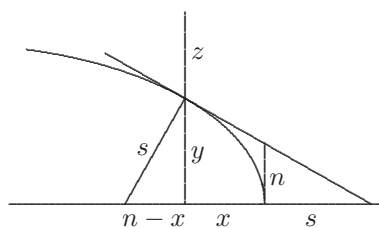
[Teil 3]

[Leibniz]

$$a + cx + dy + exy + fx^2 + gy^2$$

[Tschirnhaus]

10



[Fig. 5]

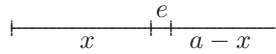
$$\begin{aligned}
 xx + gx + f &\neq 0 \quad yy + gy + h \\
 x^3 + fxx + gx + h &\neq y^3 \\
 s &\neq \frac{x^3 + 2fxx + 3gx}{h + 2g + 3fx}
 \end{aligned}$$

2 $3^{pla} BC$: Richtig wäre $2^{pla} BC$; entsprechend sollte in Z. 4 $\frac{r}{2}$ stehen. 13 $s \neq \frac{x^3 + 2fxx + 3gx}{h + 2g + 3fx}$:

Nach Tschirnhaus' Tangentenregel ergibt sich für den Subtangenteabschnitt $s = \frac{3h + 2gx + fx^2}{g + 2fx + 3x^2}$. —

Zu dieser Regel vgl. Tschirnhaus' Brief an Oldenburg von Anfang Juli 1675 (*OC XI* S. 397–401) und seine Abhandlung in den *Acta eruditorum*, Dezember 1682, S. 391–393. 14 *Fig. 5*: In der Zeichnung werden die Bezeichnungen n und s jeweils für zwei Größen verwendet. Tschirnhaus benutzt im zugehörigen Text nur den Subtangenteabschnitt s .

$ax - xx \approx z$



$2e \approx a \quad x - e$

[Fig. 6]

$e \approx \frac{a}{2} \quad x - e$

$x \approx \frac{a}{2} \quad xx - 2ex + ee$

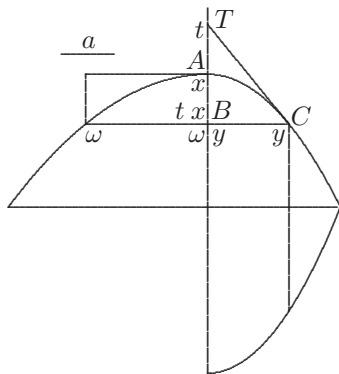
5 $\frac{a - x}{x} \approx \frac{x + e}{a - x - e}$

~~$ax - xx \approx ax + ae - xx - 2ex - ee$~~

$a \approx 2x$

$ax - xx \approx zz$

10 [Leibniz]



[Fig. 7]

$AB \parallel x. \quad BC \parallel y. \quad TB \parallel t.$

$\frac{t}{y} \parallel \frac{a}{\omega}$

$\omega \parallel \frac{ay}{t}$

a. $bx. \quad cy + dx^2 + ey^2 + fxy \parallel 0$

$bx + 2dx^2 + fxy \parallel -cy - 2ey^2 - fxy$
 $\frac{t}{t} \quad \frac{xt}{t} \quad \frac{ty}{t}$

$t \parallel \frac{-cy - 2ey^2 - fxy}{b + 2dx + fy}$

$\omega \parallel \frac{+ab + 2adx + afx}{-cy - 2ey^2 - fxy}$

15

14-17 Vgl. N. 46 S. 330 Z. 13.

18 $\omega \parallel$: Auf der rechten Seite müsste als korrektes Ergebnis

$\frac{ab + 2adx + afx}{-c - 2ey - fx}$ stehen.

50. POLYGONORUM USUS AD TETRAGONISTICA ET METHODUM TANGENTIUM INVERSAM

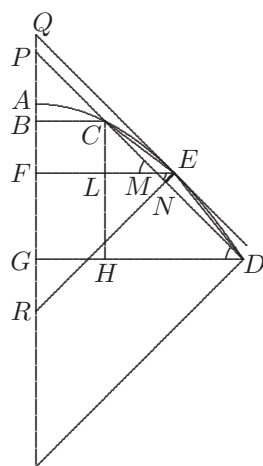
23. November 1675

Überlieferung: L Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 153–154. 1 Bog. 2°. Obere Hälfte von Bl. 153 ausgeschnitten. 2 S. auf Bl. 153 und jeweils max. 1/4 S. auf Bl. 154 r^o und v^o. Überschrift auf Bl. 154 r^o in Textlücke von N. 49. Hauptteil des Textes auf Bl. 153 r^o und Bl. 153 v^o. Zusatz am inneren Rand von Bl. 153 r^o unterhalb von Fig. 2 sowie in den Textlücken von N. 49 am unteren Rand von Bl. 154 v^o und Bl. 154 r^o. Geringe Textverluste durch Papierschaden an den Rändern. — Auf Bl. 154 befindet sich die Gesprächsaufzeichnung N. 49.

Cc 2, Nr. 1126, 1128 B, 00

23. Novemb. 1675

Polygonorum usus ad Tetragonistica
et Tang. invers.



[Fig. 1]

Diversa a processu per indivisibilia nonnihil
methodus continuarum inscriptionum et circum-
scriptionum. Sit segmentum parabolae $CDEC$. ei
inscriptum triangulum CED . Sit $CH \sqcap b$. $BC \sqcap$
 y . $AB \sqcap x$. $AB \sqcap \frac{y^2}{2a}$. $AG \sqcap \frac{y^2}{2a} + b$. $GH \sqcap$
 y . et $HD \sqcap \sqrt{y^2 + 2ba} - y$. et $CD^2 \sqcap y^2 +$
 $2ba + y^2 - 2y\sqrt{y^2 + 2ba} + b^2$. Sit $BF \sqcap CL \sqcap x$.
erit $AF \sqcap \frac{y^2}{2a} + x$. et $FE \sqcap \sqrt{y^2 + 2ax}$.
 $\frac{LM}{CL \sqcap x} \sqcap \frac{HD \sqcap \sqrt{y^2 + 2ba} - y}{b}$. Ergo $LM \sqcap$
 $\frac{x}{b}\sqrt{y^2 + 2ba} - \frac{xy}{b}$. Unde habetur ME , nam $ME \sqcap$

13f. (1) 23 Novemb. 1675. (a) Evo (b) Evolutiones. polygonorum inscriptiones. Methodus tangentium inversa (2) Polygonorum ... invers. | per gestr. |
erg. L 16 methodus (1) serierum (2) continuarum L

24 Fig. 1: Zwei gestrichene Vorstufen zur Zeichnung werden nicht wiedergegeben.

$$FE - FL - LM \cap \sqrt{y^2 + 2ax} - y + \frac{x}{b} \sqrt{y^2 + 2ba} + \frac{x}{b} y \cdot \frac{NE}{ME} \cap \frac{x}{\sqrt{CL^2 + LM^2}} \text{ et } NE \cap \sqrt{y^2 + 2ax} - y + \frac{x}{b} \sqrt{y^2 + 2ba} + \frac{x}{b} y \cdot \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{x}} + \frac{x^{\cancel{x}}}{b^2} y^2 + 2ba + \frac{x^{\cancel{x}}}{b^2} y^2 - \frac{2x^{\cancel{x}}}{b^2} (y) y^2 + 2ba}.$$

E(ri)t $\frac{CD \text{ in } NE}{2} \cap \nabla^{lo}$. Quod jam faciendum est omnium possibilium maximum, qui

calculus utique satis erit prolixus; compendiosius Constructione Geometrica id invenie-
 5 mus ope et exemplo P. Gregorii a S. Vincentio. Sufficit quaeri NE , omnium possibilium
 maximam. Jam video tantum opus esse ut ducatur tangens parallela ipsi CD , tanget illa
 parabolam in puncto E et erit EN omnium possibilium maxima. Et jam generaliter video
 inscriptionem segmenti maximi in eo consistere, ut ducatur tangens curvam
 10 rectae datae parallela. Quod sic fiet generaliter[:] Tangens in E producatur

dum axi occurrat in Q . Jam erit $QA \cap QF - \frac{v^2}{2a}$ et $\frac{QF}{v} \cap \frac{CH}{HD}$. At $QF \cap 2AF \cap \frac{v^2}{a}$. ob

parabolam (si alia curva alia hic aequatio). Ergo fiet $\frac{v^2}{av} \cap \frac{CH}{HD}$. et $\frac{v}{a} \cap \frac{CH}{HD}$. Producta

NE erit semper perpendicularis ad curvam, occurrat axi in R . erit $FR \cap a$. et erunt
 $\nabla^{la} EFR, CHD$ similia.

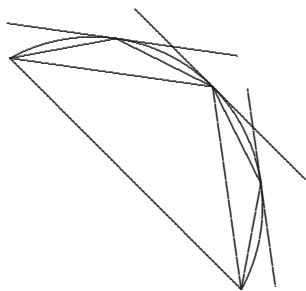
1 Nebenbetrachtung: $\frac{NE}{ME} \cap \frac{b}{CD}$

10 Nebenbetrachtung: $FE \cap v \cdot \frac{v^2}{2a} \cap AF$.

11 *Am Rande*: Facile continuari potest ut tum prima media FE invenitur per
 rationem CH ad HD , ita 2^{da} per rationem CL ad LE .

6 maximam (1) Habita semel triangulo maximo inscriptabili in aliquot segm (2). jam L
 9 generaliter (1) CD producatur dum axi occurrat in P (2) tangens L

1 $+\frac{x}{b}\sqrt{y^2+2ba}$: Vor der Wurzel müsste ein Minuszeichen statt des Pluszeichens stehen. Leibniz
 übernimmt den Fehler in die Gleichung für NE , in der zudem im Nenner ein globales Wurzelzeichen
 fehlt. 5 Gregorii: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, lib. V, prop. CCXXVII, S. 460.
 7–9 Et ... parallela: vgl. VII, 1 N. 85₂ S. 573.



[Fig. 2]

Caeterum hac methodo generalis institui poterit calculus, qua continue quaerantur maxima Triangula inscripta; eadem methodo et semper habebuntur minima circumscripta. Quod si jam talia generaliter calculemus habebimus methodos novas pro solvendis illis difficillimis problematibus irregularibus, ubi ejusmodi serierum infinitarum sed per quantitates non infinita intervalla habentes, inveniuntur summae. Summa autem est pro area investigatione; si vero non ∇^{la} sed subtensae semper quaerantur, vel adscriptae; tunc non quidem s u m m a opus erit, sed t e r m i n o

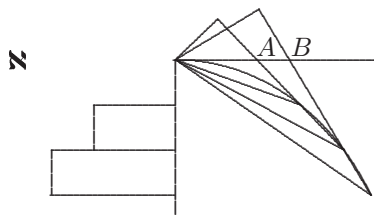
seriei. Mirarum hoc modo progressionum summae ac termini inveniuntur. Nota semper terminus ultimus, curva, scilicet aequabitur summae differentiarum seriei. Si qua detur progressio (artis) foret maximae eam includere curvae in quam desinat. Quod utile ad curvas vel spatia invenienda ope cognitarum serierum. Hoc etiam pertinet ad methodum tangentium inversam.

Si talium Triangulorum area ducatur in distantiam centri gravitatis eorum a quodam axe, summa (h)orum solidorum erit momentum figurae ex axe, quae momenta aliunde saepe data[,] area non data. Itaque innumera nova theoremata hinc emergent. Et generaliter calculando atque explicando pro arbitrio figuram datam habebuntur exempla satis simplicia. Quaeri et possunt cen(tr)a gravitatis (in)scriptarum vel ascriptarum, quae terminari necesse est in curvae centrum gravitatis. His jam theorem(ata) alia jungendo Tetragnostica (ex) Geometria et Trigonometria indivisibilium variarum habebuntur progressionum ejusmodi summae per ad se invicem relationes. Et quoniam convergentium serierum inveniri possunt etiam termini methodo Gregoriana inveniuntur inveniendi quantitatem eodem modo compositam ex primis et secundis terminis, tunc scilicet cum ipsi termini secundi componuntur ex primis, ut tertii ex ipsis. Quod perinde est ac in progressionem quadam ordinatarum alicujus curvae invenire aliquod latus rectum. Sumantur in eam rem exempla ubi talia praestamus. Nimirum in illis curvarum expressionibus in quibus una ordinata invenitur per praecedentem; et ita unius inventio

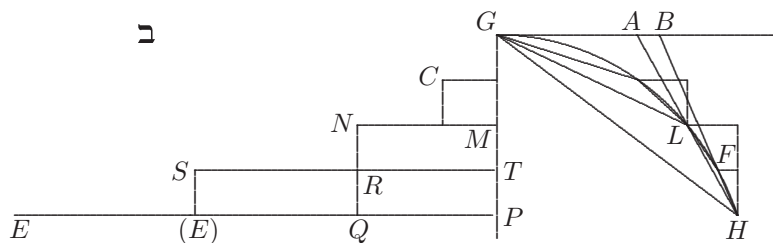
11 seriei (1) convergentis (2); Mirarum L 16 eorum | a quodam *streicht Hrsg.* | a L
23 habebunt L *ändert Hrsg.*

7 infinita: hier wie auch in S. 353 Z. 25 im Sinne von infinite parva verwendet. 10 Fig. 2: Eine nicht gestrichene Vorstufe zur Figur wird nicht wiedergegeben. 24 methodo: J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, def. 9, S. 10.

opus habet inventione omnium praecedentium, quaeritur inventio aequationis curvae seu relatio ordinarum ad suas abscissas, qua inventa et quaedam parameter invenietur, aut etiam plures. Est autem parameter eodem modo composita ex primis quo ex secundis ordinatis cum suis abscissis. Jam inventio ejusmodi aequationis redit ad methodum tangentium inversam. Nota duobus semper opus ordinatis et abscissis, scilicet, ut ex iis eodem componatur modo parameter constans. Ita et in Gregorii calculo duobus semper opus variantibus. Idem est ac si Gregorius dixisset aequationem quaerendam explicantem progressionis naturam. Hinc patet quando aliis artibus inveniri potest quantitas eodem modo composita: tunc posse methodum tangentium inversam seu aequationem inveniri, ut cum quadratura habetur, seu seriei summa vel terminus.



[Fig. 3a]



[Fig. 3b]

Nota si minima segmenti Triangula inscribere est uti methodo mea qua Triangula infinite parva ex eodem duco, ut in fig. **⚭** quoniam latus unum tangens alterum chorda, tunc enim exigua illa quae restant omnia negligi possunt. Videndum an figura quaedam describi possit, eo procedens modo quo ejusmodi Triangula inscripta. Vide in fig. **⚭**. Sit

3f. secundis (1) terminis, sumendo (2) ordinatis L 16 fig. (1) 2. (2) | G. ändert Hrsq. | sit L

punctum constans ut G . Hinc chordae productae HL , ut HLA , occurrant in A . Transferuntur GA in MN ita ut M punctum Axis constantis respondeat ipsi L , et MN sit aequalis GA , et fiat rectangulum NMP , posito $NQ \perp MP$ esse \perp distantiae inter ordinatam per L et per H . in axe. Similiter si rursus curvae LH inscribatur $\nabla^{\text{lum}} LFH$. et sumatur in NQ , ipsa QR vel PT aequalis altitudini ipsius F super H in axe sumtae, et juncta HFB dum ipsi GA occurrat in B . Transferatur GB in RS et erit $\square SRQ \perp \nabla^{\text{lo}} LFH$ et ita continuandum in infinitum donec veniamus ad tangentem, ut si HFB fuisset tangens. Unde jam patet figuram quam hac applicatione quaerimus non posse describi sed ordinatam ejus quamlibet esse infinitam. Cum enim semper desinatur in tangentem debet PE infinita v. g. esse summa omnium tangentium ducta in minimum intervallum, v. g. si FH fuisset tangens, fuisset $P(E)$ vel TS linea infinita ducenda in TP . Idem patet ubique contingere, et descriptionem curvae imaginariae hanc esse ut summa omnium tangentium in unam rectam extensa (: aliud est spatium complens :) axi applicetur. Hanc jam figuram infinito a nobis intervallo omnia sua puncta habentem repraesentare tentandum est per solidum. Nimirum si segmentis non quaeretur inscriptio ∇^{lorum} maximorum, sed talium ut intervalla ordinarum in axe sint aequalia utique locum habebunt eadem omnia, et summa tangentium GA, GB , et intermediarum repraesentari poterit per totum spatium figurae segmentorum quod perpendiculariter superponetur ipsi TP , proxime praecedens ejusdem figurae segmentorum portio proxime praecedenti axis portioni infinite parvae imponetur: Video tamen difficultatem, non potest summa ∇^{lorum} aequari solido. Et video nec summam tangentium facere ipsam PE , sed summam occurrentium ad chordam productam. Etsi ultima earum sit tangens, impossibile spatium omnium infinitum aequari finito. Sed jam video quam mira ratione id fieri possit figuram scilicet cujus ordinatae omnes infinitae aequari finitae quantitati quia scilicet ipsae ordinatae etiam sibi immediatae, infinita dissident differentia, prorsus ac si

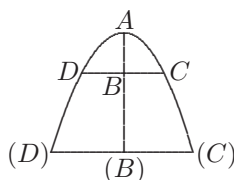
fingeremus axi ABC . in infinitas partes diviso, infinitesimae cuilibet applicari numeros intervalla habentes primo pedem 2^{do} , duos pedes, tertio tres etc. Talis area erit minor qualibet assignabili ut ergo haec finita pro nihilo haberi potest, alia talis infinita pro finito. Quare nec figura finita ei homogenea describi potest, nisi talis qualis \aleph . quae in effectum infinite parva sive linea est, nam CL cadet etiam in A , et erit infinita opus linea pro CL , ut C absit ab A

6 erit: Die folgende Behauptung ist nicht richtig.

intervallo assignabili. Idem est ergo et si RQ in ipsa TP , sumta rectangula SQR ipsi RTP imponatur. Solidum enim tale cuidam plano aequale erit. Ut ergo solidum tale completeretur opus foret infinitis modis segmentum secari, et unos aliis perpetuo interseri. Tunc tota figura infinita, vel solidum ejus loco aequaretur segmento dato toties repetito seu si sit aliqua regula, cylindro ejus. Sed videndum quod fiat alio sumto segmento proxime minore, idque eodem modo, ut hoc bisecando, et ita solidum interpoland(o). Quo posito etsi spatium compleatur difficile tamen id ad regulam accomodare. Nisi scilicet tandem deprehensuri simus incidere nos in summam (so)lidorum seu complementum (ung)ulae figurae segmentorum. Quod unum describi meretur ut appareat ut his tam irregularibus mo(di)s veras fi(gura)s producere liceat. Investigandum an modus haberi possit in his seriebus non tantum ultimum sed et (que)m libet alium seriei ter(mi)num inveniendi, item summam non solu(m) (o)mnium sed praecedentium una regula. Venient ista ad progressionem transcendentem, sumendo numerum terminorum pro y . etc. ut in logarithmis.

15

[Zusatz]



20

[Fig. 5]

Utile duas adhibere series convergentes. Ita enim erit perinde ac si sint duae figurae quarum ordinatae $(D)(B)$ et $(B)(C)$ aliquando coincidunt. Eo hic tantum discrimine; quod differentiae ordinarum in figuris infinitae parvae quod non est in nostro casu. Id autem agitur ut inveniatur aequatio explicans relationem duarum serierum convergentium terminorum respondentium inter se invicem. Ejus enim aequationis ope invenietur valor ultimi termini ubi coincidunt ut si sit $x^2 + by^2 + cxy + \text{etc.}$ ponendo $x \sqcap y$. invenietur utrumque. Et hoc redivit inventa Gregorii de compositis eodem modo cumque plura possint esse eodem modo compositae, intelligibilius dixisset quaerendam aequationem relationem explicantem: Si componitur c ex $a. b.$ ut e ex $c. d.$ ergo quod componitur ex $a. b.$ ut ex $c. d.$ componetur etiam ex $c. d.$ ut $e. f.$

30

$$\begin{array}{ll} a & b \\ c & d \\ e & f \end{array}$$
1 intervallo (1) sensibili (2) assignabili L 24 inventa Gregorii: $a. a. O.$

Si $c \sqcap \sqrt{ab}$. seu c . media geometrica inter a . et b . porro d media harmonica inter c . et b . nempe b . d . \sqrt{ab} . progressionis harm: $\sqcap \frac{1}{v} \frac{1}{v+e} \frac{1}{v+2e}$. Erit $v \sqcap \frac{1}{b}$. et $\frac{1}{b} \sqrt{ab} + 2e \sqrt{ab} \sqcap$
 $b \quad d \quad \sqrt{ab}$

1. et $e \sqcap \frac{1 - \frac{1}{b} \sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}}$ et erit $d \sqcap \frac{1}{v+e} \sqcap \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1 - \frac{1}{b} \sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}}}$.

$$\begin{array}{cc} x & y \\ (x) & (y) \\ ((x)) & ((y)) \end{array}$$

5

$(x) \sqcap \sqrt{xy}$ seu (x) media geometrica inter x et y vel $((x)) \sqcap \sqrt{(x)(y)}$ etc. vel generaliter $(\omega(x)\omega) \sqcap \sqrt{(\omega-1)(xy)(\omega-1)}$ quod coincidit cum $(x) \sqcap \sqrt{xy}$. Porro $\frac{(y) - y}{(x) - (y)}$
 $\sqcap \frac{y}{(x)}$ seu (y) media harmonica inter y . et (x) . Substituatur in hac posteriore aequa-

tionem valor ipsius (x) ex praecedente et nulla supererit (x) fietque $\frac{(y) - y}{\sqrt{xy} - (y)} \sqcap \frac{y}{\sqrt{xy}}$. 10

sive $(y)\sqrt{xy} - y\sqrt{xy} \sqcap y\sqrt{xy} - y(y)$ sive $(y) \sqcap \frac{2y\sqrt{xy}}{y + \sqrt{xy}}$ et $(x) \sqcap \sqrt{xy}$. Harum duarum aequationum ope methodo alibi a me tradita veniri poterit ad *problemamethodi Tangentium inversae*, ejusque non ut alias in progressionem lineari, per terminos differentiarum infinite parvarum sed in numerica per differentias rationem habentes ad tota assignabilem. Nunc et ad polygona finitorum laterum tangentes duci possunt, 15
 quae scilicet duos proximos angulos jungunt.

1 *Daneben*: pro sectore Circuli Ellipseos Hyperbolae

12 alibi: vermutlich VII, 4 N. 40₂. 15 Nunc: vgl. VII, 3 N. 50.

51. PRO METHODO TANGENTIUM INVERSA ET ALIIS TETRAGONISTICIS SPECIMINA ET INVENTA

Die beiden folgenden Teilstücke befinden sich auf dem selben Träger. Die Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus N. 51₁ wurde zuerst auf die erste Seite des Bogens geschrieben. Leibniz hat Datum und Überschrift seiner anschließend notierten Aufzeichnung N. 51₂ über die Gesprächsnotiz gesetzt und die beiden Stücke damit zusammengefasst. Vermutlich entstand die gemeinsame Studie mit Tschirnhaus am selben Tag wie Leibniz' Aufzeichnung oder kurz zuvor.

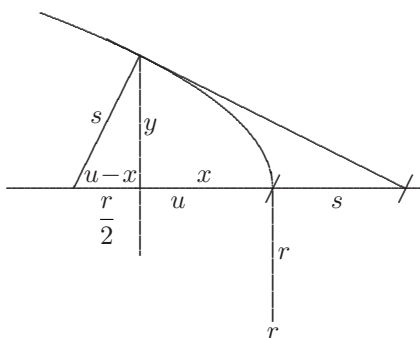
51₁. NOTAE

[Am oder kurz vor dem 27. November 1675]

Überlieferung: LuT Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 V 8 Bl. 2–3. 1 Bog. 2^o. 1 S. auf Bl. 2 r^o. Auf Bl. 2 v^o–3 v^o N. 51₂. Cc 2, Nr. 1132

[Tschirnhaus]

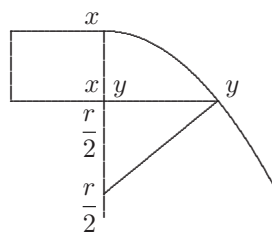
$$rx \neq yy$$



[Fig. 1]

[Leibniz]

$$\frac{rx}{2} \sqcap \frac{y^2}{2}$$



[Fig. 2]

15 Links innerhalb von Fig. 1: $\frac{yy}{4} \neq$ [bricht ab]

[Tschirnhaus]

$$\begin{array}{r}
 uu - 2ux + xx + \cancel{yy} \approx ss \\
 uu - 2ux + xx + rx \approx ss \\
 xx - 2ux + uu \approx 0 \\
 + rx - ss \\
 \hline
 2 \quad 1 \quad 0 \\
 +1 \quad 0 \quad -1 \\
 \hline
 2x\cancel{x} - 2u\cancel{x} \approx 0 \\
 + r\cancel{x} \\
 2x - 2u \approx 0 \\
 + r \\
 2x + r \approx 2u \\
 x + \frac{r}{2} \approx u
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x \approx u \\
 x - u \approx [0] \\
 xx - ux \approx [0] \\
 2xx - ux + uu \approx ss \\
 \quad \quad \quad \cancel{ss} \\
 2xx - \cancel{ux} + \cancel{uu} \approx \cancel{uu} - 2ux + \cancel{xx} + yy \\
 xx \approx -ux + yy \\
 yy \approx -ux + xx
 \end{array}$$

5

$$\begin{array}{r}
 u \approx x \\
 x - u \approx [0] \\
 xx - ux \approx [0] \\
 \frac{xx}{2} - \cancel{ux} + \cancel{uu} \approx \cancel{uu} - 2ux + \frac{2xx}{2} + yy \\
 \quad \quad \quad \cancel{ss} \\
 0 \approx -ux + \frac{xx}{2} + yy \\
 2yy \approx xx - ux \\
 2yy \approx xx - ux \\
 x - u \\
 x
 \end{array}$$

10

15

20

14 Darunter: $z^3 - 3 \frac{rr}{2} - \frac{r}{2}$ [bricht ab]

5 $2xx - ux$: Bei der hier vorgenommenen Umkehrung der Descartesschen Normalenmethode unter Verwendung von Huddes Doppelwurzelverfahren hätte Tschirnhaus den quadratischen Term mit $\frac{1}{2}$ (oder 1) und den linearen Term mit 1 (oder 2) multiplizieren müssen. Das richtige Ergebnis für die durch $u = x$ definierte Kurve gewinnt man aus der Gleichung $x^2 - 2ux + u^2 - s^2 = 0$. — Konsequent weitergerechnet hätte Tschirnhaus in Z. 9 $y^2 = ux + x^2$ erhalten. 14f. $\frac{xx}{2}$: Die Gleichung müsste $\frac{x^2}{2} - ux + \frac{u^2}{2} - \frac{s^2}{2} = 0$ bzw. $\frac{x^2}{2} - ux + \frac{u^2}{2} = \frac{u^2}{2} - ux + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ lauten (vgl. Anm. zu Z. 5). — Bei konsequenter Fortsetzung der Rechnung hätte sich in Z. 17 $2y^2 = 2ux - x^2$ ergeben.

$$rx \neq yy$$

$$u \neq \frac{r}{2} + x + x^2$$

$$x - u \neq 0$$

$$+ \frac{r}{2}$$

5

$$xx - ux$$

$$+ \frac{r}{2}$$

$$2 \quad 1 \quad 0$$

$$2xx - ux$$

$$+ \frac{r}{2}$$

$$\cancel{xx} - \cancel{2ux} + \cancel{uu} \neq \cancel{uu} - \cancel{2ux} + \cancel{xx} + yy$$

$$+ \cancel{rx} \neq \cancel{ss}$$

10

$$rx \neq yy$$

$$\frac{r}{2} + x \quad \frac{r}{2}$$

$$\frac{rr}{4} + \frac{rx}{2} \neq \frac{yy}{4}$$

$$uu - 2ux + xx + yy \neq ss$$

$$rr + 2rx \neq yy \quad \cancel{rx}$$

15

$$u \neq r + x$$

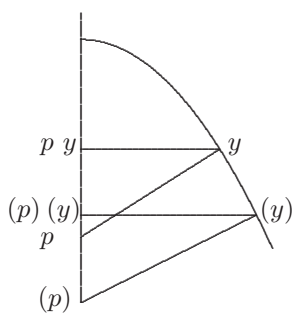
$$rx \quad \frac{r}{2} \text{ in } x \quad \frac{rx}{2} \neq \frac{yy}{2}$$

$$rx \neq yy \quad 2rx \neq yy$$

$$2 + x^2 \text{ erg. } T$$

5 2 1 0: Es müsste mit $\frac{1}{2}$ 1 0 (oder 1 2 0) multipliziert werden. Tschirnhaus setzt in Z. 8 noch einmal korrekt an.

[Leibniz]



[Fig. 3]

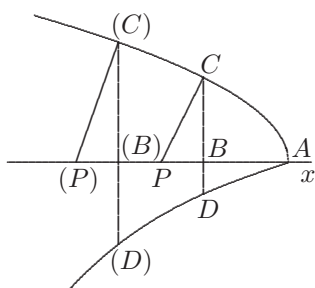
$$\underbrace{v - x}_p \sqcap \frac{a + cx + dx^2}{x} + ex^3 + fx^4$$

$$\frac{cx^2}{2} \quad \frac{dx^3}{3}$$

$$\sqrt{x + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3}} \text{ etc.} \quad \frac{y}{\sqrt{2}}$$

5

[Leibniz und Tschirnhaus]



[Fig. 4, Leibniz]

5 Unter der Wurzel:

[Tschirnhaus, verwischt]

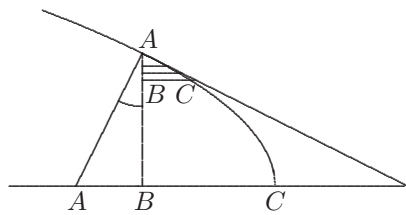
$a \neq b$

[Leibniz]

p

2 fx^4 | etc. gestr. | L 5 (1) $x + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3}$ etc. $\frac{y^2}{2}$ (2) $\sqrt{x + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3}}$ etc. | $\frac{y}{2}$ ändert

Hrsg. | L



[Fig. 5, Leibniz und Tschirnhaus]

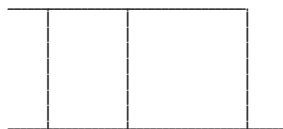
[Tschirnhaus]

 $AB \dashv\vdash BC$

$$x \approx \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{pp}{4} - q}$$

$$5 \quad x \approx \sqrt{\quad}$$

[Figur ohne eindeutigen Textzusammenhang]



[Fig. 6, Leibniz oder Tschirnhaus]

7 Fig. 6 steht am oberen Rand neben Fig. 1.

51₂. PRO METHODO TANGENTIUM INVERSA ET ALIIS TETRAGONISTICIS SPECIMINA ET INVENTA

27. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 8 Bl. 2–3. 1 Bog. 2°. Ca 2 S. auf den oberen Dritteln von Bl. 2 v°, 3 r° (Teil 1) und den unteren zwei Dritteln von Bl. 3 r°, v° (Teil 2). Datum und Überschrift am oberen Rand von Bl. 2 r°. Untere zwei Drittel von Bl. 2 v° und oberes Drittel von Bl. 3 v° leer. Auf Bl. 2 r° N. 51₁. — Gedr. (tlw. = Z. 11 – S. 368 Z. 16): 1. GERHARDT, *Differentialrechnung*, 1848, S. 41–45; 2. (engl. Übers. von 1.) CHILD, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 104–109.
Cc 2, Nr. 1131

5

10

27. Nov. 1675

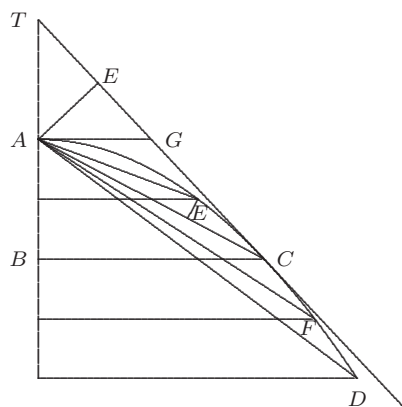
Pro methodo tangentium inversa
et aliis tetragonisticis specimina et inventa.

Trigonometria indivisibilium. Aequationes inadaequatae.
Ordinatae convergentes. Usus singularis Centri gravitatis.

15

[Teil 1]

Materia contemplationis novae de Centris gravitatis, hoc modo:



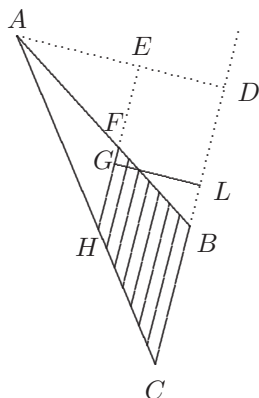
[Fig. 1]

11–15 27. Nov. ... gravitatis erg. *L*

18 *Fig. 1*: Leibniz bezeichnet in der Figur zwei verschiedene Punkte mit *E*. Im Text wird nur der Kurvenpunkt *E* verwendet.

Segmento $AECD$ in ∇^{la} infinita AEC, ACF etc. resolutio inveniatur cujuslibet ex his ∇^{lis} centrum gravitatis quod facile est cum semper Centrum gravitatis $\frac{1}{3}$ Altitudinis parte distet a basi. Cumque via centri gravitatis in ∇^{lum} ducta aequetur revolutioni ejus, ipsae autem GA in infinitas axis aequentur duplo ∇^{lo} , patet et ipsas AG in ipsas

1–3 Nebenbetrachtung auf Bl. 2 v^o:



$AD \sqcap a. BC \sqcap b. \text{area } \nabla^{li} ABC \sqcap \frac{ab}{2}. DE \sqcap x. DB \sqcap d. \frac{EF}{AE \sqcap a - x} \sqcap \frac{d \sqcap DB}{AD \sqcap a}. EF \sqcap \frac{da - x}{a}. \text{et } \frac{EH}{AE} \sqcap \frac{DC \sqcap b + d}{a}. \text{Ergo } EH \sqcap \frac{\overline{b+d}; \overline{a-x}}{a} \sqcap EF + FH.$
 Ergo $FH \sqcap \overline{b+d-d}, \frac{a-x}{a} \sqcap \frac{b}{a} \overline{a-x}. \text{Jam } GL \sqcap ED \sqcap x. \text{Ergo } HF \wedge GL \sqcap \frac{b}{a} \overline{ax - x^2}$
 quorum Summa $\frac{b}{a} \overline{\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}}$. et posito $x \sqcap a$. fiet $\frac{ba^2}{2} - \frac{ba^2}{3} \sqcap \frac{ba^2}{6}$. Quae quantitas Momentum scilicet ∇^{li} ex basi BC , divisa per aream $\nabla^{li} \frac{ab}{2}$, dabit $\frac{a}{3}$. distantiam centri gravitatis $\nabla^{li} ABC$, a basi BC .

Am oberen Rand, ohne direkten Bezug zum Text: $\underbrace{a \sqcap b \sqcap c}_{\sqcap}$

3 in (1) distantiam ab axe ducta (2) rem (3) $\nabla^{lum} L$ 4 autem | GH ändert Hrsg. | in L

5 Eine verworfene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

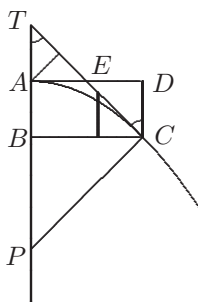
centrorum gravitatis ipsorum $\nabla^{\text{lorum}} AEC$ ab axe distantias ductas, momento segmenti ex axe aequari. Cujus methodi ope multa statim inveniri possunt dupliciter: Primum, sumendo figuram generalem, et calculando, indeterminate, eamque deinde ita explicando, ut centrorum gravitatis facilis habeatur inventio, ita detegentur momenta spatiorum aliter
5
difficilium, si communi more per ordinatas quaererentur. Deinde contra, si figurae quarum communi more facile habentur momenta, hac methodo tractentur venietur ad curvas quasdam valde implicatas quarum semper dimensio habebitur ex facilioribus.

Ecce hic Regulam notabilem cujus ope ex qualibet Methodo utcunque implicata semper utilia eruuntur.

Utile est saepe quando alte assurgunt problemata, quae sua natura simplicia esse et
10
aliunde solubilia scimus, ita enim multos detegent casus notabiles. Vide quae Tschirnhausius annotavit de tangentibus lineae Hastariae.

[Teil 2]

In problematis irregularibus, quae recta tractari aut ad aequationem, satis determinatam revocare non possumus, quia scilicet faciendum aliquid inverse, utile est plures vias
15
inter se conferre, quarum producta coincidere debent. Hoc videtur utile ad methodum tangentium inversam. Ecce specimen.



[Fig. 2]

4 detegentur (1) figurae (2) momenta L 8 hic (1) Methodum notabilem per qu (2) Regulam L 8f. qualibet (1) regula (2) Methodo L 14 aequationem, (1) unius incognitae (2) satis L 15 non erg. L 15 inverse, (1) utile est (2) |utile gestr., erg. Hrsg. | est L 17 Ecce specimen. erg. L

11f. Tschirnhausius annotavit: nicht gefunden; vgl. die Erl. zu N. 49 S. 345 Z. 20.

Quaeritur figura in qua BP ipsis AT reciprocae. Sit $TB \sqcap t$. Erit $AT \sqcap t - x$. et erit $BP \sqcap \frac{a^2}{t-x}$. Multiplicetur in t . fiet \square . $TBP \sqcap \frac{ta^2}{t-x} \sqcap a^2 + \frac{a^2[x]}{t-x} \sqcap y^2$. Fiet: $ta^2 \sqcap ty^2 - xy^2$. et $t \sqcap \frac{xy^2}{a^2 - y^2}$. Ergo $\frac{t}{x} \sqcap \frac{y^2}{a^2 - y^2}$. Ergo $\overline{\text{omn}t} \sqcap$ momento ex vertice A , ipsorum $\frac{y^2}{a^2 - y^2}$. Aliunde omnes TP ad axem aequantur omnibus TC . ad curvam.

$$5 \quad \frac{t}{y} \sqcap \frac{\beta}{\omega}. \text{ Erit } \omega \sqcap \frac{\beta y}{\frac{y^2 x}{t \sqcap \frac{a^2 - y^2}{a^2 - y^2}}} \sqcap \frac{\beta a^2 - y^2}{xy}. \text{ Jam } \int \overline{\omega} \sqcap y. \text{ Ergo: } \int \frac{\beta a^2 - y^2}{xy} \mathcal{D} y.$$

$$\text{Porro } \omega x \sqcap \frac{\beta a^2 - y^2}{y} \text{ et } \int \overline{\omega x} \sqcap yx - \int \overline{y\beta}. \text{ Ergo: } \int \frac{\beta a^2 - y^2}{y} \mathcal{O} yx - \int \overline{y\beta}.$$

$\omega \sqcap d\overline{y}$. Ergo: $d\overline{y} \sqcap \frac{\beta a^2 - y^2}{xy}$. et $xy \sqcap \frac{\beta a^2 - y^2}{d\overline{y} \sqcap \omega} \sqcap \int \overline{y\beta} + \int \frac{\beta a^2 - y^2}{y}$. Si jam ponamus ipsas y progressionis arithmeticae^[1] erunt ipsae $\omega \sqcap d\overline{y}$ constantes, et β variables,

$$\text{et fiet: } \beta \sqcap \frac{\int y\beta + \beta \frac{a^2 - y^2}{y}}{a^2 - y^2} \text{ et } d\overline{\beta a^2 - y^2} \sqcap \frac{a^2 \beta}{y}. \text{ Ob aeq. } \mathcal{O}. \text{ est } \beta \frac{a^2 - y^2}{y} + \beta y \sqcap$$

$$3f. \text{ Nebenbetrachtung: } \frac{t}{x} \sqcap \frac{y, y}{a + y, a - y}$$

$$9 \text{ Nebenrechnung: } y\beta + \frac{\beta a^2 - y^2}{y} \sqcap \frac{y^2 \beta + \beta a^2 - y^2 \beta}{y} \sqcap \frac{\beta a^2}{y}.$$

$$3 \frac{y^2}{a^2 - y^2} \text{ (1) id est t. erit momentum ex (a) axe (b) vertice (2) ergo L} \quad 3f. A, \text{ (1) omnium}$$

$$\text{(2) ipsorum L} \quad 5 \text{ jam (1) } \overline{\text{omn}\omega} \sqcap y. \text{ (2) } \int \overline{\omega} \text{ L} \quad 7 \int \frac{\beta a^2 - y^2}{y}. \text{ (1) Ergo } \frac{\beta}{\omega \sqcap d\overline{y}} \sqcap \int \overline{y+} \text{ (2)}$$

$$\text{Si L} \quad 9 \overline{d\beta a^2 - y^2} \sqcap \text{(1) } y\beta \beta \overline{y-} \text{ (2) } \frac{a^2 \beta}{y} \text{ L}$$

3 $t \sqcap$: Der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite der Gleichung müsste $y^2 - a^2$ lauten. Der Vorzeichenfehler hat Auswirkungen auf die weiteren Überlegungen bis S. 365 Z. 2 und tritt auch in S. 365 Z. 11 wieder auf.

$d\bar{y}\bar{x}$. Ergo $\frac{\beta a^2}{y} \sqcap d\bar{y}\bar{x}$. Aequationes habuimus invicem independentes primam $\frac{dx}{dy}$ ⁽¹⁾ \sqcap
 $\frac{yx}{a+y, a-y}$ alteram $d\bar{y}\bar{x}$ ⁽²⁾ \sqcap $\frac{d\bar{x}a^2}{y}$.

Quaeramus adhuc alias, ut $\int t d\bar{y} \sqcap \int y d\bar{x}$. Sed hoc nihil praebet novi. At $\int t\omega + \int x\omega$
 $\sqcap xy$. sive $t\omega + x\omega \sqcap d\bar{x}\bar{y}$. At $t \sqcap \frac{dx}{dy}y$. Ergo hoc $\sqcap \frac{d\bar{x}\bar{y} - xd\bar{y}}{dy}$. Ergo $d\bar{x}y \sqcap d\bar{x}\bar{y} - xd\bar{y}$.

Quod Theorema sane memorabile omnibus curvis commune est. Sed nihil ex eo novi 5
 ducetur, quia jam adhibuimus.

Sed ex alio principio novum habebimus theorema, quia scil. habetur summa omnium
 $BP \sqcap \frac{BC^2}{2}$. scilicet: $BP \sqcap \frac{a^2}{t-x}$. et $t \sqcap \frac{\beta y}{\omega} \sqcap \frac{d\bar{x}}{dy}y$ et $BP \sqcap \frac{a^2 d\bar{y}}{d\bar{x}y - d\bar{y}x}$ ⁽³⁾ $\sqcap \frac{d\bar{y}^2}{2}$.

Habemus ergo duas aequationes in quibus reperitur $d\bar{x}$ scilicet primam et tertiam, quarum
 ope tollendo $d\bar{x}$. habebimus aequationem, in qua una tantum incognitarum in vinculo 10
 remanebit, quo facto habebimus quaesitum, nimirum ex aeq. 1. erat $d\bar{x} \sqcap \frac{d\bar{y}yx}{a^2 - y^2}$ et

nunc ex 3 erit $d\bar{x}y d\bar{y}^2 - d\bar{y}d\bar{y}^2x \sqcap 2a^2 d\bar{y}$. Ergo $d\bar{x} \sqcap \frac{2a^2 d\bar{y} + d\bar{y}d\bar{y}^2x}{y d\bar{y}^2}$. Habemus ergo

aequationem inter duos ipsius $d\bar{x}$ valores, in qua non nisi y . in vinculo, quo facto sumendo
 y Arithmetice proportionales, fiet $dy \sqcap \omega$ constans, et $d\bar{y}^2 \sqcap z$. et $\int z \sqcap \frac{z^2}{2} \sqcap y^2$. Ergo
 $z \sqcap \sqrt{2}y \sqcap d\bar{y}^2$. Habemus ergo quaesitum. 15

Ecce elegantissimum specimen quo problemata Methodi Tangentium inversae sol-
 vuntur, aut saltem reducuntur ad Quadraturas: Nimirum efficiendum est si licet, diversis

1 $d\bar{y}\bar{x}$. (1) quae si multiplicentur in y . (2) Aequationes L 1 invicem independentes erg. L
 2 $\frac{yx}{a+y, a-y}$ (1) alteram, (a) dx (b) $\frac{dx, a+y, a-y}{xy} \sqcap dy$ (2) alteram L 3 at (1) $\int t\beta + (a) \int \langle y\beta \rangle$
 (b) $\int x\beta \sqcap xy$. sive $t\beta + x\beta$ (2) $\int t\omega$ L 14 $dy \sqcap (1) y$ (2) $|\beta \text{ ändert Hrsq.}|$ constans L

⁽³⁾
 8 \sqcap : Auf der rechten Seite fehlt im Nenner dx . Das Versehen beeinträchtigt die folgenden
 Überlegungen bis Z. 15.

aequationibus conquisitis, ut Una tantum incognitarum in vinculo Tetragonistico relin-
quatur. Hoc effici poterit ordinatas varie sumendo, imo et loco ordinatarum convergentes
vel alias.

Nota si loco x . vel y . alia quaedam recta inveniri posset, ut quae esset obliqua, aut
5 quae esset una ex convergentibus ad idem punctum, qua adhibita una tantum incogni-
tarum in vinculis restaret, tuto adhiberetur, exemplum sumi posset in quaerenda ipsa-
rum AP relatione, summa enim ipsarum AP . ad axem, aequatur semiquadrato ipsius
 AC .

Quandocumque in vinculo relictæ unius incognitæ formulæ sunt tales ut incognita
10 non contineatur in irrationalitate aut nominatore, semper absolute solvi potest problema,
reducitur enim ad quadraturam quae est in potestate, idem est in nominatoribus et
irrationalibus simplicibus. At in compositis casus evenire potest, ut ad quadraturam
redeamus quae non est in potestate.

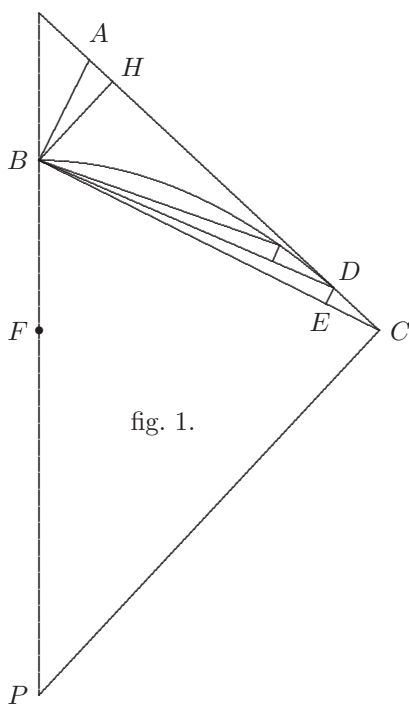
Sed quicquid sit, quandocumque problema ad quadraturam reduximus semper de-
15 scribi potest curva quaesita motu Geometrico, qui exacte in potestate est, nec materialem
curvam supponit. Haec porro methodus analytice exhibebit omnes quadraturarum a se
invicem dependentias; et viam sternet ad absolvendam tetragonisticen.

Fateor interim fieri posse, ut ingenti numero aequationum inadaequatarum,
20 (quales istas voco, quarum pluribus opus est ad solvendum problema, (+ etsi
ipsae solae sufficerent, si tractabiles essent +)) opus sit ad unam penitus ex vinculis
tollendam. Malum enim in eo est, quod una aequatione non nisi unus terminus ex vin-
culis tolli potest, et is si saepius inest, non nisi semel. Itaque intererit magnum quaeri
numerum aequationum inadaequatarum. Et examinandum quae sint ab aliis quodam
modo independentes; id est per simplicem calculum non possint a se invicem derivari,
25 v. g. summa omnium AP , et summa omnium AE .

2f. hoc ... alias erg. L 9 sunt (1) ration (2) tales L 11 ad (1) rationalitatem (2) quadra-
tutam L 11 quae est (1) | in *streicht Hrsg.* | (a) potestate (b) | potest *streicht Hrsg.* | (2) in L
16 omnes (1) curvarum (2) quadraturarum L

[Teil 3]

Novum genus Trigonometriae indivisibilium: ope
ordinatarum non parallelarum sed convergentium



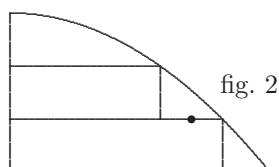
[Fig. 3]

Sit punctum fixum B . sit ad curvam ∇^{lum} exiguum BDC . DE perp. in BC . Ex puncto B ducantur tangenti $AHDC$ occurrentes BA normalis ad BC seu parallela DE , et BH normalis ad tangentem DC productam. Hinc similia ∇^{la} : CED, CHB, BHA . Ergo $\frac{BH}{CE} \sqcap \frac{HA}{DE} \sqcap \frac{BA}{CD}$. Adeoque: $BH, DE \sqcap CE, HA$. Et $BH, CD \sqcap CE, BA$. Ex quo sequitur summam ∇^{lorum} seu aream figurae aequari ipsis AB in CE seu in dif-

4 Fig. 3: DC wird im Text als Tangente, als Kurvenbogen und als Sekantenabschnitt interpretiert.
9 aream figurae aequari: Leibniz vergisst, die folgenden Produkte durch 2 zu dividieren. Der Fehler tritt auch in S. 368 Z. 2f. auf, beeinträchtigt aber nicht die grundsätzliche Überlegung.

ferentias BD et denique $HA, CD \perp DE, BA$. Porro $\frac{CH}{CE} \perp \frac{HB}{DE} \perp \frac{CB}{CD}$. Unde rursus fiet: $CH, DE \perp CE, HB$. $HB, CD \perp DE, CB$, id est area ∇^{li} ut per se patet, sibi ipsi [aequalis]. Denique $CH, CD \perp CE, CB$. Quod postremum notabile videtur pro Trochoeidibus.

- 5 Nimirum si curvae DC provolutione in plano immoto CA puncto B constante describatur curva Trochoeides; et posito ordinatam Trochoeidis ad planum immobile CA esse BH , ipsae CH . interceptae ad DC applicatae summatae, aequabuntur ipsis CB summatis ad suas differentias applicatis.



[Fig. 4]

- 10 Jam si ordinatae quaedam ad suas differentias applicentur idem producet ac si quaeratur differentiarum momentum ex axe, id est momentum, ac si summa omnium seu maxima in distantiam sui centri gravitatis, id est puncti sui medii ab axe, id est in sui dimidium ducatur[,] id est aequatur summa talium semiquadrato maximi.

- 15 Semper ergo habebitur summa omnium BC in CE , quae aequabitur semper semiquadrato BC , sive summae omnium BP , ad axem applicatarum in F , si CP perpendicularis ad curvam DC .

10 vid. fig. 2

10–370,7 *Dazu, unter Fig. 6:* NB. elegans observatio[:] tentemus efficere ut trigonometria indivisibilium nos jubeat terminos applicare suis differentiis, et statim novum habebimus theorema elegans.

22 *Zur ersetzten Stufe (1) der Variante:* error

6 Trochoeides (1) erit ipsa BC perpendicularis ad Trochoeidem (2); et L 7 DC (1) ipsarum CH differentias (2) applicatae L

9 Fig. 4: Zur Figur und zum zugehörigen Text vgl. N. 46 S. 325 Z. 17 – S. 326 Z. 4.

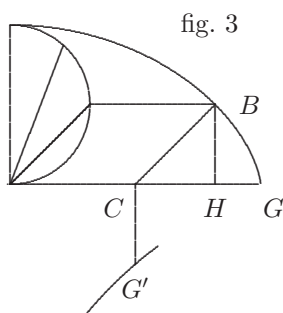


fig. 3

[Fig. 5]

Sit curva B talis Trochoeides, per punctum B descripta. Jungatur CB chorda describens, quam ostendam semper ad curvam esse perpendicularem, et BH , ordinata et HC applicentur in CG' , ad planum, seu ad differentias ipsarum GC erit figura unde orta semper quadrabilis et aequalis semiquadrato CB . cum differen(tiae) ipsarum GH (puncto G posito fixo) applicatae aequentur semiquadrato HB . Unde si applicentur differentiae inter has duas differentias summa earum aequabitur suo proprio semiquadrato, unde necesse est tunc locum fieri ad lineam rectam (forte, alia quoque, \mathfrak{A}).

Superest ut demonstrem generaliter chordam illam ut BC semper dare perpendicularem ad Trochoeidem quod probo fig. 4.

Sit polygonum $ABCD$ provolvendum^[1] sit punctum describens A . Centro C . radio CA , describatur circulus dum punctum $[D]$ veniat in H punctum rectae BCH , et tunc A . perveniet in L . Juncta AL . utique erit tangens trochoeidis, bisecetur arcus AML . et jungatur CM quae secet AL in N . Secabit utique ad angulos rectos diameter scilicet Circuli chordam sui arcus bisectam a se, erit CN perpendicularis ad ANL tangentem

2 Zu Sit curva B : fig. 3

4 ipsarum | HC ändert Hrsg. | erit L

1 Fig. 5: Leibniz bezeichnet in der Figur zwei verschiedene Punkte mit G . Zur besseren Unterscheidung wird einer davon mit G' benannt. 3 ostendam: Leibniz orientiert sich an der Argumentation von Descartes im Brief an Mersenne vom 23. August 1638, gedr. in R. DESCARTES, *Lettres*, Band 3, 1667, S. 350 f. (*DO* II S. 308 f.); vgl. dazu auch Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii* [Marg.], 1659, *DGS* I S. 267 f. 13 tangens: Leibniz lässt hier und in Z. 15 bereits die Sehne AL mit der Tangente zusammenfallen. Die folgende Argumentation ließe sich aber mit dieser Sehne durchführen, die parallel zur Tangente in M ist.

per etc. πv . cognitae, ex qua aequatione Trochoeidibus omnibus generali, si tollatur vel $d\bar{y}^2$, vel $d\bar{x}$ tunc quaelibet curva habere posset generatricem analyticam, quod fieri non potest, adeo nec generalis sublatio esse potest.

Interea NB. NB., si aliunde possumus semper Generatricis Trochoeidis inventionem habere suppositis quadraturis, habebitur hinc via generaliter tollendi $d\bar{x}$, ex aequatione aliqua vel $d\bar{y}^2$, alteram per alteram ope hujus inventae aequationis. Si non posset, tamen quia descriptio generatricis Trochoeidis per motum geometricum compositum, ut alibi inveni, semper haberi potest utendo in fig. 1. chorda pro ordinata, ita ut circa immobile centrum recta moveatur alias ducens, ideo possumus habere semper effecttionem hujus aequationis novissimae geometricam.

52. CURVARUM DIMENSIO EVOLUTIO EXPANSIO. SPECIATIM CURVAE HYPERBOLAE

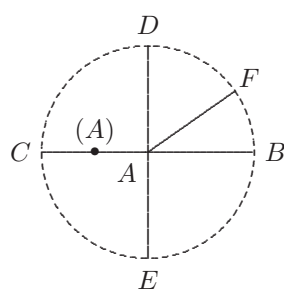
8. Dezember 1675

Überlieferung: L Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 231–232. 1 Bog. 2°. 4 S. Figuren tlw. stark überarbeitet und schadhaft.

Cc 2, Nr. 1144

8 Xb. 1675

Curvarum dimensio evolutio expansio.
Speciatim curvae Hyperbolae



[Fig. 1]

Sint AB . AC . AD . AE . AF . aequales et rectae CB et DE se secant ad angulos rectos. Sit $AB \sqcap x$. $AC \sqcap -x$. Ob circulum centro A descriptum patet esse AD mediam proportionem inter AB , et AC . Adeoque erit $AD^2 \sqcap -x \wedge x$ et $AD \sqcap \sqrt{-x^2}$, $\sqcap \sqrt{-1}$. et AE erit $\sqrt{-1}$. Eodem modo et alia recta ut AF poterit haberi, eodem modo si essent duae radices vera et falsa inaequales. Itaque non est Contradictio in quantitate $\sqrt{-1}$. Haec a Tschirnhausio observata. Vera contradictio est v. g. aequatio inter 1. et 2. et similis.

10–373,2 *Am Rande*: Generaliter videntur istae nihil dare ad problema; nempe: quantitati propositae addendum aut auferendum; ad aliam formandam, ex partibus: At hoc est nec addere nec auferre.

8f. Curvarum ... Hyperbolae erg. L 10 AE. |AC. ändert Hrsg. | aequales et |recta ändert Hrsg. | CB L 16 essent (1) lineae x et $-x$, inaequales. (2) duae L 19 In Figur: fig. 1. gestr. L

18 observata: Leibniz bezieht sich wahrscheinlich auf die in VII,2 N.61 u. 62 dokumentierten Gespräche mit Tschirnhaus.

Itaque si circuli ope invenienda sit talis linea ut $\sqrt{-1}$ erit impossibilis, quia supponitur simul et natura Circuli, in qua radius major inscriptis.

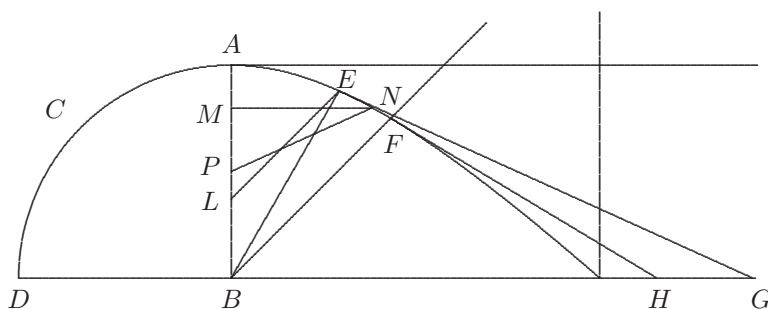


fig. 1.

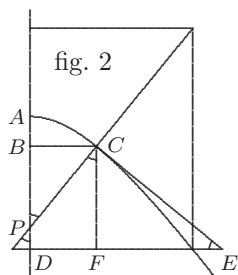
[Fig. 2]

$AB \cap a$. Axis circuli vel Hyperbolae. Ejusdemque semilatus rectum. ACD circulus. AEF Hyp. Ex B ducantur rectae ad Hyp. puncta quaelibet, BE, BF , unde tangentes EG, FH , ipsarum jam interceptae BH, BG summa credo scil. ad AB . (+ videndum tamen meo more +) aequatur [duplo] spatio ejusmodi rectis ut BF, BE comprehenso. In circulo jam constat eandem repraesentare curvae Circuli Elementa; sed in Hyperbola invenit Tschirnhausius si Calculo quaeras v. g., et facias ut MN ad NL , ita data a , ad quartam; quartae valor dabit aequationem quae ab ipsius BH , valore nulla prope in re differet, nisi uno numero cognitam multiplicante; unde constat eandem esse curvam; etsi aliud sit curvae exemplum.

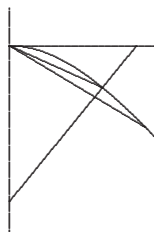
1 inveniendas L ändert Hrsg. 3 In Figur: (1) fig. 2 (2) fig. 1. L 5 ad (1) circulum (2) Hyp. L 6 FH , (1) ipsae jam interceptae (2) ipsarum jam | interceptae ändert Hrsg. | $BH L$

3 Fig. 2: Die von Leibniz flüchtig skizzierte und überarbeitete Figur der Vorlage stimmt nicht völlig mit dem zugehörigen Text überein. Außerdem fehlt der unter NP befindliche Teil des Dreiecks LEB durch Papierverlust, im oberen Teil laufen die Linien LE und BE in eine einzige zusammen. Mit der in Z. 9 auftretenden Strecke NL dürfte die Normale an die Kurve gemeint sein, wie die von Leibniz anschließend S. 374 Z. 2 – S. 375 Z. 1 durchgeführte Überlegung vermuten lässt. Der von Tschirnhaus ange-

gebene Näherungswert wäre dann $a\sqrt{\frac{a^2 + 4ax + 2x^2}{2ax + x^2}}$, der genaue Wert $BH = a\sqrt{\frac{a^2 + 4ax + 4x^2}{2ax + x^2}}$.



[Fig. 3]



[Fig. 4]

Sit in fig. 2. quaerenda DE, AC Hyperbola. AB . Axis. $AB \propto x$, et $AD \propto a$. $BC^2 \propto 2ax + x^2 \propto y^2$. $BD \propto a - x$.

CP est perpendicularis ad curvam[,] ergo $BP \propto a + x$ (+ nota in figura debet Cadere

5 P infra D +). Sunt Triangula PBC et EFC similia. Ergo $\frac{EF}{CF \propto a - x} \propto \frac{PB \propto a + x}{BC \propto \sqrt{2ax + x^2}}$

et $EF \propto \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Cui si addatur $DF \propto \sqrt{2ax + x^2}$, fiet: $\frac{a^2 \left[-x^2 \right] + 2ax \left[+x^2 \right]}{\sqrt{2ax + x^2}} \propto DE$.

$\frac{2ax}{\sqrt{2ax + x^2}} \propto v$. Ergo $\frac{4a^2x^2}{2ax + x^2} \propto v^2$ et $\frac{4a^2x}{2a + x} \propto v^2$. et $2av^2 + xv^2 \propto 4a^2x$. et

$x \propto \frac{2av^2}{4a^2 - v^2}$. datur ex quad. hyp. ut constat. Ergo quia totum EF , etiam pars nempe

ipsa $\frac{a^2}{\sqrt{2ax + x^2}}$ ex quad. Hyp. dabitur.

10 Quaeramus jam nunc et aliam figuram in qua ordinatae Curvam Hyp. repraesentent. Nempe Heuratii methodo fuit, ut BC , ad CP , ita a data ad quartam z .

8 AF L ändert Hrsg. 11–375,1 quartam z . (1) $\frac{z}{a} \propto \frac{CB \propto \sqrt{2ax + x^2}}{CP \propto \sqrt{2ax + x^2 + a^2 + 2ax + x^2}} \propto (a)$

$\sqrt{a + \frac{-a^2 - 2ax - x^2}{2ax + 2x^2 + a^2}}$ seu $a + x$ vocando ξ , fiet $\sqrt{a - \frac{\xi^2}{\xi^2 + x^2}}$ (b) $\sqrt{1 + \frac{-a^2 - 2ax - x^2}{2ax + 2x^2 + a^2}}$ seu $a + x$

vocando ξ , fiet $\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\xi^2 + x^2}}$ (2) $\frac{a}{z} L$

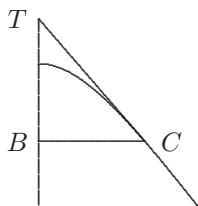
11 methodo: H. v. HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, DGS I S. 518.

quaeram[.] Eam in rem ponantur DC Sibi aequales, sit v. g. $\frac{BC \cap \sqrt{2ax + x^2}}{BP \cap a + x} \cap \frac{\beta}{\omega}$. et $\beta^2 + \omega^2 \cap \alpha^2$ et $\sqrt{\beta^2 + \omega^2} \cap \alpha \cap DC$ et $\beta^2 \cap \alpha^2 - \omega^2$, sive $\beta \cap \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. Ergo ipsae ut hoc modo determinantur opus est quadratura circuli seu summa omnium β . Summa enim omnium β , seu omnium $\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$ (quae sunt ad Circulum) pendet ex Circuli quadratura. Ex datis autem x , haberi possunt et CP . Semper ergo ipsarum CP (idem est de similibus aliis, quae si imponantur curvae spatium formant quod datur, vel quod ex dato spatio proposito dantur) valor dabitur ope seu quadratricis meae seu summae sinuum.

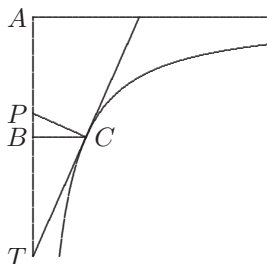
Hinc magna spes omnes quadraturas ad Circuli et Hyp. etc. reduci posse. In nostro exemplo $CP \cap HG$ erit $\frac{a^2 + 2ax}{\sqrt{2ax + x^2}}$ ponendo scilicet $x \cap \int \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. et $AH \cap \int \bar{\alpha}$. Jam video errorem meum de Circulo, neque enim ω sunt arithmeticae.

Sed ita procedendum. Sunt aequationes duae:

Una: $\frac{y}{\frac{y^2}{t} \cap p} \cap \frac{\beta}{\omega}$, sive $\frac{t}{y} \cap \frac{\beta}{\omega}$. et $\beta^2 + \omega^2 \cap \alpha^2$. Erit: $\omega \cap \frac{y\beta}{t}$. et $\omega^2 \cap \frac{y^2\beta^2}{t^2}$ et $\frac{t^2\beta^2 + y^2\beta^2}{t^2} \cap \alpha^2$. et $\beta \cap \frac{t\alpha}{\sqrt{t^2 + y^2}}$.



[Fig. 6]



[Fig. 7]

15

15 Zu Fig. 6: $\sqrt{t^2 + y^2} \cap TC$ ipsa scilicet tangens.

7 ex (1) data Curva (2) dato L 7 ope (1) dimensionis (anguli) (2) seu L

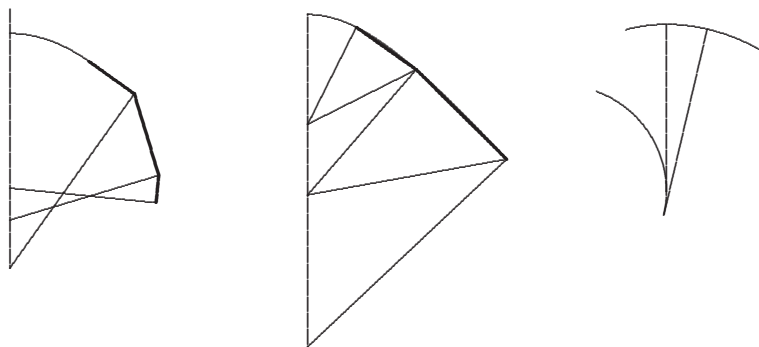
In Hyp. ad asympt. $BP \propto \frac{a^4}{x^3}$ et $PC^{[2]} \propto \frac{a^8}{x^6} + \frac{a^4}{x^2} \propto \frac{a^8 + a^4x^4}{x^6}$ et TC hic $\sqrt{x^2 + \frac{a^4}{x^2}} \propto \frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x}$ et $\beta \propto \frac{x^2\alpha}{\sqrt{x^4 + a^4}}$. Quae aequatio ipsarum β reciproca aequationis Elementorum

ipsius curvae ad Asymptotos. Sed hic x non amplius sunt arithmeticae. Sed res eo redit, ut ipsas x inveniamus, scilicet huc res redit; invenire figuram in qua differentiae β , eam habeant relationem ad suas summas x , quam dixi[,] scilicet $dx \propto \frac{x^2\alpha}{\sqrt{x^4 + a^4}}$. Adeoque $x \propto$ 5

$\int \frac{x^2\alpha}{\sqrt{x^4 + a^4}}$. et ponend(o) ipsas x progressionis arithmeticae nunc ut habeatur summa, utique patet rem redire ad hoc ipsum ut curvae Elementorum dimensio habeatur. Imo non ipsius Curvae opus est dimensione, sed alterius quae ipsi reciproca.

Videndum anne hoc semper. Item an hic recte v. g. $dx \propto \frac{x^2}{a^2}$. Ergo $x \propto \int \frac{x^2}{a^2} \propto \frac{x^3}{[3]a^2}$ absurdum. Video jam non esse in nostra potestate pro arithmetica sumere, quia scilicet 10

1-378,9 *Am Rande, durch Strich abgetrennt:*



NB. Non habetur absolute summa perpendicularium in curvam, ex area spatii sed addenda area ordinarum ad perpendiculares translatarum.

1 *Nebenrechnung:* $\frac{a^2}{x} \frac{a^4}{x^2} \sim x$

7 habeatur. (1) sed ut artificio aliquo immutetur Calculus quaeramus non ipsam β , sed ω (2) Imo L

nulla amplius litera arbitraria est; et eo ipso, quia datur talem esse x , ut talis sit ejus differentia non potest sumi arithmetica.

In Hyp. ad axem $\frac{y}{p \sqcap a + x} \sqcap \frac{\beta}{\omega}$. et $\beta^2 + \omega^2 \sqcap \alpha^2$ sive $\frac{y^2 \sqcap 2ax + x^2}{a^2 + 2ax + x^2} \sqcap \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}$ sive
 $1 + \frac{a^2}{2ax + x^2} \sqcap \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 1$. et $2\beta^2 + \frac{a^2\beta^2}{2ax + x^2} \sqcap \alpha^2$ et $2\beta^2 2ax + 2\beta^2 x^2 + a^2\beta^2 \sqcap \alpha^2 2ax + \alpha^2 x^2$, et
 5 $\beta^2 \sqcap \frac{\alpha^2 2ax + x^2}{4ax + 2x^2 + a^2} \sqcap \alpha^2 - \omega^2$ et pro $2ax + x^2$ ponendo y^2 , fiet $\frac{\alpha^2 y^2}{2y^2 + a^2} \sqcap \alpha^2 - \omega^2 \sqcap \beta^2$,
 sive $\omega^2 \sqcap \alpha^2 - \frac{\alpha^2 y^2}{2y^2 + a^2}$ et $\omega^2 \sqcap \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2 a^2}{2y^2 + a^2}$. Sunt autem ω differentiae, y summae.

Unde rursus ejusmodi oritur relatio atque ex his jam illud hac ratione saltem discimus quomodo possimus problemata reciproca in quibus quaeritur summa ex data relatione inter summam et differentiam, reducere ad Curvarum expansiones.

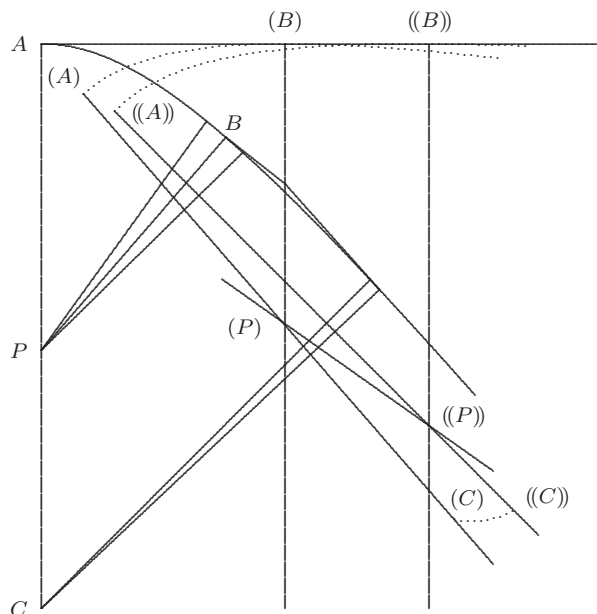
10 Simplicissimus jam in mentem venit et perelegans curvam ejusmodi expansione faciendam describendi modus: Si curva AB plano $A(B)$ applicetur et inter provolvendum, propellat mobilem ipsi $A(B)$ normalem perpetuo $(B)(P)$ cum axe $(A)(P)$ in (P) semper intersecantem. Puncta intersectionis (P) dabunt curvam novam.

10–380,12 *Am Rande, durch Strich abgetrennt*: NB. NB. $BP \sqcap v$. Ergo $4ax + 2x^2 + a^2 \sqcap v^2$. Ergo $2ax + x^2 + a^2 \sqcap \frac{v^2 + a^2}{2}$ et $x \sqcap \sqrt{\frac{v^2 + a^2}{2}} - a$. et $(B)((B)) \sqcap \frac{va}{\sqrt{\frac{v^2 - a^2}{2}}}$.

Cujus figurae seu omnium $(B)((B))$ ex v quaeritur quadratura. Idem est si cujuslibet alterius figurae, relationem Elementorum curvae, ad alias ipsis insistentes, explicantis haberi posset dimensio saltem symmetros ipso, unguularis superficiei ex insistentibus factae spatio habebitur ex dato illo spatio unguulari, et ipsa curva. Hinc si spatium unguulare curvae figurae symmetrorum videndum an hac relatione aliud symmetron obtineatur. Hinc multiplici semper calculo fortuna tentari potest.

12 in P L ändert Hrsg. 15 f. B(B) L ändert Hrsg. zweimal

6 $-\frac{\alpha^2 a^2}{2y^2 + a^2}$; Richtig wäre $+\frac{\alpha^2 a^2}{4y^2 + 2a^2}$; der Fehler wirkt sich nicht weiter aus.



[Fig. 8]

$BP \sqcap \sqrt{2ax + x^2 + a^2 + 2ax + x^2}$. sive $\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}$. Et $(B)((B)) \sqcap \frac{BP a}{\sqrt{2ax + x^2}}$
 sive $BP \sqcap \frac{(B)((B))\sqrt{2ax + x^2}}{a}$.

Differentiae ipsarum BP sunt
 $-\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2} + \sqrt{4ax + 4a\beta + 2x^2 + 4x\beta + 2\beta^2 + a^2} \sqcap e$.

5

et

$$\begin{aligned}
 & \frac{+4ax}{\cancel{\cancel{\cancel{\quad}}}} + 4a\beta \frac{+2x^2}{\cancel{\quad}} \sqcap \frac{4ax}{\cancel{\cancel{\cancel{\quad}}}} \frac{+2x^2}{\cancel{\quad}} \frac{+a^2}{\cancel{\quad}} (+e^2) + 2e\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2} \\
 & + 4\beta x \frac{(+2\beta^2)}{\cancel{\quad}} \\
 & \frac{+a^2}{\cancel{\quad}}
 \end{aligned}$$

378,13–379,2 novam. (1) Differentiae ipsarum BP, sunt $\sqcap \sqrt{2ax + x^2 + a^2 + 2ax + x^2}$. sive (a) si ipsarum (b) $\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}$ sunt ipsae BP \sqcap (2) BP L 2–380,2 B(B) L ändert Hrsg. fünfmal 7–380,1 $+2e\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}$ (1) $4\beta^2x^2 + 16a\beta^2x + 16a^2\beta^2 \sqcap 4e^24ax + 4e^22x^2 + 4e^2a^2$ (2) vel L

vel $e \sqcap \frac{2a\beta + 2\beta x}{\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}}$. et $(B)((B)) \sqcap \frac{a\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}}{\sqrt{2ax + x^2}}$. Fiet $\frac{(B)((B))}{e} \sqcap \frac{2a\beta + 2\beta x\sqrt{2ax + x^2}}{4a^2x + 2ax^2 + a^3}$ et $e \frown (B)((B)) \sqcap \sqrt{\frac{x\beta\alpha}{a}}$.

Cum ergo differentia ipsarum BP ad ipsas $(B)((B))$ non habeat rationem constantem, patet non posse lineam $(P)((P))$ esse rectam, ut mihi dictum erat.

5 Unica Calculandi de istis via haec est: In omnibus curvis Analyticis sciri potest relatio differentiarum ipsarum y , ad y . Eadem in his semper nota est, judicari poterit ergo an haec curva sit analytica.

[Fig. 9]

$$\int x\omega \sqcap xy - \int \overline{y\beta}. \quad \frac{\beta}{\omega} \sqcap \frac{y}{\frac{dy^2\beta}{2}}. \text{ et } \overline{dy^2\beta} \sqcap \frac{2y\omega}{\beta}. \text{ et } y^2\beta \sqcap 2 \int \frac{y\omega}{\beta}.$$

$$\frac{VR}{t-x} \sqcap \frac{y}{t}. \quad VR \sqcap \frac{y}{t}, t-x \text{ et } \frac{\int y - \int \frac{y\overline{x}}{t}}{2} \sqcap \int y - \frac{yx}{2}. \text{ Adeoque}$$

$$\frac{yx}{\cancel{2}} - \frac{\int \frac{y\overline{x}}{t}}{\cancel{2}} \sqcap \int \frac{y}{\cancel{2}}. \text{ Ergo } yx \sqcap \int \frac{yx}{t} + \int y \sqcap \int y\beta + \int x\omega. \text{ et}$$

$$\frac{yx}{t} + y \sqcap y\beta + x\omega.$$

15 Lineas quasdam ita producere, ut sint ad lineam ad quam terminantur perpendicularares. Ergo ipsae non possunt esse ordinatae vel convergentes: sed perpetuo angulum mutari debent. Tangentibus aliquid determinare vel perpetuo anguli mutatione idem est.

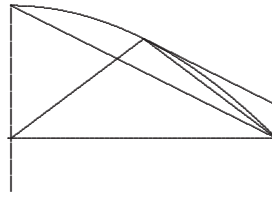
1 $\sqcap \frac{a\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}}{\sqrt{2ax + x^2}}$ | quae dantur *streicht Hrsg.* ex natura (1) hyp. Qvad. (2) Circul *gestr.* | fiet L 5 curvis (1) Geometricis (2) Analyticis L

1 $\frac{(B)((B))}{e}$: Leibniz berechnet irrtümlich $\frac{e}{(B)((B))}$, auch die folgende Gleichung ist nicht richtig. Die Überlegung wird dadurch jedoch nicht beeinträchtigt. 4 dictum: s. o. S. 378 Z. 13. 8 $\frac{\beta}{\omega} \sqcap$: Im Nenner der rechten Seite müsste $\frac{dy^2}{2\beta}$ stehen. Der Fehler beeinträchtigt die beiden folgenden Gleichungen.

Perpendiculares alicujus curvae ita producere ut sint alterius cujusdam curvae perpendicularares.



[Fig. 10]

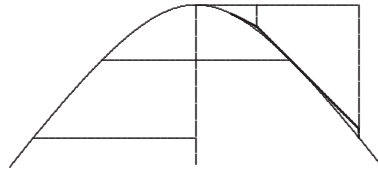


[Fig. 11]

In Circulo angulus tangentis ad Chordam est dimidius anguli ad circumferentiam. Quærat Curva in qua sit triens. Sed videtur hoc non esse in potestate, quia curva omnis non uniformis et Circulus et diversis modis sumendo non quadrabit facile.

5

Modus hic detegendi impossibilitatem problematum Geometricæ sine Calculo.



[Fig. 12]

4 est (1) duplus (2) dimidius L 5 sit (1) triplus (2) triens L 7-382,1 Calculo. (1)

$$\sqrt{\frac{+1}{\dagger \frac{a}{q}} \frac{a^2}{2ax + x^2}} \pi \omega \cdot \sqrt{\frac{2a x + x^2}{\dagger \frac{a}{q} x \dagger \frac{a}{q} x^2} + a^2, \wedge 2ax + x^2} \pi \omega, \text{ vel } \frac{\sqrt{y^2 \dagger \frac{a}{q} y^2 + a^2}}{y} \pi \omega (a) \omega^2 \pi 1 \dagger \frac{a}{q}$$

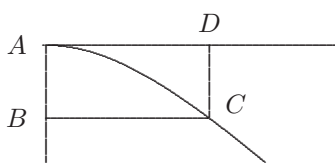
$$+ \frac{a^2}{y^2} \cdot y^2 \omega^2 \pi y^2 \dagger \frac{a}{q} y^2 + a^2. \text{ et } y^2 \omega^2 - y^2 \dagger \frac{a}{q} y^2 \pi a^2. \text{ et } y \pi \frac{a^2}{\sqrt{\omega^2 - 1 \dagger \frac{a}{q}}} (2) \beta \dots \pi z.$$

$$\left| \sqrt{\frac{2a x + x^2}{\dagger \frac{a}{q} x \dagger \frac{a}{q} x^2} + a^2, \wedge 2ax + x^2} \right. \pi \omega \text{ ändert Hrsg. } \left. \right|, \text{ vel } L$$

$$\beta \sqrt{\frac{+1}{\mp \frac{a}{q} 2ax \mp \frac{a}{q} x^2} + \frac{a^2}{q^2}} \quad \text{p} \quad z. \quad \beta \sqrt{\frac{2a x \mp \frac{a}{q} x^2}{\mp 2 \frac{a^2}{q} x + \frac{a^2}{q^2} x^2 + a^2}, \wedge 2ax \mp \frac{a}{q} x^2} \quad \text{p} \quad z, \text{ vel}$$

$$\beta \frac{\sqrt{y^2 \mp \frac{a}{q} y^2 + a^2}}{y} \quad \text{p} \quad z. \quad 2ax\beta^2 \mp \frac{a}{q} x^2 \beta^2 \mp 2 \frac{a^2}{q} x \beta^2 + \frac{a^2}{q^2} x^2 \beta^2 \quad \text{p} \quad z^2[y^2] - a^2 \beta^2. \quad y^2 z^2 \quad \text{p}$$

$$y^2 \mp \frac{a}{q} y^2 + a^2. \text{ et } y^2 z^2 - y^2 \mp \frac{a}{q} y^2 \quad \text{p} \quad a^2. \text{ et } y \quad \text{p} \quad \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - 1 \mp \frac{a}{q}}}.$$



[Fig. 13]

$AD \quad \text{p} \quad y. \quad DC \quad \text{p} \quad x. \text{ et } 2ax \mp \frac{a}{q} x^2 \quad \text{p} \quad y^2. \text{ Ergo } \mp [2]qx +$
 $x^2 + q^2 \quad \text{p} \quad \mp \frac{q}{a} y^2 + q^2 \text{ et } \mp x \mp q \quad \text{p} \quad \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a} y^2}. \text{ et } x \quad \text{p}$
 $\mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a} y^2}.$

$$2ax \mp \frac{2a}{q} x^2 \quad \text{p} \quad 2y\theta. \quad \theta \quad \text{p} \quad \frac{ax \mp \frac{a}{q} x^2}{y} \quad \text{p} \quad \frac{y^2 + ax}{y} \quad \text{p} \quad y + \frac{ax}{y} \text{ e(t) } \theta \quad \text{p} \quad y + \frac{\mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a} y^2}}{y}.$$

7 Nebenbetrachtung: $2ax \mp \frac{a}{q} x^2 \quad \text{p} \quad y^2. \quad \cancel{2at} \mp \cancel{2} \frac{a}{q} xt \quad \text{p} \quad \cancel{2} y^2. \quad t \quad \text{p} \quad \frac{y^2 \quad \text{p} \quad 2ax \mp \frac{a}{q} x^2}{a \mp \frac{a}{q} x}. \quad t - x \quad \text{p}$

$$\frac{\cancel{2} ax \mp \frac{a}{q} x^2 \quad \cancel{-ax} \quad \mp \frac{a}{q} x^2}{a \mp \frac{a}{q} x}.$$

2 $y^2 z^2 \quad \text{p}$: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Faktor β^2 . Leibniz rechnet konsequent weiter und setzt in Z. 4 neu an. $7 \quad \text{p} \quad \frac{y^2 + ax}{y}$; Richtig wäre $\frac{y^2 - ax}{y}$. Dieser und weitere Fehler beeinträchtigen die Rechnung bis S. 385 Z. 1.

$$\frac{\theta}{x} \pi \frac{\omega}{\beta} \text{ et } \beta \pi \frac{x\omega}{\theta \pi y + \frac{ax}{y}} \pi \frac{xy\omega}{y^2 + ax} \pi \frac{y\omega}{a} + \frac{y^3\omega}{a^2x + ay^2}.$$

$$\beta^2 + \omega^2 \pi \frac{x^2\omega^2}{\theta^2} + \omega^2 \pi z^2. \text{ et } z \pi \frac{\omega}{\theta} \sqrt{x^2 + \theta^2}.$$

1 *Nebenbetrachtung*: β differentia partium axis. ω differentia partium tangentis verticis. $\frac{t}{y} \pi \frac{\beta}{\omega}$.

$$382,7 \text{ } \mp \frac{2a}{q}x^2 \pi (1) \text{ } 2yt. \text{ } t \pi \frac{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}{y} \pi \frac{y^2 + ax}{y} \pi y + \frac{ax}{y} \text{ } e(t) \text{ } t \pi y + \frac{\mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y}$$

et $\frac{t}{y} \pi (a) \frac{\beta}{\omega}$ erit $\omega \pi \frac{y\beta}{t}$ et $\omega \pi \frac{y\beta}{\mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}$. Cuius figurae datur summa seu omnium

$$\frac{y^2\beta}{y^2 \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}} \pi \beta + \frac{\mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y^2 \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}$$

eius quadrato addatur quadratum β^2 , et quaeratur

$$z \text{ pro curvae Elemento fiet } z^2 \pi 2\beta^2 + \frac{q^2 \mp 2q\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}{y^4 \mp 2qy^2 \mp 2y^2\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp 2q\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} +$$

$$2\beta \frac{\mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y^2 \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}} (b) \frac{\omega}{\beta}$$

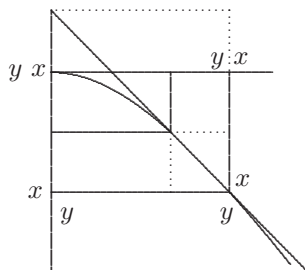
erit $\beta \pi \frac{y\omega}{t}$ et $\beta \pi \frac{y\omega}{\mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}$. Cuius figurae datur summa seu

$$\text{omnium } \frac{y^2\omega}{y^2 \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}} \pi \omega + \frac{\mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y^2 \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}$$

eius quadrato addatur quadratum β^2 , et quae-

$$\text{ratur } z \text{ pro curvae Elemento fiet } z^2 \pi 2\omega^2 + \frac{q^2 \mp 2q\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}{y^4 \mp 2qy^2 \mp 2y^2\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp 2q\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}$$

$$+ 2\omega \frac{\mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}}{y^2 \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2}} (2) \text{ } 2y\theta \text{ } L$$



[Fig. 14]

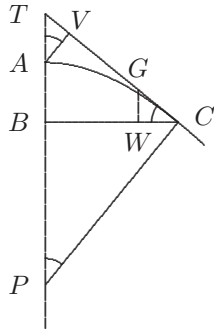
$$\begin{aligned}
 x^2 &\sqcap q^2 \mp 2q\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + q^2 \mp \frac{q}{a}y^2. \text{ et } \theta^2 \sqcap y^2 + 2ax + \frac{a^2x^2}{y^2}. \text{ Ergo } \theta^2 \sqcap y^2 \boxed{\mp 2qa} \mp \\
 2a\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} + \frac{2a^2q^2}{y^2} &\mp \frac{2qa^2}{y}\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} \boxed{\mp 2qa}. \\
 z &\sqcap \sqrt{\frac{1}{\mp \frac{a}{q}} \frac{a^2}{y^2}} \sim \frac{y\omega}{a} + \frac{y^3\omega}{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{q^2 \mp \frac{a}{q}y^2} + ay^2}. \\
 z &\sqcap \frac{\sqrt{y^2 \mp \frac{a}{q}y^2 + a^2}}{y} \sim \frac{y\omega}{a} \boxed{+ \frac{y^3\omega}{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{\dots} + ay^2}} \frac{\omega}{a} + \frac{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{\dots}}{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{\dots} + ay^2}. \\
 z &\sqcap \sqrt{y^2 \mp \frac{a}{q}y^2 + a^2} \sim 2\omega a + \frac{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{\dots}}{\mp a^2q \mp a^2\sqrt{\dots} + ay^2} \text{ quae pendet ex Curva proposita}
 \end{aligned}$$

4 Nebenbetrachtung: $zy \sqcap \beta\sqrt{y^2 \mp \frac{a}{q}y^2 + a^2}$ et $z^2y^2 \sqcap \beta^2y^2 \mp \beta^2\frac{a}{q}y^2 + \beta^2a^2$ et $y^2 \sqcap \frac{\beta^2a^2}{z^2 - \beta^2 \mp \beta^2\frac{a}{q}}$. et $y \sqcap \frac{\beta a}{\sqrt{z^2 - \beta^2 \mp \beta^2\frac{a}{q}}}$ et $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 + a^2 \sqcap a^2 + \frac{\beta^2a^2}{z^2 - \beta^2}$ etc. et $x \sqcap$ [bricht ab]

8f. et (1) x+ streicht Hrsg. (2) x \sqcap L

ubi opus est, ut quaeramus $\frac{\dagger a^2 q \wedge \sqrt{y^2 \dagger \frac{a}{q} y^2 + a^2}}{\dagger a^2 q \dagger a^2 \sqrt{\dots} + ay^2}$ et $\frac{\dagger \sqrt{y^2 \wedge \frac{1}{\dagger \frac{a}{q} + a^2}, \wedge q^2 \dagger \frac{q}{a} y^2}}{\dagger a^2 q \dagger a^2 \sqrt{q^2 \dagger \frac{q}{a} y^2 + ay^2}}$.

Sed haec sunt nimis implicata.



[Fig. 15]

$GC \sqcap z. WC \sqcap \omega. AB \sqcap x. z \sqcap \beta \sqrt{\frac{1}{\dagger \frac{a}{q} + \frac{a^2}{2ax \dagger \frac{a}{q} x^2}}}$
 $\frac{AV}{AT \sqcap \frac{ax}{a \dagger \frac{a}{q} x}} \sqcap \frac{\sqrt{2ax \dagger \frac{a}{q} x^2 + a^2 \dagger \frac{2a^2}{q} x + \frac{a^2}{q^2} x^2}}{a \dagger \frac{a}{q} x}$
 $\frac{a^2}{2ax \dagger \frac{a}{q} x^2} + \frac{1}{\dagger \frac{a}{q}} \sqcap z^2.$ et videndum qua ratio inter AV, 5

et $GC \sqcap z$ exprimi possit aequatione. $\frac{\omega}{z} \stackrel{(1)}{\sqcap} \frac{AV}{AT \sqcap \frac{ax}{a \dagger \frac{a}{q} x}}$.

$2ax \dagger \frac{a}{q} x^2 \sqcap y^2.$ et $x \stackrel{(2)}{\sqcap} \dagger q \dagger \sqrt{q^2 \dagger \frac{q}{a} \frac{\beta^2 a^2}{z^2 - \beta^2 \dagger \beta^2 \frac{a}{q}}}$ et $\frac{\omega}{\beta} \stackrel{(3)}{\sqcap} \beta \frac{a \dagger \frac{a}{q} x}{y \sqcap \frac{\beta a}{\sqrt{z^2 - \beta^2 \dagger \beta^2 \frac{a}{q}}}}$.

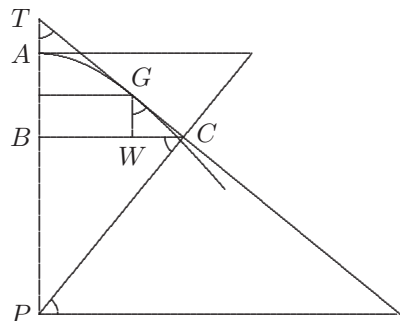
Ergo in aeq. 1. inserendo pro ω et x eorum valores, habebitur aequatio in qua solae extabunt z . et AV . et ipsa AV pure habebitur. Nota hoc modo non nisi naturam inveniri sive aequationem explicantem naturam Trochoeidis Conicae, in quantum ea aequatione 10

1 ubi | tantum *gestr.* | opus *L*

4 $\frac{AV}{AT \sqcap \frac{ax}{a \dagger \frac{a}{q} x}}$ \sqcap : Leibniz berechnet auf der rechten Seite der Gleichung irrtümlich $\frac{z}{\omega}$ statt $\frac{\omega}{z}$. In

Z. 6 setzt er die Gleichung richtig an. 5 $\sqcap z^2$: Richtig wäre $\frac{z^2}{\beta^2}$.

explicari potest. Ideo quia punctum fixum, ex quo demittendae perpendiculares. Et hoc modo habetur curva, in qua habetur ratio quae est non inter ordinatas et abscissas, sed quae est inter differentias ordinarum et abscissas, vel quae est inter differentias ordinarum et abscissarum. Quaerenda ratio, in qua puncto non existente fixo, tamen imposito in curvam dent figuram ex data pendentem.

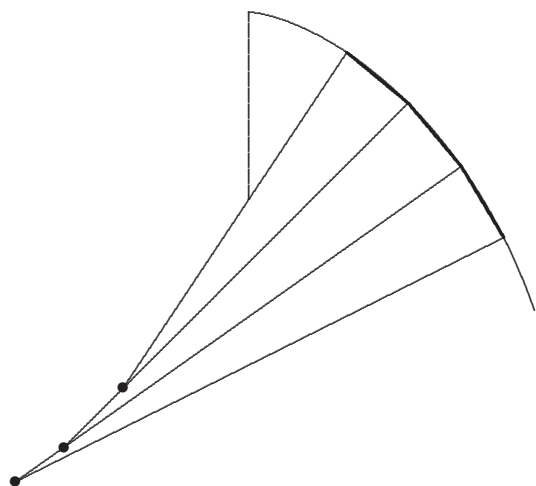


[Fig. 16]

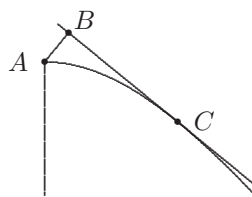
$$\frac{y}{\beta} \propto \frac{p}{\omega} \propto \frac{s}{z}. \text{ Ergo } pz \propto s\omega.$$

$$\frac{t}{\beta} \propto \frac{y}{\omega} \propto \frac{m}{z}. \text{ Fiet } zy \propto m\omega.$$

$$\frac{s^2}{y} \propto \frac{s}{\beta}. \text{ et } \frac{s^2}{y}\beta \propto sz.$$



[Fig. 17]



[Fig. 18]

10

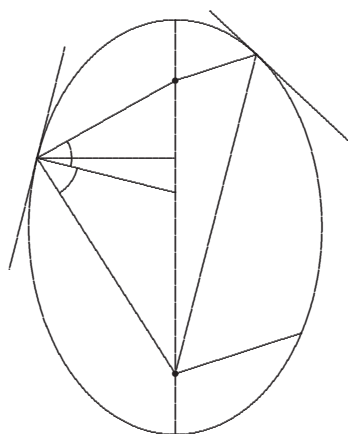
Si figurae evolutae et evolutioni descriptae dimensio ex eodem principio habetur: tunc evolutione descripta in rectam expansa, figuram dabit, cujus dimensio ex utraque pendebit.

Figurae Trochoeidis dimensio semper datur ex spatio figurae describentis. Error. Imo non. Quia perpendiculares ex puncto fixo non applicantur ad curvam, ibi ubi provolvitur. Itaque si provolutione describere volumus figuram, cujus dimensio ex data dimensione pendeat sic agemus ut perpendiculares a(d) axem productas aut aliam curvam applicemus, modo alterum illud spatium etiam detur.

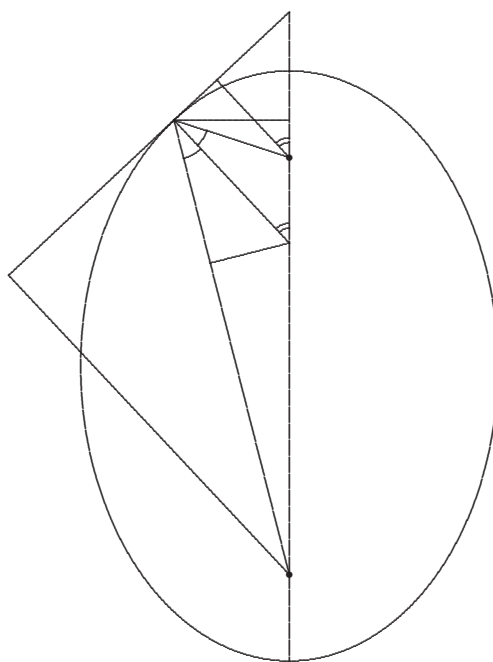
5

Sed si illam curvam in rectam expandamus, quae fit more meo intervallis a puncto fixo puncto provolutionis impositis: Ea curva in rectum extensa, tum demum verum erit haberi curvam habita Spatii dimensione, si modo inveniri queat quae sit curva illa expansa in rectam. Investigabitur autem, quia investigari poterit relatio inter differentias et abscissas. Sed tunc recurrendum est in Catalogum curvarum tangentiumque ut sciatur sitne curva illa ex earum numero quae sunt analyticae seu non transcendentes.

10

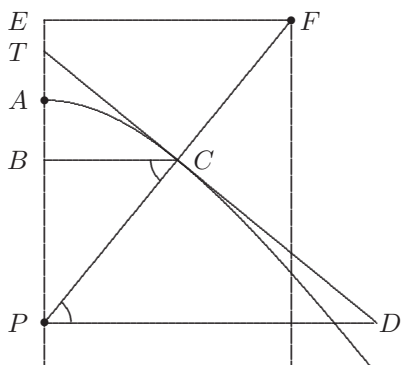


[Fig. 19]



[Fig. 20]

3 itaque (1) necessario utendum est; (2) si (a) evolutione (b) provolutione L 4 agemus | ex streicht Hrsg. | ut L 11 sitne (1) in rerum natura relatio (2) curva L



[Fig. 21]

$$\begin{aligned}
 AB &\sqcap x. \quad BC \sqcap \sqrt{2ax + x^2}. \quad \frac{BC}{CP} \sqcap \frac{CP}{PD}. \quad \text{et} \\
 PD &\sqcap \frac{CP^2}{BC} \sqcap \frac{2ax + x^2 + a^2 + 2ax + x^2}{\sqrt{2ax + x^2}}. \\
 \frac{BC}{CP} &\sqcap \frac{a \sqcap EF}{PF}. \quad \text{et} \quad PF \sqcap \frac{CPa}{BC} \sqcap \\
 \frac{a\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}}{\sqrt{2ax + x^2}}. \quad PD &\sqcap 2\sqrt{2ax + x^2} + \\
 \frac{a^2}{\sqrt{2ax + x^2}}. \quad PF &\sqcap a\sqrt{2 + \frac{a^2}{2ax + x^2}} \sqcap z.
 \end{aligned}$$

$$\text{Fiat } b\sqrt{2ax + x^2} + \frac{a^3 + ac\sqrt{2ax + x^2} + adx}{\sqrt{2ax + x^2}}$$

+ $fx \sqcap va$ et reducendo: $b2ax + bx^2 + a^3 + ac\sqrt{2ax + x^2} + adx + fx\sqrt{\dots} \sqcap va\sqrt{\dots}$ sive

$$\frac{b2ax + bx^2 + a^3 + adx}{va - fx - ac} \sqcap \sqrt{2ax + x^2}. \quad \text{et quadrando}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \beta^6 + 2\beta^3 b 2 a x & 2\beta^3 b & x^2 & + 2b^{[2]}2ax^3 & + b^2 x^4 & & \\
 a d . & b^2 4a^2 & .. & 2[b]ad & & & \\
 & 2b2aad & .. & & & & \\
 & a^2 d^2 & & & & &
 \end{array}$$

$$2ax + x^2 \sqcap \frac{v^2 a^2 - 2vafx - 2vaac, + f^2 x^2 + 2facx, + a^2 c^2}{\dots}$$

Eodem modo: Si ad $\frac{a\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}}{\sqrt{2ax + x^2}}$ addas $+n + l\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2} + mx_{[1]}$

$$v\sqrt{2 + \frac{a^2}{2ax + x^2}} \sqcap \frac{la}{\sqrt{2ax + x^2}, \sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}} + v + mx + n$$

6 fiat (1) $by + \frac{a^2}{y} \sqcap e \sqcap PD$ (2) $b\sqrt{2ax + x^2}$ (3) $b\sqrt{2ax + x^2} L$

12 $2ax + x^2 \sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung hat Leibniz im Zähler des Bruches punktuell a in β geändert. 13 Eodem modo: Die folgende Substitutionsrechnung ist fehlerhaft. Der richtige Wert

für \mathbf{N} wäre $\frac{z(2ax + x^2)}{x}$.

et $\frac{\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2} - la \cdot \frac{1}{\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2}}}{\sqrt{2ax + x^2}} \square \square v^2 + 2vmx + 2nv + m^2x^2 + 2mnx + n^2$

sive $\square \frac{4ax + 2x^2 + a^2 - 2la + \frac{l^2a^2}{4ax + 2x^2 + a^2}}{2ax + x^2}$.

$\frac{z^2\sqrt{4ax + 2x^2 + a^2} \cdot 2ax + x^2}{x} \square \mathbf{N}$ momentum curvae scilicet e vertice opposito quaeratur.

Superficies cylindriciformis est quae fit recta per curvam in uno plano positam ducta, situ ad planum normali. Quae recta si inter describendum varie crescere aut decrescere intelligatur; fiet figura in superficie cylindriciformi descripta, seu Superficies cylindriciformis truncata. Cui semper plana aequalis exhiberi potest, hoc modo:

Sit curva quaecunque $C.(C)$. Sit axis ABD ad quam per ordinatas BC curva $C(C)$ 5 referatur, cognita relatione ipsarum AB . ad ipsas BC . Per punctum A transeat Axis conjugatus AT , et sumto in axe puncto D ducatur per ipsum axi conjugato AT parallela $D\Theta$. Sumta intelligantur puncta T . Θ . hoc modo ut juncta $TC\Theta$ sit tangens curvae in C . Quae jam ponatur ipsi BC ordinatae, in directum, translata scilicet in BE . et ipsa AD ipsi curvae in C . insistat situ ad ejus planum normali, idque in quibuslibet punctis C , (C) 10 sumtis semper pro arbitrio punctis D . (D) factum intelligatur, translatis ipsis $(T)(\Theta)$ in $(B)(E)$ et AD impositis in C .

Erit spatium planum $EB(B)(E)E$; superficiei cylindriciformi ex omnibus AD curvae impositis factae aequale. Facto enim Triangulo characteristico GWL . erit, $T\Theta$ ad AD , 15 ut GL ad GW . adeoque AD in GL . id est AD imposita curvae, aequabitur $T\Theta$ in GW , id est BE ordinatae ad Axem. Adeoque summa omnium AD ad curvam, seu superficies cylindriciformis, aequabitur summae omnium $T\Theta$ ad axem seu spatio $EB(B)(E)E$.

Ponatur curva $C(C)$ pertingere usque ad A . Jam superficies cylindrica ita explanetur, ut coincidat plano curvae, et ut curva coincidat axi. Sive ut posito puncto A fili ex curvae $AC(C)$ extensione facti; in A . punctum alterum C vel (C) cadat in F vel (F) . Et ita 20 superficies cylindriciformis extendatur in spatium planum $HF(F)(H)H$ axis parte $F(F)$ cujus ignota nobis quantitas[,] curva $H(H)$ cujus non est nota nobis natura, et duabus rectis datis FH . $(F)(H)$ quae ipsis AD , $A(D)$ sunt aequales. Ex punctis H . (H) ducantur ordinatae HN , $(H)(N)$ in axem conjugatum ATN . Ex datis ergo AN , sive FH , sive AD ,

14f. *Nebenbetrachtung unter Fig. 1: $\omega \propto \frac{\beta y}{t}$*

3 superficiei (1) cylindrica (2) cylindriciformi L 13 superficiei (1) cylindricae (2) cylindriciformi L
 16 BE (1) applicatae (2) spatio (3) ordinatae L 18 Ponatur ... ad A. erg. L 19 curva | primo
 puncto C gestr. | coincidat L 19 puncto | (1) C (2) A erg. | (a) curvae (b) fili (aa) curvae AC(C)
 (aaa) respondentis (bbb) aequalis in B pun (bb) ex L 21 spatium | planum erg. | HF(F)(H)H (1)
 compleatur rectangulum. Ex punctis H (2) Axis L 24–392,1 AD, (1) quaeruntur ipsae NH. Patet uti
 (2) et L

et iis quae dixi, reliqua quaeruntur. Patet autem ex data spatii $EB(B)(E)E$ dimensione etiam spatii $HF(F)(H)H$ dari dimensionem. Quod si ergo constet de natura curvae $H(H)$, et sit ipsa una ex iis quae quadrari possunt, (absolute vel Hypothetice) id est in quibus ex data abscissa et ordinata datur area; tunc ex dato spatio $EB(B)(E)E$. id est
 5 spatio $HF(F)(H)H$, quoniam jam datur abscissa ex axe conjugato $AN \cap AD$. dabitur etiam recta AF , seu longitudo curvae $C(C)$. Et vicissim ex data longitudine curvae, $C(C)$ et natura figurae $H(H)$ si modo ex Analyticarum quadrabilium ea numero est, dabitur spatium $EB(B)(E)E$.

Hinc jam usum hunc duco; quoniam ipsae AD , infinitis modis sic possunt assumi
 10 pro arbitrio, ut constet de natura curvae $H(H)$, infinita etiam spatia $EB(B)(E)E$ inter se diversa, eaque omnia analytica obtineri posse, quorum quadratura ex solius curvae dimensione, adeoque ex se invicem dependeat. Adeoque hoc modo data qualibet curva infinitae habebuntur figurae ipsi syllogae, ac proinde et inter se. S y l l o g a voco, quorum uno noto aliud notum est. Atque ita longe major aperitur inveniendi campus, quam si
 15 AD certo modo atque ita sumtis, ut omnia BE omnibus BC sylloga sint. Potest, ut obiter dicam[,] fieri, ut duo quaedam inter se non sint sylloga, sint tamen tertio; id est ut datis duobus opus sit ad tertium ex ipsis habendum. Posses s y n d o t a appellare, quorum pluribus datis datur reliquum. Data autem intelligenda erunt non positione, sive descriptione sed relatione sive schesi. Posses et $\sigma\acute{\upsilon}\gamma\gamma\omega\tau\alpha$ optime appellare.

Caeterum hoc modo infinita haberi spatia, quae ex curvae propositae dimensione pendeant omnia. Ex eo apparebit, si infinitas curvas $H(H)$ inveniri posse ostendemus, cognitae naturae et quarum spatia quadrabilia ex datis ordinatis et abscissis, ita enim et spatia infinitis modis facta ad curvam $E(E)$ ex data curvae dimensione habebimus. Quod apparebit si ostendam ipsas AD , tales assumi posse, ut curva $H(H)$ fiat data.
 25 Verbi gratia data curva $C(C)$: efficere possum ut curva $H(H)$ fiat recta, vel parabola, vel hyperbola, vel aliqua paraboloeidum, aut Hyperboloeidum; vel alia denique curva Analytica quaecunque. Quod sic ostendam. Ex puncto H . curvae $H(H)$ ad axem ducta intelligatur tangens HM . Ajo ipsam FM magnitudine dari, tametsi positione non detur. Quod sic ostendo. Ponantur $C(C)$ portio curvae infinite parva, adeoque et $F(F)$ et
 30 $D(D)$ et $N(N)$. Datur calculo recta $F(F)$ vel HP ex data natura curvae $C(C)$. Quia

4 ex (1) dato Rectangulo (2) data L 13 ipsi (1) symmetrae (2) syllogae L 19 sive (1) ratione (2) schesi L 21 si (1) infinita spatia (2) infinitas L 29f. Ponantur ... $N(N)$ erg. L
 30 Datur | calculo erg. | recta $F(F)$ (1) curvae $C(C)$ portiuncula, seu latus polygoni curvae infinitanguli. Data enim qualibet curva, latus eiusmodi (2) vel L

enim AF , $A(F)$ sunt portiones curvae in rectum extensae, ideo $F(F)$ erit latus polygoni infinitanguli curvae, unum enim latus polygoni infinitanguli praecedentibus seu portioni curvae in rectum extensae AF , additum, facit proxime sequentem curvae in rectum extensae portionem $A(F)$. Datur autem calculo latus polygoni infinitanguli curvae, ex data progressionem ordinarum et abscissarum, quod adeo verum est, ut methodo Heuratii figura describi possit, cujus ordinatae sunt hujus polygoni lateribus proportionales. Datur igitur calculo recta $F(F)$ sive GL . Datur et calculo recta $(H)P$ sive $N(N)$ sive $D(D)$ quia ipsae AD , $A(D)$ calculo dantur: Datur ergo et ratio HP ad $P(H)$. Ergo et ob Triangula $HP(H)$, $M(F)(H)$ dabitur ratio $M(F)$ ad $(F)(H)$ id est ex datis FH vel $(F)(H)$ sive AN , sive AD , dabitur MF . Tametsi puncta F et M . ignorentur. Quoniam ergo ipsae AN , vel FH vel AD , sumtae sunt pro arbitrio, ideo assumi poterunt tales, ut ratio inter ipsas FM , et FH fiat qualis desideratur; id est ut curva $H(H)$ sit data. Quod faciendum erat.

Male concepi: Sic dicendum potius. Ex datis AB , dantur $F(F)$ ut probavi. Ergo datur ratio inter AB et $F(F)$. Datur et ratio inter $F(F)$ et AD , sive inter AN et HP . ex natura curvae $H(H)$ data. In omni enim curva cujus natura data est, datur haec ratio. Datur ergo et ratio inter AD , et AB . Id est, datis AB dabuntur ipsae AD , tales, ut curvae $H(H)$ natura fiat data. Datis autem AD , etiam $T\Theta$, sive BE dari patet.

13f. erat. (1) Exemplo utamur, et ponendo curvam CC . esse parabolam; erit Elementum curvae, seu
 $(a) \frac{F(F)}{a} \cap (aa) \times (bb) \frac{\sqrt{ax}}{2a} (cc) \frac{\sqrt{2ax}}{a} (dd) \sqrt{2} (ee) \frac{\sqrt{2ax+a^2}}{\sqrt{2ax}} (b) \frac{F(F) \cap z}{a} (c) \frac{F(F) \cap z}{\beta} \cap \frac{\sqrt{2ax+a^2}}{\sqrt{2ax}}$
 $\cap |\beta \text{ erg.} | \sqrt{1 + \frac{a^2}{2ax}}$ qvae pendet ex (aaa) natura (bbb) Hyperbolae qvadratura; $(aaaa)$ ut $(bbbb)$ sed
 ut ipsa prodeat Hyperbola, sumamus potius Parabolam concavitatem directrici | $AB \text{ erg.} |$ obvertentem.
 sit $AB \cap y$. erit $x \cap BC \cap \frac{y^2}{2a}$ Erit $\omega \cap \frac{y\beta}{a}$ et $z \cap (aaaa) \sqrt{(bbbb) \beta \langle - \rangle (cccc) \frac{\beta}{a} \sqrt{y^2 + a^2}}$. ad
 Hyperbolam $\cap F(F)$ posito scilicet A vertice parabolae, et $AB \cap y$. (2) Male L 14 probavi, (1) ex
 datis iisdem AB , dantur AD , qvia pro arbitrio sumi possunt (2) sive datur (3) Ergo L 15 $F(F)$. (1)
 Ergo vicissim (a) datur ratio (b) ex datis $F(F)$ dantur AB . (2) Datur L 18 data. (1) Exemplo in
 eam rem opus est. (a) qvaeritur (b) qvaeratur (aa) qvales (bb) qvalis (aaa) debeat (bbb) futura sit (2)
 Datis L

5 Heuratii: H. v. HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, DGS I S. 517–520.

Id est dari poterunt tot curvae $E(E)$, quarum figurae ex datae curvae $C(C)$ dimensione pendeant; quot intelligi possunt figurae quadrabiles.

In exemplum sit $C(C)$ curva parabolica cujus vertex A . tangens verticis, et nunc directrix AB . Sit $AB \sqcap y$. Erit $BC \sqcap \frac{y^2}{2a}$. Et $GW \sqcap \beta$. et $WL \sqcap \frac{y\beta}{a}$. et $GL \sqcap z \sqcap$

5 $\frac{\beta}{a} \sqrt{a^2 + y^2} \sqcap HP$. Quaeritur AD talis, ut curva $H(H)$ sit parabola. seu ut positis $AN \sqcap$

$AD \sqcap v$. ipsarum AF differentiis $F(F) \sqcap z$ positis $\frac{\beta}{a} \sqrt{a^2 + y^2}$. Jam constat ex natura parabolae hanc in ea esse relationem ipsarum AN , et HP , sive z , ut positis $AN \sqcap$ Arithmeticis, sit $HP \sqcap \frac{d\bar{v} v}{b} \sqcap z \sqcap \frac{\beta}{a} \sqrt{a^2 + y^2}$. Sed hic jam video nos haerere; neque

quicquam obtinuisse. Nam ex hac aequatione $\frac{d\bar{v} v}{b} \sqcap \frac{\beta}{a} \sqrt{a^2 + y^2}$. quaerenda est v . quod

10 perdifficile est et fiet: $v \sqcap \int \frac{b\beta}{va} \sqrt{a^2 + y^2}$. Sed hinc non nisi casus particularis haberi potest, nempe curvam haberi posse, cujus differentiae abscissarum sint Elementis curvarum

reciprocae. Nam tunc fiet $v \sqcap \int \frac{b}{v}$. et erit v . ad parabolam, in qua differentiae summis

reciprocae. Et curva $H(H)$ ex ipsis $AN \sqcap v$. erit etiam parabola ex Hypothesi. Sed jam non video an haec sit realis quaestio dicere curvam quaeri in qua sint differentiae

15 abscissarum curvae Elementis reciprocae. Nisi Abscissas mutes in ordinatas; quaereturque curva in qua differentiae ordinarum sint curvae Elementis reciprocae, id est $\sqrt{\beta^2 + \omega^2} \sqcap$

$\frac{\alpha^2}{\omega}$ posita α constante. Quod non est in potestate si et β . constans[,] fiet enim $\beta^2 + \omega^2 \sqcap$

$\frac{\alpha^4}{\omega^2}$. adeoque ω erit quantitas constans sive recta certa, et locus erit ad rectam. Sed si β .

2 possunt (1) curvae quadra (2) figurae L 5 ut (1) eius intervalla ordin (2) H (3) N(N) vel H(P). eius ordinarum differentiae (4) positis L 6 $\sqcap v$. (1) sunt (2) et earum differentiis D(D)

vocatis e, (3) ipsarum (a) AD, (b) AF L 8 HP (1) $\sqcap y$ (2) $\sqcap (a) d\bar{v} v$ (b) $\sqrt{(c) \frac{v^2}{2b}}$ (d) $\frac{d\bar{v} v}{b} L$

11 differentiae (1) ord (2) abscissarum L 16 differentiae (1) abscissarum sint (2) ordinarum sint | curvis ändert Hrsg. | reciprocae L

variat, alia atque alia fiet curva. Quaeritur ergo progressio aliqua talis abscissarum, ut ex ea calculentur ordinatae secundum regulam quandam fiant differentiae, seu β . et ω . relationis quae jubetur. Ut sint relatio inter abscissas et ordinatas quaelibet: $bx^2 + cy^2 + dyx$ etc. $\square 0$. et relatio ipsarum x ad arithmeticas φ [:] $e\varphi^2 + fx^2 + g\varphi + hx$ etc. $\square 0$. Valor ipsius x ex posteriore inseratur in priore et tunc quaeratur differentia ipsarum y . quae invenietur per φ . ex data jam etiam differentia ipsarum x . Rursus per aequationem posteriore quaeratur differentia ipsarum x . quae ex solis φ absolute dabitur. Ergo absolute etiam dabitur differentia ipsarum y . etiam ex solis φ . Ergo apparebit an tales assumtae sint b . c . d . etc. et gradus dimensionum, ut fiat quod desideratur. Interim etsi talis curva vix tractabilis videatur hoc tamen de ea habemus, ut si ponatur ipsa $C(C)$. et ipsa curva

$H(H)$ debeat esse parabola, ipsas AD fore etiam ad parabolam, fiet enim $v \square \int \frac{b}{va}$.

quae est ad parabolam ut aliunde mihi notum: dabitur ergo hujus curvae elementum z . Sed jam video me errasse non quidem in his, sed quod sumsi $\sqrt{a^2 + y^2}$ pro curvae ele-

mento cum sit ipsa $\frac{\beta\sqrt{a^2 + y^2}}{a}$. Unde si reciprocae β , et $\sqrt{a^2 + y^2}$, fiet constans. Unde

haberetur recta pro curva $C(C)$. Interea satis est nos didicisse etiam haec problemata realia esse, et aliquando solubilia cum quaeritur relatio inter differentias ordinarum et abscissarum.

In omni curva verum est esse Elementum curvae: $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Et si t tangen-

tis intervallum, erit $\frac{dx}{dy} \square \frac{t}{y}$. Sit $AD \square v$. et fiet: $\frac{T\Theta}{v} \square \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ et $T\Theta \square$

$BE \square \frac{v}{dx} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, sive $dxT\Theta \square v\sqrt{dx^2 + dy^2}$. id est $T\Theta$ ad axem aequantur

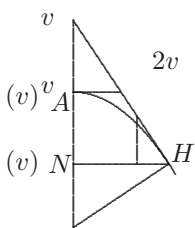
ipsis v ad curvam. Si extendatur superficies cylindriciformis in rectam, erunt AF vel $NH \square \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ et AN vel $FH \square v$. quae v sumi possunt pro arbitrio. Quaeruntur

1 talis (1), ut si numeri terminorum (2) abscissarum L $\square v$. (1) Erit $BD \square v - x$ (2) et L
21 extendatur (1) planum (2) superficies L

12 aliunde: s. *De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa*, dat. Dezember 1674, VII, 3 N. 39 S. 560–562.

jam v tales, ut sit curva $H(H)$ parabolica, vel alia quadrabilis. Constat in parabolica,

cujus ordinatae ad axem v , esse $t \sqcap 2v$ adeoque fiet: Ejusque ordinarum $\int \sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}}$ differentias esse $\sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}}$ fiet ergo $\frac{dv}{\sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}}} \sqcap \frac{2v}{\int \sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}}}$.

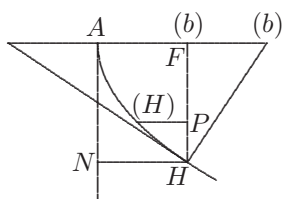


[Fig. 2]

seu $dv \int \sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}} \sqcap 2v \sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}}$.

Jam video denique his nihil fieri posse, nam si detur AN magnitudine et positione, utique dabitur et NH magnitudine et positione ex data curvae natura. Data autem $NH_{[1]}$ curvae de qua quaeritur dabitur longitudo.

Generalis aequatio erit: $dv \int \sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}} \sqcap t \sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}}$. Aliter pro parabola:



[Fig. 3]

$\frac{\sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}}}{dv} \sqcap \frac{v}{b}$ posito b . esse semilatus rectum parabolae

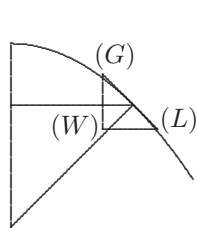
seu intervallum perpendicularium in axe; fiet $b \sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}} \sqcap d\bar{v} v$. Problema ergo cujus ope cujuslibet curvae dimensio haberi posset huc redit[:] ordinatam invenire quae in suam abscissam ducta datum det valorem. Sed jam video

nihil hinc haberi, nam, scimus summam ordinarum in suas differentias ductarum aequari semiquadrato ultimae. Adeoque res iterum eo redit, ut inveniatur summa Elementorum curvae, seu $b \int \sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}} \sqcap \frac{v^2}{2}$.

Et quoniam in omni curva ejus natura exprimi potest ope solius ordinatae, vel ope solius abscissae, accedentibus differentiis utriusque, quarum alterutrius hic dantur. Ideo infinitae similes formari possunt quaestiones, ut in Parabola Cubica sunt ordinatae perpendicularium intervallis reciprocae: seu $p \sqcap \frac{1}{v}$. Ergo $\frac{v}{\frac{1}{v}} \sqcap \frac{z \sqcap (G)(W) \sqcap \sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}}}{WL \sqcap dv}$

2 t \sqcap v L ändert Hrsq. 15 suas (1) abscissas (2) differentias L

21 reciprocae: s. N. 46 S. 322 Z. 1 – S. 323 Z. 8.



[Fig. 4]

et fiet: $d\bar{v} v^2 \propto \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Id est $\frac{v^3}{3} \propto \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Patet

ergo nihil ex hac inquisitione duci posse: satius in ipsam curvam ope quadraturarum inquirere, nam calculo Tangentium inverso assumere v talem, aequatione facta, ut v vel v^2 denique in dv ducta faciat datam formulam longe difficilior, quam efficere

5

ut simpliciter differentia v habeat datam formulam. Quanquam certis casibus particularibus fieri queat, ut ductus ille fiat simplicior.

1 $\frac{v}{3}$ L ändert Hrsg.

6 Fig. 4: Eine gestrichene Vorstufe zur Zeichnung wird nicht wiedergegeben.

54. DE ADDITIONE ORDINATARUM AD QUADRATURAS

21. Dezember 1675

54₁. DE ADDITIONE ORDINATARUM AD QUADRATURAS

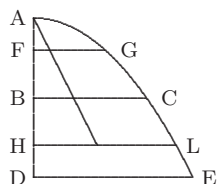
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 223. 1 Bl. 2^o. 1 4/5 S. Bl. 223 bildete ursprünglich mit Bl. 224 (= N. 54₂) einen Bogen.
Cc 2, Nr. 1164 A

21. Xb. 1675.

De Additione ordinatarum ad quadraturas;
Specimen Analyseos Tetragonisticae, pro Curvis,
in quibus cognita relatio Segmentorum:

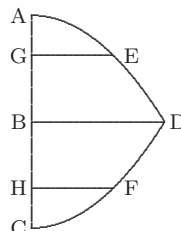
Axe posito *AC*, sit curva ad ipsum referenda *AED*. Spatium mensurandum, *ACDEA*. Nota sit ratio ejus, ad spatium *ABEHA*, quod ordinata *BE*, per medium ipsius *AC*, nempe *B*. ducta abscinditur. Sumantur in ipsa *AB*, abscissae *AF*, et inde a *C*. ipsis aequales *CG*; ad illas ordinatae *FH*, ad has *GL*.

8 f. qvadraturas; (1)



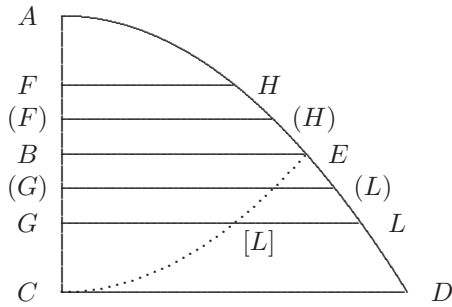
(a) Sit (aa) spatium (bb) figura curvilinea (b) Sit figura

qvaecunqve ADECA. cuius altitudo AD. in qva punctum medium B. (2)



Sit Spatium

(a) Curvil (b) rectis (c) ABDEA rectis AB, BD, et Curva linea AED. contentum, producatu AB in C, ut sit BC \perp AB. et tunc similis (aa) appli (bb) aequalisqve priori ABDEA (aaa) appli (bbb) apponatur figura CBDFC, eandem cum priori habens basin BD (3) Specimen *L* 10 qvibus (1) Spatorum (2) cognita *L* 14 ordinatae |FG ändert Hrsg. |, ad *L*



[Fig. 1]

Sit jam $AF \sqcap CG \sqcap x$. et $FH \sqcap y$. et $AC \sqcap a$. Erit $AG \sqcap a-x$. et sit $GL \sqcap z$. Ponamus ex data AF , vel AG haberi valorem ipsius FH vel GL integrum ac rationalem, cujus primum exemplum $FH \sqcap AF \sqcap x$. seu $GL \sqcap AG \sqcap a-x$. Jam $\int \overline{FH} + \int \overline{GL} \sqcap ABEHA + (EBCDLE) \sqcap \frac{b}{a} ABEHA$ (quia ratio $EBCDLE$, ad $ABEHA$ nota supponitur $\frac{b}{a}$) et eadem $\int \overline{FH} + \int \overline{GL} \sqcap \int \bar{x} +$

5
10
15

$$\int \overline{a-x} \sqcap \int a \sqcap a \wedge AB \sqcap \frac{a^2}{2}. \text{ et } ABEHA \sqcap \frac{a}{a+b} \wedge \frac{a^2}{2} \sqcap \int \bar{x}.$$

Si $FH \sqcap x^2$. erit $GL \sqcap x^2 - 2ax + a^2$. et $\int \overline{FH} + \overline{GL} \sqcap \int \overline{2x^2 - 2ax + a^2}$. Ergo erit $2 \int \overline{x^2} - 1 \int \overline{x^2} \sqcap \int \overline{+2ax - a^2} \sqcap \frac{a}{a+b} \wedge a^3 - \frac{a^3}{2} - \frac{(b)}{a}$.

Ita patet haberi summam x^2 , ex data $\int \bar{x}$. Eodem modo si $FH \sqcap x^3$ et $GL \sqcap a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$ fiet $\int \overline{FH} + \overline{GL} \sqcap \int \overline{a^3 - 3a^2x + 3ax^2}$.

15

Ergo si modo datur ratio $\int \overline{FH}$ ad $\int \overline{GL}$ habebitur $\int \overline{x^3}$ ex data $\int \bar{x}$ et $\int \overline{x^2}$. Eodem modo in caeteris gradibus procedi potest. Notando tantum discrimen inter impares et pares.

Alia ratione procedi poterit, si non addamus FH , et GL , sed subtrahamus. Quo modo in paribus fiet quod nunc in imparibus, et contra. Et si ponantur semper $ABEHA$, et $EBCDLE$ aequales tunc fiet $\int \mp \overline{FH} \mp \overline{GL} \sqcap 0$ et in paribus deprimetur calculus ad gradum inferiorem, et ita ope superioris eleganter habebitur dimensio inferioris parabolae. Haec non explico, quemadmodum nec quomodo habeantur semper $\frac{b}{a}$. quia in paraboloeidibus istis facilia.

20

1 FH | \sqcap GL *gestr.* | \sqcap y (1) Et sit y rationalis integra ex data x. v.g. sit y \sqcap x (2) et L
13f. $\frac{a}{a+b} \wedge | a^2 \text{ ändert Hrsg.} | - \frac{a^3}{2}$. (1) pono b cum de summa x. (2) ita (3) ita L

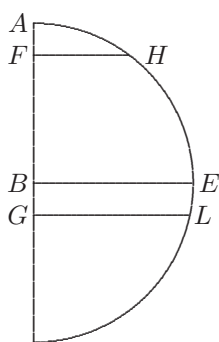
9 Fig. 1: Die Punktbezeichnung [L] in der Figur und im Text S. 400 Z. 1 stammt von Leibniz.

Generaliter si figura inferior: $BE[L]C$ aequalis et similiter posita superiori, $ABEHA$, et tamen eadem aequatione utraque continetur, ut in circulo_[1,] Ellipsi; et infinitis casibus; imo in factis expresse ex compositione, ut Margaritae Slusii ex duabus parabolis Cubicis, et infinitis aliis casibus fabricari possunt tales, ut duas portiones similis una nihilominus
5 comprehendat aequatio, et tunc addendo tollendoque semper fient novae aequationes tetragonisticae memorabiles: Exempla igitur fabricabimus nova variis modis: Infinita enim hinc duci possunt.

Primum autem nunc non nisi ordinatas rationales quaeremus, sit: $FH \sqcap \frac{1}{x}$. Erit

$GL \sqcap \frac{1}{a-x}$. Et $\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \sqcap \frac{a}{xa-x^2}$ et $\frac{1}{x} - \frac{1}{a-x} \sqcap \frac{a-2x}{xa-x^2}$. Ita addi etiam possunt:

10 $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{a-x} \sqcap \frac{a(-x+x) + a}{a^2-x^2}$. Sed jam video nihil hinc nos habituros novi, et nos redituros ad ordinariam methodum nostram, qua multiplicamus talia.



[Fig. 2]

Si duas similes et aequales portiones subtrahamus invicem, id non ita faciendum, ut ordinatas respondententes, sed ut alias, ut in Circulo si addamus FH semper ad GL . vel subtrahamus, ponendo semper $AF \sqcap BG$, summa erit duplex area, residuum erit 0. Unde $\sqrt{2ax-x^2}$ et $\sqrt{a^2-x^2}$ horum summa vel residuum haberi potest. Aliud hic differentia aliud residuum.

Hinc erit $\int \sqrt{2ax-x^2} - \sqrt{a^2-x^2} \sqcap 0$. si scilicet intelligamus nos ad maximam progredi. Nota hoc genus aequationum, nota item debere inveniri characterem unde intelligamus ad maximam usque x progredi debere. Nota etsi

summa $\sqcap 0$. non tamen ideo et summa quadratorum ab his residuis aequalis 0. Ratio quod in his vinculis non est permissa multiplicatio.

25 Caeterum ex his fieri poterit aliquando, ut inveniatur quadratura cujusdam totius, vel casus particularis, si scilicet ex illa conjunctione per additionem vel subtractionem

1 et (1) | similis *streicht Hrsg.* | superio (2) similiter L 14 addamus | *FG ändert Hrsg.* | semper L
16 area, (1) differentia erit 0. Unde $\sqrt{2ax-x^2} + (2)$ residuum L 24 vinculis *erg.* L

3 Margaritae: Leibniz bezieht sich auf das Beispiel in R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668 [Marg.], S. 110.

duarum ordinarum, quarum summae cognitam habent rationem inter se, in certo tantum casu (ut cum componunt ambae figuram eandem vel similem, etc.) fiat figura cujus aliunde habetur dimensio: Quales casus fingi operae pretium erit.

Hic obiter tantum adjungo singulare quoddam genus additionis ordinarum. Sit

$$\sqrt{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{4}}} \mp \sqrt{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{4}}} \mp z \mp e \mp v. \quad 5$$

erit $z^2 (\mp e^2 + v^2 \mp 2ev) \mp r \mp x$. quae est aequatio ad parabolam, sive ipsam x . sive ipsam r , pro indeterminata sumas. Ideoque summa omnium z haberi potest. Quaeramus jam ad quam sint curvam ipsae e , et v .

$e^2 \mp \frac{r}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{2}$ et $2e^2 - r \mp \sqrt{r^2 - x^2}$ et $4e^4 - 4e^2r \boxed{+r^2} \mp \boxed{r^2} - x^2$ positoque x esse incognitam, fiet aequatio $x \mp 2e\sqrt{r - e^2}$. quae exhibet momentum Circuli ex axe conjugato per verticem adeoque pendet ex Circuli Quadratura. (Nota hanc phrasin: Axis conjugatus per verticem, axis conjugatus per centrum, Axis conjugatus per focum, etc.) Sin vero sit x constans et r indeterminata, fiet $r \mp e^2 + \frac{x^2}{4e^2}$. quae est composita ex applicata Parabolae ad axem conjugatum per verticem, et ex applicata Hyperbolae secundae; adeoque quadrari potest. 15

Jam $v^2 \mp \frac{r}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{2}$. sive $2v^2 - r \mp \sqrt{r^2 - x^2}$, et $4v^4 - 4v^2r \boxed{+r^2} \mp \boxed{r^2} - x^2$ et $x \mp 2v\sqrt{r - v^2}$. quae rursus Circuli momentum.

Et videndum qua ratione fiat, ut ex his duobus Circuli momentis componatur figura

11 *Zu* per verticem: Imo error, non est ex vertice sed centro. Ideo absolute habetur.

18–402,1 *Zu* figura quadrabilis: Imo nihil hinc quia haec duo momenta aliunde habentur.

11 pendet: Leibniz erkennt den Fehler am Ende von N. 54₂ und markiert die darauf beruhenden Aussagen.

quadrabilis: et an non inde lux quaedam ad casum particularem. Rursus autem $r \propto v^2 + \frac{x^2}{4v^2}$.

Magni momenti foret demonstrare Geometrice interpolationes Wallisianas per unam regulam Generalem. Videndum an id fieri possit continuis interpolationibus indubitabilibus; ostendendo interpolationes dubitabiles non aliter cadere posse. Et hoc posito novum habebimus inveniendi principium Geometrice demonstratum; sane foecundissimum.

Et ita nova plane ratione progressionibus, et inductione uti poterimus ad inveniendum. Idem serviet non tantum ad interpolationes sed et ad continuationes progressionum, certosque earum terminos inveniendos. Et videndum an tali arte demonstrari etiam illud possit: quod series infinita $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ etc. sit major qualibet quantitate, quoniam scilicet ob continuam progressionem, $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}$ etc. rationis est, initium seriei esse $\frac{1}{0}$.

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \text{etc.} \\
 \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \\
 \text{etc.} \quad \text{etc.} \\
 \hline
 \frac{1}{0} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{2}
 \end{array}$$

2f. $+\frac{x^2}{4v^2}$ (1) Qvod si jam ipsas x . (a) et r , v. g. (b) aut r , prout alteram vel alteram pro indeterminata sumimus explicemus (2) Magni L

3 interpolationes: J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 132–146, 161–165, 193–196 (*WO I* S. 439–447, 458–460, 476–478) und *Commercium epistolicum*, 1658, S. 51 (*WO II* S. 786).

54₂. DE ADDITIONE ORDINATARUM AD QUADRATURAS. PARS II

Überlieferung: L Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 224. 1 Bl. 2^o. 4/5 S. auf Bl. 224 r^o. Bl. 224 v^o leer. Bl. 224 bildete ursprünglich mit Bl. 223 (= N. 54₁) einen Bogen.
Cc 2, Nr. 1164B

21. Xb. 1675.

5

Pars II. De additione ordinatarum ad Quadraturas

Praecedente Scheda ostendi si sit $\sqrt{\frac{r}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{2}}$ ¶ $\sqrt{\frac{r}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{2}}$ ¶ z ¶ e ¶ v
 e v

posita r constante et x indeterminata c o r r e c t a n g u l a , id est ordinata vel abscissa, fore z^2 ¶ r ¶ x quae est aequatio ad parabolam, sive z ¶ $\sqrt{r \mp x}$ et summa haberi poterit omnium z .

10

Ex relatione ipsarum e ad x . fiet haec aequatio: x ¶ $2e\sqrt{r - e^2}$ et pro relatione omnium v ad x , fiet x ¶ $2v\sqrt{r - v^2}$. Spatium ergo ad curvam ad quam x et v , vel x et r correctangulae sunt, pendebit ex quadratura Circuli, id est ex momentis Circuli ex vertice. Hoc Geometrice examinare operae pretium erit, ut appareat quomodo hic ex duabus compositis figuris quadraturam Circuli repraesentantibus, fiat figura quadrabilis.

15

Sit quadrans Circuli $ABDC$. radio AB ¶ AC ¶ r ¶ 1 . Ex puncto in curva ejus D , sit ordinata vel sinus DE . Sit AE ¶ x . erit: DE ¶ $\sqrt{1 - x^2}$. Producat AB in F , et BA in G . et P (+ nota hunc expressionis modum +) ita ut sit BF ut et GP ¶ $\frac{1}{2}$. et AG ¶ 1 . Compleantur rectangula $FACH$, et $GACL$ et $PGLQ$. Producat DE , in M , et R et ED in N . ut occurrat ipsis FNH , GML , PRQ . Inter ipsam PG vel MR vel LQ et ipsas, GB , MD , LC et intermedias quaerantur mediae proportionales, ut GS

20

6 *Darunter:* Vide praecedentia parte 1. eadem die.

13f. *Zu* ex vertice: Imo error. Ex axe conjugato per centrum quae semper haberi possent.

7 ostendi: N. 54₁ S. 401 Z. 4–7.

ob $\alpha\theta$, et QY aequales, ut punctum cadat in Q . Ideo curva ad quam est $z \sqcap e - v$ erit $W\xi Q$. quae etiam est parabolica, ut ostendi.

Area spatii $WPRX$. haberi potest ex quadratura Circuli; ut supra dixi. Num quomodo inde ducatur, particulatim exponendum. Ex puncto X demittatur in rectam PW $\xi\pi$. et ex posita $P\pi$ abscissa $\sqcap e$. erit ordinata $x \sqcap 2e\sqrt{1-e^2}$ ut supra calculus ostendit. 5
Ergo $\int \bar{x} \sqcap 2 \int e\sqrt{1-e^2}$.

Centro P radio $PW \sqcap 1$. describatur quadrans qualis prior, $PW\varphi\psi$. Continuetur $X\pi$ dum ejus arcui occurrat in φ . Ajo momentum sinuum seu omnium $\pi\varphi$ ex axe PQ . ipsarum πX summae esse proportionale. Sed jam video me in errore fuisse versatum, dum aliquid hinc duci posse credidi, circa Circulum. Nam jam recognosco momenta sinuum ex 10
basi per centrum, non ex ipsis ut ex $e + v$ vel $e - v$ haberi ex quadratura parabolae, etsi si quis calculum persequatur, elegans theorema habiturum non videatur dubitandum.

1 ideo (1) jam curva repraesentans er (2) curva L 6 $\int \bar{\pi} L$ ändert Hrsg.

55. DE MOMENTIS, AEQUATIONES TETRAGONISTICAE

22. Dezember 1675

Überlieferung: L Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 150–151. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 150. Auf Bl. 151

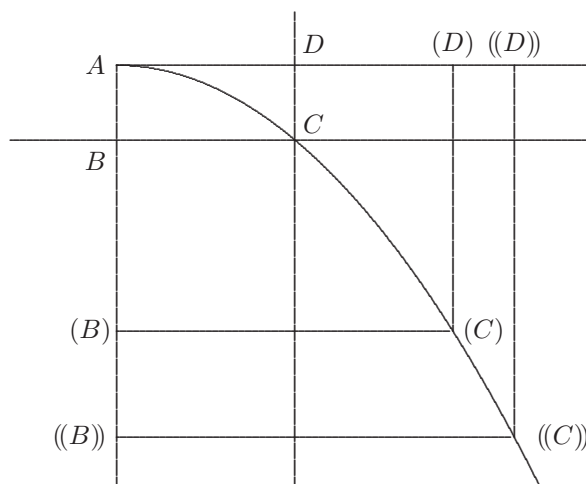
N. 56.

5

Cc 2, Nr. 1165

22 Xb. 1675

De Momentis, aequationes Tetragonisticae



[Fig 1]

[1. Ansatz, gestrichen]

- 10 Momentum Quadrilinei $CB((B))((C))C$ ex Axe AB . quaeritur. Sit AB vel $A(B)$ vel $A((B)) \sqcap x$, $\sqcap DC$ vel $(D)(C)$ vel $((D))((C))$. BC vel $(B)(C)$ vel $((B))((C)) \sqcap y$ sive AD vel $A(D)$ vel $A((D))$. Et β differentia ipsarum x , γ diff. ipsarum y immediatarum. Differentia

10 Momentum (1) Spatij BB (2) Qvadrilinei |CB(B)(C)C ändert Hrsg. | ex L 12–407,2 vel A((D)) Et (1) γ differentia ipsarum x, β (2) $\beta \dots$ sit erg. L

inter duas ordinatas extremas, ut $D((D))$ sit ψ , differentia inter duas abscissas extremas ut $B((B))$ sit $[\varphi]$.

Momentum quadrilinei $CB((B))((C))C$ est $\frac{1}{2} \int \overline{y^2\beta}$ ut constat. Momentum quadrilinei complementalis $CD((D))((C))C$, ex Axe AB , est $\int \overline{xy\gamma}$. Gnomon $ABCD$ est $((y))((x))$. Ejus momentum ex Axe AB est $((\frac{y^2x}{2}))$. Rectangulum completum $A((B))((C))((D))$ cujus valor xy . Et ejus momentum ex axe AB , erit $\frac{xy^2}{2}$. Quoniam autem hoc rectangulum aequivalet quadrilinis et Gnomoni, et eodem situ servato ab ipsis completur; ideo, et momentum ejus aequivalet summae momentorum ab ipsis, et fiet: $2 \int \overline{xy\gamma} + \int \overline{y^2\beta} \sqcap xy^2 - ((xy^2))$. Ubi nota, per x . et y . absolute seu extra vinculum posita majorem ex duabus ordinatis vel abscissis extremis [*bricht ab*]

[2. Ansatz]

Quadrilineum $CB((B))((C))C$ inter ordinatas extremas $BC, ((B))((C))$, partem axis $B((B))$ et curvam $C(C)((C))$ comprehensum. Punctum axis fixum A . Abscissae $AB, A(B), A((B))$. Quas generali nomine vocabimus x . Et quodocumque intra vinculum sub \int . aut d . continebitur x , intelligentur omnes inter AB , et $A((B))$ comprehensae; quando vero x simpliciter reperietur extra vinculum tale, intelligetur x extrema. Eodem modo y erit BC , vel $(B)(C)$ vel $((B))((C))$ et (in aequationibus Quadraturarum) simpliciter posita erit ordinata extrema. Quodocumque in eadem aequatione reperiuntur x . et y . sine alia nota, intelligentur eae quae ad se invicem referuntur. Majorem ex x extremis vocabimus x , minorem ξ . Eodem modo majorem ex y extremis vocabimus y , minorem

3f. constat (1), nunc quaeramus idem adhuc semel (a) : (b), hoc modo: (2) Momentum (a) quadrilinei (b) Gnomonis (c) quadrilinei L 4 $CD(D)(C)C$ L ändert Hrsg. 4 $\int \overline{xy\gamma}$. (1) Momentum (a) AC (b) Gnomonis, $ABCD$ ex axe AB , (2) Gnomon L 5 $((\frac{y^2x}{2}))$ (1) Addantur momenta Quadrilinearum (et) Gnomonis fiet (2) jam Quadrilinea cum Gnomone aequantur rectangulo completo (3) Rectangulum L 9 posita (1) minima (a) earum quae (b) ordinata (2) minor (3) majorem L 12 (1) Spatium (2) quadrilineum L 16 intelligetur (1) $((x))$ cuius punctum $((B))$, a puncto fixo A , remotissimum est. (2) x extrema L 19 referuntur (1) x maximam vocabimus simpliciter (2) extremam in (3) Majorem ex extremis (4) ipsam (5) Majorem L

υ. Cum majore vel minore existente abscissa, major est etiam vel minor ei respondens ordinata extrema, nullis opus erit notis ulterioribus. Sed cum altera existente majore altera est minor, tunc eae quae ad se invicem referuntur postremae, iisdem parenthesisibus notentur, ut $((x))$. $((\upsilon))$ significat minorem y majori x respondere. Differentia duarum x immediatarum sit β . duarum y . immediatarum sit γ . Differentia duarum x extremarum φ , duarum vero y extremarum, ψ .

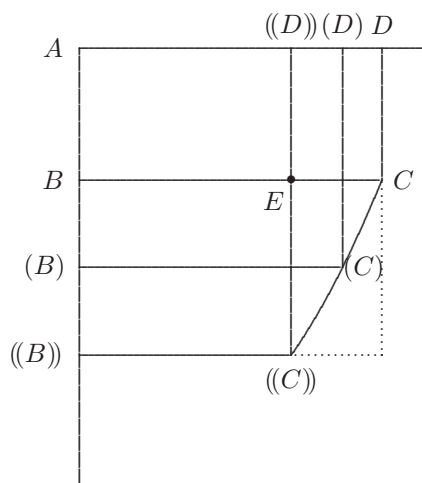
Momentum quadrilinei $CB((B))((C))(C)C$ ex Axe $A((B))$ erit $\frac{1}{2} \int \overline{y^2\beta}$. Momentum quadrilinei conjugati $CD((D))((C))(C)C$ ex eodem axe erit $\int \overline{xy\gamma}$. Gnomon $ABCD$ \sqcap $\xi\upsilon$. Ejus momentum ex Axe, erit $\frac{\xi\upsilon^2}{2}$. Rectangulum completum $A((B))((C))((D))$ erit xy , ejusque momentum $\frac{xy^2}{2}$, quoniam vero rectangulum hoc non tantum aequale est, sed et coincidens ipsis duobus Quadrilineis, et Gnomoni, ita ut jacent sumtis; ideo et momentum ejus aequale ipsorummet momentorum summae, et fiet aequatio Tetragonistica: $\int \overline{y^2\beta} + 2 \int \overline{xy\gamma} \sqcap xy^2 - \xi\upsilon^2$.

Quodsi quaeramus aequationem referentem inter se momenta quadrilinearum, ad Axem conjugatum AD , sic procedemus: Momentum spatii conjugati $CD((D))((C))(C)C$ ex Axe conjugato AD , est $\frac{1}{2} \int \overline{x^2\gamma}$. Momentum spatii $CB((B))((C))(C)C$ ex axe conjugato est $\int \overline{xy\beta}$. Gnomonis $ABCD$ \sqcap $\xi\upsilon$, momentum ex axe conjugato est $\frac{\xi^2\upsilon}{2}$. et rectanguli completi $A((B))((C))((D))$ momentum ex eodem $\frac{x^2y}{2}$; et fiet aequatio ut ante $\int \overline{x^2\gamma} + 2 \int \overline{xy\beta} \sqcap x^2y - \xi^2\upsilon$.

Et hic quidem usus non est difficilis, sed difficilior est calculus, quando ordinatis crescentibus descrescunt abscissae, vel quod idem est contra:

Momentum omnium BC ex axe AB , \sqcap $\frac{1}{2} \int \overline{y^2\beta}$. Momentum omnium DC ex axe AB \sqcap $\int \overline{xy\gamma}$. A momento omn. BC , seu spatii $CB((B))((C))(C)C$, id est ex momento Rectanguli $BE((C))$ + momento Spatii trilinei $CE((C))(C)C$; auferatur momentum omnium DC , id est momentum rectanguli DCE , + momentum ejusdem Spatii trilinei.

8 quadrilinei (1) quod (2) complementalis (3) conjugati L 11 duobus (1) Rectan (2) Quadril-
neis L



[Fig 2]

Ergo destructo utrobique hujus trilinei momento, erit momentum omn. BC – mom. omn. DC , \square mom. $\square^{li} BE((C))$ – mom. $\square^{li} DCE$. Adeoque jam $\square^{lum} BE((C))$ est $B((B)) \wedge ((B))((C))$ sive $((x)) - \xi, \wedge ((v))$ ejusque momentum ex axe est: $\frac{1}{2}((x))((v^2)) - \frac{1}{2}\xi((v^2))$. et $\square^{lum} DCE \square \xi \wedge y - ((v))$. Ejusque momentum erit: $\xi, \wedge y - ((v)), \wedge$ 5

$\left(((v)) + \frac{y - ((v))}{2} \right) \frac{y + ((v))}{2}$ sive $\frac{1}{2}\xi \wedge y^2 - ((v^2))$. Quod si a momento rectanguli $BE((C))$,

subtrahatur momentum $\square^{li} DCE$, fiet $\frac{1}{2}((x))((v^2)) - \frac{1}{2}\xi y^2$. et fiet tandem $\int \overline{y^2\beta} - 2 \int \overline{xy\gamma}$ $\square ((x))((v^2)) - \xi y^2$. Jungendo ergo haec theoremata concludemus Differentiam rectangulorum extremorum sub ordinata in suam abscissam, aequari vel Summae, vel cum $R e t r o \langle g \rangle r a d a$ est figura (: id est cum crescentibus abscissis decrescunt ordinatae :) 10 differentiae inter summam Quadratorum ab ordinatis ad axem applicatorum, et duplam summam Rectangulorum sub Correctangulis, applicatorum ad axem conjugatum. Et haec vera sunt, modo figura sit ad easdem partes cava. Nam si non sit, eadem obtinebit

6 f. rectanguli | DCE, subtrahatur momentum $\square^{li} BE((C))$ ändert Hrsg. |, fiet L 12 conjugatum. (1) | Sed qvonia hoc verum est etiamsi streicht Hrsg. | (2) Et L 13 sunt, (1) | etsi streicht Hrsg. | figura non sit ad easdem partes cava, modo non sit Stationaria (2) modo L

13 si non sit: Der gestrichene Entwurf einer Figur dazu wird nicht wiedergegeben.

Mom. $\varphi \frac{(9)}{\pi} \varphi \wedge \frac{((\upsilon))}{2}$. Ergo per 3. 9. Mom. $\varphi \frac{(10)}{\pi} ((x)) - \xi, \wedge \frac{((\upsilon^2))}{2}$. Eodem modo
 mom. $\vartheta \frac{(11)}{\pi} \vartheta \wedge \frac{EC}{2} \sqcap \vartheta \wedge ((\upsilon)) + \frac{y - ((\upsilon))}{2} \sqcap \vartheta \wedge \frac{y + ((\upsilon))}{2}$. Ergo per 4, 11. erit
 mom. $\vartheta \frac{(12)}{\pi} y^2 - ((\upsilon^2)), \wedge \frac{\xi}{2}$.

Ergo per 10, 12. erit mom. $\varphi - \text{mom. } \vartheta \frac{(13)}{\pi} \frac{((x))((\upsilon^2))}{2} \left[\frac{-\xi((\upsilon^2))}{2} \right], -\frac{y^2\xi}{2} \left[\frac{((\upsilon^2))\xi}{2} \right]$.

Ergo denique per 8, erit $\int \overline{y^2\beta} - 2 \int \overline{yx\gamma} \frac{(14)}{\pi} ((x\upsilon^2)) - y^2\xi$. Ut ante. Nulla ergo 5
 differentia in calculo producitur.

Interea haec computationis repetitio ad ejus comprobationem utilis fuit. Et apparet
 etiam, ad demonstranda Theoremata fundamentalia, quale hoc est, solere non solo calculo
 rem transigi, sed ipsum etiam situm venire in ratiocinationem. Quemadmodum apparet
 hoc loco resolutione ipsius \odot in φ et ϑ . et ipsius \triangleright in ϑ et φ opus fuisse. 10

Loco aequationis 14 etiam poterit scribi et eodem modo demonstrari 15. Quod quo
 modo enuntiam debeat sic patere: tantum scilicet enim semper γ ponetur in locum β vel
 contra. DC , sive ξ in locum $((B))((C))$ vel υ itemque $((D))((C))$ vel x in locum BC vel y .
 Et intra vincula x pro y vel contra. Tunc enim eadem quae ante ratiocinatio est. Et fiet:

$\int \overline{x^2\gamma} - 2 \int \overline{yx\beta} \frac{[(15)]}{\pi} y\xi^2 - ((x^2\upsilon))$. 15

Notanda haec substitutio, seu similis Ratiocinatio; seu similitudo rerum, non
 pendens a situ, sed a ratione. Ut similia sunt, in quibus eadem agendi ratio est. Notabile
 etiam ex his habemus theoremata, quando $\int \overline{x^2\gamma} \sqcap 2 \int \overline{yx\beta}$ etiam $y\xi^2 \sqcap ((x^2\upsilon))$. Eodem-
 π π

que modo in caeteris casibus enuntiaripotest Theorema determinantium.
 Quale in appropinquationibus magnos usus habere potest. Ex Aequationibus Tetragoni-
 sticis solent confici theoremata determinantia, quia in illis plerumque non sunt quanti-
 tates negativae. 20

18 Dazu am Rande: Novus character π π

21 theorema L ändert Hrsg.

23 Novus character: Leibniz verwendet die Zeichen π für „größer“ und π für „kleiner“
 bereits seit Sommer 1674; vgl. z. B. VII, 1 N. 47₁₀ Teil 3 S. 313 f.

Ubi obiter noto, quemadmodum Geometra propositiones alias Problemata alias Theoremata alias Lemmata, etc. appellat ita posse Analyticum distinguere propositiones Tetragonisticas a rectilinearibus; item determinationes ab Aequationibus et Analogiis; et Appropinquationes a constructionibus. Sunt et problemata irregularia, sunt Diophantea, sunt negativae propositiones.

Nota hinc casus ille particularis poterit inveniri, quo $y\xi^2 - (x^2\upsilon) \neq 0$. Adeoque fiet perfecte $\int \overline{x^2\gamma} \neq 2 \int \overline{yx\beta}$. Quod poterit servire ad inveniendas partium quadraturas.

1–5 *Dazu am Rande: Propositionum nomina*

1 quemadmodum (1) Theorema Determina (2) Geometra L 2 appellant L ändert Hrsg.
3 et Analogiis erg. L

mentum curvae ex axe $\frac{CPa}{BC} \wedge BC \sqcap CPa$. Quaeratur et ipsius Spatii quadratura. Ipsae BD repraesentent ipsas z et AE ipsi erit asymptotos. Fiat $\dagger 2qx + x^2 + q^2 \sqcap y^2$, sive $\ddagger x \ddagger q \sqcap y$. Ergo $\dagger 2qx + x^2 \sqcap y^2 - q^2$ et multiplicando per $\ddagger \frac{a}{q}$ fiet $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 \sqcap \ddagger \frac{a}{q}y^2 \ddagger aq$. Adeoque ponendo C' centrum, et $AC' \sqcap q$. Rectam transeuntem per C' axi normalem

5 vocabimus axem conjugatum. Et sumtis $C'B \sqcap y$. fiet $DB \sqcap z \sqcap a \sqrt{\frac{a^2}{\ddagger \frac{a}{q}y^2 \ddagger aq} + 1} \ddagger \frac{a}{q}$.

Porro omnium DB , momentum ex $C'F$ habebitur, si habeatur momentum omnium FD ex eodem, quod habebitur habitis omnibus y^2 . Jam $z^2 - a^2 \sqcap \frac{a^4}{\ddagger \frac{a}{q}y^2 \ddagger aq}$ et $\ddagger \frac{a}{q}y^2 \ddagger$

$$\underbrace{\ddagger \frac{a^3}{q}}_{\ominus}$$

$\ominus aq \sqcap a^4$ et $\frac{a^4 \ddagger \ominus aq}{\ddagger \frac{a}{q}}$ $\sqcap y^2$ seu $y^2 \sqcap \frac{\boxed{a^4} \ddagger aqz^2 \ddagger a^3q \boxed{-a^4}}{\ddagger \frac{a}{q}z^2 \ddagger \frac{a^3}{q} - \frac{a^4}{q^2}}$. Quod momentum ex

10 quadratura Circuli Hyperbolaeve haberi, constat. Et patebit aliquod momentum Curvae Ellipticae pendere ex Circuli, aliud ex Hyperbolae quadratura.

In Circulo $\ddagger \frac{a^3}{q} - \frac{a^4}{q^2}$ se tollunt. In Ellipsi fit denominator: $-\frac{a}{q}z^2 + \frac{a^3}{q} - \frac{a^4}{q^2}$. Quod si ergo q sit minor quam a . fiet denominator $-\frac{a}{q}z^2 - \dots$ et ita pendeat dimensio omnium y^2 ex Circulo. Sin $\frac{a^3}{q} \sqcap \frac{a^4}{q^2}$ seu $1 \sqcap \frac{a}{q}$. seu $q \sqcap a$, tunc erit $\frac{a^3}{q} - \frac{a^4}{q^2}$ quantitas affirmativa; et denominator erit $-\frac{a}{q}z^2 + \dots$ et pendeat summa omnium y^2 ex quad. Hyp.

15 Pro Hyperbola erit denominator $+\frac{a}{q}z^2 - \frac{a^3}{q} - \frac{a^4}{q^2}$. Quae pendet necessario ex Hyperbola. Ergo momentum curvae Hyperbolicae ex axe dato pariter et conjugato semper non nisi ex ipsa Quad. Hyp. pendet.

Si momentum curvae Ellipticae vel Hyperbolicae ad huc ex vertice aut alio axe invenire possemus, haberemus curvam Ellipseos vel Hyperbolae.

1 $\sqcap CPa$. | qvae datur *ändert Hrsg.* | et L

$$z \sqcap \sqrt{\frac{a^2 + 1 \mp \frac{a}{q} \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}, \mp 2a \mp \frac{a}{q}x}{2a \mp \frac{a}{q}x}}$$

Ejus momentum ex $2a \mp \frac{a}{q}x$. erit

$$\sqrt{\frac{a^2 + 1 \mp \frac{a}{q} \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}, \mp 2a \mp \frac{a}{q}x}{x}} \sqcap v.$$

Cujus figurae postremae omnium $\int v$ si haberi

posset dimensio, haberetur curva. Repraesentent jam DB ipsas v . Habetur ante omnia

eorum momentum ex AP axe quia $v^2 \sqcap \frac{a^2 \mp 2a \mp \frac{a}{q}x}{x} + 2a \mp \frac{a}{q}x$ [2]. quae pendet ex

quad. Hyp. et $v \sqcap \sqrt{\frac{a^2 + 1}{x \mp \frac{a}{q}} \mp 2a \mp \frac{a}{q}x}$ [2]. vel pro $2a \mp \frac{a}{q}x$ ponendo φ , fiet: $x \sqcap \frac{q\varphi}{a} \mp 2q$ 5

et fiet: $v \sqcap \sqrt{\frac{a^2 + 1}{\frac{q\varphi}{a} \mp 2q} \mp \frac{a}{q}} \mp \varphi^2$. Ponatur $v \sqcap \varphi \sqrt{\frac{1}{\frac{a}{q} + \psi}}$, fiet: $\frac{1}{\frac{a}{q}} \varphi^2 + 2\varphi\psi \sqrt{\frac{1}{\frac{a}{q} + \psi}}$

$\psi^2 \sqcap \frac{a^2}{\frac{q\varphi}{a} \mp 2q} \mp \frac{a}{q}$, et fiet $\mp 2\frac{q}{a} \sqrt{\frac{1}{\frac{a}{q}} \varphi^2 + 4q} \sqrt{\frac{1}{\frac{a}{q}} \varphi \mp \frac{a^2}{\psi} \mp 2q\psi}$. Redibi-

mus ad valde similem priori, v ad x referenti, aequationem. Ubi venit in mentem nova ad quadraturas investigandas via, calculo quodammodo mirabiliter detorto.

10

4 $v^2 \sqcap$: Auf der rechten Seite fehlt vor dem zweiten Term der Faktor $1 \mp \frac{a}{q}$, der im folgenden

Wurzelausdruck für v wieder auftritt. Dort fehlt der Faktor $2a \mp \frac{a}{q}x$ bei $\frac{a^2}{x}$. Leibniz rechnet zunächst

konsequent weiter, und der Fehler wirkt sich ab der Substitution mit ψ vorerst nicht weiter aus. In S. 416 Z. 29 verwendet Leibniz wieder die fehlerhafte Gleichung für v^2 .

Nimirum ponatur summa ipsarum v , quaelibet, seu ratio spatii ipsarum v , ad rectangulum circumscriptum ponatur aequalis cuidam quantitati incognitae; ergo eadem ratione habebitur et summa omnium φ , prodibit enim similis expressio. At ex data summa ipsarum v habetur summa ipsarum φ aliunde, vel contra. Ergo prodibit aequatio, quae dabit ipsam illam relationem spatii ad rectangulum circumscriptum. Cum est constans. Hac methodo inveniri poterunt quadraturae analytice aut demonstrari potest, eas fieri non posse, seu non esse rationes constantes. Modo scilicet data aliqua figura ostendi possit, eam dari, ex data alterius figurae ejusdem cum ipsa naturae, portione. Hac methodo fieri poterit etiam, ut figurarum quae totae sunt immensurabiles mensurentur certae portiones; re scilicet ita artificiose directa, ut reducantur ad portionum ipsis aequalium aut proportionalium quadraturas, tunc enim habebitur aequatio, et invenietur incognita, etsi non sit constans ratio spatii ad rectangulum circumscriptum. Et videndum an non hac ratione aliqua Circuli et Hyperbolae portio mensurari aliquando absolute possit.

Re recte inspecta apparebit paraboloides et Hyperboloides hoc modo fuisse mensuratas dum scilicet inventum est ipsis proportionales ad ipsarummet quadraturas requiri, unde venit ad aequationem, quae in eo casu simplicissima. Nec dubitandum veniri ad compositiores. Nimirum enumerandum quibus modis figurae ex figuris deducuntur, et inter varios modos Analyticae apparebunt viae, quibus duae figurae ex duobus capitibus sibi σύγνωτοι ostendantur. Imo et forte ex tribus pluribusque. Et quid si ex infinitis? Certe si ex infinitis hinc via patebit forte describendi aliam curvam, secundum quam appareat illa variatio, qua mutatur ratio Spatii quaesiti ad rectangulum circumscriptum. Eaque ratione pervenietur ad relationem partium curvae inter se. Quae jam habetur in Circulo et Hyperbola. Quodsi habetur adhuc unius portionis quadratura, habebitur quadratura omnium; per relationem, talis qualis esse potest. Id ergo circa circulum superest tentandum, ut et circa Hyperbolam, an non alicujus ejus portionis quadraturam ostendi bis possit alteram ex altera pendere.

His calculis imprimis apta Centrobarica. Variis enim artibus adhuc intentatis hic uti poterimus: ut non tantum habebimus summam omnium v^2 , sed et summam omnium φ^2 , nempe $\square 2a \mp \frac{a}{q}x$ quae $\square v^2$ (ex parab.) $-\frac{a^2 2a}{x} \mp \frac{a^2 a}{q}$. Itaque datur momentum hoc

3 enim (1) eadem curva (2) similis L 18 quibus (1) una fig (2) duae L 28 f. omnium (1)
 x^2 , nempe fiet (a) $x^2 \square$ (b) $\frac{a^2}{q^2}x^2 \square$ (2) $|\varphi^2$ erg. Hrsq. |, nempe L

ex data quadratura quae est datae reciproca, nam pro x substituendus foret valor purus per v .

Et summa omnium φ^2 , quae dat aliud rursus momentum dabitur ex Triangulo, rectangulo, figura data, parabola[,] quadratura Hyperbolae.

Figura quaelibet cum ejus reciproca semper hanc habet relationem, quod mensurari potest spatium ex earum ductu factu[m]. 5

Videndum an postea tale spatium alia ratione utiliter resolvere liceat.

Si figurae reciprocae ordinatae imponantur ordinarum datae extremis, momentum earum hoc modo positarum semper poterit haberi.

Idem est momentum in eodem plano, seu ungula semiquadrantalibus, quod ductus Trianguli in figuram. 10

Ut ex tribus momentis datis haberi potest centrum gravitatis; ope summae quadratorum ita ex tribus ictuum viribus datis, haberi poterit centrum agitationis, ope summae Cuborum. Quae omnia utilia ad figurae dimensionem. Poterunt Similia excogitari centra, altiora. 15

Quemadmodum invenire possumus duos locos ad lineam rectam, quorum intersectione invenitur centrum gravitatis[,] ita videndum an non possint inveniri loca ad Curvas. Seu an non artificio aliquo ostendi possit, centrum gravitatis, etsi ignotum nobis, cadere tamen necessario in aliquam lineam curvam.

Notabile est, si aliquando non quidem inveniantur duo momenta ex duobus axibus, absolute, sed tantum ratio eorum inter se habebitur linea recta in quam cadit centrum gravitatis; ut sit momentum unum m , alterum M . Sit id cujus momentum quaeritur q .

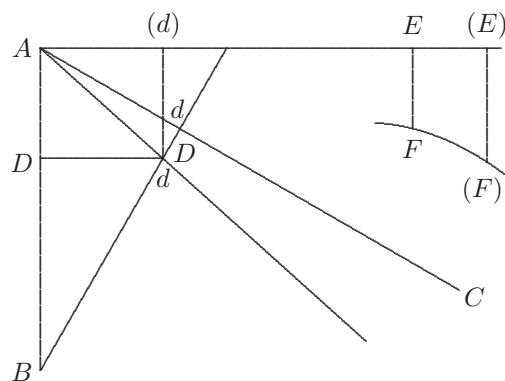
erit $\frac{m}{q}$, distantia una $\propto d$. $\frac{M}{q}$. distantia altera $\propto D$. et ponatur cognita $\frac{m}{M} \propto r$. Ratio,

$$\text{fiet } \frac{d}{D} \propto \frac{\frac{m}{q}}{\frac{M}{q}} \propto \frac{m}{M} \propto r. \text{ et } D \propto \frac{d}{r}.$$

Ergo si ponantur AB, AC . axes debet locus punctorum dD inveniri talis, ut inde ductae ordinatae in ADB, AdC , nempe DD, dd habeant rationem datam, qui locus, ut constat, est recta. Hinc jam tandem nova aperit sese consideratio, qua possit pervenire ad 25

1 quadraturae L ändert Hrsq. 2–5 per v. |Et ... Hyperbolae erg. | (1) $zy \propto a^2 \frac{a}{z} \propto \frac{y}{a}$ (2)

Figura L 12 ex (1) centro gravitatis duci potest (2) tribus L



[Fig. 2]

casus quo locus punctorum Dd sit curva. Ponatur M non ut hic $\propto \frac{m}{r}$ sed alia aequatione ex data m haberi posse, seu esse $M(\propto \sqrt{m} + : m$ etc.) $\propto m$ etc. fiet $\frac{d}{D} \propto \frac{m}{m}$ etc.

- Ex ipsa autem sit $m \propto AE$, vel $A(E)$ quaelibet, et $EF \propto M$. Dabitur utique curva
- 5 $F(F)$ exprimens relationem momentorum. Quodsi ergo angulus CAB rectus tunc locus punctorum dD erit curva proportionalis priori, id est, in qua ordinatae pariter et abscissae sint proportione auctae vel diminutae. Hoc enim tantum colligi poterit, quae sit curva ista, sed nondum poterit describi, etsi describi queas ipsi proportionalis. Nec dubitandum idem fore, etiam cum angulus non rectus. Itaque nondum locum descriptibilem obtinuimus.
- 10 Quodsi jam adhuc semel obtineamus relationem inter duo momenta duasque distantias tunc demum habebimus locum descriptibilem; Rursus enim infinitas habebimus curvas proportionales quae satisficient, quarum cum prioribus infinitis intersectiones, dabunt infinita puncta, in quorum aliquo esse potest centrum gravitatis.

- Ergo nunc primum habebimus locum. Ergo opus est adhuc alia duorum momentorum relatione, ut rursus novus habeatur locus. Cujus cum priore intersectione solvatur quaestio. Invenietur data nova duorum momentorum relatione plus quam opus est. Nimirum hoc modo trium locorum intersectione dabitur punctum Tertiae cui in infinitis

5 *Dazu am Rande:* In figuris ubi relatio portionum datur, ut in Circulo, et Hyperbola, ista utilia esse possunt. (Et) poterint fingi casus ubi veniatur ad portiones v. g. circulares, ubi angulorum sive arcuum relatio Geometrica haberi potest.

14 *Dazu am Rande:* Loci Tetragonistici

curvae proportionales, aut cum unis aut cum alteris prioribus intersectionem formantes, tria dabunt loca. Hinc si dentur tria momenta inter se relata habebitur jam solutio, credo, absoluta. Pro combinationibus enim duo habebuntur loca. Si duorum momentorum nota sit summa vel differentia, Nihilo minus opus erit combinationibus tribus. Quandocumque nota relatio inter ipsam quantitatem quaesitam, q . et ejusmodi momenta, tunc relatio inter D et d absolute habebitur. 5

Nota si angulus non rectus, solvatur illud problema simpliciter; locum invenire, talem ut D_dD, d_dD relationem inter se habeant datam, quod semper fieri potest. Huic loco tantum proportionales infiniti adscribentur. Sunt haec pulcherrima et plane nova. Si plura dantur ejusmodi momenta, postea elegantes inveniuntur aequationes tetragonisticae quadraturae hactenus inventae tantum inveniendo figurae alicujus relationem ad seipsum vel ex ea pendentis. Ita enim ventum ad aequationem. Videndum ergo quomodo ex data figura duci possint aliae, una methodo, ex eadem eadem alia methodo; modo caveantur identica. 10

Ubi varias figuras habebimus digeremus in progressionem Wallisiano more. Aliquando intersectione duarum progressionum inveniri poterit incognita, et veniri ad aequationem, et fingi possunt casus. Inprimis tunc cum si non ipsa figura, saltem ei sygnotos in alia est progressionem. 15

4 erit (1) pluribus (a) com (b) momentis (2) combinationibus L 5 inter (1) curvam (2) ipsam L

15 Wallisiano more: J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (WO I S. 355–478).

57. DE PROBLEMATIBUS IRREGULARIBUS

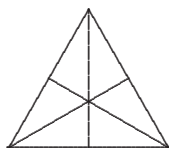
[November 1675 – Januar 1676]

Überlieferung: L Konzept: LH 35 X 8 Bl. 1. 1 Ausschnitt von 20 x max. 16 cm. In der linken oberen Ecke fehlt ein Streifen von max. 10 x 1,2 cm. 1 S. auf Bl. 1 r^o. Bl. 1 v^o leer. Cc 2, Nr. 1555

5

Datierungsgründe: Leibniz bezieht sich im vorliegenden Stück auf ein Gespräch mit O. Rømer, wie aus seinem Brief an Chr. Huygens vom 27. Januar/6. Februar 1691 hervorgeht (s. III, 5 N. 6 S. 48). Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum November 1675 bis Februar 1676 nachgewiesen. Zu den Belegstücken gehört ein Exzerpt aus einem Manuskript Rømers über Zahnräder, dat. Dezember 10 1675 (Cc 2, Nr. 1187; Druck in Reihe VIII). Irreguläre Probleme (vgl. S. 421 Z. 3) erwähnt Leibniz wiederholt im November u. Dezember 1675 (N. 50, 51₂, 55; VII, 1 N. 85₁). Das Hebelgesetz wird auch in der Gesprächsaufzeichnung N. 62 diskutiert, dort mit Verweis auf den Beweis von Guldin (s. S. 436 Z. 1–6). N. 57 dürfte also vor N. 62 entstanden sein.

15



[Fig. 1]

20

Mons. Romer cherche de demonstrier les principes mecha- niques, d'une maniere singuliere. Il demonstre rigoureusement le theoreme d'Archimede; que les forces des corps pesans sont reciproques aux distances; mais dans des cas particuliers, lors que les corps sont tenues de la progression geometrique double; par le moyen du parallelogramme, ou quarré, où le centre de gravité tombe dans la moitié du quarré; et quand ils sont triples par le moyen du Triangle Equilaterre, où le centre de gravité tombe sur un tiers de la hauteur, c'est à dire dans le milieu. Donc s'il pourroit demonstrier que quelque raison donnée que ce soit, comme 7. à 8. se peut exprimer par deux nombres dont l'un est pris de la progression geometrique double, l'autre de la progression geometrique triple, en sorte que ces deux nombres soient en raison donnée, ou au moins moins differente de la donnée qu'aucune donnée; 25 sa demonstration seroit rendue generale. Soit la raison donnée $\frac{a}{b}$. Soit l'exposant de la puissance ou du terme de la progression geometrique double, y , et de la triple v , et soit

16 le (1) principe (2) theoreme L 26 exponent L ändert Hrsg.

16 theoreme: ARCHIMEDES, *De aequiponderantibus* I, prop. VI u. VII. 19 Fig. 1: Eine gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

la difference e . Il faut que e soit moindre que la donnée c . Ainsi il faut que $\dagger \frac{a}{b} \dagger \frac{2^y}{3^v} \sqcap c$ ou $\sqcap c - d$ vel contra $(\dagger) \frac{a}{b} (\dagger) \frac{3^\omega}{2^x} \sqcap c - f$.

Haec problemata sunt ex illorum numero, quae irregularia appello; ipsi sufficeret, etsi non inveniri possent tales termini, tamen ostendi eos esse. Auferatur fractio ex aequationibus, et pro $\frac{a}{b}$ ponatur g . Fiet $\dagger g3^v \dagger 2^y \sqcap c3^v - d3^v$. ubi v . et y . et d . sunt 5
arbitrariae, nisi quod d . minor quam c . Si quaeramus valorem ipsius d . erit: $d \sqcap c \dagger \frac{2^y}{3^v} \dagger g$.

$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$
etc.	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{4}$
$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{8}$	etc.
etc.	etc.	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{27}{2}$
$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	etc.	etc.
etc.						

10

Nimirum serie fractionum quantum satis est continuata quaeritur an non tandem aliquando ad fractionem perveniatur a data, $\frac{a}{b}$ minus differentem quantitate data. Patet 15

1 difference (1) donnée e. je dis que (2) e. L 5 fiet $\dagger (1) \langle 2^x \rangle g (2) g2^x \dagger 3^\omega \sqcap c2^x - f2^x (3) | g2^v \dagger (a) 3^x (b) 3^y \sqcap c2^v - d2^v$ ändert Hrsq. |. ubi (aa) tantum observandum est (bb) x. (cc) v. L
7f. $\dagger g$. (1) Et quoniam in ratione qualibet ut $\frac{a}{b}$. licet (2) $\frac{2}{3} \frac{4}{9}$ (3) $\frac{16}{27} \frac{4}{9} \frac{3}{2} \frac{1}{3} \frac{2}{4} \frac{9}{16}$ (4) $\frac{8}{27}$ L

8–12 Leibniz gibt in der ersten Zeile der Tabelle die Werte von $\frac{2^y}{3^v}$ für $y = v$. Die folgenden Zeilen, die er schematisch durch Wiederholen und Verschieben der Zahlenfolgen von Zählern und Nennern bildet, entsprechen aber nur noch abschnittsweise der Form $\frac{2^y}{3^v}$.

hoc exemplo quam necesse sit *summas aut differentias rationum* explicare per *summas aut differentias fractionum*, neque enim te aliter hic explices, cum dicitur quaeri rationem a data differentem quantitate, minore quam sit alia ratio data. Quae locutio in demonstrandis Tetragonisticis saepe occurrit. Sed hoc obiter.

5 Ut ad ipsum problema redeamus, si non differentia minor data, sed simpliciter aequalitas quaereretur, et ita deberent esse *y*. et *v*. rationales, non esset problema in nostra potestate. Sed quoniam sufficit differentia minor aliqua data, ausim sperare solvi posse. Sed eum in finem videndum an non aliquando Geometria Hyperbolica ex data Hyp. Quadratura tale quiddam praebeat. Ut si sit: $a^y \cap$ datae *b*. poterit haberi *y*. per qua-

10 draturam Hyperbolae. Nota, quod loco $\frac{2^y}{3^v}$, scribi potest: $\frac{2^v}{3^v} \wedge 2^z \cap \dagger d \dagger c + g$ ponendo $v + z \cap y$. Ergo $\frac{2}{3} \cdot v \cap \frac{\dagger d \dagger c + g}{2^z}$. Quae aequatio est ad quendam locum, sive curvam transcendentem cujus tangentes inservire poterunt fortasse.

Ope Methodi Mercatoris et meae, habebimus valorem ipsius *v*, ex sumta *z*. pro arbitrio, ubi tantum *z*. sumenda erit pro numero integro quolibet, tali tamen, ut *g*. etiam

15 sumta pro arbitrio, et prout res postulat, ipsa quantitas *v*, numero integro cuidam fiat valde propinqua.

$$10 \wedge 2^z \cap (1) \underbrace{\text{datae quantitati } \dagger h (2) \dagger d L}_{c}$$

13 Methodi: Leibniz betrachtet die in N. MERCATOR, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XIV–XVII, S. 28–33 [Marg.] dargestellte Methode der Reihenentwicklung durch fortgesetzte Division als Umkehrung der von ihm in der *Accessio ad arithmetica infinitorum*, III, 1 N. 2 S. 4f., bewiesenen Regel für die Summierung abnehmender geometrischer Folgen; vgl. VII, 3 N. 38₂ S. 386.

58. CURVARUM DIMENSIO

2. Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 284. Ausschnitt von max. 12 x 11 cm, Ränder ungleichmäßig. Am linken Rand von Bl. 284r^o abgeschnittene Wörter und Silben von Leibniz' Hand ergänzt. Textfolge Bl. 284v^o, 284r^o.

5

Cc 2, Nr. 1250, 1252

2 Januar. 1676

Curvarum dimensio ex Tang. invers.

Tangens curvae trunci superficiei cylindricae in rectum expansi generaliter sic habetur, sit basis superficiei cylindricae, curva $A1C$ quae seminormaliter abscissa sit, ea in rectum extensa, et plano curvae applicata, ita ut $A1C$ arcus extendatur in $A1N$ rectam, erit curva $A1L$ terminus superficiei cylindricae expansae. Jam quaeritur ejus tangens $1L1M$. Ad punctum $1C$ baseos superficiei cylindricae, ducatur tangens, $1C1V$. Cui occurrat perpendiculariter $1B1V$ et $1C1V$ transferatur in $1N1M$, juncta $1L1M$ tanget.

Hinc ex data $A1L$ curva invenire curvam $A1C$. sic inquiretur.

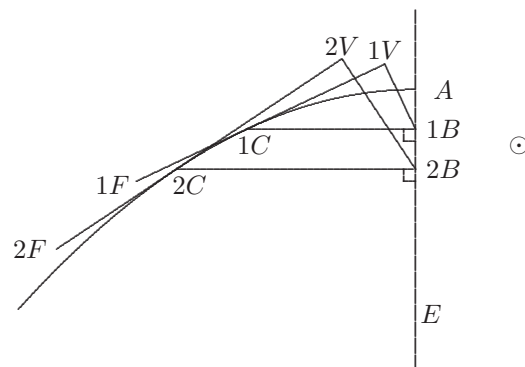
15

Triangulum $1B1V1C$ situ et magnitudine datur, ut et triangulum $2B2V2C$. excepto hoc uno, quod non constat quam alte locari debeat, itaque ad curvam ejusmodi tentando inveniendam, opus foret sursum deorsumque movere, tale triangulum saltem imaginatione, idemque in singulis separatim esset faciendum, sed ea lege, ut continuata $1C1V$ semper cadat extra (cae)tera C . vel ut addita ad triangulum firmum mobile recta $1P1C$ parallela ipsi $1B1V$, sit semper $1P1C$ minima earum quae a puncto $1P$ ad curvam duci possunt. Hoc vel tentando facere difficillimum unde proponi posset quaestio mechanica elegans, ad ex. darem alicui centum ejusmodi triangula longitudinis determinatae, BC ,

20

7 2 Januar. 1676 *erg. L* 8 Curvarum ... invers. *erg. L* 14 juncta (1) $1C1M$ (2) $1L1M$ *L*

9–14 Tangens ... tanget: Die zugehörige Figur fehlt. Da die Höhe des Zylinderhufs in $1C$ gleich der Abzisse AB gewählt ist, ist nicht $1C1V$, sondern der Tangentenabschnitt zwischen $1C$ und der Ordinatennachse in $A1N$ abzutragen, um die Tangente von $A1L$ in $1L$ zu bestimmen. Die folgende Überlegung müsste entsprechend modifiziert werden.



[Fig. 2]

capiet, si male collocat. Problema reducitur ad hanc quaestionem Geometricam, invenire curvam, in qua si BC ordinatae, sint CV tangentes. Opus esset ista elaborari, saltem ex materia aliqua chartacea sive facili.

2f. invenire (1) puncta (2) curvam L

59. TETRAGONISTICA EX TRIANGULO CHARACTERISTICO

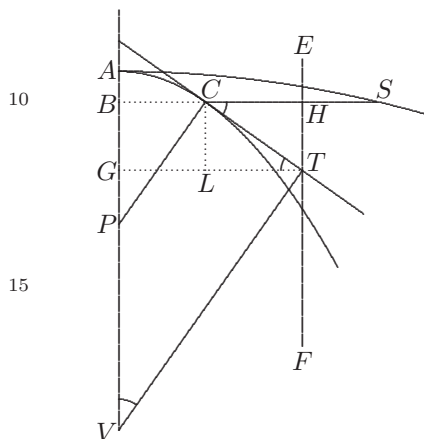
2. Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 356. 1 Ausschnitt von max. 25,1 x 9,0 cm. Am linken Rand schräge Schnittkante. 1 S. auf Bl. 356 r^o. Bl. 356 v^o leer.
Cc 2, Nr. 1251

5

2. Jan. 1676

Tetragonist. ex Triang. characterist.



10

15

20

[Fig. 1]

datum C , ad quod debet duci tangens CT . id est, debet duci recta CT , ad ipsam EF constantem talis, ut TG ex occursus puncto demissa ipsam GV faciat esse datam scilicet BS . quae data est. Ergo tangentium curvae Logarithmicae inventio redit ad hoc problema: Datis duabus rectis AV . EF interminatis parallelis et puncto C ,] ex hoc puncto

AC Curva. BC ordinata, CP perpendicularis ad axem. EF recta interminata parallela AB axi. Pro-
ducatur tangens CT dum huic rectae occurrat in T .
Ex T demittatur perpendicularis TG in axem; et GV
applicentur in BS ut ibi transeat curva AS . Ajo figu-
ram $ABSA$ aequari rectangulo GT . in BC . seu habetur
summa omnium GV . Jam etiam habetur summa om-
nium BP . Ergo et horum differentia summa omnium
 $\dagger GV \dagger BP$. Hinc modus ducendi tangentes ad figuras
quae a me vocantur summatrices. Sit AC curva Loga-
rithmica, (etsi alterius plane formae esse debeat;) erit
 AS curva Hyperbolica; seu GV applicata Hyperbolae,
cujus abscissa AB . Sit ergo punctum in Logarithmica

6 2. Ian. 1676 erg. *L* 7 Tetragonist. ... characterist. erg. *L* 8 | 2 Ian. 1676
erg., streicht Hrsg. | AC Curva *L*

20 Fig. 1: Leibniz gibt in der Figur die aus der gegebenen Kurve AC konstruierte, durch S lau-
fende Kurve weder im Krümmungsverhalten noch im Verlauf durch den Punkt A korrekt wieder. Eine
gestrichene und teilweise überschriebene Vorstufe zur Zeichnung wird nicht abgedruckt.

C unam rectarum interminatarum AV ducere rectam CT talem, ut si ex puncto occursum T duae ducantur rectae ad alteram interminatarum AV , una TG perpendicularis utrique interminatarum, altera TV perpendicularis ductae perpendicularis $CT_{[1]}$ sit GV data.

Datis positione rectis AV , EF parallelis_[1] ex puncto C , ducere ad unam parallelarum rectam CT talem, ut ductis TG perpendiculari ad AV et EF parallelas, et TV perpendiculari ad ipsam CT ductam, occurrentibus parallelarum alteri in G . et V . fiat GV data. Sit $CB \sqcap b$. $GT \sqcap g$. $CH \sqcap h \sqcap \dagger b \dagger g$. $GV \sqcap v$. datae, quaeritur $CL \sqcap BG, \sqcap HT$. ut inveniatur punctum T . Quod statim ita fiet: ∇^{1a} \underbrace{VGT} et \underbrace{TLC} similia. Ergo $\frac{HT}{CH \sqcap \dagger b \dagger g} \sqcap \frac{GT \sqcap g}{GV \sqcap v}$. Ergo $HT \sqcap \frac{\dagger b g \dagger g^2}{v}$. Jam in Hyp. si $AB \sqcap x$. erit $BS \sqcap GV \sqcap v \sqcap \frac{g^2}{x}$ et fiet $\frac{HT}{x} \sqcap \frac{\dagger b \dagger g}{g}$ seu erit HT ad AB ut CH ad GT . Eadem pro aliis summatricibus, sumendo tantum ordinatam summatrae pro v .

1 C (1) alterutram (2) unam rectarum | AV erg. | (a) ducere (b) interminatarum ducere L ändert Hrsg. 4f. ducere | (1) | ad *streicht* Hrsg. | alteram (2) ad unam parallelarum erg. | rectam L

60. AEQUATIONES TETRAGONISTICAE PER CALCULUM DIFFERENTIALIALEM

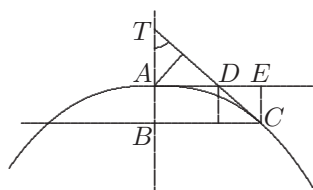
Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 324. Ca 9/10 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 324 r°. Bl. 324 v° leer. Am oberen Rand algebraische Rechnung ohne direkten Bezug zum Haupttext (= S. 431 Z. 6 f.). Bl. 324 bildete ursprünglich den oberen Teil der linken Hälfte eines Bogens 2°; die anderen Teile des Bogens (abzüglich eines schmalen Streifens) sind N. 61 sowie VII, 1 N. 20 und VII, 1 N. 21.
Cc 2, Nr. 1290

5

10

Janvier 1676

Aequationes tetragonisticae
per calculum differentialem

[Fig. 1]

Sit BT portio axis inter tangentem et ordinatam t , $\square bx^z$, et $AD \square d$. Erit $\frac{d}{y} \square \frac{bx^z}{bx^z - x} \square \frac{bx^{z-1}}{bx^{z-1} - 1}$. et $d \square y \frac{bx^{z-1}}{bx^{z-1} - 1} \square y + \frac{y}{bx^{z-1} - 1}$.
 $x^2 \square b + cy + dy^2 + ey^3$ etc., unde $2xt \square cy +$

15

$2dy^2 + 3ey^3$ etc. et $t \square \frac{cy + 2dy^2 + 3ey^3 \text{ etc.}}{[2]\sqrt{b + cy + dy^2 + ey^3 \text{ [etc.]}}}$.

$b + cx + dx^2 + ex^3$ [etc.] $\square y^2$. Ergo $ct + 2dxt + 3ex^2[t]$ [etc.] $\square 2y^2$, et fiet: $t \square \frac{2b + 2cx + 2dx^2 + 2ex^3 \text{ etc.}}{c + 2dx + 3ex^2 \text{ etc.}}$. Ergo quando potentia aliqua ipsius ordinatae rationaliter

20 haberi potest ipsa t est rationalis, modo absint rectangula incognita.

11f. Aequationes ... differentialem erg. *L* 15f. $+\frac{y}{bx^{z-1}-1}$. (1) $x^2 \square (2)$
 $y^2 \square b + (a) cx^2 (b) cx + dx^2 + (aa) d (bb) ex^3$ etc, fiet: $2yt$ (3) sit $AB \square 1$ (4) $x^2 \square L$

14 $\frac{d}{y} \square \frac{bx^z}{bx^z - x}$: Richtig wäre $\frac{d}{y} = \frac{bx^z - x}{bx^z}$. Leibniz setzt in S. 429 Z. 1 noch einmal mit dem korrekten Ausdruck an.

Jam $\frac{d}{y} \cap \frac{t-x}{t} \cap 1 - \frac{x}{t}$ seu $d \cap y - \frac{x}{t}y$. Eruntque $DE \cap \frac{xy}{t}$. DE eandem potentiam habebunt rationalem quam habent y . Verbi gratia si y est radix quadratica, erit: $DE^2 \cap \frac{b+cx+dx^2+ex^3 \text{ etc.}, x^2}{2b+2cx+2dx^2+2ex^3 \text{ etc.}}$ sive $DE^2 \cap \frac{cx^2+2dx^3+3ex^4 \text{ etc.}}{2}$. Unde patet generalius $\frac{c+2dx+3ex^2 \text{ [etc.]}}$

posse enuntiari, et posito $b+cx+dx^2+ex^3 \text{ etc.}$ $\cap y^z$ fore $DE^z \cap \frac{x^z}{z} \cap 0b+1c+2dx+3ex^2$ etc. At $\int \overline{DE} \cap \int \overline{xdy}$ ut ex alibi a me demonstratis constat, quaeramus ergo dy . per x . 5

$\frac{t}{y} \cap \frac{\omega}{\beta}$. At $t \cap \frac{zy^z}{c+2dx+3ex^2 \text{ [etc.]}}$ et $\omega \cap \frac{\beta zy^{z-1}}{c+2dx+3ex^2 \text{ etc.}}$ $\cap dy$. Jam $\int \omega$ semper haberi potest, $\cap y$. Ergo explicando ω et y , habebimus theorema sequens Arithmeticae infinitorum promotae, sane memorabile et mirum

$$\int \frac{dx z \overline{b+cx+dx^2+ex^3 \text{ etc.}}}{\sqrt[z]{b+cx+dx^2+ex^3 \text{ etc.}}, \cap 0b+1c+2dx+3ex^2 \text{ etc.}}$$

$$\cap \sqrt[z]{b+cx+dx^2+ex^3 \text{ etc.}} \cap \int \overline{\omega} \cap \int \overline{dy}.$$

Item $\int DE + \int y \cap yx$. Unde theorema Arithmeticae infinitorum: 10

9 Am Rande: $\frac{y}{\sqrt[3]{y}} \cap \sqrt[3]{y^2}$

1 $\frac{xy}{t}$. (1) eruntque DE ra (2) | et *gestr.* | DE | habebunt *streicht Hrsg.* | eandem L 11 Unde (1) regu (2) theorema L

2 erit: In der anschließenden Gleichung müsste die rechte Seite $\frac{(b+cx+dx^2+ex^3+\dots)^2 x^2}{\left(\frac{2b+2cx+2dx^2+2ex^3+\dots}{c+2dx+3ex^2+\dots}\right)^2}$ lauten. Leibniz rechnet mit dem falschen Ausdruck und dem daraus in Z. 4 f. fehlerhaft abgeleiteten Wert für DE^z konsequent bis S. 430 Z. 1 f. weiter. 5 alibi: N. 22 S. 186 Z. 17 f. 6 $\frac{t}{y} \cap \frac{\omega}{\beta}$; Richtig wäre $\frac{t}{y} = \frac{\beta}{\omega}$. Der Fehler beeinträchtigt die Rechnung bis S. 430 Z. 2.

$$\int \sqrt[z]{b + cx + dx^2 + ex^3 \text{ etc.}} + \frac{x}{\sqrt[z]{z}} \sqrt[z]{0b + 1c + 2dx + 3ex^2 \text{ [etc.]}}$$

\Downarrow
 \odot

$$\pi x \sqrt[z]{b + cx + dx^2 + ex^3 \text{ [etc.]}}$$

Ex hoc posteriore theoremate habemus id commodi, ut semper summam omnium \odot possimus reducere ad summam omnium \Downarrow quae utique simplicior est.

$$5 \quad \text{Si sit } x^z \pi b + cy + dy^2 \text{ etc. erit } t \pi \frac{0b + cy + 2dy^2 \text{ etc.}}{zx^{z-1}} \text{ vel } t \pi \frac{0b + cy + 2dy^2 \text{ [etc.]}}{zx^z \wedge \sqrt[z]{x}}$$

Jam $\int tdy \pi \int ydx$.

Sit aequatio: $xb + cxy + dxy^2 \text{ etc.} \pi e + fy + gy^2 \text{ etc.}$ Ponamus:

$$tb + cty + dty^2 \text{ etc.} \pi e0 + fy + 2gy^2 \text{ etc.}, -cxy - 2dxy^2 \text{ etc.}$$

et

$$10 \quad t \pi \frac{e0 + fy + 2gy^2 \text{ [etc.]}}{b + cy + dy^2 \text{ [etc.]}} , \frac{cy - 2dy^2 \text{ [etc.]}}{b + cy + dy^2 \text{ etc.}} \wedge \frac{e + fy + gy^2 \text{ [etc.]}}{b + cy + dy^2 \text{ etc.}}$$

quorum in dy summa $\pi \int dx \wedge y$. Si ad summam tdy addatur summa xdy , habebitur area productae quantitatis. Et $\int t + x$ semper haberi potest. Et hoc loco:

$$\int \frac{0e + 1fy + 2gy^2 \text{ [etc.]}, \wedge b + cy + dy^2 \text{ [etc.]}, -0b - cy - 2dy^2 \text{ [etc.]}, \wedge e + fy + gy^2 \text{ [etc.]}, + e + fy + gy^2 \text{ [etc.]}, \wedge b + cy + dy^2 \text{ [etc.]}}{[2]b + cy + dy^2 \text{ [etc.]}}$$

$$\pi \frac{e + fy + gy^2 \text{ [etc.]}, \wedge b + cy + dy^2 \text{ [etc.]}, \wedge y}{b + cy + dy^2 \text{ [etc.]}}$$

$$15 \quad \text{Si } b + cx + dx^2 + ex^3 \text{ etc.} \pi y^z. \text{ erit } t \pi \frac{zy^z}{c + 2dx + 3ex^2 \text{ [etc.]}}. \text{ Jam } p \pi \frac{y^2}{t}. \text{ Ergo } p \pi$$

$$\frac{c + 2dx + 3ex^2 \text{ [etc.]}}{zy^{z-2}}. \text{ Et quia semper } \int p \pi \frac{y^2}{2} \text{ fiet } \left[\int \frac{c + 2dx + 3ex^2 \text{ [etc.]}}{z \sqrt[z]{[2]b + cx + dx^2 + ex^3 \text{ etc.}}} \pi$$

1 f. *Dazu am Rande:* $\int \sqrt[z]{y}$ invenitur ex $\int x \sqrt[z]{dy}$ vel contra.

4 redicere L ändert Hrsg. 17 (1) $\int \bar{y}$ (2) $\int \sqrt{y}$ in (3) $\int \sqrt{y}$ invenitur | ex dato *streicht* Hrsg. | $\int \bar{x}d$ (4) $\int \sqrt[z]{y} L$

5 vel $t \pi$: Im Nenner der rechten Seite der Gleichung müsste $zx^z x^{-1}$ stehen. Leibniz unterläuft in Z. 15 f. ein ähnlicher Fehler, den er allerdings sofort richtigstellt. 12 loco: Auf der rechten Seite der

anschließenden Gleichung müsste es $\frac{(e + fy + gy^2 + \dots)y}{b + cy + dy^2 + \dots}$ heißen.

$$\frac{1}{2} \sqrt[3]{2b + cx + dx^2 + ex^3 \text{ [etc.]}}.$$

Imo cavendum ab errore[:]

$$\int p \sqcap \int \frac{c + 2dx + 3ex^2 \text{ etc.} \cdot \sqrt[3]{2b + cx + dx^2 + ex^3 \text{ [etc.]}}}{z \sqrt[3]{b + cx + dx^2 + ex^3 \text{ [etc.]}}}$$

$$\sqcap \frac{1}{2} \sqrt[3]{2b + cx + dx^2 + ex^3 \text{ [etc.]}}.$$

[Rechnung ohne direkten Bezug zum Haupttext]

5

$$\sqrt[3]{b + \sqrt{c}} \sqcap y + \sqrt{x}. \text{ Ergo } b + \sqrt{c} \sqcap y^3 + 3y^2\sqrt{x} \sqcap b + \sqrt{c}. \text{ Ergo } 9y^4x + 6y^2x^2 + x^3 \sqcap c.$$

$$3xy \quad x$$

$$\text{et } x \sqcap \frac{b - y^3}{3y}.$$

5 Die Rechnung algebraischen Inhalts wurde vermutlich vor dem Haupttext der Aufzeichnung am oberen Rand des Blattes notiert. 6 $\sqrt[3]{b + \sqrt{c}} \sqcap y + \sqrt{x}$: vgl. die Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus von ca Oktober 1675, VII, 2 N. 54 S. 712.

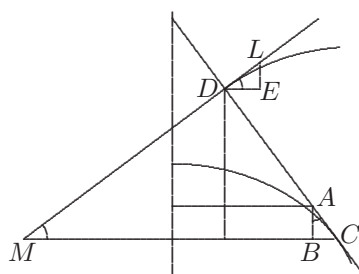
61. THEOREMA TETRAGONISTICUM MEMORABILE EX NATURA EVOLUTIONIS

Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 136. 1 Streifen von max. 39,1 x 3,4 cm mit Mittelfalz. Unregelmäßige Schnittkanten. 7 Z. Haupttext auf Bl. 136 v^o (links vom Falz), Datum und Überschrift auf Bl. 136 r^o (links vom Falz). Bl. 136 bildete ursprünglich den unteren Teil (abzüglich eines schmalen Streifens von max. 18,9 x 4,2 cm am unteren Rand) eines Bogens 2°; die anderen Teile sind N. 60 sowie VII, 1 N. 20 und VII, 1 N. 21. Cc 2, Nr. 1286

Januar. 1676.

Theorema tetragonisticum memorabile ex natura evolutionis qua multae quadraturae revocantur ad dimensionem curvae unius, et ita a se invicem pendent.



[Fig. 1]

Sit curva evolventa *AC* evolutione descripta *DL*. Triangulum characteristicum illius *ABC*, hujus *DEL*. anguli *BAC*, et *EDL* aequales. Tangens evolutione descriptae, *LD* producatu r donec cuidam *MBC*. ordinatae ad curvam occurrat in *M*. Erit ∇MDC simile $\nabla^{lo} ABC$, ergo *DC*, ad *MC* \cap *BC* ad *AC* seu *DC* in *AC* \cap *MC* in *BC*. Jam *DC* in *AC*. semper haberi possunt ex data curva,

11–13 *Daneben:* Adde nova de via Centri gravitatis.

14 *Darüber:* NB. NB.

12 multae erg. *L* 12f. ad (1) dimensiones curvarum, et a (2) dimensionem *L*

22 *Fig. 1:* Eine durch Zerschneiden ungültig gemachte Vorstufe zur Figur (zum Teil auf N. 60) wird nicht wiedergegeben. 23 nova ... gravitatis: N. 77.

nam si imponantur curvae, et postea in rectum extendantur terminabuntur ad lineam rectam. Ergo semper habebuntur omnes MC ad basin. Ubi jam illud praeclarum hinc sequitur, quaecunque et quomodocunque ducantur parallelae istae semper fore summas hoc modo sumtas aequales inter se. Quod sine exemplo.

62. DE PROGRESSIONIBUS ET FIGURA SEGMENTORUM. DE AEQUILIBRIO PONDERUM. DE LUNULA. DE CONCHOIDE

[Januar 1676]

5 **Überlieferung:** *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz u. Tschirnhaus): LH 35 XIII 2 b Bl. 108 bis 109. 1 Bog. 2°. Am oberen Rand von Bl. 109 ist ein keilförmiger Streifen von max. 19,8 x 1,7 cm abgeschnitten. 1 S. auf Bl. 108 v^o gegenläufig zum Text auf Bl. 109 r^o, Fig. 3c, 3d und 4 quer. Auf dem Rest des Bogens N. 63 und 64, VII, 2 N. 72–74 sowie Cc 2, Nr. 1117 u. 1119 (Druck in späteren Bänden der Ausgabe).
Cc 2, Nr. 00

10 Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für November 1675 bis Februar 1676 belegt. Das in Teil 2 von Tschirnhaus diskutierte Hebelgesetz ist auch Thema in N. 57, dort jedoch noch ohne den Hinweis auf den Beweis in Guldins *Centrobaryca*. N. 62 dürfte demnach nach N. 57 entstanden sein. N. 62 wurde vermutlich als erstes auf dem Bogen notiert, N. 63 ist vor N. 64 geschrieben. Die in N. 64 angekündigte Mitteilung der Quadraturmethode von Bertet für die Reziproken der Parabeln (Antiparabeln) hat Leibniz am 9. Februar 1676 erhalten (III, 1 N. 76). Mit der Quadratur der Reziproken der Parabeln befasst Leibniz sich in N. 65, dat. Januar 1676, das kurz nach N. 64 entstanden sein dürfte.

[Teil 1]

[Tschirnhaus]

$$\frac{x^3}{xx - aa} \left(x + \frac{aa}{x} + \frac{a^4}{x^3} + \frac{a^6}{x^5} \right)$$

20
$$\frac{x^3 + aax + \frac{a^4}{x}}{-aax - \frac{a^4}{x}}$$

$$\frac{x}{1-y} \left| \begin{array}{l} xy \neq \frac{aa}{x} \\ y \neq \frac{aa}{xx} \end{array} \right.$$

$$\frac{a}{1-y} \left| \begin{array}{l} a+b \\ ay \neq b \end{array} \right.$$

25
$$y \neq \frac{b}{a}$$

20 + aax + a⁴x T ändert Hrsg.21 - aax - a⁴x T ändert Hrsg.

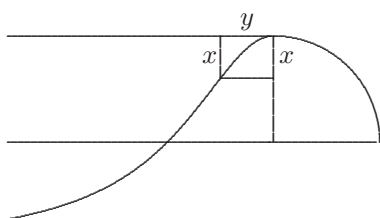
$$\frac{a}{1 - \frac{b}{a}} \quad \frac{a}{1} \quad \frac{a-b}{a} \quad \frac{x - \frac{aa}{x}}{xx} \quad \frac{xx - aa}{x} \quad \frac{aa}{a-b} \quad \frac{x^3}{xx - aa}$$

2+2

1+1+1+1

5

$$\frac{1}{1-1} \approx \frac{1}{2-1} \approx \frac{2}{4-2} \quad \frac{1}{0} \quad \frac{1}{3-2} \approx \frac{4}{2-2}$$



[Fig. 1, Tschirnhaus]

[Tschirnhaus]

10

$$x \approx \frac{2ayy}{aa + yy} \quad \frac{2ayy}{yy + aa} \left(2a - \frac{2a^3}{yy} + \frac{2a^5}{y^4} \right)$$

[Leibniz]

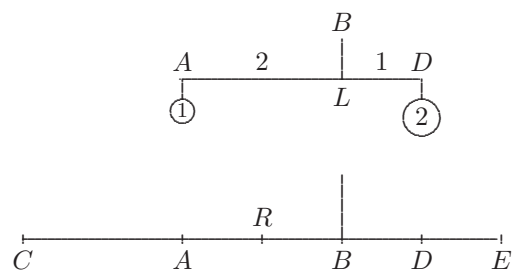
$$\frac{a^5}{y^4 + a^4} \sqcap x$$

4f. Nebenbetrachtung: 1+1+1 0 <1>
 $\frac{1}{1-1}$

9 Darunter, Leibniz: 0 4

[Teil 2]

[Tschirnhaus]



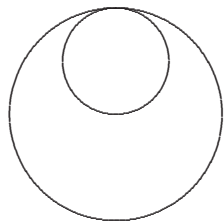
[Fig. 2]

$$\begin{array}{l}
 RA \quad \text{---} \quad RD \quad \text{---} \quad EB \quad \text{---} \quad BC \\
 \quad \quad \quad \neq 1 \text{ pond:} \quad \neq 2 \text{ pond:} \\
 DB \quad \text{---} \quad BA
 \end{array}$$

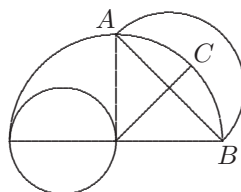
5

[Teil 3]

[Tschirnhaus oder Leibniz]



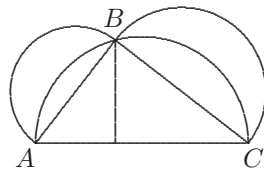
[Fig. 3a]



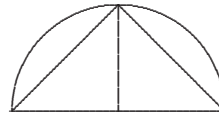
[Fig. 3b, Tschirnhaus]

3 *Innerhalb der Figur, Leibniz:* Guldinus demonstrat facile, quod pondera distantis reciprocè proportionalia in aequilibrio.

3 *Fig. 2:* vgl. E.W. v. TSCHIRNHAUS, *Medicina mentis*, 1687, S. 106–108. 10 demonstrat: s. P. GULDIN, *Centrobarica*, 1635–1641, lib. 1, S. 33–35.



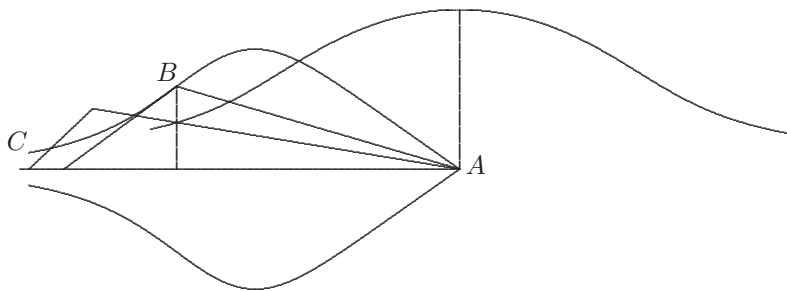
[Fig. 3c, Tschirnhaus]



[Fig. 3d]

[Teil 4]

[Tschirnhaus und Leibniz]

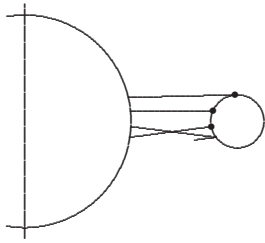


[Fig. 4]

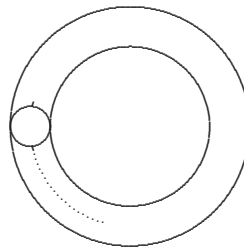
4 Schräg innerhalb der Figur, Leibniz: Curva Slusii ubi tangentium ejus methodus.

1 Fig. 3c, Fig. 3d: Die beiden Figuren sind quer zum Text und den vorhergehenden Figuren notiert. 4 Fig. 4: Die Figur verläuft quer. Die Punktbezeichnung B stammt von Tschirnhaus, die übrigen Punktbezeichnungen sind von Leibniz rechtläufig eingetragen. 5 Slusii: s. R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668 [Marg.], S. 117–130 als Anwendung der Tangentenmethode, dargestellt in *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VIII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059).

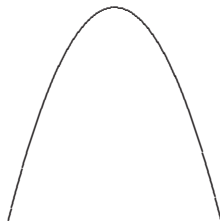
[Figuren ohne eindeutigen Bezug, Tschirnhaus oder Leibniz]



[Fig. 5]



[Fig. 6]



[Fig. 7]

2f. Fig. 5 . . . Fig. 7: Fig. 5 und 7 durchdringen einander (Entstehungsreihenfolge nicht zu ermitteln) und stehen am linken Rand oberhalb der querlaufenden Fig. 4. Fig. 6 befindet sich am rechten Rand oberhalb von Teil 2.

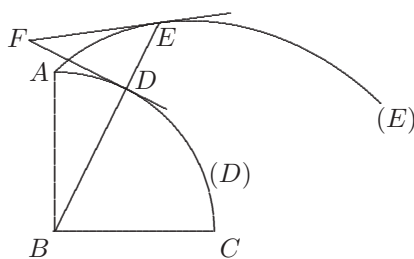
63. DE LA BEAUTÉ DES THÉORÈMES

[Januar 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2 b Bl. 108–109. 1 Bog. 2°. Am oberen Rand von Bl. 109 ist ein keilförmiger Streifen von max. 19,8 x 1,7 cm abgeschnitten. 12 Z. auf Bl. 109 v°. Auf dem Rest des Bogens N. 62 u. 64, VII, 2 N. 72–74 sowie Cc 2, Nr. 1117 u. 1119 (Druck in späteren Bänden der Ausgabe). 5
Cc 2, Nr. 1118

Datierungsgründe: s. N. 62.

Les theoremes ne sont pas intelligibles que par leurs signes ou caracteres. Les images sont une espece des caracteres. Quand les caracteres peuvent estre semblables aux choses, 10
tant mieux. La beauté des theoremes consiste dans le bel arrangement de leur caracteres. J'en donneray un exemple[:]



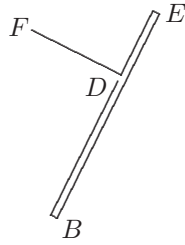
[Fig. 1]

Le Pere Berthet s'est imaginé une ligne $AE(E)$, dont la nature est telle. Soit ADC arc de cercle, dont le centre B . Prolonguons le rayon BD , jusque en E , jusque à ce que DE soit égale à l'arc AD . Faisant la mesme chose en tout autre point de l'arc comme (D) et nous aurons la courbe $AE(E)$. J'ay trouvé un Theoreme joli, pour donner les tangentes de cette Courbe; Du point donné E , de la courbe, menez une droite au centre du cercle generateur, qui coupera sa circonference en D , menez la touchante du cercle 15

16 AC *L* ändert Hrsg.

14 Berthet: vgl. die Erl. zu N. 45 S. 317 Z. 7. 17 J'ay trouvé: vgl. *a. a. O.* die Erl. zu S. 318 Z. 6.

DF , prolonguée du costé d' A , jusque à ce que FD soit à DE , comme EB à BD , et joignant FE ce sera la touchante. Cela sert aussi à retenir, car on ne quitte pas la plume, et cette proposition a quelque chose de continu, comme il paroist par les traits que j'ay adjoutez:



[Fig. 2]

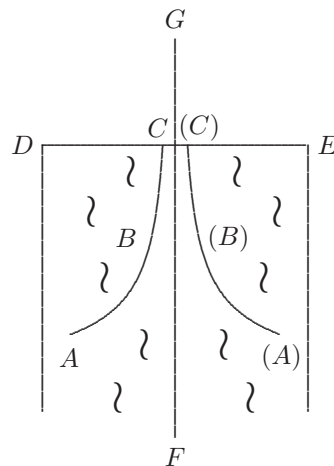
64. L'ANTIPARABOLE DE BERTHET

[Januar 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2 b Bl. 108–109. 1 Bog. 2°. Am oberen Rand von Bl. 109 ist ein keilförmiger Streifen von max. 19,8 x 1,7 cm abgeschnitten. 12 Z. auf Bl. 109 v°. Auf dem Rest des Bogens N. 62 u. 63, VII, 2 N. 72–74 sowie Cc 2, Nr. 1117 u. 1119 (Druck in späteren Bänden der Ausgabe).
Cc 2, Nr. 1114 A

5

Datierungsgründe: s. N. 62.



[Fig. 1]

Le P. Berthet me donnera sa demonstration pour faire voir quelle est la ligne ABC .
ou $(A)(B)(C)$ quand l'eau passe par un canal estroit $C(C)$ d'un bouchon DE . Il y a
une partie de l'eau qui va viste, et une autre qui a peu de mouvement, separées par
la ligne ABC , vel (ABC) dont les ordonnées sont reciproques à celles de la Parabole
sur l'axe, c'estadire en raison soubdoublée reciproque. C'est pourquoy le pere Berthet
l'appelle *Antiparabolam*. Son Asymptote est FG , qui passe entre [les] deux. Le pere Fabri

15

15 deux. (1) Mons. l'Abbé (2) je viens un matin à Mons. l'Abbé (3) Le L

13 reciproques: vgl. N. 65 sowie LQK S. 53. 16 Mons. l'Abbé: nicht ermittelt.

5 touche cela dans un de ses dialogues, cela donna occasion au pere Berthet, d'en chercher la quadrature. Et n'ayant jamais entendu parlé de Mons. Wallis, il prit une assez belle voye, coupant l'axe, ou icy l'asymptote en parties proportionnelles, ou Geometriques, il demonstra par là la quadrature de toutes ces courbes. Il me le fera voir plus particulièrement.

3 belle |voix ändert Hrsg. | (1) inscribant (2) coupant L 4 demonstra (1) que ces parties sont (2) par L

1 dialogues: Bertets Überlegungen wurden vermutlich veranlasst durch H. FABRI, *Dialogi physici*, [T1 1], 1665, S. 126–130, und sind dargestellt in H. FABRI, *Dialogi physici*, [T1 2], 1669, S. 427 f.
 2 Wallis: Leibniz bezieht sich auf die Quadratur der höheren Hyperbeln in J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 76 f. bzw. *Mechanica* 1670–1671, S. 165–189 (*WO* I S. 408 f. bzw. 679–693); vgl. auch den Briefwechsel zwischen Bertet und Wallis vom Dezember 1671, gedr. in J. WALLIS, *A Treatise of Algebra*, 1685, S. 355–362 (*WO* II S. 410–417). 4 fera voir: Bertet legte Leibniz seine Methode am 9. Februar 1676 dar; s. III, 1 N. 76.

65. SUMMA RECIPROCORUM PARABOLAE

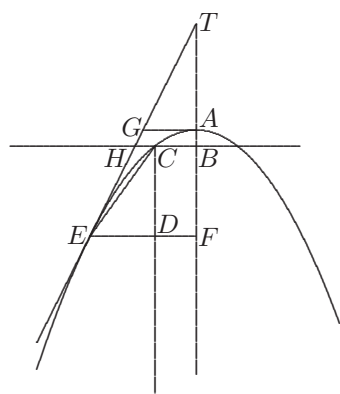
Januar 1676

Überlieferung: L Konzept: LH 35 II 1 Bl. 318. 1 Ausschnitt von max. 19,4 x 6,0 cm. 1 S. auf Bl. 318 r°. Bl. 318 v° leer. Bl. 318 bildete ursprünglich den oberen Teil eines vollständigen Bl. 2° (zusammen mit N. 66 und VII, 1 N. 22).
Cc 2, Nr. 1284

5

Januar. 1676

Summa Reciprocorum parabolae



[Fig. 1]

$AB \sqcap b$. $CB \sqcap c$. $AF \sqcap x$. $EF \sqcap \sqrt{2ax}$. $CD \sqcap z$.
Ergo $AF \sqcap x \sqcap z + b$. Ergo $EF \sqcap \sqrt{2az + 2ab}$ et $ED \sqcap$ 10
 $\sqrt{2az + 2ab} - c$. $AG \sqcap \frac{EF}{2}$. $AT \sqcap x$. $TB \sqcap x + b \sqcap z + 2b$.
 $\frac{TB}{TA \sqcap z + b} \sqcap \frac{HB}{AG}$ et $HB \sqcap \frac{z + 2b, \sqrt{2az + 2ab}}{z + b} \sqcap$
 $\frac{z + 2b \sqrt{2a}}{\sqrt{z + b}}$ sive $HB \sqcap \sqrt{2az + 2ab} + \frac{b \sqrt{2a}}{\sqrt{z + b}}$ et $HC \sqcap$
 $\sqrt{2az + 2ab} + \frac{b \sqrt{2a}}{\sqrt{z + b}} - c$. Quorum datur summa, ae-
quatur enim illa duplo segmento CEC . Datur ergo et 15
summa omnium $\frac{1}{\sqrt{z + b}}$ seu reciprocorum parabolae,

quod tamen dudum notum. Datur et omnes $\frac{z}{\sqrt{z + b}}$ vel omnes $\frac{x - b}{\sqrt{x}} \sqcap \sqrt{x} - \frac{b}{\sqrt{x}}$.

7 Januar. 1676 erg. L 8 Summa ... parabolae erg. L

8 Summa ... parabolae: vgl. N. 64 sowie LQK S. 53. 12 $HB \sqcap$: Auf der rechten Seite fehlt im Nenner ein Faktor 2. Leibniz rechnet konsequent weiter; die allgemeine Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

66. DE PERPENDICULARIBUS ET TANGENTIBUS CURVARUM

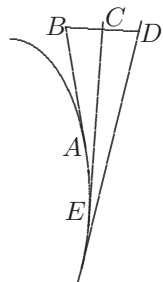
Januar 1676

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XII 2 Bl. 93. 1 Ausschnitt von max. 19,0 x 8,3 cm. 1 S. auf Bl. 93 r^o. Bl. 93 v^o leer. Bl. 93 bildete ursprünglich den mittleren Teil eines vollständigen Bl. 2^o (zusammen mit N. 65 und VII, 1 N. 22).
Cc 2, Nr. 1285

Januar. 1676.

Datae curvae perpendiculares ita producere ut fiant alterius curvae perpendiculares, videtur ad calculum ducere qui non sit in potestate seu tetragonisticum, sed aliunde scimus quomodo id fieri queat, et ita solvetur hoc modo calculus tetragonisticus ille. Eodem modo ita ducere perpendiculares ut fiant alterius curvae tangentes seu minimae quae ad eam ex dato puncto duci possint.

Datas tangentes ita producere ut fiant alterius curvae perpendiculares ducit ad calculum tetragonisticum. Is perinde ac prior vane iniri poterit, tum summam ineundo elementorum curvae, tum etiam ducendo ex unius tangentis *AB* extremo *B*, perpendiculares ad *EC*, *BCD*, tertiae tangenti occurrentem in *D*, et ex *D* faciendo idem quod ex *B*, pro sequentibus tangentibus.



[Fig. 1]

perpendiculares ad *EC*, *BCD*, tertiae tangenti occurrentem in *D*, et ex *D* faciendo idem quod ex *B*, pro sequentibus tangentibus.

Nota hac methodo inveniuntur ejusmodi curvae quaesitae, cujus puncta *C*. sed mechanice, ita ut polygonum inveniatur ei valde vicinum, etsi non ullum ejus verum punctum, ut in quadratrice.

Non possunt omnes tangentes unius curvae esse et tangentes alterius curvae, quia non se possunt plus semel secare rectae.

7 Januar. 1676. *erg. L* 15 *AB erg. L* 15 f. extremo | *A ändert Hrsg.* |, perpendiculares *L*
16 in | *B ändert Hrsg.* |, et *L* 17 ex | *A ändert Hrsg.* |, pro *L* 19 ut (1) curva inveniatur (2)
polygonum *L*

12 minimae: Leibniz meint vermutlich maximae; vgl. jedoch die Erl. zu S. 449 Z. 20–23.

67. TANGENTIUM CALCULUS

[8. – 29.] Februar 1676

Die Gesprächsaufzeichnung N. 67₁ und die Aufzeichnung von Leibniz N. 67₂ stehen in engem inhaltlichem und äußerem Zusammenhang. Die beiden Blätter bildeten ursprünglich ein vollständiges Blatt 2°, auf dessen Vorder- und Rückseite Leibniz und Tschirnhaus während eines Gesprächs Notizen schrieben. Zuerst entstanden sind auf der Vorderseite Aufzeichnungen zur harmonischen und zur arithmetischen Reihe (VII, 3 N. 55), die auf Februar 1676 datiert sind und Bezug nehmen auf VII, 3 N. 54 vom 8. Februar 1676. Darunter und auf der Rückseite ist N. 67₁ notiert. Leibniz hat dann auf dem unteren, frei gebliebenen Viertel der Vorderseite die Überlegungen zur Tangentenrechnung vertieft und schließlich abgetrennt (N. 67₂).

5

10

67₁. NOTAE

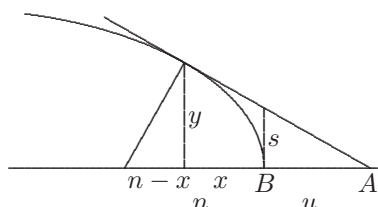
Überlieferung: LuT Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 XII 1 Bl. 253.

Ca 3/4 Bl. 2°. Figur und 5 Zeilen am unteren Rand von Bl. 253 r° und ca 1/2 S. auf Bl. 253 v°. Auf dem Rest von Bl. 253 r° VII, 3 N. 55.

Cc 2, Nr. 1334 tlw., 00

15

[Tschirnhaus]



$$x^3 \approx y^3 + fyy + gy + h$$

$$u \approx \frac{1y^3 + 2fyy + 3gy}{h + 2gy + 3fyy}$$

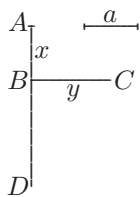
[Fig. 1]

$$x^3 + pxx + qx + r \approx 0$$

10 6 3 1

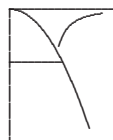
20

18 $u \approx \frac{1y^3 + 2fyy + 3gy}{h + 2gy + 3fyy}$: Falls die Rollen von x und y nicht nur in der Kurvengleichung Z. 17, sondern auch in Fig. 1 vertauscht wären, müsste sich nach Tschirnhaus' Tangentenregel für den Subtangentenabschnitt u der Ausdruck $\frac{3h + 2gy + fy^2}{g + 2fy + 3y^2}$ ergeben; andernfalls wäre $u = \frac{3h + 2gy + fy^2}{3(y^3 + fy^2 + gy + h)^{\frac{2}{3}}}$ das korrekte Resultat. Vgl. Erl. zu N. 49 S. 347 Z. 13.



$$\begin{aligned}
 x & \neq y \\
 xx & \neq ay & xx & \neq ay + yy \\
 & & & xx & \neq ay - yy \\
 & & & xx & \neq aa - ay
 \end{aligned}$$

5 [Fig. 2]



$$\begin{aligned}
 x^3 & \neq ayy & x^4 & \neq ay^3 \\
 x^3 & \neq aay & x^4 & \neq aayy \\
 & & x^4 & \neq a^3y
 \end{aligned}$$

[Fig. 3]

10 [Leibniz]

$$x^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + ky + l \sqcap 0$$

$$x^3 \begin{array}{|l} + by \\ + e \end{array} x^2 \begin{array}{|l} + cy^2 \\ + fy \\ + h \end{array} x \begin{array}{|l} + dy^3 \\ + gy^2 \\ + ky \\ + l \end{array} \sqcap 0$$

15

2 Über $xx \neq ay + yy$: $a + y$ Darüber, am oberen Papierrand: $a \langle - \rangle y$
 $a - y$

5 Oberhalb der Figur, gestrichen: $\overline{\quad b \quad}$

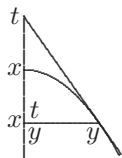
7 Links neben $x^4 \neq aayy$: $xx \neq ay$

67₂. TANGENTIUM CALCULUS

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 391. Ca 1/4 Bl. 2^o. 1 S. auf Bl. 391 r^o. Bl. 391 v^o leer.
Cc 2, Nr. 00

Tangentium calculus

5



[Fig. 4]

$$y^2 + bxy + cx^2 + dx + ey + f = 0$$

$$2y^2 + bxy = -2cxt - dt.$$

$$[+] e = -by.$$

Erit $cx^2 = cx \frac{-2y^2 - bty - dt}{-e} = \frac{D}{by + 2ct} = \underbrace{-bxy - dx}_{\varphi x} - \underbrace{ey - f - y^2}_{-\varphi}$. Erit $\frac{c \odot x}{D} =$

$\varphi x - \varphi$. et $\frac{\varphi D}{\varphi - c \odot} = x = \frac{\odot}{D}$ et fiet denique: $\varphi D^2 = \varphi \odot - c \odot^2$. 10

$$\left. \begin{aligned} D^2 &= \frac{b^2 y^2 + 4bct y + 4c^2 t^2}{\varphi} \\ &= \frac{b^2 f y^2 - 4bct f y - 4c^2 t^2 f}{\varphi} \\ &= b^2 e y^3 - 4bct e \dots - 4c^2 t^2 e \dots \\ &= b^2 y^4 - 4bct \dots - 4c^2 t^2 e \dots \end{aligned} \right\} = \varphi D^2. \quad 15$$

5 Tangentium calculus erg. *L* 10 $\varphi D^2 = (1) \varphi \odot - (2) \varphi \odot + (3) \varphi \odot - c \odot^2 = 0$
streicht Hrsg. | *L*

10 $\frac{\varphi D}{\varphi - c \odot} = x$: Richtig wäre $\frac{\varphi D}{\varphi D - c \odot} = x$. Der Fehler beeinträchtigt zusammen mit weiteren Versehen die anschließenden Rechnungen.

$$\begin{array}{r}
+ \odot \sqcap - 2 y^2 - bt y - dt \\
 - e . \\
\varphi \sqcap - b y - d \\
\hline
+ 2d y^2 + 2btd y + d^2 t \\
+ ed . \\
\odot \varphi \sqcap \left\{ \begin{array}{l} + 2by^3 + b^2 t \dots \boxed{+ btd} . \\ + be \dots \end{array} \right. \\
\odot^2 \sqcap 4y^4 + 4bt y^3 + 4dt y^2 + 2bt^2 d y + d^2 t^2 \\
+ 4e \dots + b^2 t^2 \dots + 2edt . \\
+ 2bte \dots \\
+ e^2 \dots
\end{array}$$

Ergo pro $\varphi \odot - c \odot^2 - \varphi \mathfrak{D}^2 \sqcap 0$. fiet:

$$\begin{array}{r}
0 \sqcap + b^2 y^4 + b^2 e y^3 + b^2 f^2 y^2 + 4bctf y + 4c^2 t^2 f \\
- 4c . + 4bct . + 2 \boxed{4} bcte . + 4c^2 t^2 e . - cd^2 t^2 \\
- 4cbt . + 4c^2 t^2 e . - 2cbt^2 d . + d^2 t \\
- 4ce . - 4dte . - 2cedt . \\
+ 2b . - b^2 t^2 c . + 2btd . \\
\boxed{- 2btec} . - ed . \\
- e^2 c . \\
+ 2d . \\
+ b^2 t . \\
+ be .
\end{array}$$

Ut calculus facilius pro altioribus continetur; datam aequationem prius explicando ita formemus, ut altissimo (uno demto) ex ipsius y termini tollantur, et facilius veniemus ad progressionem eamque simpliciore.

68. DE TANGENTIBUS ET SPECIATIM FIGURARUM SIMPLICIUM

[Februar – Juni 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 17 Bl. 1–6. 3 Bog. 2°. Ca 11 1/4 S. Bogenmarkierungen (2) – (4). Bogen mit Markierung (1) nicht gefunden. Auf Bl. 2 v° u. 3 r° spätere Zusätze. — Auf dem unteren Drittel von Bl. 6 r° Aufzeichnungen und Rechnungen zur arithmetischen Kreisquadratur (Cc 2, Nr. 1488 tlw.; Druck in einem späteren Band der Reihe). 5
Cc 2, Nr. 1488 tlw.

Datierungsgründe: Die Untersuchungen N. 68 u. 69 sind vermutlich kurz nacheinander entstanden, N. 69 setzt Überlegungen von N. 68 fort (vgl. die Erl. zu S. 453 Z. 2 u. S. 472 Z. 22). Das Wasserzeichen der ersten beiden Bögen von N. 68 ist mehrfach für Februar 1676 belegt, das des dritten Bogens von März bis August 1676, das von N. 69 von Januar bis August 1676. Die beiden Texte stehen in Zusammenhang mit der Ausarbeitung der Abhandlung zur Kreisquadratur und sind teilweise inhaltlich in diese eingegangen (vgl. *LQK* prop. XV S. 49–58), N. 68 ist von Leibniz aber als selbstständige Studie mit eigener Überschrift konzipiert worden. Die Untersuchung ist vor der Fassung Cc 2, Nr. 1233 C der Kreisquadratur anzusetzen, wie sich z. B. an der Verwendung des Satzes von Ricci erkennen lässt: Leibniz notiert ihn am Ende von N. 68, in Cc 2, Nr. 1233 C (vgl. LH 35 II 1 Bl. 154) ist der Satz bereits in den Text integriert und ersetzt teilweise Leibniz' vorhergehende Überlegungen. Das Wasserzeichen des Papiers von Cc 2, Nr. 1233 C ist für den 8. Juni 1676 belegt, N. 68 u. 69 dürften daher zwischen Februar und Juni 1676 entstanden sein. 10
15

De Tangentibus et speciatim figurarum simplicium

Tangentem ad curvam ducit, qui a puncto dato maximam ad curvam ducit; et contra. 20

Perpendicularem ad curvam ducit, qui a puncto dato minimam ad curvam ducit, et contra.

20 Über maximam: Error.

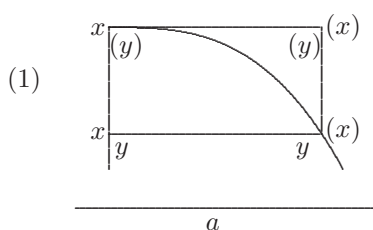
19 et speciatim *erg. L* 20 | Figuram simplicem voco (1) quae (2) cum natura curvae eius (a) una (b) aequatione duorum terminorum exprimi potest. *gestr.* | Tangentem *L*

20–23 Tangentem ... contra: Die Behauptungen sind i. Allg. nicht richtig. Leibniz bemerkt den Irrtum in der ersten Aussage später und markiert die Stelle mit Error, verbessert aber nicht im Text. Vgl. dazu die Diskussion um die Fermatsche Tangentenmethode in R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 300–338 (*DO I* S. 486–493, *DO II* S. 1–13, 103–114, 154–158, 122–134, 169–178).

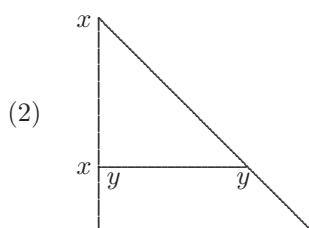
Tangentem seu Maximam ducere est rectam ducere quae curvam tangit. Perpendiculararem seu Minimam ducere, est Circulum describere qui curvam tangit. Quaerendum est eodem modo quale problema solvere sit, Parabolam describere, quae curvam tangat, aut Hyperbolam et ita porro.

5 Interea illud patet si rectam invenerimus quae curvam datam tangat, tunc facile aliam quoque curvam notarum tangentium describemus quae curvam datam tangat. Et vicissim, si Curva notarum tangentium, datam curvam tangens habeatur, etiam recta datam curvam tangens facile habebitur, quia recta quae duarum curvarum, se tangentium unam in puncto contactus tangit, etiam alteram tanget. Hoc jam usui erit ad figura-
 10 rum tangentes gradatim inveniendas, ac progressionem obtinendas, dum scilicet inferior superiori auxilio esse potest. Hujus Specimen in Figuris Simplicibus tentemus.

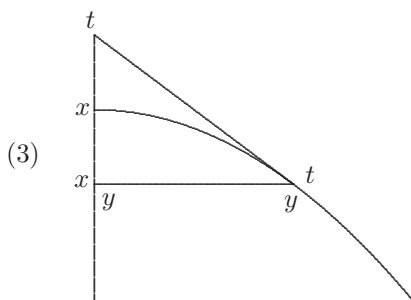
Figuram Simplem voco, cujus curvae natura aequatione duorum terminorum exhiberi potest.



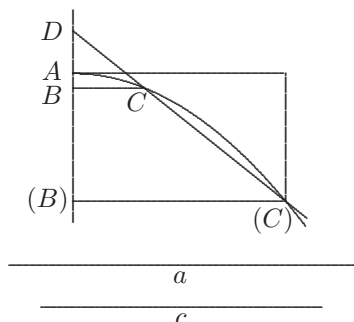
[Fig. 1]



[Fig. 2]



[Fig. 3]



[Fig. 4]

15

1 seu Maximam *erg. L* 1 f. Perpendiculararem (1) Curvae (2) seu *L* 6 f. notorum *L ändert*
Hrsg. zweimal 9 usui (1) potest |esse *erg.*| (2) erit *L*

Ut $a^z x^v \cap y^{z+v}$ vel $a^{z+v} \cap x^z y^v$. fig. 1. Simplicissima omnium Curvarum Simpli-
 cium est *recta*, quae est tangens sibi ipsi. Ejus aequatio $y \cap x$. fig. 2. Proxima est
parabola, cujus aequatio esto $ax \cap y^2$. Et quaeritur tangens t . fig. 3. Quam ut quae-
 ramus ponamus in fig. 4 Verticem parabolae esse A . Axem $AB(B)$. Curvam $AC(C)$. quam
 recta $DC(C)$ in duobus punctis C . (C). secat. Sit AB vel $A(B) \cap x$. BC , vel $(B)(C) \cap y$.
 $AD \cap b$. Parameter Parabolae, a . Et ratio DB ad BC sit quae c ad a . Habebimus aequa-
 tionem duas. Unam: $y^2 \cap ax$. ad Parabolam; alteram vero $\overline{b+x} \frac{a}{c} \cap y$ ad lineam rectam.
 Unde pro x in posteriore substituendo ejus valorem e priore, fiet: $ab+y^2 \cap cy$. et quaeritur
 y omnium possibilium maxima. Scribamus $y^2 - cy + \frac{c^2}{4} \cap \frac{c^2}{4} - ab$. et pro $\mp y \mp \frac{c}{2}$ ponamus
 ω , fiet $\omega^2 \cap \frac{c^2}{4} - ab$ et $\omega \cap \sqrt{\frac{c^2}{4} - ab} \cap \mp y \mp \frac{c}{2}$ et $y \cap \frac{c}{2} \mp \sqrt{\frac{c^2}{4} - ab} \cap \frac{c}{2} \mp \sqrt{\frac{c^2}{4} - ab}$. Ergo
 $\sqrt{\frac{c^2}{4} - ab} \cap 0$. Ergo $c \cap 2y$. et $b \cap \frac{c^2}{4a} \cap \frac{4y^2}{4a} \cap \frac{y^2}{a} \cap x$. Ergo $b \cap x$. seu $AD \cap AB$. Nota-
 bilis haec via qua se natura ex calculo expedit. Si quaesivissemus tollere y . habuissemus
 $x^2 + 2bx + b^2 \cap \frac{c^2}{a^2} \cap x$. Fiet eodem modo: $b \cap x$.

5

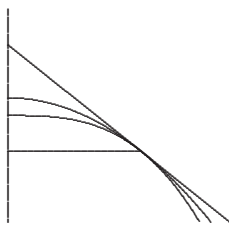
10

Sit alia Curva Parabola scilicet cubica, $a^2x \cap y^3$, quam tangat Parabola $ax + ad \cap$
 $\langle c \rangle y^2$. Fiet: $y^2 \cap x + d \cap \frac{ac}{y}$. Et quia $b \cap x + d$ [*bricht ab*]

15

10 - ab (1) Quae ut sit omnium possi (2) et L 11f. AD \cap AB. | (1) Memorabili (2) Notabilis
 ... expedit *erg.* | (a) Sit alia curva, Parabola scilicet cubica, $a^2x \cap y^3$. Qvam tangat (aa) $bx \cap y^2$ (bb)
 $bx + c \cap y^2$ (b) Si L 14f. $ax + (1) ab \cap (a) y^2$ fiet: $y^2 \cap x + b \cap (aa) \frac{a^2}{x}$ (bb) $\frac{a^2}{y} \cap x^2 + bx \cap a^2$
 (b) $\langle c \rangle y^2$ fiet: $y^2 \cap x + b \cap \frac{ac}{y} \cap x^2 + bx \cap a^2c$ (aa) Quae cum [uti supra $\overline{b+x} \frac{a}{c} \cap y \cap (bb)$] | Et *streicht*
Hrsg. | (aaa) $\overline{x+d} \frac{a}{c}$ (bbb) $\overline{b+z} \frac{a}{c} \cap y$. (ccc) *rec* (ddd) | *recta streicht Hrsg.* | $b + \frac{a^2 + xa}{e} \frac{a}{c}$ (cc) et
 quia $b \cap x$. et $c \cap 2y$. fiet: $2xa \cap 2y^2$ (2) ad $\langle c \rangle y^2$ L

14 tangat Parabola: Der Ansatz ist verfehlt. Leibniz bemerkt dies nach mehreren Rechenversuchen, die er nur unvollständig durchführt, und setzt im folgenden Absatz neu an.



[Fig. 5]

Video jam rectius sic assurgi: Aequatio ad rectam $y \propto \frac{a}{b}x$. Aequatio ad Parabolam $y^2 \propto x + c$. Ergo $x + c \propto \frac{a^2}{b^2}x^2$. sive: $a^2x^2 \propto b^2x + b^2c$. Et $x^2 - \frac{b^2x}{a} + \frac{b^4}{4a^2} \propto \frac{b^4}{4a^2} + \frac{b^2c}{a}$.

Erit $\frac{b^4}{4} + b^2c \propto 0$. seu $x \propto \frac{b^2}{2a^2}$ et $c \propto -\frac{b^2}{4a}$ et $x + c \propto \omega$ fiet $\frac{b^2}{2a^2} \propto \omega$ et $-\frac{b^2}{4a}$, sive $c \propto -\frac{\omega}{2}$.

5 Aequatio ad Parabolam cubicam erit: $\frac{y^3}{a^2} \propto x + e$. sive $y^2 \propto \frac{a^2}{y}x + e \propto x + c$. et

quia $y \propto \frac{a}{b}x$. erit $\frac{a^2}{bx + e} \propto x^2 + cx$. Adeoque $x \propto c - \frac{b}{2}$ et $c^2 - 2bc + b^2, +be \propto 0$ vel

$x \propto \frac{2c - b}{2}$. et $x^2 - \frac{3}{4}c^2 + be \propto 0$. Jam $c \propto -\frac{b^2}{4a}$. Ergo $x \propto c - \frac{b}{2} \propto -\frac{b^2}{4a} - \frac{b}{2} \propto \frac{+b^2 + 2ab}{-4a}$

et $\frac{b^4 + 4b^3a + 4a^2b^2}{-16a^2b} \propto e$. et $+4ab^2 + 8a^2b + b^3 + 4b^2a + 4a^2b + 16a^2\omega \propto 0$.

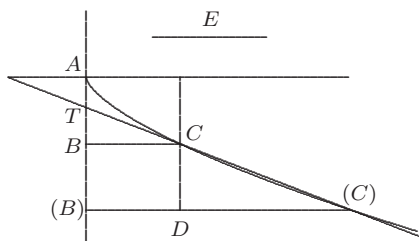
2 $y \propto (1) \frac{b}{a}x$. Aequatio ad Parabolam $y^2 \propto \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}c$ | Jam hoc erg. | $\propto (a) \frac{b^2}{x^2} (b) \frac{b^2}{a^2}x$.

(aa) sive (bb) Ergo (aaa) $a^2x + a^2c \propto bx^2$ (bbb) $\frac{a^2x + a^2c}{b} \propto x^2$ (2) $\frac{a}{b}x L$ 6 $+be \propto 0$. (1) et a (2) Nondum satis bene incepisse videor, ad continuandam in infinitum progressionem Video tamen quomodo sit incipiendum, scilicet $y \propto \frac{a}{b}x$. (a) Explicet (b) In reliquis omittatur d. f. etc. (aa) $\overline{x + e} \leftarrow$

(bb) $x + e \propto (\omega)$ Ergo $c - \frac{b}{2} - \frac{c^2}{b} + 2c - b \propto (\omega)$ (3) vel L

6 erit: Auf der linken Seite der folgenden Gleichung fehlt der Faktor a . Weitere Unstimmigkeiten beeinträchtigen die Rechnung bis S. 453 Z. 1.

$\cancel{b^2} \left(\frac{+4b^2a}{\cancel{b^2}} \right) \left(\frac{+4a^2b}{\cancel{b^2}} \right) \sqcap -16a^2e \sqcap \cancel{b^2} \left(\frac{+4b^2a}{\cancel{b^2}} \right) \left(\frac{+4a^2b}{\cancel{b^2}} \right) + 4ab^2 + 8a^2b + 16a^2\omega$. Sed haec diligentius alias, aperto jam aditu. Credo enim hac arte veram et generalem tangentium progressionem posse detegi.



[Fig. 6]

Sit Curva cujus natura $\frac{y^z}{a^{z-1}} \sqcap x$. $AB \sqcap y$. $BC \sqcap x$. TC tangens. Calculus haec docet: 5

$$zt, y^{z-1} \sqcap x, a^{z-1} \text{ et } t \sqcap \frac{xa^{z-1}}{z, y^{z-1}} \sqcap \frac{\frac{y^z}{a^{z-1}}}{z, y^{z-1}}$$

Ergo $t \sqcap \frac{y}{z}$.

Demonstrare ita quaeramus: Ostendendum est si sit $AT \sqcap \frac{AB}{z}$. totam $TC(C)$ cadere extra

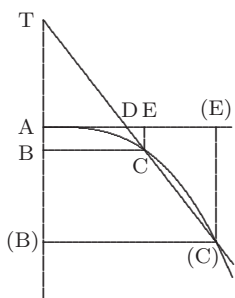
curvam, $AC(C)$ quam supponimus ad easdem partes cavam. 10

Cadat si fieri potest intra curvam, eamque secet in duobus punctis C . (C) ex quibus demittantur rectae $CB, (C)(B)$ in axem et sit $B(B) \sqcap \omega$. $AB \sqcap y$. Erit $A(B) \sqcap y + \omega$ et

ex natura curvae $(B)(C) \sqcap \frac{y^z + \frac{z}{1}y^{z-1}\omega + \frac{z, z-1}{1, 2}y^{z-2}\omega^2 \text{ etc.}}{a^{z-1}}$. Unde auferendo $BC \sqcap$

$(B)D$. restabit $\frac{\frac{z}{1}y^{z-1}\omega + \frac{z, z-1}{1, 2}y^{z-2}\omega^2 \text{ etc.}}{a^{z-1}} \sqcap D(C)$. et erit

3–5 detegi. (1) (paribus) moneo eandem (2) Sit (a) aeqvatio (b) Curva cuius natura (aa) $a^z x^y \sqcap y^{z+v}$ (bb) a (cc)



$\frac{y^z}{a^{z-1}} \sqcap x$ (aaa) $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$ (aaaa) Dem (bbbb) Demonstrandum est | esse erg. | $TB \sqcap zx$ DE (bbb) $AB \sqcap y$ L

2 alias: s. u. S. 471 Z. 14 – S. 472 Z. 22 sowie N. 69 S. 481 Z. 6–21. 9 Fig. 6: Eine weitere gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

$$\frac{D(C)}{\omega} \sqcap \frac{\frac{z}{1}y^{z-1} + \frac{z, z-1}{1, 2}y^{z-2}\omega \text{ etc.}}{a^{z-1}} \sqcap \frac{(B)(C)}{T(B)}$$

id est ex hypothesi $\frac{z, y^{z-1}}{a^{z-1}}$. Quod est absurdum.

Potentiae a Binomio aut residuo quocunque proxima a summa dignitas alterutrius nominis multipla est sub potentiae exponente.

$$5 \quad \text{Sit } C \text{ aequalis } A \pm B. \text{ erit } C^2 \text{ idem quod } A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$C^3 \quad A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

$$C^4 \quad A^4 \pm 4A^3B \text{ etc.}$$

Ubi patet in A^2 et $2AB$ reperiri 2. in A^3 et $3A^2B$ reperiri 3, et ita in caeteris.

10 Si curva detur ejus naturae, ut ordinatae in axem ad angulos rectos demissae sint inter se in ratione partium Directricis inde a vertice abscissarum, multiplicata secundum numerum exponentem quemcunque, et inde a vertice versus ordinatam in Directrice sumatur portio abscissae quam numerus exponens indicat, recta jungens hujus portionis extremum quod versus ordinatam cadit, et punctum curvae ex quo ordinata ducta est, curvam tanget.

15 Sit curva proposita $AC(C)$. cujus vertex A . punctum aliquod C . vel (C) ex quo in Directricem $AB(B)$ demittatur ordinata perpendicularis BC vel $(B)(C)$, sintque ordinatae BC et $(B)(C)$ inter se in multiplicata, exempli causa duplicata, triplicata aliave

$$1 \text{ f. } \textit{Am Rande:} \text{ Ergo nota obiter absurdum sive impossibile esse, ut } \frac{\frac{z, z-1}{1, 2}y^{z-2}\omega}{a^{z-1}}$$

$$+ \frac{z, z-1, z-2}{1, 2, 3} \frac{y^{z-3}\omega^2}{a^{z-1}} \text{ etc. sint } \sqcap 0.$$

4 f. exponente. (1) $A + B$. (2) Sit C aequalis A (a) + (b) plus vel minus B . erit quadratum a C aequale quadrato ab A , plus | vel minus *erg.* | duplo A in B plus quadrato a B . Et Cubus a C aequalis Cubo ab A , plus triplo quadrato A in B plus triplo A in B quadratum plus B (aa) cubus (bbb) cubo. Et quadrato-quadratum a C , aequale quadratoquadrato ab A , plus quadruplo cubo (aaa) a B (bbb) ab A in B , etc. Patet ergo (3) A (4) Sit L 8 f. caeteris. (1) Si a binomii potentia (a) alterius (b) nominis alterutrius sum (2) | Membra omnia potentiae a binomio *streicht Hrsg.* | exceptis duabus summis partium potentiis (3) | Si potentia *streicht Hrsg.* | (4) Sit (5) Si L 9 in ... demissae *erg.* L 11 f. in (1) axem (2) Directrice (a) t(e)rtia absci (b) sumatur L 15 ACC. L *ändert Hrsg.* 15 vel (C) *erg.* L 15 f. in (1) Axem (2) Directricem L 16 BC, (1) sint (2) sit aliud punctum (C) ex quo (3) vel L

ratione ipsarum AB , $A(B)$ a directrice inde a vertice per ordinatas abscissarum. Sumatur AT inde a vertice in directrice versus ordinatam BC , ita, ut sit AT portio dimidia, tertiave, aut alia, (secundum numerum scilicet qui rationis multiplicationem exponit), abscissae AB . Dico quod juncta TC . curvam tanget.

Secet si fieri potest in duobus punctis, C . (C). ducanturque duae ordinatae, CB , $(C)(B)$. Quarum differentia sit $D(C)$ et abscissarum differentia $B(B)$ vel CD . Erit ex hypothesi posita parametro E , seu unitate E . ipsa $(B)(C)$ potentia ipsius, $AB + B(B)$ id est ipsius $A(B)$ et erit BC potentia ipsius AB . Exempli causa si potentia sit Quadratum [vel cubus], erit BC Quadratum [Cubus] ab AB et erit $B(C)$ idem quod Quad. ab AB plus dupla AB in $B(B)$ plus quad. $B(B)$ [Cub. ab AB plus triplum Quad. AB in $B(B)$ plus AB in triplum Quadr. $B(B)$, plus Cubus $B(B)$] et erit differentia ipsarum $(B)(C)$ et BC nempe $D(C)$ differentia dictarum potentiarum, nempe $2AB$ in $B(B)$ plus Quad. $B(B)$ [3 Quad. AB in $B(B)$ + AB in 3 Quad. $B(B)$ + cub. $B(B)$]. Adeoque $(C)D$, erit ad $B(B)$ vel ad DC , ut $2AB$ in $B(B)$ plus Quad. $B(B)$ [3 Quad. AB in $B(B)$, + AB in 3 Quad. $B(B)$ + Cub. $B(B)$] ad $B(B)$, id est ablata communi altitudine $B(B)$ ut $2AB$ plus $B(B)$ [3 Quad. AB + AB in $3B(B)$ + Quad. $B(B)$] ad unitatem seu parametrum E . Adeoque erit ratio $(C)D$ ad DC , sive CB ad BT major quam dupla AB [3^{plum} Quadr. AB] ad E . Eodemque modo si ordinatae quartam potentiam abscissarum, quam quadrato-quadraticam vocant, exprimerent, foret ratio CB . ad BT major quam 4^{pli} Cub. ab AB , ratio ad E . Et ita porro in infinitum, ut ex Tabula Potentiarum Binominalium constat, quae ut ab aliis demonstratum ita procedit:

3 scilicet (1) exponentem r (2) qvi L 7 hypothesi | posita ... ipsa erg. | (1) BD (2) $(B)(C)$ (a) ad | ipsam erg. | BC , ut potentia ipsius, $AB + B(B)$ id est ipsius $A(B)$ ad potentiam ipsius AB et differentia earum erit (aa) ut (bb) ad ipsas ut differentia harum potentiarum (b) potentia L 8 et | erit erg. AB ändert Hrsg. | potentia ipsius AB . | vel quod idem est streicht Hrsg. $D(C)$ gestr. | exempli L 8 sit (1) cubus ut, $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ (2) Quadratum L 9 Quadratum erg. L 9f. idem ... qvad. $B(B)$ erg. L 11 $B(B)$] (1) ad Cubum (a) | ab erg. | $\langle A \rangle$ (b) a B (c) ab AB (2) et (a) differentia ipsarum $(B)(C)$ et BC nempe $D(C)$ | erit erg. | ad ipsas ut differentia (aa) harum (bb) supra (cc) dictarum potentiarum nempe ut 3 Qvad. AB in $B(B)$ + AB in 3 Qvad $B(B)$ + cub. $B(B)$ ad ipsas potentias. Porro | ista erg. | differentia potentiarum abscissis est ad (aaa) ipsas (bbb) ipsam abscissarum differentiam BB u (b) erit L 13 $B(B)$] (1) Et quoniam potentiae omnes per lineas designari possunt, constante quadam (a) curva (b) recta, nempe curvae parametro (2) Adeoque L 14 $2AB$... Qvad. $B(B)$ erg. L 21–456,1 procedit: (1) $C \cap A + B$. $C^2 \cap A^2 + 2AB + B^2$ $C^3 \cap A^3 + 3A$ (2) $A(B) \cap AB + (3) \times (4) f \cap L$

$$\begin{aligned}
 f & \square g + h \\
 f^2 & \square g^2 + 2gh + h^2 \\
 f^3 & \square g^3 + 3g^2h + 3gh^2 + h^3 \\
 f^4 & \square g^4 + 4g^3h + 6g^2h^2 + 4gh^3 + h^4 \\
 f^5 & \square g^5 + 5g^4h + 10g^3h^2 + 10g^2h^3 + 5gh^4 + h^5
 \end{aligned}$$

5

Ubi patet generaliter, si a potentia ipsius f , sive $g + h$, id est in nostro casu a potentia ipsius $A(B)$ sive ipsius $AB + B(B)$, id est ab ipsa f^2 , vel f^3 , etc. sive a recta $(B)(C)$; auferatur alterius nominis, g , id est rectae AB , potentia similis seu recta BC , verbi gratia si a f^2 id est $g^2 + 2gh + h^2$, auferatur g^2 ; residuum $D(C)$, sive $2gh + h^2$ [$3g^2h +$ etc. vel $4g^3h +$ etc.] majorem rationem habiturum ad h sive ad $B(B)$, id est BC ad BT , quam $2g$ [$3g^2$ vel $4g^3$] sive $2AB$ [3^{plum} Quad. AB , vel quadrupl. Cub. AB], sive ut potentia proxime inferior ea quam ordinatae exprimunt, per exponentem potentiae ordinarum multiplicata, ad unitatem seu Parametrum E .

At vero ex constructione AB ad BT est ut 2 [vel 3. vel 4. etc.] numerus scilicet rationis Multiplicationem exponens, ad 1, et BC est ad AB , ut Potentia ad Latus, seu ut potentia proxime inferior ad unitatem vel parametrum. Ergo BC est ad BT in composita ratione potentiae proxime inferioris ad Unitatem, et exponentis potentiae propositae ad unitatem; id est, erit ratio BC ad BT , quae potentiae proxime inferioris per propositae exponentem multiplicatae, ad Unitatem. Sed eam paulo ante majorem esse conclusimus. Erit ergo eadem ratio eidem, simul major et eadem, quod est absurdum, adeoque, impossibile est TC , curvam propositam secare, Tangit ergo. Quod Erat Demonstrandum.

Poterit Lemma ostendi: Si a Potentia Binomii auferatur potentia similis alterutrius nominis, ratio residui ad reliquum nomen major erit ratione potentiae proxime inferioris per propositae potentiae exponentem multiplicatae, ad Unitatem.

Latus lineae voco, lineam, quae est prima mediarum proportionalium inter duas alias lineas, quarum una est pro Unitate assumpta, altera Potentia appellatur.

6 si (1) a potentia ipsius f , potentia similis ipsius (a) ips (b) id est (c) sive $g + h$, id est in nostro casu ipsius $A(B)$ sive | ipsius *erg.* | $AB + B(B)$, potentia | similis *erg.* | alterius nominis, g , | sive AB *erg.* | (aa) rat (bb) residui adimatur, residui rationem (2) a recta $(B)(C)$ (3) | a *gestr.*, *erg.* *Hrsg.* | potentia $L + B(B)$ (1) id est a recta $(B)(C)$ (2) id est (a) a recta (b) ab L 10 etc.] | id est BC ad BT *erg.* u. *gestr.* | majorem L 10 sive ... BT *erg.* L 11 $4g^3$ (1) ad unitatem], sive quam (2)] sive L 12f. proxime ... multiplicata, *erg.* L 24f. Unitatem. (1) Potentia est linea inter quam et aliam lineam pro unitate assumptam, alia rursus linea, quae Latus est quotcunqve mediarum proportionalium prima. (2) Latus L

Aliter: Potentiae sunt lineae quae sunt in Multiplicata ratione aliarum Linearum.
L a t e r a quae sunt in Submultiplicata.

Si unitate assumpta, Quantitates numeris (integris vel fractis rationalibus vel surdis) exprimentur, sitque numerus unius lineae quantitatem exprimens, potestas numeri alterius lineae quantitatem exprimentis, illa Linea, P o t e n t i a appellabitur, haec L a t u s. Ita si Linea una sit bipedalis altera tripedalis, tertia quadrupedalis quarta pedum novem, erit quadrupedalis vel novempedalis Potentia Quadratica ipsius bipedalis vel tripedalis; eruntque quadrupedalis et novempedalis inter se in duplicata ratione, seu ut quadrata bipedalis et tripedalis. Sed haec patet fieri non posse, nisi certa quaedam quantitas, ut pes, hoc loco, pro unitate sive mensura assumpta sit.

Videndum an possimus etiam demonstrare tangentes, tunc cum utraque incognita assurgit ad potentiam: $x^z \propto y^{z+v}$. Fiet $ztx^{z-1} \propto \overline{z+vy^{z+v}}$ et $t \propto \frac{\overline{z+vy^{z+v}}}{z, x^{z-1}} \propto \frac{\overline{z+vx^z}}{z, x^{z-1}} \propto \frac{\overline{z+vx}}{z}$. Ponatur $z \propto 2$. et $v \propto 1$. Fiet $x^2a \propto y^3$. Pro x ponatur $x + \omega$. et pro y fiat $y + \lambda$. Fiet: $ax^2 + 2x\omega + \omega^2 \propto y^3 + 3y^2\lambda + 3y\lambda^2 + \lambda^3$. Unde $2x\omega a + \omega^2 a \propto 3y^2\lambda + 3y\lambda^2 + \lambda^3$, erit $\frac{\lambda}{\omega} \propto \frac{2xa}{3y^2} \propto \frac{y}{t}$. Ergo $\frac{3y^3}{2xa} \propto t$. sive $\frac{3x^2a}{2xa} \propto \frac{3}{2}x \propto t$. At $\frac{2xa + \omega a}{3y^2 + 3y\lambda + \lambda^2}$ alia est quam $\frac{2xa}{3y^2}$.

11–459,4 *Spätere Nebenbetrachtungen und Zusätze:*

$$13-16 \quad \frac{y}{a} \propto \frac{xx}{yy} \cdot \frac{\lambda}{a} \propto \frac{2x\omega}{3yy} \cdot \frac{y+\lambda}{a} \propto \frac{3xx+2x\omega}{[3]yy} \propto [2] \frac{x+\omega}{y+\lambda}.$$

$$\frac{y}{a} \propto \frac{xx}{yy}. \text{ Daneben, gestrichen: } \frac{\omega}{a} \propto \frac{3y^2\lambda}{2xaa}. \text{ Nicht gestrichen: Ergo } \frac{y+\omega}{a} \propto \frac{xx}{yy} + \frac{3yy\lambda}{2xaa} \propto \frac{2x^3aa + 3y^4\lambda}{2} \text{ [bricht ab]}$$

2f. Submultiplicata. (1) Melius (2) Aliter P o t e n t i a est Linea, cuius quantitas numero expressa,

$$(a) \text{ alterius lin } (b) \text{ est, qvi } (3) \text{ Si } L = 15 \frac{\lambda}{\omega} \propto (1) \frac{3y^2}{2xa} \propto \frac{y}{t} \cdot \left| \frac{3y}{2xa} \propto \frac{1}{t} \text{ streicht Hrsg.} \right| (2) \frac{2xa}{3y^2} L$$

Videndum an res sic probari possit: $ax^2 + 2xa\omega + \omega^2a \sqcap y^3 + 3y^2\lambda + 3y\lambda^2 + \lambda^3$. Auferantur hinc ax^2 , illinc y^3 , aequalia ex natura curvae, item hinc $2xa\omega$, hinc $3y^2\lambda$, ex constructione, erunt $\omega^2a \sqcap 3y\lambda^2 + \lambda^3$ seu $\frac{\omega^2}{\lambda^2} \sqcap \frac{3y + \lambda}{a}$. At eadem $\frac{\omega^2}{\lambda^2} \sqcap \frac{9y^4}{4x^2a^2}$. Ergo $\frac{9y^4}{4x^2a^2} \sqcap \frac{3y + \lambda}{a}$. Ergo $\frac{9y^4}{4x^2a^2} \sqcap \frac{3y}{a}$ et $\frac{3y^3}{4x^2a} \sqcap \frac{1}{1}$ seu $3y^3 \sqcap 4x^2a$. At $3y^3 \sqcap 3yx^2a$. Ergo $3x^2a \sqcap 4x^2a$, quod est absurdum.

Sumamus aliud exemplum. Sit natura curvae: $a^2x^3 \sqcap y^5$. Fiet:

$$\boxed{a^2x^3} \boxed{+3a^2x^2\omega} + 3a^2x\omega^2 + a^2\omega^3 \sqcap \boxed{y^5} \boxed{+5y^4\lambda} + 10y^3\lambda^2 + 10y^2\lambda^3 + 5y\lambda^4 + \lambda^5$$

Et auferendo hinc a^2x^3 , illinc y^5 ex natura curvae, item hinc $3a^2x^2\omega$, illinc $5y^4\lambda$ ex

1–459,4 Hic tandem inventa demonstratio pulcherrima.

$\frac{(x) - x}{(y) - y} \sqcap \frac{3yy}{2xa}$. Jam $yy \sqcap \frac{ax^2}{y}$. Ergo $\frac{(x) - x}{(y) - y} \sqcap \frac{3x}{2y} \sqcap \frac{3(x)}{2(y)}$. Ergo $\frac{(x)}{x} \sqcap \frac{(y)}{y}$ seu $(x)y \sqcap x(y)$. et $2(x)y - 2xy \sqcap 3x(y) - 3xy$ seu $2(x)y + xy \sqcap 3x(y)$. Est autem $2(x)y \sqcap 2x(y)$. Ergo auferendo utrobique fiet: $xy \sqcap x(y)$ seu fiet $y \sqcap (y)$. Q. E. D.

Similiter $\frac{(x) - x}{(y) - y} \sqcap \frac{5y^4}{2xa^3} \cdot y^4 \sqcap \frac{a^3x^2}{y}$. Ergo $\frac{(x) - x}{(y) - y} \sqcap \frac{5x}{2y} \sqcap \frac{5(x)}{2(y)}$. Ergo $\frac{x}{y} \sqcap \frac{(x)}{(y)}$. $2(x)y - 2xy \sqcap 5x(y) - 5xy$. Jam $(x)y \sqcap x(y)$. Ergo fiet $3xy \sqcap 3x(y)$. Ergo $y \sqcap (y)$.

Q. E. D. *Darunter, gestrichen*: Imitatione hujus innumerae aliae impossibilitates poterunt ex tangentibus duci, et forte omnes propositiones impossibiles ex tangentibus habent originem suam, itaque si generaliter ista ad tangentes applicemus, generales sane miras aequationum impossibilium formas habebimus ex tangentibus inquam, id est maximis et minimis.

Dazu: NB. NB. Pulcherrime. *Darunter*: Non fido.

6–459,4 *Nebenbetrachtung, teilweise gestrichen*:

Nicht gestrichen: $a^2x \sqcap y^3$. *Gestrichen*: $a^2x + \omega a^2 \sqcap y^3 + 3y^2\lambda + 3y\lambda^2 + \lambda^3$. $\frac{3y^2}{a^2} \sqcap \frac{\lambda}{\omega} \sqcap \frac{y}{t}$.

20 Non fido: Die Bemerkung beruht vermutlich auf dem späteren Zusatz zu S. 461 Z. 8 – S. 462 Z. 4, in dem ein falscher Wert für d^2 verwendet wird. 22 $\frac{3y^2}{a^2}$: Richtig wäre $\frac{a^2}{3y^2} \sqcap \frac{\lambda}{\omega} \sqcap \frac{y}{t}$. Leibniz bemerkt die Unstimmigkeit und streicht die Rechnung.

constructione, quia $\frac{\omega}{\lambda} \sqcap \frac{5y^4}{3a^2x^2}$. et $\frac{\omega^2}{\lambda^2} \sqcap \frac{25y^8}{9a^4x^4} \sqcap \frac{10y^3 + 10y^2\lambda + 5y\lambda^2 + \lambda^3}{3a^2x + a^2\omega}$. Ergo $\frac{25y^8}{9a^4x^4} \sqcap \frac{10y^3}{3a^2x + a^2\omega}$. seu $\frac{5y^5}{9a^4x^4} \sqcap \frac{2}{3a^2x + a^2\omega}$. et $\frac{3a^2x + a^2\omega}{2} \sqcap \frac{9a^4x^4}{5y^5}$ seu $\frac{3x + \omega}{3x} \sqcap \frac{6a^2x^3}{5y^5} \sqcap 1 + \frac{1x^3[a^2]}{5y^5}$. Ergo $\frac{3x + \omega}{3x}$ seu $\mathcal{I} + \frac{\omega}{3x} \sqcap \mathcal{I} + \frac{1x^3a^2}{5y^5}$ et $\frac{\omega}{x} \sqcap \frac{3x^2[a^2]}{5y^4} \sim \frac{x}{y} \sqcap \frac{\lambda}{\omega} \sim \frac{x}{y}$. Ergo $\omega^2y \sqcap \lambda x^2$. Sed nondum hoc satisfacit.

Generale hoc Lemma demonstrandum est:

5

Si duae potentiae diversi utcunque gradus, a duobus binomiis utcunque diversis factae habeant duos altiores terminos alicujus nominis unius potentiae, aequales duobus altioribus terminis alicujus nominis alterius potentiae, altissimum altissimo, proximum proximo: Ipsas potentias aequales esse impossibile est.

$a + b$	$c + d$	
$a^2 + 2ab + b^2$	$c^2 + 2cd + d^2$	10
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$	
$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	$c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$	

10 *Nebenbetrachtung, gestrichen:* $a^3 \sqcap c^2$. $3a^2b \sqcap 2cd$. $a + b \sqcap c + d$. $a^2 \sqcap \frac{2cd}{3b} \sqcap \frac{c^2}{a}$. Ergo $\frac{2d}{3b} \sqcap \frac{c}{a}$. Ergo $a \sqcap \frac{3bc}{2d}$. Generalius: $a^z \sqcap c^\omega$. $z, a^{z-1}b \sqcap \omega, c^{\omega-1}d$. $a + b \sqcap c + d$. $a^{z-1} \sqcap \frac{\omega, c^{\omega-1}, d}{zb} \sqcap \frac{c^\omega}{a}$. Ergo fiet: $\omega ad \sqcap zbc$. Ergo $\frac{b}{d} \sqcap \frac{\omega a}{zc}$. At idem $\frac{b}{d} \sqcap \frac{\omega, c^{\omega-1}}{z, a^{z-1}} \sqcap \frac{\omega a}{zc}$. Redibit aequatio prima.

Darunter zwei gestrichene Figuren außerhalb des Textzusammenhangs, tlw. vom Text überschrieben:



7 duos (1) maximos termi (2) altissimos terminos unius nominis unius potentiae, aequales duobus altissimis terminis (a) alterius (b) unius (3) altiores L

Si $a^3 \sqcap c^2$ erit $c \sqcap a$.

Si $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \sqcap c^2 + 2cd + d^2$ erit $c + d \sqcap a + b$.

$c \sqcap a + e$. $c + d \sqcap a + b + f$. Ergo $\phi + e + d \sqcap \phi + b + f$. et $d \sqcap b + f - e$.

$a^3 \sqcap c^4$. Ergo $a \sqcap c$. $a^2b \sqcap c^3d$. Ergo $c \sqcap \frac{a^2b}{c^2d}$. Ergo $a \sqcap \frac{a^2b}{c^2d}$. Ergo $\frac{b}{d} \sqcap \frac{c^2}{a}$. Ergo

$$5 \quad \frac{b}{d} \sqcap \frac{c}{a}.$$

$\frac{b}{d} \sqcap \frac{4c^3}{3a^2}$. Ergo $\frac{4c^3}{3a^2} \sqcap \frac{c}{a}$. Ergo $4c^2 \sqcap 3a$.

$a^4 \sqcap c^2$. $4a^3b \sqcap 2cd$ seu $\frac{4}{2}a^3b \sqcap 2cd$. $a^4 + \frac{4}{2}a^3b \sqcap \overline{cc + d}$.

$a^z \left(+ \frac{z}{1} \right) a^{z-1}$, $b^1 \left(+ \frac{z, z-1}{1, 2} \right) a^{z-2}$, b^2 etc.

$c^v + \left(\frac{v}{1} \right) c^{v-1}$, $d + \left(\frac{v, v-1}{1, 2} \right) c^{v-2}d^2$ [etc.]

$$10 \quad \text{Sit } a^z \sqcap c^v. \text{ Jam } \frac{a^z}{a} \sqcap a^{z-1} \text{ et } \frac{c^v}{c} \sqcap c^{v-1}. \text{ Jam } \frac{z}{v} \sqcap \frac{c^{v-1}d}{a^{z-1}b} \sqcap \frac{c^v \frac{d}{a}}{a^z \frac{c}{b}} \text{ id est omissis } \frac{c^v}{a^z}$$

aequalibus: $\frac{z}{v} \sqcap \frac{\frac{d}{a}}{\frac{c}{b}}$ sive $\frac{z}{v} \sqcap \frac{ad}{bc}$. Est autem $z \sqcap v$. Ergo $c \sqcap a$ et $c + d \sqcap a + b$. $a \sqcap c$. Ergo

$c + d \sqcap c + b$. Ergo $d \sqcap b$. Ergo $\frac{d}{a} \sqcap \frac{b}{c}$. seu $cd \sqcap ab$. At $ad \sqcap bc$. Ergo $cd + ad \sqcap ab + bc$.

Satis video theorematis demonstrationem analytice quaerendam, idque procedendo ordine, analytica demonstratio per calculum ad novum denique nos ducet theorema, et

$$10 \sqcap a^{z-1} \text{ (1) | Ergo } \textit{streicht Hrsq.} \text{ | (2) et } L \quad 11 \sqcap \frac{ad}{bc}. \text{ (1) } \frac{a^z}{\frac{z}{1}a^{z-1}} \sqcap \frac{c^v}{\frac{v}{1}c^{v-1}} \text{ Ergo } \frac{a}{z} \sqcap \frac{c}{v} \text{ et}$$

$$\frac{z}{v} \sqcap \frac{a}{c}. \text{ Ergo } \frac{a}{c} \sqcap \frac{ad}{bc}. \text{ Ergo } \frac{d}{b} \sqcap 1. \text{ seu } d \sqcap b. \text{ Ergo } c^2 + 2cb + b^2 \sqcap a^3 \text{ (2) Est } L$$

4 Ergo $a \sqcap \frac{a^2b}{c^2d}$: Die Folgerung ist nicht zulässig und beeinträchtigt die Rechnung bis Z. 6.

11 f. Ergo $c + d \sqcap c + b$: Die Folgerung ist nicht zulässig und beeinträchtigt die Rechnung bis zum Ende der Zeile.

ita non dubitem ad simplicissimam demonstrandi rationem nos denique perventuros.

Videndum ergo, quomodo ad hanc demonstrationem generaliter pertingere liceat, eundo per exempla particularia simpliciora.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \cap c^2 + 2cd + d^2. a^3 \cap c^2. \text{ et } 3a^2b \cap 2cd. \text{ Unde } 3ab^2 + b^3 \cap d^2.$$

Ex duabus posterioribus aequationibus: $\frac{a^3}{3a^2b} \cap \frac{c^2}{2cd}$. sive $\frac{a}{3b} \cap \frac{c}{2d}$. et $a \cap \frac{3bc}{2d}$. et 5

$a^2 \cap \frac{9b^2c^2}{4d^2} \cap \frac{2cd}{3b}$ sive $27b^3c^2 \cap 8\phi d^3$. et $c \cap \frac{8d^3}{27b^3}$ adeoque c ad 1. in triplicata ratione $2d$ ad $3b$.

$$d \cap \frac{3a^2b}{2c}. \text{ et } c \cap \frac{3a^2b}{2d} \cap \frac{8d^3}{27b^3}. \text{ Erit } 16d^4 \cap 81b^4a^2.$$

$\frac{a}{3b} \cap \frac{c}{2d}$. Ergo $c \cap \frac{2ad}{3b}$. et $c \cap \frac{3a^2b}{2d}$. Ergo $4\phi d^2 \cap 9a^2b^2$. seu $4d^2 \cap 9b^2a$ adeoque $\frac{a}{1} \cap \frac{4d^2}{9b^2}$. et $\frac{c}{1} \cap \frac{8d^3}{27b^3}$. 10

8–462,4 *Nebenbetrachtung*: Ergo $\frac{b}{d} \cap \frac{2c}{3a}$ seu $d \cap \frac{3a}{2c}b$.

Nebenbetrachtung auf der vorhergehenden Seite, gestrichen:

$$a^3 + a^2b + 2a^2b, \cap c + d \wedge c + cd$$

$$\underbrace{a+b}_{c+d} \wedge a^2$$

$$a^3 \wedge c + d + 2b \cap a, c + d + b, \phi. \text{ Ergo } \frac{c + d + 2b}{c + d + b} \cap \frac{a}{c} \cap \frac{2d}{3b}.$$

\wedge
 c^2

Späterer Zusatz: $(a^3 + 3a^2b) + 3ab^2 + b^3 \cap (c^2 + 2cd) + d^2 \cap \frac{9aabb}{4cc \cap 4a^3} \cap \frac{9bb}{4a}$. Ergo

$12aabb + 4ab^3 \cap 9$. Ergo res non est impossibilis.

4 Unde ... d^2 erg. L

5 duabus posterioribus: Gemeint sind die zwei Gleichungen vor der letzten, die Leibniz später ergänzte. 11 $\frac{b}{d} \cap \frac{2c}{3a}$: Richtig wäre entweder $\frac{b}{d} = \frac{2c}{3a^2}$ oder $\frac{b}{d} = \frac{2a}{3c}$. Der falsche Wert beeinträchtigt die weitere Nebenbetrachtung und den späteren Zusatz.

Sit $a \sqcap 4$. $c \sqcap 8$. Erit $4^3 \sqcap 8^2$ seu $64 \sqcap 64$. et $\textcircled{3}16a^2b \sqcap \textcircled{2}c8d$. Ergo $d \sqcap \frac{\textcircled{3}16a^2b}{\textcircled{2}8c}$ et $d \sqcap 3b$. et b . ponere possumus $\sqcap 1$. Ergo $a \sqcap \frac{4d^2}{9b^2}$, id est $\frac{\textcircled{4}9d^2}{\textcircled{9}b^2} \sqcap 4$. et

$c \sqcap \frac{\textcircled{8}27d^3}{\textcircled{27}1} \sqcap 8$. Jam in locum ipsarum a . et c . in reliqua aequatione substituendo

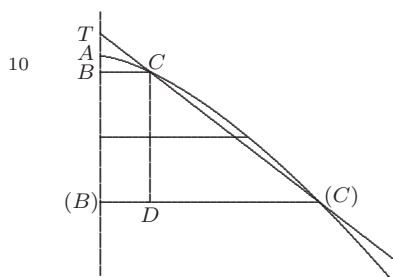
valorem, fiet: $\frac{3, 4d^2}{9b^2}, b^2 + b^3 \sqcap d^2$ seu $4d^2 + 3b^3 \sqcap 3d^2$. seu $d^2 + 3b^3 \sqcap 0$. absurdum.

5 Si sit generaliter:

$$\left(\frac{a^z}{1} + \frac{z}{1} a^{z-1} b^1 \right) + \frac{z, z-1}{1, 2} a^{z-2} b^2 + \frac{z, z-1, z-2}{1, 2, 3} a^{z-3} b^3 \text{ etc.}$$

$$\sqcap \left(\frac{c^v}{1} + \frac{v}{1} c^{v-1} d^1 \right) + \frac{v, v-1}{1, 2} c^{v-2} d^2 \text{ etc.}$$

$a^z \sqcap c^v$. $z a^{z-1} b \sqcap v c^{v-1} d^1$. Adeoque $\frac{a^z}{z a^{z-1} b}$ seu $\frac{a}{z b}$, $\sqcap \frac{c^v}{v c^{v-1} d}$ seu $\frac{c}{v d}$ seu $\frac{a}{c} \sqcap \frac{z b}{v d}$.



[Fig. 7]

$AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $B(B) \sqcap \omega$. $D(C) \sqcap \lambda$. $A(B) \sqcap x + \omega$. $(B)(C) \sqcap y + \lambda$. $TB \sqcap t$. $\frac{t}{y} \sqcap \frac{\omega}{\lambda}$. seu $t \sqcap \frac{\omega y}{\lambda}$.

$$ax^2 \sqcap y^3. a \left(\frac{x^2}{1} + \frac{2x\omega}{1} \right) + \omega^2 \sqcap \left(\frac{y^3}{1} + \frac{3y^2\lambda}{1} \right) + 3y\lambda^2 + \lambda^3. \frac{\omega}{\lambda} \sqcap \frac{3y^2}{2x} \sqcap \frac{t}{y}. \text{ Ergo } \frac{3y^3}{2x} \sqcap t \text{ seu } t \sqcap \frac{3x}{2} \cdot \frac{\omega}{\lambda} \sqcap$$

$$\frac{3x}{2y} \cdot \omega \sqcap \frac{3x\lambda}{2y} \cdot \frac{9x^2\lambda^2}{4y^2} \sqcap 3y\lambda^2 + \lambda^3. \text{ et pro } x^2 \text{ ponendo}$$

y^3 , fiet $\frac{9y}{4} \sqcap 3y + \lambda$. seu $3y \sqcap 4y$. Quod est absurdum.

15 Sit $x^3 \sqcap y^5$. Fiet: $\left(\frac{x^3}{1} + \frac{3x^2\omega}{1} \right) + 3x\omega^2 + \omega^3 \sqcap \left(\frac{y^5}{1} + \frac{5y^4\lambda}{1} \right) + 10y^3\lambda^2 + 10y^2\lambda^3 + 5y\lambda^4 +$

1f. Am Rande: $b \sqcap 1$. $a \sqcap 4$. $c \sqcap 8$. $d \sqcap 3$.

14 fiet (1) $\frac{9y^2\lambda^2}{4} \sqcap 3y\lambda^2 + \lambda^3$. seu $3y \sqcap 4\lambda$ (2) $\frac{9y}{4} L$

$$\lambda^5 \cdot \frac{3x^2}{5y^4} \sqcap \frac{\lambda}{\omega} \text{ seu } \sqcap \frac{y}{t} \text{ Ergo } 5y^5 \sqcap 3tx^2 \cdot \frac{5x}{3} \sqcap t \cdot \frac{t}{y} \sqcap \frac{\omega}{\lambda} \text{ Ergo } \frac{5x}{3y} \sqcap \frac{\omega}{\lambda} \text{ et } \omega \sqcap \frac{5x\lambda}{3y}.$$

Sit aequatio quaecunque

$$x^3 + bx^2 + cx + d \sqcap y^2 + ey + f.$$

Pro x ponatur x + ω, pro y, y + λ, fiet

pro x ³	}	⊐	}	y ²	+ 2yλ	+ λ ²	pro y ²	5		
bx ²				+ 1x ² b	+ 2xωb	+ ω ² b	+ 1ye	+ λe	... ey	
cx				+ 1xc	+ ωc	+ f				
d				+ d						

Unde patet regulam Slusii tam esse facilem demonstratu, quam Methodum Fermatii de maximis et Minimis, imo ex ea statim resultare, cum absunt Asymptoti.

$$x^3 + bx^2 + cx + d + ey + fy^2 + my^3 + \underbrace{gyx + hy^2x + lyx^2}_{\sqcap 0}.$$

Pro x, sit x + ω. pro y sit y + λ. Fiet

1x ³	bx ²	cx	d	ey	fy ²	my ³	xy	}	^	{	hy	hλ	gyx	15
3x ² ω	· 2xω	· ω	· λ	· 2yλ	· 3y ² λ	xλ	xλ				lx	lω	gyω	
3xω ²	· 1ω ²				· 1λ ²	· 3yλ ²	yω				g	gxλ		
1ω ³					· λ ³	λω					gλω			
ny ³ x	py ² x ²	qyx ³	⊐ py ² x ² + yx			ny ² .							[bricht ab]	

1 ⊐ $\frac{\lambda}{\omega}$. (1) seu ω ⊐ $\frac{y}{t}$. Ergo 5y⁵ ⊐ 3x²t. et t ⊐ $\frac{5x}{3}$. et ω ⊐ (2) seu L 1 f. ω ⊐ $\frac{5x\lambda}{3y}$ (1) | et streicht Hrsq. | $\frac{3x^2}{5y^4} \sqcap \frac{\lambda}{5x\lambda}$ (2) Sit L 13 my³ | (1) yx. (2) hyz (3) yx ^ hy. streicht Hrsq. | (4) gxy hx (5) xy L

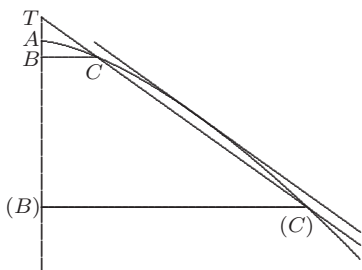
9 regulam Slusii: vgl. *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673 S. 5143 bis 47 (Nachtrag in VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059). 9 Methodum Fermatii: Fermats Tangentenmethode war Leibniz zugänglich durch die Darstellungen in P. HERIGONE, *Cursus mathematicus*, Bd 6, 1644, S. 59–69 und in Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659 [Marg.], *DGS* I S. 253–255, sowie durch die Diskussion in R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 300–338 (*DO* I S. 486–493, *DO* II S. 1–13, 103–114, 154–158, 122–134, 169–178). Vgl. auch die Erl. zu S. 465 Z. 5 f.

Nimirum omnes formae, in quibus yx , redibunt ad:

$yx \frown .$	$y^2x^2 \frown .$	$y^3x^3 \frown .$
y	y	y
x	x	x
y^2	y^2	y^2
x^2	x^2	x^2
etc.	etc.	etc.

5

10



[Fig. 8]

$AB \sqcap x. BC \sqcap y. x^2 \sqcap y^3. BT \sqcap t \sqcap$

$$\frac{3\xi}{2}. TA \sqcap \tau. \text{ constans. } \frac{x + \tau}{y \sqcap BC} \sqcap \frac{\frac{3\xi}{2}}{y \sqcap \sqrt[3]{\xi^2}} \text{ seu}$$

$$\frac{x^3 + 3x^2\tau + 3x\tau^2 + \tau^3}{y^3 \sqcap x^2} \sqcap \frac{27\xi^3}{8\xi^2} \sqcap \frac{27\xi}{8}.$$

Sit aequatio $y \sqcap x^3$, constat esse $t \sqcap \frac{x}{3}$. Nam

$$3x^2t \sqcap y \sqcap x^3. \text{ Et si } t \sqcap 3x^3, \text{ fiet } t \sqcap 3y.$$

Sit jam aequatio $y^2 \sqcap x^3$. Sumatur alia curva

$y + b \sqcap x^3$. Unde uno in alterius locum substituto, fiet $y^2 - y - b \sqcap 0$. Cujus aequationis tantum maxima opus est quae dudum nota.

15

Sit alia $x^3 \sqcap y^2$. Sumatur $y^2 \sqcap x + c$. Fiet: $x^3 \sqcap x + c$. Ubi cum c possit sumi pro arbitrio, utique sic sumi potest, ut dividi possit aequatio per $x^2 - 2dx + d^2$ et hac methodo facile perveniri potest ad tangentes singulari via.

Tentemus et hoc: Ad curvam datae naturae et verticis, earum quas simplices voco ducenda ex puncto in axe dato T . maxima TC . Quaeritur ipsa AB , vel BC . Sit $AB \sqcap x. BC \sqcap y. \text{ et } x^2 \sqcap y^3. TA \sqcap \theta. AB \sqcap x. TB \sqcap x + \theta. BC \sqcap y. TC \sqcap x^2 + 2\theta x + \theta^2 + y^2 \sqcap TC \sqcap z$. Erit z . omnium possibilium maxima.

20

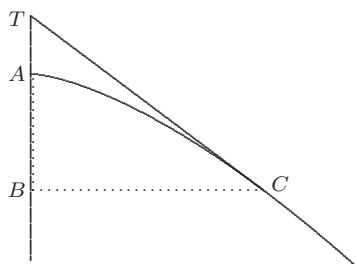
Redeamus ad methodum Fermatii de maximis et minimis.

Si TC tangit curvam, idem est ac si secet ita ut ipsa $C(C)$ intervallum puncto- rum intersectionis vel ipsi respondens in axe $B(B)$ sit minor quantitate qualibet

25

$$8f. BT \sqcap t \sqcap (1) \frac{3x}{2} \sqcap \frac{3y\sqrt{y}}{2} (a) \sqcap (b) \text{ |seu streicht Hrsg. | } t^2 \sqcap \sqrt{(2) \frac{3\xi}{2} (a) TB \sqcap \frac{3\xi}{2} (b)}$$

TA L



[Fig. 9]

assignabili. Hinc enim facile demonstratur revera tangere; nam si non tanget secabit in duobus punctis assignabilis intervalli contra hypothesin. Unde Methodum Fermatii de Maximis et Minimis, possumus habere pro demonstrata, quanquam et ab aliis dudum veterum more rigorose demonstrata sit, unde non est cur actum agam, praesertim cum nihil hoc propositione dicturus sim quod non inter Geometras constet.

5

$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \sqcap c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$. $a^4 \sqcap c^3$. $4a^3b \sqcap 3c^2d$. Ergo $a^3 \sqcap \frac{c^3}{a} \sqcap \frac{3c^2d}{4b}$. Ergo $a \sqcap \frac{4cb}{3d}$. et $a^3 \sqcap \frac{64c^3b^3}{81d^3} \sqcap \frac{3c^2d}{4b}$. et erit $c \sqcap \frac{243d^4}{256b^4}$. Quem valorem inserendo valori ipsius a fiet: $a \sqcap \frac{81d^3}{64b^4}$.

10

$a^2 + 2ab + b^2 \sqcap c + d$. $a^2 \sqcap c$. $2ab \sqcap d$. $a \sqcap \frac{d}{2b}$. $a \sqcap \frac{c}{a}$. Ergo $a \sqcap \frac{2cb}{d}$. et $a \sqcap \frac{d}{2b}$. Ergo

$$c \sqcap \frac{d^2}{4b^2}$$

13f. *Nebenbetrachtung*: $b \sqcap \frac{d}{2a}$ et $b^2 \sqcap \frac{d^2}{4c}$.
 \wedge
 $2cb \smile d$

1 assignabili. (1) Nam hinc facile demonstratur tangere; nam si secare ponatur in duobus punctis assignabilis intervalli, ostenderem statim intervallum horum duorum punctorum revera assignato esse maius. Adeoque hypothesis foret absurda, adeoque non secretet, sed tangeret. Hoc ita (2) Hinc L 9f. constet (1): $(a) y^2 \sqcap (b) |x^2 \sqcap y^3$ streicht Hrsg. | (2) $a^4 L$

5f. ab aliis: Leibniz bezieht sich vermutlich auf Chr. HUYGENS, *Demonstratio regulae de maximis et minimis* u. *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum*, 1667 (Ms., gedr. in *Ouvrages*, S. 326 bis 330 u. 330–335; *HO XX* S. 229–241 u. 243–255). 11 $\frac{64c^3b^3}{81d^3}$: Im Nenner müsste $27d^3$ stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter bis Z. 12.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \sqcap c + d. a^3 \sqcap c. 3a^2b \sqcap d.$ Erit $a^2 \sqcap \frac{d}{3b}.$ et $a^2 \sqcap \frac{c}{a}.$ Ergo $\boxed{a \sqcap \frac{3bc}{d}}$
 et $a^2 \sqcap \frac{9b^2c^2}{d^2} \sqcap \frac{d}{3b}.$ Erit $\boxed{c^2 \sqcap \frac{d^3}{27b^3}}.$

Si $a^4 \sqcap c.$ et $4a^3b \sqcap d.$ erit $\boxed{a \sqcap \frac{4bc}{d}}$ et $\boxed{c^3 \sqcap \frac{d^4}{256b^4}}$ et ita porro. Ergo generaliter
 $a \sqcap z \frac{bc}{d}.$ et $c^{z-1} \sqcap \frac{d}{zb} \hat{\ }^z$ posito $a^z \sqcap c$ et $z, a^{z-1}, b \sqcap d.$

5 Jam altius: $a^z \stackrel{(1)}{\sqcap} c^\omega$ et $z, a^{z-1}, b \stackrel{(2)}{\sqcap} \omega, c^{\omega-1}, d.$ Unde $\frac{b}{d} \stackrel{(3)}{\sqcap} \frac{\omega, c^{\omega-1}}{z, a^{z-1}}.$ Jam ex 1.
 erit $\frac{a^{z-1}}{a} \stackrel{(4)}{\sqcap} \frac{c^{\omega-1}}{c}.$ seu $\frac{a^{z-1}}{c^{\omega-1}} \stackrel{(5)}{\sqcap} \frac{a}{c}.$ Rursus ex 2, erit $\frac{a^{z-1}}{c^{\omega-1}} \stackrel{(6)}{\sqcap} \frac{\omega d}{zb}.$ Ergo ex 5 et 6 fiet
 $\frac{a}{c} \stackrel{(7)}{\sqcap} \frac{\omega d}{zb}.$ Ergo $c \stackrel{(8)}{\sqcap} \frac{zba}{\omega d}.$ et $c^\omega \stackrel{(9)}{\sqcap} \frac{zba}{\omega d} \hat{\ }^\omega.$ Unde juncta 1. fiet: $\frac{zb}{\omega d} \hat{\ }^\omega \sqcap a^{z-1}$ et quia
 praeterea:

$$a^z + \frac{z}{1}, a^{z-1}, b^1 + \frac{z, z-1}{1, 2}, a^{z-2}, b^2 + \frac{z, z-1, z-2}{1, 2, 3}, a^{z-3}, b^3 \text{ etc. } \sqcap$$

10 $c^\omega + \frac{\omega}{1}, c^{\omega-1}, d^1 + \frac{\omega, \omega-1}{1, 2}, c^{\omega-2}, d^2 \text{ etc.}$

Sed ut hujus probetur impossibilitas ex datis exprimendum in characteribus esse z majorem quam $\omega.$

$$y^3 + 3y^2\beta + 3y\beta^2 + \beta^3 \sqcap x^2 + 2x\lambda + \lambda^2$$

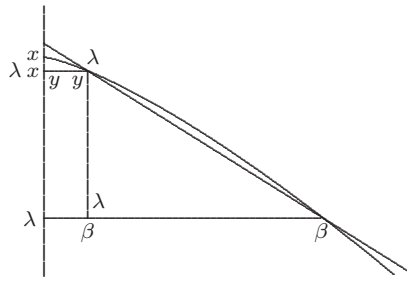
$$y^4 + 4y^3\beta + 6y^2\beta^2 + 4y\beta^3 + \beta^4 \sqcap x^3 + 3x^2\lambda + 3x\lambda^2 + \lambda^3$$

15 Si sit in nostra potestate facere β et λ tam parvas quam volumus, etiam differentiam rationis β ad $\lambda.$ a ratione $3y^2$ ad $2x.$ vel $4y^3$ ad $3x^2$ etc. licebit facere quantalibet parvitatatis.

$$\boxed{y^4} \boxed{+4y^3\beta} + 6y^2\beta^2 + 4y\beta^3 + \beta^4 \sqcap \boxed{x^3} \boxed{+3x^2\lambda} + 3x\lambda^2 + \lambda^3.$$

15f. volumus, (1) |erit *streicht Hrsg.* | tanto minor (2) etiam (a) ratio (d) differentiam L
 16 $4y^3$ ad $|2x$ *ändert Hrsg.* | etc. L

4 $c^{z-1} \sqcap \frac{d}{zb} \hat{\ }^z$: Leibniz verwendet bis Z. 7 einen seinem Multiplikationssymbol $\hat{\ }$ ähnlichen Bogen, um Potenzen von Brüchen darzustellen. 5f. ex 1. erit: Die Gleichung (4) ist fehlerhaft aus (1) abgeleitet und beeinträchtigt zusammen mit einem weiteren Versehen die Rechnung bis Z. 7.



[Fig. 10]

Optimum erit demonstrationis causa sic procedere. Est $y^4 \propto x^3$. et $y^4 + 4y^3\beta + 6y^2\beta^2 + 4y\beta^3 + \beta^4 \propto x^3 + 3x^2\lambda + 3x\lambda^2 + \lambda^3$. Delendo hinc y^4 ,

illinc x^3 , fiet $\frac{\beta}{\lambda} \propto \frac{3x^2 + 3x\lambda + \lambda^2}{4y^3 + 6y^2\beta + 4y\beta^2 + \beta^3}$.

Si $\frac{\beta}{\lambda} \propto \frac{3x^2}{4y^3} \propto \frac{3x^2 + 3x\lambda + \lambda^2}{4y^3 + 6y^2\beta + 4y\beta^2 + \beta^3}$. [erit]

$\lambda \propto \frac{4y^3\beta}{3x^2}$. Unde $\frac{3x^2}{4y^3} \propto \frac{3x4y^3\beta + 16y^6\beta^2}{3x^2 + 9x^4}$. Ali-

ter $\frac{\beta}{\lambda} \propto \frac{3x + \lambda, 4y^3}{6y^2 + 4y\beta + \beta^2, 3x^2} \propto \frac{3x^2}{4y^3}$.

Si in figura quadam ordinarum inter se ratio sit in ratione multiplicata abscissarum iis respondentium erit intervallum tangentis ab ordinata in axe sumtum, ad abscissam, ut numerator logarithmi sive exponentis secundum quem multiplicata est ratio ad denominatorem.

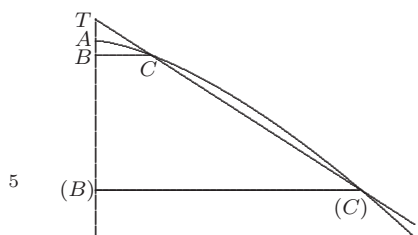
Ut si sit figura $A(B)(C)C$. Axis $AB(B)$ seu recta ad quam ex quovis curvae puncto $C, (C)$ perpendicularis $BC, (B)(C)$ quae ordinata vocatur demittenda est. Abscissa

2-7 Nebenbetrachtungen: $y^4 \propto x^3$. $\frac{\beta}{\lambda} \propto \frac{3x^2}{4y^3} \propto \frac{y}{t}$. Ergo $t \propto \frac{4x}{3}$.

$$\frac{x^3}{y}$$

$\frac{a}{b} \propto \frac{a+c}{b+d}$. Ergo $ba + da \propto ba + cb$. Ergo $da \propto cb$. Ergo $\frac{c}{d} \propto \frac{a}{b}$.

7f. $\propto \frac{3x^2}{4y^3}$. (1) Si (a) abscissae et ordinatae (b) Ordinatae cuiusdam Figurae sint inter se in Multiplicata (aa) ratione (bb) quadam ratione (cc) aut submultiplicata, directa aut reciproca ratione (2) Sit (3) Si L 8 ratio (1), et abscissarum iis respondentium | inter se ratio *streicht Hrsg.* | eiusdem rationis (2) sit in rati (3) sit ... multiplicata (a) (aut submultiplicata directa aut reciproca) sit (b) abscissarum L 10 ut (1) logarithmus (a) sive numerus sive rationis multi (b) sive exponens secundum quem multiplicata est ratio ordinarum, ad logarithmum rationis secundum quem multiplicata est ratio abscissarum (2) numerator L 12 Axis (1) ad quem (2) seu recta ad quam ex quovis curvae puncto perpendicularis demittenda est, AB(B) punctum in eo fixum ipsae per (3) AB(B) L



[Fig. 11]

autem AB . $A(B)$ seu intervallum ordinatae a puncto certo A , sumtum in axe. Tangens CT . occurrens axi in T et TB intervallum tangents ab ordinata in axe sumtum, et ratio BC ad $(B)(C)$ sit multiplicata rationis AB ad $A(B)$ secundum numerum $\frac{z}{\omega}$. Erit TB ad AB ut ω ad z . Quod ut intelligatur opus est exemplis.

„Si potentiae ordinarum sint ut potentiae abscissarum respondentium, directae
 „aut reciprocae erit portio axis inter puncta quibus tangens et ordinata axem secant,
 „intercepta; ad abscissam, ut exponens potentiae ordinarum ad exponentem
 „potentiae abscissarum.

Potentiam vocant numerum multiplicationis alterius in se. Dignitatem vocant, alicujus quantitatis potentiam aut radicem. Ut Cubus numeri quantitatem AB . in relatione ad quamdam unitatem, ut pedem aliamve mensuram exprimentis est ejus dignitas, Radix Cubica ejusdem numeri est etiam ejus dignitas. Exponens seu Logarithmus Cubi est 3. Logarithmus seu exponens radice Cubicae est $\frac{1}{3}$. Unde si exponens dignitatis sit 1. tunc ipse numerus sibi ipsi dignitas erit. Ut si numerus sit x . exponens z , erit dignitas x^z . Adeoque si z sit 1. vel 3. vel $\frac{1}{3}$. tunc x^z , dignitas, erit x vel x^3 vel $(x^{\frac{1}{3}}$ id est) $\sqrt[3]{x}$ et si sit exponens, $-z$ sive negativus, tuncposito z , esse 1. vel
 3. vel $\frac{1}{3}$. erit dignitas reciproca priorum, nempe x^{-z} erit vel $\frac{1}{x}$ vel $\frac{1}{x^3}$ vel $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

5 secundum (1) rationem (2) numerum L 6 ut (1) | z streicht Hrsg. | ad | ω streicht Hrsg. | (2) ωL 6 f. exemplis. | Ponamus (1) Cubos | seu (a) potentiam, cuius (b) potentias, quarum exponens z erg. | ipsorum BC , $(B)(C)$ esse inter se, ut rectas AB , $A(B)$ sive (2) potentias quarum exponens streicht Hrsg. | L 8 Si (1) potentiae ordinarum sint ut potentiae abscissarum erit intervallum tangents ab ordinata sumtum (2) dignitates (a) qv (b) quaedam ordinarum sint ut dignitates (3) potentiae L
 10 exponens (1) potentiae ordinarum ad exponentem potentiae (2) ex (3) dignitatem ordinarum ad exponentem dignitatis (4) potentiae L 11 f. abscissarum. (1) Ut si sint Cubi (2) | Potentiam ... se erg. | Dignitatem L 13 Cubus (1) a AB , est et eius dignitas, Per cubum autem (2) numeri L

12f. Dignitatem vocant: z. B. M. RICCI, *Exercitatio geometrica*, 1668, def. 1, S. 1 [Marg.] u. R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668, S. 101-116 [Marg.]; vgl. VII, 4 N. 32 S. 52.

Quae omnia ex eo patent, quod Logarithmorum subtractio significat divisionem numerorum, et divisio Logarithmorum extractionem radicum numerorum.

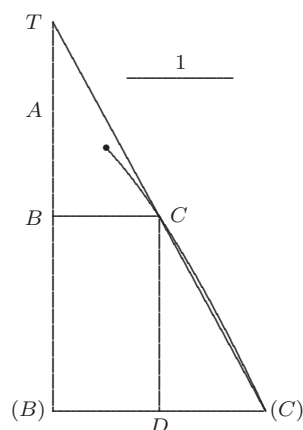
Si ratio ordinarum sit multiplicata rationis abscissarum secundum numerum $\frac{z}{\omega}$. portio axis intercepta inter tangentem et ordinatam, erit ad abscissam seu portionem axis inter verticem et ordinatam ut ω ad z .

Sint exempli causa quadrata ordinarum $BC_{[.]}(B)(C)$ ut cubi abscissarum AB , $A(B)$. Ergo ipsae ordinatae erunt ut radices quadraticae cuborum abscissis. Radicis autem quadraticae exponens est $\frac{1}{2}$. Cubi exponens est 3. Ergo radicis quadraticae ex cubo exponens est $\frac{3}{2}$. Erit ergo ratio ordinarum inter se in ratione abscissarum secundum numerum $\frac{3}{2}$ multiplicata. Hoc posito si sit TB ad abscissam AB , ut 2 ad 3 ducta ordinata BC , ajo junctam TC tangere curvam in C .

Si curva $C(C)$ esset parabola cubica, et ordinatae essent in triplicata abscissarum

12–470,7 *Am Rande*: Quae de parabola Cubica diximus ad quadraticam applicare facile est, substituto numero 2. in locum numeri 3. consulto omissimus quam ut quique dicta a nobis suo marte in ea quippe jam cognita experiatur rem facilius intelligat.

2f. numerorum. (1) | Sint linearum BC , $(B)(C)$ dignitates exempli causa cubi *streicht Hrsg.* | (2) Si L 3 ordinarum | normalium *erg. u. gestr.* | sit L 3f. secundum (1) numerum (a) $\frac{\omega}{z}$ (b) $\frac{z}{\omega}$ (2) numerum $\frac{z}{\omega}$. (a) abscissa erit (b) portio axis | intercepta *erg., gestr. u. wieder gültig gemacht* | inter L 6 causa (1) cubi abscissarum (2) Cubi ordinarum BC , $(B)(C)$ ut quadrata abscissarum AB , $A(B)$ (a) exponens (b) ideo assumpta parametro (aa) f erit aeqvatio haec: $fx^2 \mp y^3$ (aaa) sive (aaaa) f ad y in (bbbb) $\frac{f}{y} \mp \frac{y^2}{x^2}$ (bbb) id est rectangulum solidum sub parametro et quadrato ordinatae aeqvabitur cubo (aaaa) ab (bbbb) abscissae, vel si mavis, erit $\frac{f}{y} \mp \frac{y^2}{x^2}$ id est parameter ad abscissam in (aaaaa) duplicat(ione) (bbbb) duplicata ra (bb) unitate 1 erit aeqvatio haec: $1x^2 \mp y^3$ id est (aaa) si parameter sit 1 (bbb) si parameter sit 1 et quadratum ordinatae in numeris expressae, aeqvabitur cubo abscissae etiam in numeris expressae. (aaaa) quae aeqvatio etiam (bbbb) vel quod idem est erit $x \mp \sqrt[2]{y^3}$ sive | ordinata *erg.* | aeqvabitur radici quadraticae ex cubo abscissae. est autem ut constat Cubi exponens 3. et radicis quadraticae $\frac{1}{2}$. (aaaaa) num (bbbb) $\sqrt[2]{}$ / (ccccc) $\sqrt[2]{}$ at (dddd) ideo erit $x \mp$ (aaaaa) $y^{\frac{3}{2}}$ (bbbbbb) $y^{\frac{3}{2}}$ (3) quadrata L 12 essent (1) ut Cubi abscissarum (2) in L



[Fig. 12a]

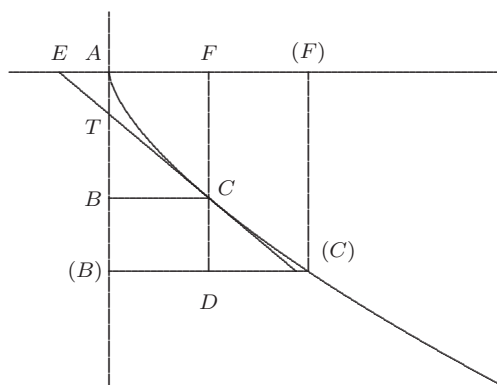


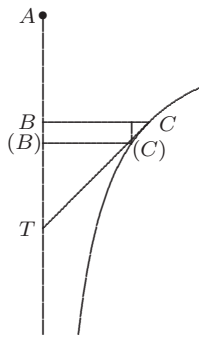
fig. 1.

[Fig. 12b]

ratione, seu ut earum Cubi foret ratio ordinarum multiplicata rationis abscissarum secundum numerum $\frac{3}{1}$ et erit TB ad AB ut 1 ad 3. Contra imo si contingat ordinatas $FC_{[,] } (F)(C)$ esse in submultiplicata ratione abscissarum $AF_{[,] } A(F)$ secundum numerum $\frac{3}{1}$ id est in ratione subtriplicata, tunc dici poterit esse ut eas in multiplicata ratione abscissarum secundum numerum $\frac{1}{3}$. Adeoque si EC tangat, erit EF ad AF ut 3 ad 1, et theorema nostrum eodem modo locum habebit. Et in his quidem exemplis tantum directa ratio fuit, quod si ordinatae sint in reciproca multiplicata aut submultiplicata ratione abscissarum, idem habebit locum. Tantum enim punctum E vel T in axe non versus verticem sed in partes contrarias sumetur. Uti si curva $C(C)$ esset Hyperbola Conica, et A centrum, quod hic ut verticem considero, id est ut initium abscissarum, constat esse BC ad $(B)(C)$ in reciproca ratione AB ad $A(B)$, sive ordinatas esse in ratione reciproca abscissarum secundum numerum $\frac{1}{1}$ multiplicata, ergo ducta tangente CT , quae axi,

7 modo (1) accommodabitur (2) locum L

1 Fig. 12a: Leibniz hat in den Figuren 12a, 14 u. 15 nachträglich den Bogen AC teilweise gestrichen. 1 Fig. 12b: Eine fragmentarische gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.



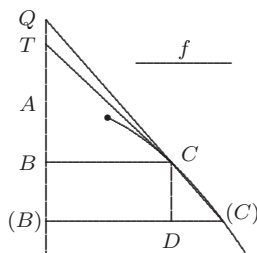
[Fig. 13]

(ut hic semper appello rectam cui ordinatae applicantur) id est hoc loco asymptoto Hyperbolae, occurrat in T . erit TB aequalis ipsi AB scilicet puncto T in aversas ab A partes sumto. Quod si sumatur curva cujus ordinatae sint in reciproca ratione ordinarum Parabolae Conicae ad axem; seu in ratione abscissarum subduplicata reciproca, erit quemadmodum in parabola TB . dupla AB , eo tantum discrimine, quod in parabola ubi ratio est directa TB sumitur a B versus A . Hic vero ubi est reciproca, TB sumitur inde a B . in partes contrarias seu aversas ab A . Exemplis haec necessarium fuit explanare, tametsi enim peritis artis analyticae familiaria sint, aliis tamen non ita expedita videntur.

5

10

Nunc ad demonstrationem veniemus, quam in uno alterove exemplo oculis subjectam in omni alio locum habere docebimus.



[Fig. 14]

Sit curva $C(C)$ Parabola aliqua ex infinitis exempli causa Cubica, vertex A . abscissa portio scilicet axis initium a puncto fixo seu vertice capiens, AB ; ordinata BC . et sint exempli causa quadrata ordinarum BC , $(B)(C)$ ut Cubi abscissarum AB , $A(B)$, et sit parameter quaedam forinsecus assumpta f , tunc ex natura Parabolae Cubicae, erit rectangulum solidum sub Quadrato a BC . in f . aequale Cubo ab AB . et similiter rectangulum solidum sub Quadrato a $(B)(C)$ in f aequale Cubo ab $A(B)$.

15

20

Ita enim erit Quadratum BC in f ductum; ad quadratum $(B)(C)$ in f ductum, seu demta communi altitudine, quadratum BC ad quadratum $(B)(C)$, erit ut Cubus AB ad Cubum $A(B)$ quemadmodum Curvae natura postulat. Quod si ad Quadratoquadratum aliasque dimensiones in aliis altiorum graduum Parabolis ascendendum sit, eadem habebunt locum. Re ad numeros revocata nempe hoc loco si certa quadam unitate assumpta, ut pede, valor rectarum, AB . $A(B)$. BC . $(B)(C)$. f . in numeris ineatur aut initus suppo-

25

5 Conicae erg. L 7 parabola (1) T cadit inter A et B (2) ubi L 12 alterove erg. L
 13 habere (1) evincemus (2) docebimus L 18 A(B), (1) tunc (2) appellemus AB vel A(B) (a) x et BC vel (B)(C) vocemus y (b) y et BC vel (B)(C) vocemus x eri (3) et L 19f. Cubicae, (1) erit fx^2 , rectangulum solidum sub parametro et quadrato ordinatae, aeqvale ipsi y^3 cubo ab abscissa. (2) erit (a) f A (b) f BC (c) f in Qvadr. a BC. aeqvale Cubo AB. et f in Qvadr. (d) rectangulum L 28 pede, (1) valor abscissarum AB in valorem (2) valor L 28–472,1 ineatur | aut ... supponatur erg. |, (1) erit (2) tunc L

natur, tunc numerus ipsius BC , quadratus, ductus in numerum ipsius f , erit aequalis numero ipsius AB . cubato. Quae per numeros expressio (rationales an irrationales nil refert) utique in altioribus quoque dimensionibus habet locum, quia etsi nullum sit spatium quadrato-quadratum, aut surdesolidum, numeri tamen hujusmodi exhiberi possunt. Jam compendii causa AB vocemus y . et BC , x . Erit fx^2 aequal. y^3 . Porro differentia duarum abscissarum AB et $A(B)$ sit $B(B)$ quam vocabimus b . et duarum ordinarum BC et $(B)(C)$ sit $D(C)$, quam vocabimus d . Erit $A(B)$ aequal. $y + b$ et $(B)(C)$ aequal. $x + d$. Adeoque $y^3 + 3y^2b + 3yb^2 + b^3$ aequal. $fx^2 + 2fxd + fd^2$. Porro puncta B . (B) et per consequens C . (C) tam vicina sibi sumi possunt, ut b . d differentiae ordinarum et abscissarum sint minores proposita quantitate. Et chorda duo curvae puncta connectens, proposita quantitate minor sit, adeoque et juncta $(C)CQ$. axi occurrens in Q . a tangente TC minus differat quam quantitas aliqua proposita, (quippe cum ipsa $QC(C)$ parte sui $C(C)$ minore quam quantitas proposita intra curvam cadat); et denique recta quoque TB a recta QB minus quam assignata quantitas differat. Quod si jam ostendam, puncta C . (C) tam propinqua sumi posse, ut non haec tantum omnia contingant, sed et differentia ipsius QB , adeoque et ipsius TB ; a $\frac{3}{2}AB$ minor proposita aliqua quantitate reddatur, sequetur punctis B et (B) adeoque C et (C) coincidentibus, differentiam inter TB , et $\frac{3}{2}AB$ minorem fore quavis assignabili quantitate. Nam punctis non coincidentibus; fieri potest minor assignabili quantitate. Et punctis coincidentibus adhuc minor quam punctis [non] coincidentibus. Quod rigore ostendi posset ope motus, ubi quid semper accedat continue, utique cum attingit, omnium minimum. Verum cum haec rigorosa opus habeant demonstratione; nunc contenti erimus Quadratura figurarum rationalium directarum.

4 surdesolidum, (1) dantur tamen |in *erg.*| numeris (2) numeri L 8f. et ... $C.(C)$ *erg.* L
 9–11 abscissarum (1) fiant (2) sint minores (a) qvolibet numero proposito (b) |qvalibet *gestr.* | proposita quantitate. (aa) adeoqve (bb) et segmentum (cc) et proinde (dd) et ... connectens, |qvalibet *gestr.* | proposita L 11 juncta (1) $C(C)T$, axi occurrens in T . (2) $C(C)Q$. L 11 a (1) quantitate (2) tangente L 13 minore (1) qvavis quantitate (2) quam L 13 cadat (1) .) Qvod si jam ostendam, si puncta $C.(C)$ satis vicina assumantur, etiam illud effici posse, ut TB (a) sit minor (b) a r (2)); et L 14 ostendam, (1) intervallum (2) CC (2) puncta L 16 minor (1) qvavis (2) proposita L 18f. coincidentibus; (1) poterit fieri minor (2) fieri potest |minor *erg.* *Hrsg.* | assignabili L 21 minime L ändert *Hrsg.* 22–473,1 directarum (1) Curva (2) Figura Analytica (3) $C u r v a r a t i o n a l i s$ est, (a) cum absci (b) cuius (aa) ordinata qvaedam (bb) axis aliquis (it) (cc) directrix L

Curva rationalis est, cujus directrix aliqua ita assumi potest, ut datis abscissis et parametris in numeris rationalibus, etiam ordinatae normales in numeris haberi possunt. Et hoc fit cum valor ordinatae haberi potest pure, sine ulla radicum extractione. Talis curva exempli causa est parabola $DC(C)$ cujus verticem D tangat recta $DB(B)$. Ea si pro directrice sumatur et in eam ordinatae normales demittantur $BC, (B)(C)$ et

abscissae sint $DB, D(B)$ erit BC aequal. $\frac{\text{Quad. } DB}{\text{paramet.}}$. Et hoc statim agnosci potest ex

aequatione quando scilicet alterutra incognitarum, quae ad aequationem curvae naturam exprimentem serviunt, ad nullam potestatem ascendit, aut si ascendit, deprimi potest. Ut hoc loco si $DB \propto y$. et $BC \propto x$. et parameter parabolae f . erit fy aeq. x^2 . adeoque $y \propto \frac{x^2}{f}$. Tales sunt omnes curvae, in quibus ordinatae sunt in directa aut reciproca ratione

multiplicata aut submultiplicata ordinarum, quales ex tabula analyticarum simplicium excerpti possunt. Ut quarum aequationes sunt: $x \propto y$. $fx \propto y^2$. $f^2x \propto y^3$. $f^3x \propto y^4$. etc. in quibus ordinatae x sunt in ratione eadem, duplicata, triplicata, quadruplicata etc. abscissarum y . Et ad has eae facile reduci possunt, in quibus ordinatae sunt in ratione

subduplicata, subtriplicata, abscissarum x . Nam si sit $y \propto \sqrt[2]{fx}$ vel $y \propto \sqrt[3]{f^2x}$ vel $y \propto \sqrt[4]{f^3x}$ etc. utique tollendo signum radicale, facta utrobique in se ipsum multiplicatione, redibunt aequationes proxime praecedentes; huc pertinent etiam eae in quibus ordinatae

sunt in abscissarum ratione multiplicata aut submultiplicata reciproca, ut $x \propto \frac{f^2}{y}$ $x \propto$

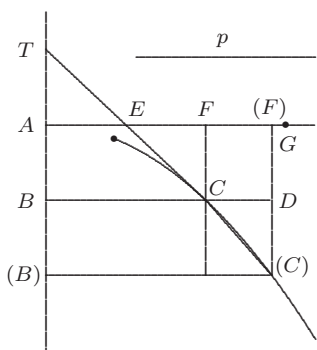
$\frac{f^3}{y^2}$ $x \propto \frac{f^4}{y^3}$ etc. vel $y \propto \sqrt[2]{\frac{f^3}{x}}$ $y \propto \sqrt[3]{\frac{f^4}{x}}$ etc. Praeterea ex his infinitis modis

componi possunt aequationes alterutram incognitarum habentes rationalem, ut si $xa^2 + xy^2 \propto ay^2$, nam fiet $x \propto \frac{ay^2}{a^2 + y^2}$. Nam posita parametro a , abscissa y , ordinata x , utique patet parametro et abscissa in numeris data, etiam generaliter x in numeris habitum iri.

2 et parametris erg. L 3f. extractione (1) ut si sit aeqvatio (a) ay \propto x². erit y (b) ay aequal. x² erit y aequal. $\frac{x^2}{a}$. adeoque si (2) Talis L 6 $\frac{\text{Quad. BC}}{\text{paramet.}}$ L ändert Hrsg. 14 facile erg. L 18 in (1) harum (2) abscissarum ratione (a) directa (b) multiplicata L 20 si (1) | sit *streicht* Hrsg. | x \propto (a) $\frac{fx^2}{x^2 + a}$ (b) $\frac{ax^2}{x^2 + y^2}$ (2) xa² L 21 posita (1) diametro (2) parametro L 22 generaliter erg. L 22–474,1 iri. (1) Porro (a) curva (b) rationales curvae hanc habent praerogativam ut quadra (2) Curva Analytica simplex rationalis (3) In L

In Curva analytica simplice rationali intervallum tangentis ab ordinata sumtum in directrice est ad abscissam ut exponens dignitatis secundum quam sumuntur abscissae ad exponentem dignitatis secundum quam ipsis proportionales sumuntur ordinatae.

5 Explanandum initio, deinde demonstrandum erit theorema: Generalissima enim vix nisi praemissis exemplis intelliguntur.



[Fig. 15]

Sit Curva Analytica Simplex rationalis $C(C)$. Sit AB vel FC x . et AF vel BC y . parameter vero p et aequatio naturam curvae explicans (per dicta in definitionibus Curvarum simplicium et rationalium) $p^v x^{z-v} = y^z$. Ajo esse EF ad AF ut $z - v$ ad z . et TB ad AB ut z ad $z - v$. Quod theoremati consonat, sit enim exempli causa $z = 2$. et $v = 1$ fiet $z - v = 1$ et aequatio erit $px = y^2$ ad parabolam id est erunt diversae x inter se, nempe FC , et $(F)(C)$ ut diversae y^2 , seu ut quadrata ab $AF, A(F)$. Ergo exponens secundum quem sumuntur ipsae x . est 1. Sumuntur enim simpliciter nec ad

10 potentiam ullam assurgunt, at exponens dignitatum ipsis x proportionalium ad quas assurgunt y , est hoc loco 2. Ergo si x vel FC sumantur pro ordinatis ad directricem $AF(F)$ et AF seu y pro abscissis, erit EF , intervallum tangentis CE , ab ordinata CF sumtum in directrice $AF(F)$ ad abscissam AF , ut 1. ad 2. Contra si AB vel x sumantur

19–475,2 *Nebenbetrachtung*: $EF = \frac{1}{2}AF$. $TB = 2AB$. Ergo $EF \sim TB = FABC$.

Ergo earum ductus in se invicem semper aequatur momento figurae.

1 f. in (1) axe (2) directrice (a) secundum quam (b) est ad abscissam (aa) ut (bb) reciproce (cc) | ut streicht Hrsg. | (aaa) potentia (bbb) | exponens streicht Hrsg. | (aaaa) ordinatae ad ex (bbbb) abscissae ad exponentem ordinatae in aeqva (dd) ut L 4f. Explanandum ... theorema: (1) Generalia (2) Generalissima ... intelliguntur erg. L 9f. rationalium) (1) $x^{(1)}$ (2) a^z (3) $p^{z-1}x^1 = y^z$. posito z. numero quocunqve, (a) ajo esse (b) et (aa) $z - v$ (bb) differentiam inter z et v unitate ajo esse EF ad AF ut 1. (4) $p^v x^{z-v} = y^z$. (a) erit (b) ajo L 12 $z = 2$. (1) fiet $z - 1 = 1$ (2) et L 13f. ad parabolam erg. L 18 exponens (1) | secundum streicht Hrsg. | quem sumuntur (a) y (b) x (2) ad quem assurg (3) dignitatum L

pro abscissis_[,] BC seu Y . pro ordinatis_[,] $AB(B)$ pro directrice_[,] TB intervallum tangentis TC , ab ordinata BC sumtum in directrice $AB(B)$ erit ad AB abscissam, ut 2 ad 1. Si $C(C)$ esset parabola Cubica foret $EF \cap \frac{1}{3}AF$, et $TB \cap 3AB$. Si esset v . major quam z . tunc $z - v$. foret quantitas negativa, et proinde curva erit ex numero reciprocarum, nimirum si sit: $p^v x^{z-v}$ aeq. y^z et v major quam z . idem erit ac: $\frac{p^v}{x^{v-z}}$ aeq. y^z . Ut si 5

$v \cap 2$. et $z \cap 1$. fiet $p^v x^{z-v} \cap y^z$ idem quod $p^2 x^{-1}$ aeq. y^1 sive $\frac{p^2}{x}$ aeq. y . sive p^2 aeq. yx .

Posito ergo exempli causa in fig. curva aliqua reciproca $C(C)$, directrice GF , puncto fixo G . Abscissa GF aeq. x . ordinata FC aeq. y . v aeq. 2. et z aeq. 1. Adeoque posito $p^v x^{z-v}$ aeq. y^z idem esse quod p^2 aeq. yx . Quo facto curva $C(C)$ erit Hyperbola, ajo fore (ex theoremate) EF intervallum tangentis CE , ab ordinata FC , in directrice GF sumtum, ad GF abscissam a puncto fixo G incipientem, ut est $z - v$ ad z . id est hoc loco ut 1 - 2 ad 1. seu ut -1 ad 1. id est GF et FE erunt aequales, tantumque signum negativum denotat FE non versus G ut abscissam GF , sed in contrarias partes fuisse sumendam. Idque etiam in Hyperbola verum esse aliunde constat. 10

Demonstratio: Sit curva Analytica simplex rationalis $C(C)$. Directrix $AF(F)$. Punctum fixum A . Abscissa ex directrice, a puncto fixo incipiens AF . $A(F)$. Ordinata FC . $(F)(C)$. Sitque $FC, \frac{z-v}{z}$ ad $(F)(C), \frac{z-v}{z}$; ut $AF, \frac{z}{z}$ ad $A(F), \frac{z}{z}$ dignitates scilicet ordinarum secundum exponentem $z - v$ sumtae ut dignitates abscissarum secundum exponentem z sumtae et z . atque v , numeri integri et differentia inter z . et v . sit 1. vel si differentia inter z . et v sit major quam 1. modo saltem z sit 1. Alterutrum enim necesse est, ut curva sit rationalis, seu ut alterutra indeterminatarum, abscissa scilicet vel ordinata ad nullam 15

7 ergo (1) |GF (a) \cap (b) aeq. x et FC aeq. y et |posito esse erg. | $p^v x^{z-v}$ aeq y^z idem quod p^2 aeq. yx . *streicht Hrsg.* | (aa) erit (bb) erit EF ad GF, ut (2) exempli L 15 C(C). (1) directrix AB(B) (a) abscissa ab ip (b) punctum fixum A. abscissa ex directrice a puncto fixo incipiens AB. (aa) ordinata (bb) vel A(B), | seu x; erg. u. gestr. | ordinata BC vel (B)(C), (aaa) y. (bbb) Qvod si jam sit quae (ccc) ajo si sit AB^{z-v} ad $A(B)^{\frac{z-v}{z}}$ ut (2) directrix L 16 f. FC. |F(C) *ändert Hrsg.* | (1) ajo po (2) posito (3) sitqve (a) ut (s) (b) $FC, \frac{z-v}{z}$ ad $(F)(C), \frac{z-v}{z}$; (aa) ad (bb) ut $AB, \frac{z}{z}$ ad $A(B), \frac{z}{z}$ id est potentiae ipsarum abscissarum (c) $FC, \frac{z}{z}$ ad $(F)(C), \frac{z}{z}$ (d) $FC, \frac{z-v}{z}$... $A(F), \frac{z}{z}$ (aa) potentiae (bb) dignitates ipsarum abscissarum secundum exponentem (cc) dignitates scilicet (aaa) absce(ss)arum (bbb) ordinarum ad dignitates ordinarum secundum exponentem $z - v$ sumtae (ccc) abscissarum secundum exponentem z sumtae ut dignitates ordinarum secundum exponentem $z - v$ sumtae (ddd) ordinarum L 21 alterutra (1) incognitarum (2) indeterminatarum L

aliam quam simplicem dignitatem assurgat; ac proinde in numeris haberi possit. His positis ajo rectam $EC(C)$ quae curvam in duobus punctis C . (C). secet duci non posse, si sit CD . differentia ordinarum et curvam in puncto C tangat recta EC , directrici occurrens in E . Ajo EF intervallum tangentis EC ab ordinata FC sumtum in directrice; fore ad AF , abscissam, ut exponens $z - v$ secundum quem sumtae sunt dignitates abscissarum, ad exponentem z secundum quem sumtae sunt dignitates ordinarum.

Ponatur EF talis assumi qualem diximus esse ad AF . Ostendendum est junctam EC tangere curvam in puncto C . Unde e converso sequetur si EC tangere supponatur, ipsam EF esse qualem diximus, alioquin duae rectae eandem curvam in eodem puncto tangent quod absurdum esse dudum ostensum est. Ex assumpta autem EF qualem diximus ductam EC tangere sic ostendemus; ponatur non esse tangens, ergo secabit adhuc alibi ut in (C). Ducatur ex (C) ordinata (C)(F), prior abscissa AF appelletur x posterior vero $A(F)$ sitque F punctum ipsi A vicinius seu inter A et (F) nam eligere possumus, erit $A(F)$ aequal. $x + f$. posita $F(F)$ earum differentiam, vocari f . ut in figura. Eodem modo ordinata FC posita y . et differentia ejus ab alia (F)(C), nempe $D(C)$ posita d . erit (F)(C) aequal. $y \pm d$. Ponamus jam differentiam inter z et v ut scilicet valor ordinatae pure et rationaliter haberi possit et sit primum z major quam v , seu $z - v$, sit 1. erit (F)(C) ad FC ut $A(F)^z$ ad AF^z seu erit y ad $y + d$ ut x^z ad $\overline{x + f}^z$, id est erit $y + d$ ad y ut

1–3 possit (1), tunc ajo fore (2) et (3) His ... punctis (a) secet (b) C.(C) ... posse, si (aa) sit demissa (bb) sit ... ordinarum | ad *ändert Hrsg.* | curvam L 5 ut (1) exponens secundum quem (2) $z(-v)$ (3) exponens $|z - v$ *erg.* | secundum ... sunt (a) ordin (b) abscissae (c) dignitates L 7 ostendendum | tantum *gestr.* | est L 13 sitque F (1) $x \pm (a)$ b (b) f. posita $F(F)$ earum differentiam, (aa) f, (bb) vocari f. ubi si quidem $A(F)$ sit major quam AF | erit $A(F)$ aequal $x + f$. *streicht Hrsg.* | Si sit minor erit $x - f$. Sumamus autem facilitatis causa (aaa) calculum (bbb) casum priorem, quoniam omnia eodem modo intelligi possunt in posteriore adeoque sumamus $A(F)$ aequal $x + f$. (2) punctum L 14 figura. (1) Vici (2) Eodem modo (a) abscissa prio (b) ordinata priore appellata (3) Eodem L 16 jam (1) vel $z - v$ esse (1.) vel (2) $z - v$ ess (3) exponentem | dignitatis *erg.* | ordinarum | seu $z - v$ *erg.* | esse (a) $+ 1$ vel -1 (b) ± 1 (4) differentiam L 17 f. possit | et ... quam v , (1) ut ratio sit direct (2) seu ... 1. *erg.* | erit (a) $FC^{\pm 1}$ ad $(F)(C)^{\pm 1}$ (b) FC ad $(F)(C)$ ut AF^z ad $A(F)^z$ seu ut (c) (F)(C) ad FC ut $A(F)^z$ ad AF^z seu (aaa) erit (aaa) AF^z ad $A(F)^z$ (bbb) AF (bb) erit (aaa) (x^z) (bbb) $y \pm d$ ad y (ccc) y ad (aaaa) $y \pm d$ ut x^z ad $\overline{x \pm f}^z$, id est (aaaaa) ut

$$\begin{cases} x & \text{ad } x \pm f \\ x^2 & \text{ad } x^2 \pm 2xf + f^2 \\ x^3 & \text{ad } x^3 \pm 3x^2f + 3xf^2 \pm f^3 \\ x^4 & \text{ad } x^4 \pm 4x^3f + 6x^2f^2 \pm 4xf^3 + f^4 \end{cases}$$

(bbbbb) vel ut (ccccc) erit $y^{\pm 1}$ ad $\overline{y \pm d}^{\pm 1}$ (bbbbb) $y + d$ L

$$\left\{ \begin{array}{l} x + f \\ x^2 + 2xf + f^2 \\ x^3 + 3x^2f + 3xf^2 + f^3 \\ x^4 + 4x^3f + 6x^2f^2 + 4xf^3 + f^4 \\ \text{etc.} \end{array} \right\} \text{ ad } x^z \text{ prout scilicet numerus } z \text{ est } \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \text{etc.} \end{array} \right. \quad 5$$

et dividendo <i>dad y</i> , ut	$\pm f$ ad x	$\text{vel } \pm 2xf + f^2$ ad x^2	$\text{vel } \pm 3x^2f + 3xf^2 \pm f^3$ ad x^3	etc.	
Ergo erit ratio <i>d</i> ad <i>y</i> major ratione *		$\pm 2xf$ ad x^2	$\text{vel } \pm 3x^2f$ ad x^3	et (c).	
id est diversa a ratione		$\pm 2f$ ad x	$\text{vel } \pm 3f$ ad x	etc.	10

Quod est absurdum et contra constructionem. Debet enim ei esse aequalis quod sic ostendo. Ob Triangula similia *EFC, CD(C)* erit *D(C)* ad *FC* ut *CD* ad *EF*, est autem *EF* ad *AE*, ut $z - v$ ad z ex constructione, id est, quia $z - v$ aequal. 1. ut 1 ad z . Adeoque ratio composita ex *CD* ad *EF*, et *EF* ad *AE*, seu ratio *CD* ad *AE* aequalis compositae ex *D(C)* ad *FC* et 1 ad z . Adeoque *D(C)* ad *FC* aequalis compositae ex *CD* ad *AE*, et z ad 1. Ergo *D(C)* ad *FC* aequalis rationi *CD* per z ad *AE* per 1. Et quia *D(C)* est $\pm d$. *FC* est y . *AE* est x . *CD* est aequal. *F(F)* vel f . et z est 2. 3. 4. 5. erit ratio *d* ad *y*

1 Zur gestrichenen 1 in der rechten Spalte der Tabelle, gestrichen: non incipio

1 In der rechten Spalte: 1 gestr. L 5 f. etc. (1) Jam (a) ob triangula similia (b) ex hypothesi (c) ob triangula similia EFC, CD(C) erit (aa) f (bb) CD seu f ad D(C) (aaa) seu (bbb) seu d. ut EF ad FC, seu (aaaa) ut x (bbbb) erit f ad d ut x ad y ergo dividendo y (2) et dividendo (a) $\pm d$ (b) d L 8 erit |ratio erg. | (1) $\pm d$ (2) d ad y (a) major (b) diversa a (c) major L 10 est (1) major (2) diversa L 12 contra (1) hypothesin (2) constructionem L 17 aequalis (1) CD in z ad AE in 1 (2) rationi CD (a) multiplicatae per z ad AE multiplicatae per (b) per L

6 $\pm f$: Im Unterschied zum vorhergehenden Text behält Leibniz im Folgenden die Doppelvorzeichen bei. 14 *AE*: Es müsste *AF* heißen. Leibniz verwendet die falsche Bezeichnung bis Z. 18. Die Verwechslung beeinträchtigt die Überlegung nicht.

aequalis rationi $2f$ vel $3f$ vel $4f$ etc. ad x . cum supra ostenderimus esse diversam, quod est absurdum. Absurdum ergo EC ad curvam pervenire in alio puncto praeterquam in C . Tangit ergo.

Aliter est casus cum v . major est quam z ; adeoque $z - v$ est -1 . Unde $FC, \frac{z-v}{z}$
 5 ad $(F)(C), \frac{z-v}{z}$ est idem quod $FC,^{-1}$ ad $(F)(C),^{-1}$ ac proinde idem quod $\frac{1}{FC, +1}$ ad
 $\frac{1}{(F)(C), +1}$ (quoniam exponentium sive Logarithmorum subtractio significat divisionem
 quantitatum, et generaliter a^{-z} idem est quod $\frac{1}{a^z}$). Adeoque ommissa 1. in exponente erit
 $FC,^{-1}$ ad $(F)(C),^{-1}$ idem quod $\frac{1}{FC}$ ad $\frac{1}{(F)(C)}$ id est reciproce ut $(F)(C)$ ad FC . Ergo
 10 cum differentia inter z et v est 1. et v est major quam z et FC . $(F)(C)$ sunt ordinatae
 ex curva $C(C)$ in directricem $G(F)F$ demissae et $GF, G(F)$ abscissae ex directrice in
 puncto fixo G incipientes; tunc si ex natura curvae sint $FC, \frac{z-v}{z}$ ad $(F)(C), \frac{z-v}{z}$ ut GF^z
 ad $G(F)^z$ idem erit ac si dicatur reciproce fore $(F)(C)$ ad FC ut GF^z ad $G(F)^z$. Hoc
 posito jam similiter demonstrabo fore EF intervallum tangentis EC et ordinatae FC in
 15 directrice sumtum, ad GF abscissam, ut $z - v$ ad z . id est hoc loco ut -1 ad z . id est
 fore EF aequalem $\frac{-1}{z}, GF$ scilicet ipsi aequalem aut partem ejus dimidiam, vel tertiam,
 etc., sed ita tamen ut punctum E non sumatur versus G , sed in contrariam partem, ob
 signum negativum. Hoc ergo si in reciprocis evicerimus, hoc quoque casu Theorema erit
 comprobatum.

1 esse (1) majorem (2) diversam L 2 EC (1) curvam (a) tangere (b) secare in duobus punctis
 C (2) ad L 3 f. ergo. (1) Superest casus curvarum reciprocarum, cum (2) Aliter est casus (a) | cum
streicht Hrsq. | $z - v$ est -1 . seu (b) cum . . . z ; (aa) sive cum ordinatae sunt in reciproca ratione (aaa)
 abscissarum (bbb) potentiarum ab abscissis, ut si sit (bb) adeoque L 4 est -1 . (1) et $FC^{\frac{z-v}{z}}$ est FC^{-1}
 (a) id est FC (b) est autem FC^{z-v} idem quod $\frac{1}{FC^{v-z}}$ (2) Unde L 6 f. divisionem | (1) numerorum
 (2) quantitatum *erg.* |, et L 9 qvam z (1) FC erit (2) sitqve ex natura curvae $FC, \frac{z-v}{z}$ ad $(F)(C), \frac{z-v}{z}$
 ut (3) et (a) posita (b) positus FC . $(F)(C)$ ordinatis et $GF, G(F)$ abscissis (c) FC L 15 fore (1) GF
 z^{plam} id est (a) dup (b) simplam, 2^{plam} triplam (2) FC (3) EF L 15 eius (1) unicam, duplam (2)
 dimidiam L

$c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \stackrel{(1)}{\sqcap} la^2 + 2lab + lb^2.$ $c^3 \stackrel{(2)}{\sqcap} la^2.$ $3c^2d \stackrel{(3)}{\sqcap} 2lab.$ Ex 1.
 $\odot \frac{c+d}{a+b} \stackrel{(4)}{\sqcap} \supset \frac{la+lb}{c^2+2cd+d^2}.$ Ex 2. et 3. $3c^3 + 3c^2d \stackrel{(5)}{\sqcap} 2la^2 + 2lab.$ Ergo $\frac{c+d}{a+b} \stackrel{(6)}{\sqcap} \frac{2la}{3c^2}$

ex 5. $\stackrel{(7)}{\sqcap} \frac{la+lb}{c^2+2cd+d^2}$ ex 4. Ex 3. $\frac{2la}{3c^2} \stackrel{(8)}{\sqcap} \frac{d}{b}.$ Ergo $\frac{c+d}{a+b} \stackrel{(9)}{\sqcap} \frac{d}{b}.$ Ergo $\frac{c}{d} \stackrel{(10)}{\sqcap} \frac{a}{b}.$ Si

aequationis 4. termini in se invicem ducantur, fiet $\odot \supset \stackrel{(11)}{\sqcap} \frac{l}{c+d}.$ Ergo $\frac{l}{c+d} \stackrel{(12)}{\sqcap} \odot^2.$

At per 9, $\odot \stackrel{(13)}{\sqcap} \frac{d}{b}.$ Ergo $\frac{l}{c+d} \stackrel{(14)}{\sqcap} \frac{d^2}{b^2}.$ seu $\frac{l}{c+d} \stackrel{(15)}{\sqcap} \frac{c^2}{a^2}.$ per 14 et 10. Ergo 5

$la^2 \stackrel{(16)}{\sqcap} c^3 + c^2d.$ Ergo per 2. fiet $c^2d \stackrel{(17)}{\sqcap} 0.$ Quod est absurdum.

Si fuisset $c^2 + 2cd + d^2 \stackrel{(1)}{\sqcap} la + lb.$ et $c^2 \stackrel{(2)}{\sqcap} la.$ et $2cd \stackrel{(3)}{\sqcap} lb.$ fiet $d^2 \sqcap 0.$ Sed procedendo eodem modo: $\odot \frac{c+d}{a+b} \stackrel{(4)}{\sqcap} \supset \frac{l}{c+d}.$ Ex 2 et 3 fiet $2c^2 + 2cd \stackrel{(5)}{\sqcap} la + lb.$

Ergo $\frac{c+d}{a+b} \stackrel{(6)}{\sqcap} \frac{1l}{2c}.$ Jam ex 3 est $\frac{1l}{2c} \stackrel{(8)}{\sqcap} \frac{d}{b}.$ Ergo per 6 $\frac{c+d}{a+b} \stackrel{(9)}{\sqcap} \frac{d}{b}.$ Ergo $\frac{c}{d} \stackrel{(10)}{\sqcap} \frac{a}{b}.$ Si

aequationis 4. termini in se invicem ducantur, fiet $\odot \supset \stackrel{(11)}{\sqcap} \frac{l}{c+d}.$ Ergo $\frac{l}{c+d} \stackrel{(12)}{\sqcap} \odot^2.$ 10

At per 9 $\odot \stackrel{(13)}{\sqcap} \frac{b}{d}.$ Ergo ut ante $c^2d \stackrel{(14)}{\sqcap} 0.$

Generali ergo Calculo inventa demonstratio impossibilitatis quandocunque exponentes potestatum differunt unitate tantum. Investigandum et in aliis casibus. Et quidem scimus impossibilitatem cum sibi proximi termini, quaeramus et cum a se invicem maxime remoti, pertinent ista ad artem tentamentorum. 15

Sit ergo $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \stackrel{(1)}{\sqcap} l^2a + l^2b.$ $c^3 \stackrel{(2)}{\sqcap} l^2a.$ et $3c^2d \sqcap l^2b.$

$c^3 + 3c^2d \sqcap l^2a + l^2b$ seu $3c^3 + 3c^2d \sqcap 2l^2a + l^2b.$
 $2 \dots \quad 2 \dots \quad 3c^2d \quad 2l^2b$

$\frac{c^3}{3c^2d} \sqcap \frac{l^2a}{l^2b}.$ Ergo $\frac{c}{3d} \sqcap \frac{a}{b}.$ Ergo $\frac{c+d}{d} \sqcap \frac{3a+b}{b}$ et $\frac{c+3d}{[3]d} \sqcap \frac{a+b}{b}.$ $3cd^2 + d^3 \sqcap 0.$

Ergo $c \sqcap -\frac{d}{3}.$ Ergo $\frac{c}{d} \sqcap \frac{-1}{3} \sqcap \frac{3a}{b}.$ Ergo vel a vel b negativa quod est absurdum. Sed si 20

2 Ex 2. et 3.: Auf der rechten Seite der Gleichung (5) müsste $3la^2$ stehen. Dieser und analoge Fehler in den folgenden Beispielen beeinträchtigen die Rechnung bis Z. 18.

esset $\frac{c}{4d} \sqcap \frac{a}{b}$. et $6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$ fiet: $6c^2 + 4cd + d^2 \sqcap 0$. Ergo $4c^2 + 4cd + d^2 \sqcap -2c^2$.

aequatio absolute impossibilis. Sed hoc credo particulare. Supra ex $3cd^2 + d^3 \sqcap 0$. sequitur $c + d \sqcap -2c$. Ex $6c^2 + 4cd + d^2 \sqcap 0$. sequitur: quad. $\overline{c+d} \sqcap -5c^2 - 3cd$. At quad.

$\overline{c+d} \sqcap \frac{l^3a + l^3b}{\text{quad. } \overline{c+d}} \sqcap -5c^2 - 3cd$. $c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4, \sqcap l^3a + l^3b$. sive:

$$5 \quad 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4 \sqcap l^3b. \text{ et } \frac{4c^3 + 6c^2d + 4cd^2 + d^3}{l^3} \sqcap \frac{b}{c}. \text{ Ergo } c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \sqcap$$

$$\frac{bl^3}{c} - 3c^3 - 3c^2d - [c]d^2.$$

$$c^z \sqcap a^v \text{ et } dzc^{z-1} \sqcap bv, a^{v-1}. \text{ Ergo } \frac{c}{zd} \sqcap \frac{a}{vb}. \text{ Ergo } \frac{a}{c} \sqcap \frac{vb}{zd}. \frac{ad}{bc} \sqcap \frac{v}{z}.$$

$$b^b, \overline{b-a} \frac{b-a}{c} \sqcap c^b, \overline{a-c} \frac{b-a}{c}$$

$$8 \quad \text{Dazu am Rande: } \frac{a-b}{a} \frac{a-b}{b} \frac{a-b}{b} a$$

$3 - 3cd$: Es müsste $-2cd$ heißen. Der falsche Wert geht in die folgende Gleichung ein.

8 $b^b, \overline{b-a} \frac{b-a}{c}$: vgl. VII, 3 N. 65 sowie die Hinweise auf den Satz von Ricci in *LQK* prop. XV S. 56 bis 58.

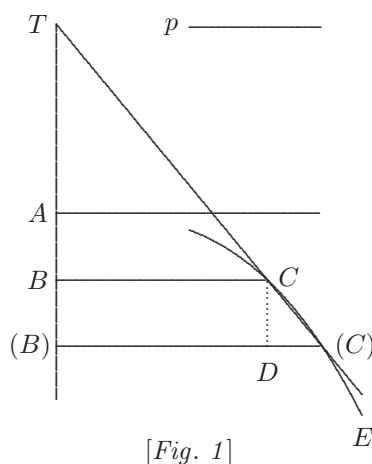
69. DE TANGENTIBUS PARABOLOEIDUM

[Februar – Juni 1676]

Überlieferung: L Konzept: LH 35 V 17 Bl. 7–8. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 1487

Datierungsgründe: s. N. 68.

5



[Fig. 1]

Sit Parabola cubica $C(C)E$. Directrix $AB(B)$ ad quam ordinatae $CB.(C)(B)$. Punctum fixum A . Abscissae $AB.A(B)$. Recta $TC(C)$ secans curvam in punctis $C.(C)$. Sit AB aequal. x . BC aequal. y . $B(B)$ vel CD , aequal. f . $D(C)$ aequal. d . Erit $A(B)$ aequal. $x + f$. et $(B)(C)$ aequal. $y + d$. Denique $TB \perp t$. Jam ex natura Parabolae Cubicae: cujus parameter est p . erit p^2x aequal. y^3 . et $p^2x + p^2f$ aequal. $y^3 + 3y^2d + 3yd^2 + d^3$. Sit TB ad BC seu t ad y seu CD ad $D(C)$ sive f ad d ratio quae $3y^2$ ad p^2 seu quae $3y^3$ ad p^2y . seu quae $3p^2x$ ad p^2y , seu quae $3x$ ad y , erit t ad y ut $3x$ ad y . sive t aequal. $3x$. Cumque sint p^2x aequal. y^3 . et p^2f aequal. $3y^2d$, his in aequatione $p^2x + p^2f$ aequal. $y^3 + 3y^2d + 3yd^2 + d^3$ utrinque sublatis restabit $3yd^2 + d^3$ aequal. 0. Quod est absurdum. Impossibile est ergo rectam TC occurrere curvae in duobus punctis $C.(C)$. si TB aequal. $3AB$ seu t aequal. $3x$. Tanget igitur, quod erat demonstrandum.

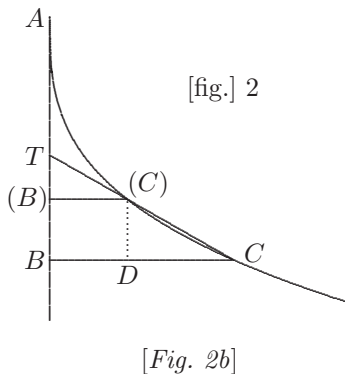
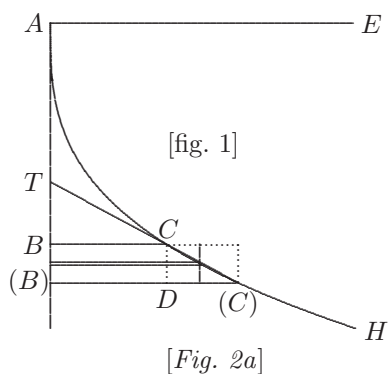
Ex hac demonstrandi forma etiam illud duco, si assumas etiam p^2f aeq. $3yd^2$ vel p^2f aeq. d^3 , hoc enim reapse assumto eodem modo demonstrabitur TC consequenter

12 Denique $TB \perp t$ erg. L 20 rectam (1) ex TC in (2) TC (a) secare jam rectam (b) occurrere L 21 f. demonstrandum. (1) The (2) Theorema: (a) Si (b) in Curvae |analyticae erg. | rationalis simplicis directrice (aa) secundum (bb) sumtum intervallum tangentis et ordinatae est ad abscissam, ut exponens dignitatis (3) Ex L

6–21 Sit ... demonstrandum: vgl. N. 68 S. 471 Z. 14 – S. 472 Z. 22. 17 Fig. 1: Leibniz hat in der Figur den Bogen AC nachträglich teilweise gestrichen.

inventam tangere, jam unam curvam non nisi una tangit recta. Ergo necessario erit $\frac{f}{d}$ aeq. $\frac{d^2}{p^2}$. Sed hoc absurdum et falsum, et destruit consequentia hypothesin, imo directe contrarium concludit. Illud tamen hinc concludere poterimus nulla arte duci posse rectam $TC(C)$ ita curvam secantem in duobus punctis, ut sit f ad d . ut d^2 ad p^2 . vel ut sit p ad $3y$ ut pf ad d^2 .

Si sit Curva paraboloeides seu cujus ordinatae sint in multiplicata ratione abscissarum, secundum aliquem numerum exponentem[,] erit portio directricis inter tangentem et ordinatam ad idem curvae punctum concurrentes, intercepta, ad abscissam, seu portionem directricis inter punctum fixum, et ordinatam, interceptam, ut unitas ad numerum exponentem.



Sit Curva $C(C)$. Directrix $AB(B)$ ad quam ex curva ordinatae $BC, (B)(C)$. Ajo si sit semper BC ad $(B)(C)$ in duplicata (triplicata) aliave ratione AB ad $A(B)$ tunc fore TB portionem directricis intercepta[m] inter tangentem TC et ordinatam CB , ad AB . abscissam seu portionem quae inter A punctum fixum, et BC ordinatam, intercipitur,

2 aeq $\frac{d^2}{p^2}$ | seu $\frac{fd}{p^2}$ aeq. $\frac{f^2}{d^2}$ gestr. | sed L 5 f. ad d^2 . | Lemma gestr. | Si (1) ordinat (2) si Curva (a) in qva (b) | paraboloeides seu erg. | cuius L 6 f. abscissarum | ex directrice gestr. |, secundum L 7 erit (1) intervallum tangentis et ordinatae (a) ejusdem (b) sumtum (c) ad idem | curvae erg. | punctum concurrentium, sumtum in directri (2) portio L 14 TB (1) intervallum (2) portionem L

6–10 Si . . . exponentem: vgl. S. 491 Z. 5–9. 11 Fig. 2a, Fig. 2b: Leibniz bezeichnet die Figuren im Text ab S. 492 Z. 9 f. als fig. 1 u. fig. 2. Eine gestrichene Vorstufe zur Fig. 2a wird nicht wiedergegeben.

ut 1 ad 2 (vel ad 3) vel secundum alium numerum multiplicatae rationis exponentem quemcunque.

Videlicet sit AB aeq. x . Sit $B(B)$ in partes ab A aversas sumta, aequalis b . Adeoque $A(B)$ aeq. $x + b$. Eodem modo sit BC aequal. y . et $D(C)$ differentia inter BC et $(B)(C)$ sit aequal. d . Erit $(B)(C)$ aequal. $y \pm d$.

Adeoque pro natura Curvae erit y ad $y \pm d$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ut Quadrata (in Parabola Simplici)} \\ \text{vel ut Cubi (in Parabola Cubica)} \\ \text{vel ut Quadrato-quadrata} \\ \text{etc.} \end{array} \right\}$ 5

ab x et $x + b$ vel est $\left\{ \begin{array}{l} \text{ut } x^2 \text{ ad } x^2 + 2xb + b^2 \\ \text{vel ut } x^3 \text{ ad } x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3 \\ \text{vel ut } x^4 \text{ ad } x^4 + 4x^3b + 6x^2b^2 + 4xb^3 + b^4 \\ \text{etc.} \end{array} \right\}$ 10

Sitque jam TB ad AB , ut 2. ad 1. in Parabola ajo TC curvam tangere
 vel 3 in Parabola Cubica 15
 vel 4 in Quadrato-quadratica
 vel etc.

in puncto C . Quod ut probetur demonstrabo primum hoc

L e m m a , si recta $TC(C)$ curvam Paraboloeidem secet in duobus punctis $C. (C)$.
 non potest esse CD ad $D(C)$ seu b ad d , seu TB ad BC seu $T(B)$ ad
 $(B)(C)$ ut x ad $2y$ 20
 $3y$
 $4y$
 etc.

Nam si b ad d . ut x ad $2y$ vel $3y$ vel $4y$ etc. erit 25
 $+ d$ ad y ut $2b$ vel $3b$ vel $4b$ etc. ad x
 vel ut $2bx$ vel $3bx^2$ vel $4bx^3$ etc. ad x^2 vel x^3 vel x^4 etc.

2f. quemcunque. (1) Ponatur recta TC (2) Ut si $C(C)$ sit Parabola Cubica erit TB ad AB , ut 1. ad 3 quia $|BC \text{ gestr.}|$ ordinatae in ea sunt ut Cubi abscissarum. (2) Sit BC (3) Videlicet L 4 $A(B)$ aeq. (1) $b + (f)$ (2) $x + |f \text{ ändert Hrsg.}|$ eodem L 4f. et $| (B)(D) \text{ ändert Hrsg.}|$ sit L 14 in Parabola erg. L 15–17 vel ... etc erg. L 18 demonstrabo (1) Lemma: si recta curvam cuius ordinatae (2) primum L 25 ut (1) y ad $2x$ vel $3x$ vel $4x$ | ad $y \text{ gestr.}|$ erit (a) y ad (b) $\pm d$ ad y ut b ad $2x$ vel $3x$ vel $4x$ (2) x ad L 25f. erit (1) \pm (2) $+d$ (a) ad $2y$ vel $3y$ vel $4y$ etc. ut b ad x , vel ut (aa) bx^2 vel bx^3 (bb) bx vel bx^2 vel b (b) ad y L

Jam y ad y est ut x^2 ad x^2 . Unde componendo fiet $d + y$ ad y ut $x^2 + 2xb$ ad x^2 . Nam

$$\begin{array}{r} x^3 \text{ ad } x^3 \\ x^4 \text{ ad } x^4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^3 + 3x^2b \\ x^4 + 4x^3b \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^3 \\ x^4 \end{array}$$

si exempli causa d ad y ut $2bx$ ad x^2 , et y ad y ut x^2 ad x^2 , erit $y + d$ ad y ut $x^2 + 2xb$ ad x^2 .

At supra ex natura curvae erat $d + y$ ad y ut

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xb + b^2 \\ x^2 + 3x^2b + 3b^2x + b^3 \\ x^4 + 4x^3b + 6x^2b^2 + 4xb^3 + b^4 \end{array} \qquad \text{ad} \qquad \begin{array}{r} x^2. \\ x^3 \\ x^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10 \quad \text{Ergo} \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + 2bx \\ x^3 + 3x^2b \\ x^4 + 4x^3b \end{array} \right\} \text{aequal.} \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + 2xb + b^2. \\ x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3 \\ x^4 + 4x^3b + 6x^2b^2 + 4xb^3 + b^4 \end{array} \right\} \end{array}$$

Nam si $d + y$ ad y ut $x^2 + 2xb + b^2$ [ad x^2], et rursus $d + y$ ad y ut $x^2 + 2xb$ [ad x^2] erit utique $x^2 + 2xb$ aequal. $x^2 + 2xb + b^2$. Unde

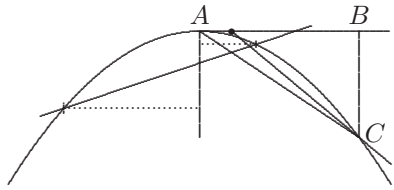
$$\begin{array}{l} 15 \quad \left. \begin{array}{l} b^2 \\ \text{vel } 3xb^2 + b^3 \\ \text{vel } 6x^2b^2 + 4xb^3 + b^4 \end{array} \right\} \text{aequale nihilo.} \end{array}$$

Quod est absurdum.

Adeoque lemma est demonstratum, cum ergo non possint ita ut in Lemmate enun-
tatum est, esse inter se b ad d seu differentia abscissarum ad differentiam ordinarum;
sequitur si eo modo esse ponatur TB ad BC , ipsas CD et $D(C)$ nullas esse (alioquin ob
Triangula $CD(C)$ et TBC similia, eandem haberent rationem et ipsae). Ergo necesse est
ipsas $TB.T(B)$ item $BC.(B)(C)$ coincidere ac proinde junctam TC esse tangentem, ergo
si curvae Paraboloeidis $C(C)$ tangens sit $T(C)$ erit TB portio directricis inter tangentem
et ordinatam ad BC ordinatam, seu ad y ut x ad $2y$ vel $3y$ vel $4y$ pro Paraboloeidis
scilicet gradu. Ergo TB est $\frac{x}{2}$ vel $\frac{x}{3}$ vel $\frac{x}{4}$ si scilicet ordinatae Parabolae vel Paraboloei-

1 Jam (1) aliunde (2) ex natura Curvae (3) y L 1–5 nam ... ad x^2 erg. L 13f. Nam ... + b^2
erg. L 16 + $3xb^3$ L ändert Hrsg. 19f. differentia | ordinarum ad | differentiam erg. | abscissarum
ändert Hrsg. |; sequitur L 20 BC, (1) junctum (2) | junctam TC streicht Hrsg. | (a) tangere curvam,
s (b) non nisi uno in puncto curvae occurrere, adeoque (3) sive (4) ipsas ... esse (a) adeoque ipsam TC
esse tangentem (b) (alioquin L 21f. est (1) | ipsam streicht Hrsg. | TC (2) ipsas L 22f. tangentem
| seu uno tantum in puncto erg. u. gestr. |, ergo (1) sin (2) si (a) in Paraboloeide sit (aa) x (bb) TB ad
BC ut (cc) C(C) ta (b) curvae L 23 portio (1) axis inter (2) directricis L

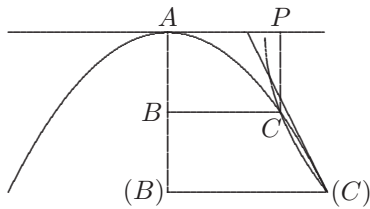
dis, sint ut Quadrata, Cubi, Quadrato-quadrata, etc. abscissarum. Quod ostendendum sumseramus.



[Fig. 3]

Ergo et chorda AC distantia puncti [C] a vertice. Hoc amplius rectum. 10

Prop. Omnis curva Analytica simplex continuari potest et continuata a vertice recedit.



[Fig. 4]

Omnis figura analytica cujus ordinatae ex abscissis per aequationes imparium dimensionum componuntur, in infinitum procurrit longitudine.

Recta quae e directrice educta semiparaboloeidi non nisi in uno puncto occurrit, et a vertice continuata recedit, aut tangenti convenit, aut ordinatae. Ac primum manifestum est semiparaboloeidem continue magis magisque recedere a vertice. Aucta enim abscissa AB augetur et ordinata BC quia ordinatae sunt in multiplicata ratione abscissarum. Ergo et chorda AC distantia puncti [C] a vertice. Hoc amplius rectum. 5

Sit curva Analytica simplex $C(C)$ id est talis ut dignitates quaedam ordinarum BC . $(B)(C)$ sint in multiplicata ratione abscissarum AB . $A(B)$ directa vel recip[roca]. 15

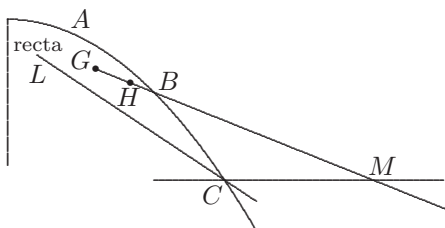
Omnis figura Analytica cujus ordinatae ex abscissis affirmative componuntur in infinitum procurrit longitudine, seu abscissam habere potest quantalibet. 20

2–4 sumseramus. (1) Omnis recta quae | (a) a puncto fixo recedens (b) quoque a puncto fixo in directrice, (aa) secund (bb) a quo erg. | Curvae (aaa) Paraboloeidi (bbb) semira (ccc) semirapa (ddd) Paraboloeidi non nisi uno (aaaa) puncto (bbbb) in puncto occurrit, est parallela directrici (aaaaa) secundum quam ordinatae abscissis e directrice (bbbbb) est (ccccc) Congruit uni ex ordinatis | (aaaaaa) product (bbbbbb) (rational)ibus erg. u. gestr. | quae in multiplicata ratione abscissarum sumuntur. Si sit sem (2) Recta quae | e directrice educta erg. | semiparaboloeidi (a) occurrit (b) non L 5 aut (1) tangens est aut ordinatae (2) tangenti L 10 recta L ändert Hrsg. 11 curva (1) semi (2) paraboloeides aut Hyperb (3) Analytica simplex (a) rationalis magis magisque a ver (b) continuari L 14 ut (1) ord (2) potentiae (3) dignitates L 17 (1) Omnis (a) curva (b) figura analytica simplex | (aa) dimidia (bb) directa, dimidia erg. | continuata recedit a vertice ad distantiam (aaa) proposita quacunque (bbb) quo ad longitudinem pariter et latitudinem in infinitum excurrit Nam abscissa a vertice sumi potest quantalibet, (2) Omnis figura Analytica | simplex gestr. | cuius | ordinate ändert Hrsg. | ex L

Omnis figura analytica cujus ordinatae affirmative et directe ex abscissis componuntur, in infinitum procurrit longitudine et latitudine. Longitudine in infinitum enim augentur abscissae, quia affirmative componuntur ordinatae; in infinitum augentur ordinatae, quia affirmative et directe componuntur adeoque augeri possunt et ipsae ultra magnitudinem propositam.

Si intra curvam in eodem plano in infinitum excurrentem ducatur recta ejusdem plani excurrens in easdem partes; longitudine pariter et latitudine, necesse est, ut recta producta alicubi curvae occurrat. Si non occurrit, erit tota figura infinita conclusa intra aliam, adeoque finita erit. Quod est absurdum. Paralogismus est in hac ratiocinatione.

Si recta quae minus excurret lineam in infinitum excurrentem alicubi secat, multo magis eam secabit ea, quae magis excurret. Sit ABC curva. Sit recta GH , magis excurrens quam recta LC . secans Curvam in C . Ducatur CM extra curvam hanc alicubi secabit GH , ut in M . Ergo GH intra curvam, alicubi reperietur extra curvam, eam ergo secuit, alicubi, ut in B .



[Fig. 5]

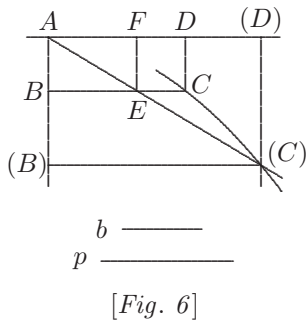
multo magis parallela exterior ei occurret.

Recta transiens per vertex curvae Analyticae simplicis, nec ordinatis nec directrici parallela; curvae adhuc alio praeterea in puncto occurrit.

Sit curva analytica $C(C)$ quantum satis est continuata, cujus directrix AD et ad eam ordinata DC .

Recta transiens per intersectionem communem duarum curvae analyticae simplicis directricium, quae tamen ipsa directrix non est, curvae ab ea parte ad quam tendit in alio quodam puncto occurrit.

1 analytica (1) quae in infinitum procurrit lo (2) quae affirmative et directe (3) cuius L 1 f. componuntur, (1) infinita est (2) in L 2–6 latitudine. | longitudine ... adeoque (1) auctis (a) ordinatis (b) abscissis ultra magni (2) cum abscissis (3) augeri ... propositam erg. | (a) Si (b) Omnis figura simplex (c) figurae simplici analyticae directae occurrit recta a vertice recedens (d) Si (aa) recta a concava curvae analyticae infinitae parte posita (aaa) fi (bbb) in infinitum excurrens (bb) intra (aaa) curvam analyticam infinitam (bbb) figuram (ccc) curvam L 10 minus (1) recedit (2) excurret L 21 Recta (1) per vertex transiens | angulo ad directricem obliquo erg. | curvae Analyticae simplici adhuc alibi occurrit, (2) transiens L 23 analytica (1) $AC(C)$ (2) $C(C)$ L 23 cuius (1) vertex (2) directrix L 26 curvae (1) alibi occurrit (2) ab L



Sit Curva Analytica simplex, $C(C)$ et directrices secundum quas simplex est ordinarum abscissarumque relatio, $AB_{[,]AD}$. quarum communis intersectio A . et recta AE tendens ad partes ad quas est curva $C(C)$ quantum satis est continuata, ajo eam alicubi occurrere curvae in (C) . Ponatur curvae parameter esse p . natura vero talis, ut sit ratio p ad $A(D)$ vel $(B)(C)$ multiplicata secundum numerum v . quam rationem vocabimus \odot eadem rationi

5

6–488,4 Nebenbetrachtung auf der folgenden Seite, durch Umrahmung aus dem Text ausgegliedert:

Analysis.

$$\frac{\bar{p}^v}{x} \sqcap \frac{\bar{y}^z}{x} \text{ . et } \frac{y}{x} \sqcap \frac{b}{p} \text{ . Ergo } \frac{\bar{y}^z}{x} \sqcap \frac{\bar{b}^z}{p} \text{ . Ergo } \frac{\bar{p}^v}{x} \sqcap \frac{\bar{b}^z}{p} \text{ .}$$

Synthesis.

Quia $\frac{\bar{p}^v}{x} \sqcap \frac{\bar{b}^z}{p}$. et ex natura curvae $\frac{\bar{p}^v}{x} \sqcap \frac{\bar{y}^z}{x}$ erit etiam $\frac{\bar{b}^z}{p} \sqcap \frac{\bar{y}^z}{x}$. Ergo $\frac{b}{p} \sqcap \frac{y}{x}$. Ergo

ad lineam rectam.

Dazu, auf der vorhergehenden Seite: $p^v x^{z-v} \sqcap y^z$ et $y \sqcap \frac{b}{p} x$. Ergo $x^z \sqcap \frac{p^z}{b^z} y^z$. Ergo

$$\frac{p^v, x^{z-v}}{\frac{b}{p} x^z} \sqcap 1 \text{ . Ergo } p^{v+z} \sqcap b^z x^v \text{ .}$$

1 $C(C)$ | quantum satis est continuata *erg. u. gestr.* | et L 2 secundum quam L ändert *Hrsg.*
 7 talis, (1) ut sumta AD , (a) x et (b) vel BC , x . et AB , vel DC , y . ut sit ratio v ad x mult (2) ut L
 9 quam ... \odot *erg. L* 9–488,1 rationi (1) y ad x (2) $(D)(C)$ L 12 Analysis *erg. L* 13–15 $\sqcap \frac{\bar{b}^z}{p}$
 (1) Ergo (2) Assum (3) Synthesis. (a) assumatur (b) qvia L 17 (1) y^z (2) $y \sqcap \frac{x^z}{p}$ *streicht Hrsg.*
 (3) $y \sqcap \frac{x^2}{p}$. | et $y \sqcap \frac{b}{p} x - c$. eritqve $x^2 - bx \sqcap -bc$ et $x^2 - bx + \frac{b^2}{4} \sqcap \frac{b^2}{4} - bc$ *streicht Hrsg.* | (4) y^z (5)
 $p^v y^{z-v} \sqcap x^z$ (6) $p^v x^{z-v}$ L

9 Fig. 6: Leibniz hat den Bogen AC nachträglich teilweise gestrichen.

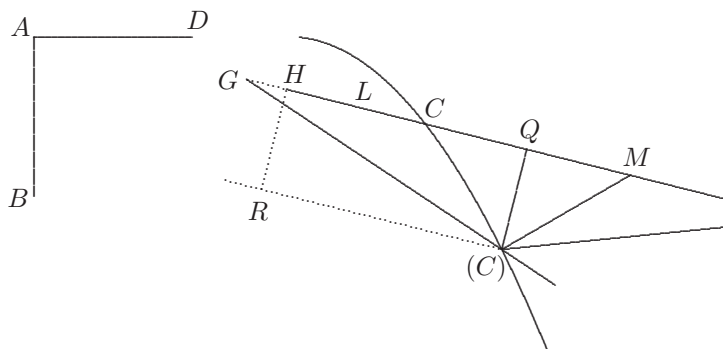
$(D)(C)$ vel $A(B)$ ad $A(D)$ vel $(B)(C)$ multiplicatae secundum numerum z . quam rationem vocabimus \mathfrak{D} , qua formula omnem curvam analyticam simplicem contineri patet. Rectae autem AE , talis angulus sive inclinatio sit ut ducta ad AD ipsa EF , parallela ipsi AB , sit EF ad AF , ut recta quaedam b ad ipsam p .

5 Hoc posito intelligatur designata $A(D)$ in recta AD producta si opus est talis magnitudinis, ut sit ratio b ad p multiplicata secundum numerum z . quam rationem vocabimus \mathfrak{D} aequalis rationi p ad $A(D)$ multiplicatae secundum numerum v quam rationem supra vocabimus \mathfrak{C} . Unde ducatur ad Curvam ordinata $(D)(C)$ parallela ipsi AB . curvae occurrens in (C) . Ajo rectam AE productam occurrere Curvae in eodem puncto (C) .

10 Quoniam ex hypothesi seu assumpta $A(D)$, est ratio \mathfrak{D} . eadem rationi \mathfrak{C} . et ex natura curvae ratio \mathfrak{C} eadem rationi \mathfrak{D} . erit etiam ratio \mathfrak{D} eadem rationi \mathfrak{D} . id est explicando \mathfrak{D} et \mathfrak{D} . ratio b ad p multiplicata secundum numerum z . eadem erit rationi $(D)(C)$ ad $A(D)$ multiplicatae secundum eundem numerum z , unde omissa rationis multiplicatione communi, erit b ad p ut $(D)(C)$ ad $A(D)$. id est ex supposita inclinatione rectae AE , ut
15 EF ad FA , ergo puncta A . E . (C) erunt in eadem recta, ac proinde recta AE producta curvam secabit in puncto (C) .

Si linea secundum longitudinem ac latitudinem quandam assumtam in eodem plano procurrat, donec recta quaedam ejusdem plani in easdem partes procurrens eam attingat; alia recta in eodem plano intra hanc rectam et lineam propositam posita, ad easdem
20 partes magis procurrens quam recta prior, eandem lineam etiam alicubi attinget et ante quam prior.

1 f. qvam ... \mathfrak{D} erg. L 2 f. patet. (1) intelligatur recta | quaedam erg. | $A(D)$ talis ut (2) rectae L
3 ducta (1) EF ad directricem (2) ad L 6 f. numerum z . | (1) qvam vocabimus \mathfrak{C} (2) qvam ... \mathfrak{D}
erg. | aequalis rationi | p ad erg. | $A(D)$ L 7 f. numerum (1) z (2) v | qvam (a) rationem vocabimus
 \mathfrak{D} (b) rationem ... \mathfrak{C} erg. | unde L 9 f. puncto (C) (1) Nam quia (a) p ad b (b) ratio (aa) p ad
 b multiplicata secundum numerum v . aequalis est rationi $A(D)$ ad p multiplicatae secundum numerum
 z (bb) b ad p multiplicata secundum numerum z qvam vocabimus \mathfrak{C} rationi p ad $A(D)$ multiplicatae
secundum numerum v qvam vocabimus \mathfrak{D} et ex natura curvae $C(C)$ eadem ratio (aaa) p ad $A(D)$
multiplicata secundum numerum (aaaa) z (bbbb) v aequali (bbb) \mathfrak{D} aequalis est rationi (aaaa) AT (bbbb)
 $(D)(C)$ ad $A(D)$ multiplicatae secundum numerum z . erit etiam b ad p multiplicata secundum (2)
Quoniam ex (a) constructione seu (b) hypothesi L 13 secundum (1) | numerum *streicht Hrsg.* | (2)
eundem L 17 Si (1) curvae in infinitum secundum longitudinem ac latitudinem qvadam assumtam
in infinitum directe procurrenti (2) lineam continuam secundum longitudinem ac latitudinem qvadam
assumtam in eodem plano procurrentem recta quaedam in easdem partes procurrens alicubi (3) linea L
19 recta (1) qvae intra priorem et (2) in L 20 magis (1) qvam prior excurrens (2) procurrens L
20 f. et ... prior erg. L



[Fig. 7]

Sit linea $C(C)$ procurrens, tam secundum longitudinem AB , id est ad partes B ut magis magisque recedat ab AD ; quam secundum latitudinem ad partes D ut magis magisque recedat ab AB . et sit recta $G(C)$ ad easdem partes procurrens, id est, quae etiam continue recedat tam ab AD quam ab AB , quae recta $G(C)$ secet lineam in (C) . Sit jam alia recta HL inter $G(C)$ et $C(C)$ curvam cadens, magisque obliqua quam $G(C)$ adeoque magis in latitudinem excurrens, seu promptius ab AB recedens; ajo eam alicubi secare curvam $C(C)$ ut in C .

5

Hoc clarissimum est, nam ducatur quaedam recta $(C)M$ ascendens versus AD , recedens ab AB , patet HL productam ipsi $(C)M$ alicubi occurrere in M . Cum enim ambae

10

1 *Nebenbetrachtung, gestrichen:* Per (C) transeat $(C)R$ parallela HL . Ex H perpendicularis ad R demittatur et ex (C) ad HL perpendicularis $(C)Q$.

2 $C(C)$ | in infinitum *gestr.* | procurrens L 3 magis magisque *erg.* L 4 ab AB . | *directe* autem, id est ut non modo progrediatur modo regrediatur sed progrediatur semper *erg. u. gestr.* | et L 5 secet (1) curva (2) lineam L 7f. alicubi (1) secare cur (2) attingere (3) secare L 9 est, (1) cum enim rectae cuidam $(C)M$ ab altera curvae parte posita, | necessario *gestr.* | alicubi occurrat (2) nam rectae cuidam $(C)M$ ab altera curvae parte posita, alibi occurret ut in M , quoniam C, C (3) | ducatur enim recta *streicht Hrsg.* | $(C)M$ (a) quae (b) producta quantum satis est versus M , ita ut totum extra curvam cadat (aa) ascendens | vel *erg.* | minus descendens versus (bb) accedens (minus recedens) (4) nam ... $(C)M$ (a) recedens ab AB et ita ut adeo magis inclinatur HL quam $G(C)$ (aa) eam secabit in (bb) secabitur ab HL in M (aaa) per Lemma est autem M ab altera parte lineae $C(C)$ quia ex puncto cum ipsa communi, (aaaa) recta (bbbb) C recta $(C)M$ educta in (bbb) remotiore ab AB quam (C) per Lemma ergo ab altera parte lineae $C(C)$. Ergo HLM in alteram partem pervenit adeoque lineam secat in (C) (b) ascendens (c) ascendens L 10 AB , (1) occurrit (2) producatur LH , dum ipsis $G(C)$ alicubi occurrat in G (3) patet L 11 HL (1) et sit HR distantia earum mini (2) ex L

$C(C)$ pervenit, etiam antequam descendat infra (C) . Ergo partem lineae $C(C)$ supra (C) alicubi secat in C . Attingit ergo linea HL producta lineam $C(C)$ in puncto C . anteriore quam est punctum (C) quod ostendendum proponebatur.

Theorema:

Si sit curva Paraboloeides sive cujus ordinatae sint in multiplicata ratione abscissarum secundum aliquem numerum exponentem erit portio directricis inter tangentem et ordinatam ad idem curvae punctum concurrentes intercepta ad abscissam seu portionem directricis inter punctum fixum et ordinatam interceptam, ut unitas ad numerum exponentem. 5

Sit curva Paraboloeides, ut 10

Parabolacommunis seu quadratica	Parabola Cubica	Parabola quadrato- quadratica	etc.
------------------------------------	-----------------	----------------------------------	------

Directrix $AB(B)$ ad quam ordinatae BC . $(B)(C)$ ex omnibus curvae punctis referuntur, secundum abscissas directricis portiones AB . $A(B)$ ex puncto fixo A incipientes; sitque semper ordinata BC ad ordinatam $(B)(C)$ in ratione multiplicata abscissae AB ad abscissam $A(B)$ secundum numerum exponentem quemcunque, nempe in ratione 15

duplicata	triplicata	quadruplicata
id est ut abscissarum quadrata	id est ut abscissarum Cubi	id est ut abscissarum quadrato-quadrata.

13 *In der Mitte der Seite, isoliert:* In exemplum sit Parabola Cubica $C(C)$ in qua BC ad $(B)(C)$ ut Cubi ab $AB, A(B)$.

2 in C . (1) secat ergo HL lineam $C(C)$ (2) attingit L 2 $C(C)$ (1) quod proponebatur ostendendum (2) in L 10 f. ut (1) Conica seu Quadrati (2) Parabola L 13 BC . $(B)(C)$ erg. L 15 f. multiplicata | abscissae ... $A(B)$ erg. | (1) secundum (2) | nempe ändert Hrsg. | numerum L 17 f. linke Spalte: duplicata (1) | adeoque erg. | secundum (a) nume (b) exponentem (aa) 2 (bb) 2 (2) | adeoque erg., streicht Hrsg. | secundum exponentem 2 (3) adeoque | secundum streicht Hrsg. | numerum (4) id L 17 f. mittlere Spalte: triplicata (1) | adeoque erg., streicht Hrsg. | secundum (a) exponentem 3 (b) exponentem 3 (2) id L 17 f. rechte Spalte: quadruplicata (1) secundum numerum exponentem (a) 4 (b) 4 (2) id L

5–9 Si ... exponentem: vgl. S. 482 Z. 6–10. 20 exemplum: Leibniz hat sich an den Fig. 2a u. 2b orientiert, wie aus S. 492 Z. 9 f. hervorgeht.

Ajo semper fore TB portionem directricis interceptam ad AB abscissam, ut unitas ad exponentem, quem vocabimus generali nomine e

2

3

4

Demonstratio

5 Quoniam TC non est ordinatis BC neque directrici AB parallela, ideo vel curvam [in] C tanget, vel in duobus punctis ei occurret, nempe in alio adhuc puncto quam C . (per prop. ...) Quod si ergo ostenderimus non posse in alio adhuc puncto occurrere, utique eam tangere consequetur. Ponantur duo esse puncta C . (C) in quibus curvae occurrat recta $TC(C)$. Unde ordinatae CB . (C)(B) quarum abscissae AB . $A(B)$. Ponatur primum fig. 1.
10 [fig. 2.] punctum novum (C) esse posterius [anterius] puncto C . Minor abscissarum erit AB [$A(B)$]. Ea sit x . Sit differentia $B(B)$ vel CD . aequalis b . erit $A(B)$ [AB] aequalis $x + b$.

Porro quoniam abscissae minoris etiam minor erit ordinata, in Paraboloeidibus, cum ordinatae sint ut potentiae, quadrati scilicet aut cubi, etc. et majoris radices etiam major
15 sit potentia, erunt majorum abscissarum majores ordinatae, ideoque punctum novum (C) si remotius etiam abscissa erit major, et vicissim. BC [(B)(C)] ordinata posita y . erit (B)(C) [BC] aequalis $y + d$, posita $D(C)$ [DC] differentia ordinarum aequali d . His positis ex natura curvae erit $y + d$ ad y , ut

$$\odot \quad \begin{array}{ccc} x^2 + 2xb + b^2 & x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3 & x^4 + 4x^3b + 6x^2b^2 + 4xb^3 + b^4 \\ \text{ad } x^2 & \text{ad } x^3 & \text{ad } x^4. \end{array}$$

20

Porro ob Triangula similia TBC , $CD(C)$, erit (C) D [CD] vel d ad DC [$D(C)$] vel b , ut BC ad TB vel ut (B)(C) ad $T(B)$, ergo per suppositam in constructione ipsius TB

2 f. exponentem, (1) \underline{E} (2) | quem ... e *gestr.*, *erg.* *Hrsg.* | 2 L 5 AB | vel per defin. directricium conjugatarum, neutri directricium AB , AE , *erg.* *u. gestr.* | parallela L 9 (C)(B) (1) Compendii causa (2) quarum L 9 f. $A(B)$. | Ponatur ... puncto C . *erg.* | Minor | ordinarum *ändert Hrsg.* | (1) sit alterutra, ut (2) erit L 11–13 $A(B)$ | [A, B] aequalis *erg.* | $x + b$. (1) Abscissae AB | seu x *erg.* |, ordinata sit y . abscissae (2) Porro | quoniam *erg.* | abscissae L 13 Paraboloeidibus, (1) | nam *streicht Hrsg.* | majorum radicum (2) cum L 15 ordinatae, (1) itaque BC ordinata abscissae majoris posita y . erit (B)(C) ordinata (2) ideoque L 22 TB | (1) vel ut (B)(C) ad $T(B)$ (2) vel ... $T(B)$ *erg.* |, ergo L

7 prop.: vgl. S. 485 Z. 3–10. 10–493,3 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz. Die darin eingeschlossenen Ausdrücke hat er nachträglich zur Fallunterscheidung ergänzt.

rationem ad AB quae est 1 ad e . erit $TB [T(B)]$ aequalis $x [x + b]$ diviso per e et d ad b ut $y [y + d]$ ad $x [x + b]$ div. per e . Ergo d ad $y [y + d]$ ut b ad $x [x + b]$ divis. per num. e vel d ad $y [y + d]$, ut ipsa b multiplicata per numerum e ad $x [x + d]$ seu ut eb ad x , seu ut ebx ad x^2 seu ut ebx^2 ad x^3 seu ut ebx^3 ad x^4 , etc. vel explicando e , secundum varios casus erit d ad y ut

5

$$\begin{array}{cccc} 2bx & 3bx^2 & 4bx^3 & \text{etc.} \\ \text{ad } x^2 & \text{ad } x^3 & \text{ad } x^4 & \end{array}$$

Jam y ad y est ut x^2 ad x^2 , vel ut x^3 ad x^3 . vel ut x^4 ad x^4 etc. Ergo hanc analogiam componendo cum priore, nempe cum d ad y ut $2bx$ ad x^2 , vel $3bx^2$ ad x^3 , vel $4bx^3$ ad x^4 , etc. fiet $y + d$ ad y ut

10

$$\text{D} \quad \begin{array}{cccc} x^2 + 2bx & x^3 + 3bx^2 & x^4 + 4x^3b & \text{etc.} \\ \text{ad } x^2 & \text{ad } x^3 & \text{ad } x^4 & \end{array}$$

Quae rationes D . si conferantur cum rationibus C ubi etiam $y + d$ ad y , ut \dots ad x^2 vel x^3 , vel x^4 erunt ipsi \dots antecedentes rationum C aequales antecedentibus rationum D . Adeoque fiet:

15

2 *Darüber:* In sequentibus substitue perpetuo $x + b$ in locum x et $y + d$ in locum y .

1–3 $TB [T(B)] \text{ erg.} | \text{ aequalis } (1) \frac{AB}{e} (2) \frac{x}{e} (3) x (a) \text{ diviso per } e (b) |[x + b] \text{ erg.} | \text{ diviso } \dots$
 ut $y |[y + d] \text{ erg.} | \text{ ad } (aa) \frac{x}{e} (bb) x (aaa) \text{ div. per } e (bbb) |[x + b] \text{ erg.} | \text{ div. per } e. (aaaa) \text{ vel ut } ey$
 ad x . Sit enim e per exemplum aequalis $(bbbb)$ vel ut y multiplic. per e ad $x (cccc)$ ergo d ad $y |[y + d]$
 $\text{erg.} | \text{ ut } (aaaaa) \frac{x}{e} (bbbb) x. (aaaaa) \text{ divis. per } (bbbbbb) \text{ divis. per num. } e. \text{ ad } b (aaaaaaa) \text{ jam } d \text{ est}$
 ad d , ut $(bbbbbb)$ vel ut x ad b multiplic. per num. $e. (aaaaaaaa) \text{ jam } (aaaaaaaa) y (bbbbbbbbb) d$ ad
 d ut x^2 ad x^2 . vel x^3 ad x^3 , vel x^4 ad x^4 etc. ergo componendo erit $y + d$ ad $d |[y + d] \text{ erg. u. gestr.} |$
 ut $x (bbbbbbbbb) \text{ vel } (ccccccc) \text{ vel } y \text{ ad } d, \text{ ut } x \text{ ad } (aaaaaaaa) b \text{ multiplic. per num. } e. (bbbbbbbbb)$
 rectam ipsam b multiplicatam per numerum e , seu ut x ad eb vel ut x^2 ad ebx vel ut x^3 ad $ebx^2 (cccc)$
 $|x. |[x + b] \text{ erg.} | \text{ ad } b \text{ ändert Hrsg.} | \text{ divis. } \dots \text{ ad } y |[y + d] \text{ erg.} |, \text{ ut } \dots \text{ ad } x |[x + d] \text{ erg.} | \text{ seu ut } eb$
 ad $x, (aaaaa) \text{ seu ut } ebx [x + d] (bbbbbb) | \text{ seu ut } \textit{streicht Hrsg.} | (cccc) \text{ seu } L \quad 8 \quad (1) \text{ Jam cum}$
 hac ratione (2) analogia rationum d ad y cum sit eb ad x . (vel huic aeqvipollentium $2bx$ ad x^2 etc.)
 componatur analogi (3) quemadmodum d ad y est ut eb ad x (vel huic aeqvipollentium $2bx$ ad x^2 etc.)
 | ita $\textit{streicht Hrsg.} | \text{ erit } | \text{ etiam } \textit{streicht Hrsg.} | (4) \text{ Jam } L \quad 8 \text{ hanc } (1) \text{ rationem } (2) \text{ analogiam } L$
 $13 \text{ rationibus } \text{C} (1) \text{ ob aequales antecedent } (2) \text{ continuari } (3) \text{ coinc } (4) \text{ aequales } (5) \text{ ubi } L$

$$\begin{array}{lll}
 x^2 + 2xb + b^2 & x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3 & x^4 + 4x^3b + 6x^2b^2 + 4xb^3 + b^4 \\
 \text{aequal } x^2 + 2xb. & \text{aequal } x^3 + 3xb. & \text{aequal } x^4 + 4x^3b. \\
 \text{Ergo } b^2 \text{ aequal } 0. & \text{Ergo } 3xb^2 + b^3 \text{ aequal } 0. & \text{Ergo } 6x^2b^2 + 4xb^3 + b^4 \text{ aequal } 0.
 \end{array}$$

5 Quod est absurdum. Impossibile enim ut potentiae quantitatum verarum simul additae faciant nihil; cum nulla hic subtractio intercedat.

Quod si posuissemus AB esse majorem abscissam et $A(B)$ minorem, adeoque BC esse majorem ordinatam, et $(B)(C)$ minorem, id est si supponamus rectam ab initio assumptam, TC , quae sit ad AB ut 1 ad e . curvam secare in alio puncto (C) non posse, ut prius, sed ante quam secet in C . Id iisdem fere *v e r b o t e n u s* repetitis impossibile esse

1–3 *Nebenbetrachtung*: $\frac{x^2 + 2xb + b^2}{x^2} \sqcap \frac{x^2 + 2bx + b^2 + 2bx + 2b^2}{x^2 + 2bx + b^2}$. Ergo $\frac{2bx + b^2}{x^2} \sqcap \frac{2bx + 2b^2}{x^2 + 2bx + b^2}$. Ergo $\frac{2bx + 2b^2}{2bx + b^2} \sqcap \frac{x^2 + 2bx + b^2}{x^2}$. Ergo $\frac{b^2}{2bx + b^2} \sqcap \frac{2bx + b^2}{x^2}$. Ergo $\frac{b}{x} \sqcap \frac{2bx + b^2}{x^2}$. Ergo $1 \sqcap \frac{2x + b}{x}$. et $x + b \sqcap 0$. Quod est absurdum. Ergo et praecedens positio.

$$\begin{array}{l}
 \frac{\boxed{x^3} + 3x^2b + 3xb^2 + b^3}{x^3} \sqcap \frac{\boxed{x^3 + 3bx^2 + 3xb^2 + b^3} + 3x^2b + 6xb^2 + 3b^3}{x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3}. \text{ Ergo} \\
 \frac{3xb^2 + 2b^3}{3x^2b + 3xb^2 + b^3} \sqcap \frac{3x^2b + 3xb^2 + b^3}{x^3}. \text{ Ergo } \frac{b^2}{x^2} \sqcap \boxed{2} \frac{3x^2b + 3xb^2 + b^3}{x^3} \sim \frac{x}{3x + 2b}.
 \end{array}$$

6–495,4 *Darüber*: Ideo ipsi potius faciemus, ne quid lectorem moretur.

4 verarum *erg. L* 5 f. intercedat. (1) Impossibile ergo est rectam TC . (a) curvam secare in (b) qvalem supposuimus (aa) rectam (bb) curvam propositam secare in (aaa) duobus punctis. Qvare, ut diximus, cum neutri directricium | conjugatarum *erg.* |, sive nec directrici nec ordinatis | per directricium definitionem conjugatarum *erg.* |, parallela sit, tanget per theor. . . . ut supra jam diximus. Qvod erat demonstrandum. (bbb) alio adhuc puncto qvam C . Qvare ob consequentiam initio huius demonstrationis positam tanget. Q. E. D. (2) Qvod si posuissemus | AC *ändert Hrsg.* | esse (a) minorem | abscissam *erg.* | et $A(C)$ majorem, adeoque BC esse minorem (b) majorem . . . et | $A(C)$ *ändert Hrsg.* | minorem L 9 fere *erg. L*

demonstrabitur. Quoniam tamen nonnulla immutanda sunt, ut demonstratio absolvatur. Nimirum in fig. 2. ponatur punctum novum (C) esse anterius puncto C . Minor abscissarum erit $A(B)$. Ea sit x . etc. Retentis iisdem verbis, mutando tantum AB in $A(B)$ et contra, et BC in $(B)(C)$ et contra et CD in $(C)D$ et contra.

2f. minor |ordinatarum *ändert Hrsg.* | erit L 4 $(B)(C)$ et contra (1) : usque ad verba: Porro ob triangula similia TBC , $(C)DC$ erit C (2) et L

70. QUADRATRIX

April 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 233. 1 Bl. 2^o. 2 S.

Cc 2, Nr. 1386

5 April. 1676

Q u a d r a t r i x

Radius AE . Diameter ACH . Circumferentiae Quadrans ABV . Curva Quadratrix $AD(D)E$ cujus vertex E , centrum est circuli. Cujus tangens ad verticem E , nempe $E((B))$ si duci posset haberetur arcus $A((B))$ radio aequalis. Si vero asymptotos ejus αF
 10 duci posset, haberetur recta $A\alpha$ aequalis quadrantanti ABV .

Sit radius $AE \cap a$. Arcus $AB \cap$ abscissae AC sit $\cap x$. Erit $EC \cap a - x$. Sit sinus $BG \cap s$. erit $EG \cap \sqrt{a^2 - s^2}$. Sit ordinata $CD \cap y$.

Quaeramus aequationem exprimentem valorem ipsius y . ordinatae. Ob Triangula

10f. ABV | Abscissa AC sit x . | et CD ordinata sit y *erg.* | quaeramus $CD \cap y$, calculo, si licet.

$AC \cap$ | arcui *erg.* | $AB \cap x$. BG sinus arcus | dati *gestr.* | sit s . erit $AG \cap \frac{s^2}{2a}$ Et $EG \cap a - \frac{s^2}{2a} \cap \frac{2a^2 - s^2}{2a}$.

(1) jam $EG : EB \cap a :: EC \cap$ (2) jam $EG(a - \frac{s^2}{2a}) : (a) EB(a) :: (b) GB(s) :: EC(a - x) : CD(y)$

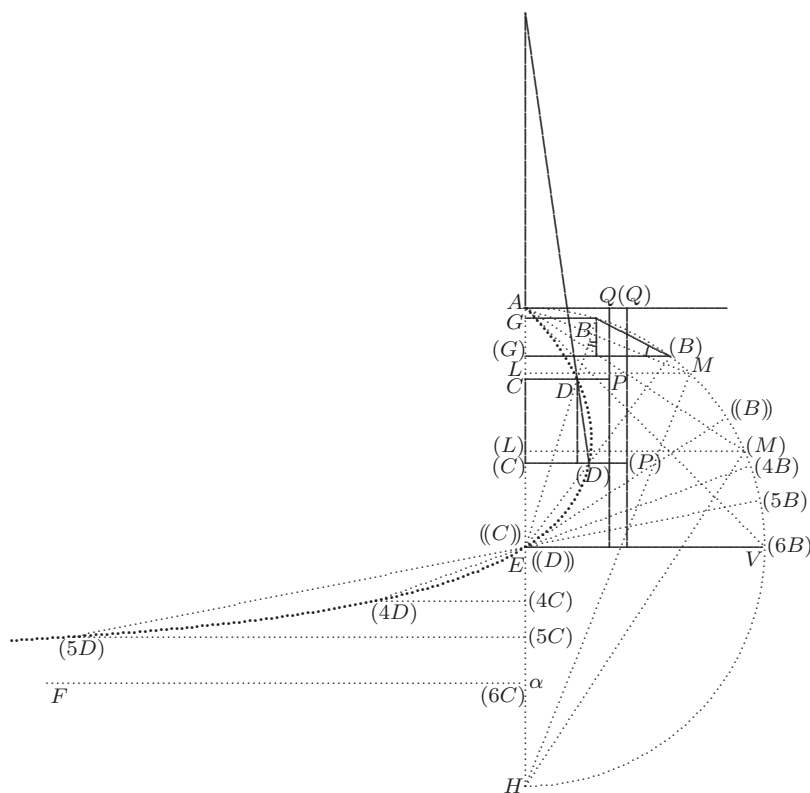
et $y \cap \frac{s, a - x}{a - \frac{s^2}{2a}} \cap \frac{2a^2s - 2asx}{2a^2 - s^2} \cap \frac{s, a - x}{2a^2 - s^2} \cap \frac{s, a - x, 2a}{a\sqrt{2} + s, a\sqrt{2} - s}$ Ducatur $AV \cap a\sqrt{2}$ producatuque in L ,

donec sit VL aequalis ipsi $GB \cap s$. et sumatur $VM \cap VL$. erunt (aa) $y \cap$ (bb) ipsae CD ordinatae, in composita ratione ex rationibus (aaa) arcuum AC ad ipsas productas (bbb) absci (ccc) abscissarum AC ad producta (ddd) productarum LA ad abscissas | sive arcus *erg.* | AC , et reliquarum MA ad reliquas EC sive erit CD ad $(C)(D)$, in composita ratione (eee) | GB sive *erg.* | VL ad LA et EC ad MA sive erit $(aaaa) \frac{CD}{(bbbb)}$ CD ad $(C)(D)$ ut composita ratio ex VL ad LA et EC ad MA , ad compositam

rationem ex $V(L)$ ad $(L)A$ et $E(C)$ ad $(M)A$. Hinc jam primo patet si sit $a - x \cap 0$. seu $a \cap x$. Id est si abscissa sit AE radius, fore CD infinite parvam, adeoque ibi curvam diametrum secare. $(aaaaa)$ Deinde $(bbbbb)$ Idemque fieri si sit $x \cap 0$. adeoque et $s \cap 0$. duobus ergo in locis curva secat diametrum, scilicet in A , et E . Denique infinitam fore ordinatam CD , adeoque asymptoton, tunc cum $a\sqrt{2} - s \cap 0$. seu cum $a\sqrt{2} \cap s$. sed hoc impossibile est, $(aaaaaa)$ video $(bbbbb)$ deberet esse $a | \sqrt{2}$ *gestr.* | $\cap s$. ideoque in

calculo me errasse video $(aaaaaaa)$ Omnia ergo da \langle — \rangle $(bbbbb)$ falsum scilicet $AG \cap \frac{s^2}{2a}$, posito $BG \cap s$.

Rectius ergo sic procedemus. *gestr.* | Sit L



[Fig. 1, tlw. Blindzeichnung]

BGE, DCE , similia erit: $CD(y) : BG(s) :: EC(a - x) : EG(\sqrt{a^2 - s^2})$. et CD seu y erit $\propto \frac{s, a - x}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. Quod ut Geometrice enuntiemus, sumatur in Diametro ipsi (GB) sinui

$$3 \propto \frac{s, a - x}{\sqrt{a^2 - s^2}} \quad (1) \text{ id est erunt ordinatae } (a) \text{ CD } (b) \text{ Quadratricis CD, in composita ratione } (2)$$

Qvod L

1 Fig. 1: Blindlinien sind in der Zeichnung zur besseren Übersichtlichkeit dünn punktiert dargestellt; solche Blindlinien, die nur als Konstruktionshilfe dienen, sind nicht wiedergegeben. Leibniz hat in einer überarbeiteten Vorstufe zur Figur die Punkte M und (M) zunächst auf der Linie AV und die Punkte L und (L) auf der Verlängerung von AV über V hinaus abgetragen; s. Variante zu S. 496 Z. 10f. In der Endfassung sind L und (L) gemäß $AL = GB$ und $A(L) = (G)(B)$ eingezeichnet. Leibniz hat die Konstruktionsvorschrift für L und (L) im Text später zu $EL = GB$ und $E(L) = (G)(B)$ korrigiert, die Figur aber beibehalten; s. Varianten zu S. 498 Z. 1, Z. 2 f., Z. 5 und Z. 7.

arcus generatoris AB , aequalis EL ductaque LM , normali quae circumferentiae occurrat in M , jungantur AM, HM , [eodemque modo in caeteris punctis fieri intelligatur, sumta $E(L)$ aequali $(G)(B)$ ductaque $(L)(M)$, et junctis $A(M), H(M)$]. Erunt CD , ordinatae Quadratricis in composita ratione EL ad AM , et EC ad HM [sive erit CD ad $(C)(D)$ ut ratio composita ex EL ad AM , et EC ad HM , est ad rationem compositam ex $E(L)$ ad $A(M)$ et $E(C)$ ad $H(M)$]. Nam $y \propto \frac{s, a-x}{\sqrt{a^2-s^2}}$. ut ostendimus, id est $y \propto \frac{s, a-x}{\sqrt{a+s}, \sqrt{a-s}}$. Porro $s \propto EL$. $a-x \propto EC$, $\sqrt{a-s} \propto AM$, et $\sqrt{a+s} \propto HM$. Ergo $y \propto \frac{EL}{AM}, \frac{EC}{HM}$.

Porro ex hoc ipsius y valore patet ordinatam CD fore infinite parvam, duobus casibus, uno cum GB seu $s \propto 0$, altero cum $a-x$ seu $EC \propto 0$, vel $a \propto x$. Duobus itaque in punctis, A , et E , curva quadratrix diametrum secat. At si ponatur $s \propto a$, seu $\sqrt{a^2-s^2}$ sive $EL \propto 0$. erit y . infinitiva, sive Asymptotos αF .

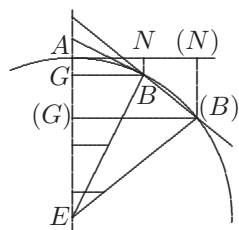
Theorema de natura Quadratricis: Ordinatae (CD) quadratricis (AD) sunt proportionales quantitibus quae sint ad unitatem in composita ratione, ex ratione EC

1 aequalis (1) AL (2) EL L 2 f. sumta (1) A(L), ductisque (2) A(L) (3) E(L) L 4 ratione | AL ändert Hrsg. | ad L 5 ex | AL ändert Hrsg. | ad L 5 ex (1) A(L) (2) E(L) L 7 s \propto (1) AL (2) EL L 9 EC (1) infinite parva (2) $\propto 0$ L 12 Quadratricis: | (1) Si sinui arcus generatoris statuatur aequalis quidam (2) Si (a) sinui recto arcus generatoris Quadratricis statuatur aequalis quidam arcus (b) sinus rectis | GB erg. | arcuum (aa) erit (aaa) ord (bbb) | in eodem circulo erg. | ex (aaaa) Q (bbbb) Punctis (cccc) Puncto extremo portiois Quadratricis generatae ordinata ad diametrum generationi servientem ducta (bb) in diametro generationi serviente | AH erg. | sumti; erunt | CD erg. | ordinatae Quadratricis ad hunc Diametrum | AH ductae, erg. | (aaa) proporti (bbb) ut quantitates quae sint ad unitatem in composita ratione | ex ratione erg. | sinus complementi | EC erg. | arcus dati AB, ad chordam | AM erg. | (aaaa) arcus (bbbb) sinu (cccc) sinus complementi (aaaaa) sinui recto (bbbbb) novi EL, (aaaaaa) et ratione (bbbbb) sinui recto GB, arcus (aaaaaaa) ge (bbbbbbb) dati aequalis; et ratione sinus complementi novi | EL erg. | ad chordam (aaaaaaa) supplementi (bbbbbbb) semicirculum complementem (aaaaaaaa) EM (bbbbbbbb) HM. | Brevius. gestr. | Ordinatae L 13 composita ratione, (1) | ex ratione differentiae erg. | sinus (a) arcus (b) rect (c) complementi EC arcus generatoris | AB erg. | ad chordam | AM erg. | sinui complementi | EL erg. | sinui (aa) huic (bb) huius arcus GB recto aequalis; et ex ratione | huius erg. | sinus recti | EL vel GB erg. | eiusdem arcus generatoris, ad chordam (aaa) sinui complementi hui (bbb) | AB erg. | complementem HM erg. | sinus complementi ipsi aequalis (2) ex L

2–6 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz selbst. 7 $\sqrt{a-s} \propto AM$: Richtig wäre $AM = \sqrt{2a(a-s)}$ und dementsprechend $HM = \sqrt{2a(a+s)}$ sowie $y = 2a \frac{EL}{AM} \cdot \frac{EC}{HM}$. Die allgemeine Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

differentiae radii AE et arcus generatoris AC seu AB , ad chordam AM cujusdam sinus complementi EL hujus arcus sinui recto GB aequalis, et ex ratione ejusdem sinus complementi EL ad chordam HM arcus sui ABM complementalem.

Porro y in duas quantitates resolvi potest: $\frac{sa}{\sqrt{a+s}, \sqrt{a-s}}, \frac{-sx}{\sqrt{a+s}, \sqrt{a-s}}$, neutram quadrare facile, ne ex data quidem Circuli Quadratura. Una autem alterius mo-



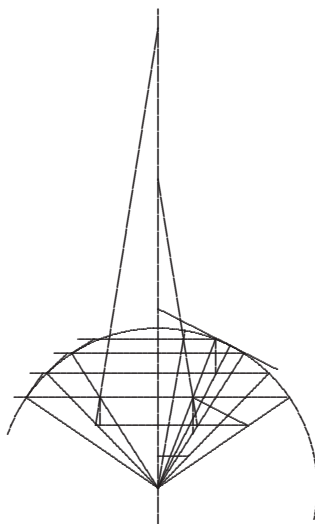
[Fig. 2, tlw. Blindzeichnung]

mentum continet ex vertice, posterior scilicet, prioris: Quoniam autem haec calculo difficulter tractantur, ad reliquas artes nostras confugiendum est, et quaerendum ante omnia qualis sit quantitas $\frac{sa}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. Sunt autem sinus nihil aliud quam abscissae ex tangente verticis, ut $AN \perp GB$, ipsa autem Arcuum differentia $B(B)$, quam vocemus β . Quaeritur summa omnium $\frac{as\beta}{EG \perp \sqrt{a^2 - s^2}}$.

5

10

12 Unter Fig. 2 von Text überschriebene Figur in Blindzeichnung:



12 Fig. 2: Eine gestrichene Vorstufe zur Figur wird nicht wiedergegeben.

Est autem $\beta \propto \frac{g^2}{s}$. seu β ipsis s . reciprocae. Erit ergo $\frac{as\beta}{\sqrt{a^2 - s^2}} \propto \frac{ag^2}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. Dantur ergo omn. $\frac{as\beta}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. quia dantur omnes $\frac{ag^2}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. posito a . et g . esse constantes, et s . arithmeticas. Dantur inquam ex supposita Circuli Quadratura, seu dimensione Curvae Circuli. Superest ergo ut inveniamus omnes: $\frac{ag^2x}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. Quod idem est ac invenire mo-

5 momentum omnium CD ex vertice A . Igitur momentum areae quadratricis ex vertice, et areae illius dimensio connexa sunt.

Videamus jam an omnium CD in $C(C)$ momentum ex vertice inveniri possit; invenietur autem inventa summa omnium AC quadratorum, in diff. $\overline{CD}, (C)(D)$. Sed non est necesse omnium CD ex vertice A inveniri momentum, quia potius quaeritur eorum

10 momentum ex basi EV , ipsorum $\frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. dabit $\frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}}$ in $a - x$. seu aream figurae quadratricis. Ergo de solis $\frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}}$ verum est, seu rectis CP . $(C)(P) \propto \varphi$, earum ex vertice A quaeri momentum seu omnes $\frac{sax}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. Quaeritur ergo summa quadratorum

6f. sunt. (1) Habebitur autem |facilius erg. | momentum omnium $\frac{sa\beta}{\sqrt{a^2 - s^2}} \propto \omega$ erg. | seu $\frac{sa\beta x}{\sqrt{a^2 - s^2}}$ si contra ex assumtis ω , quaeramus valorem ipsarum s. (a) Est autem $\beta \propto \frac{g^2}{s}$. ergo erit $\frac{ag^2}{\sqrt{a^2 - s^2}} \propto \omega$. et $\frac{a^2g^4}{a^2 - s^2} \propto \omega^2$, sive $a^2g^4 \propto (b)$ erit $\frac{s^2a^2}{a^2 - s^2} \propto \omega^2$. et fiet $s^2a^2 \propto a^2\omega^2 - s^2\omega^2$. et $s \propto \frac{a\omega}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$. quorum quadratum: $\frac{a^2\omega^2}{a^2 + \omega^2}$ (aa) habetur (bb) habentur autem omn. (2) videamus L

8 $\overline{CD}, (C)(D)$ (1) sunt autem diff $CD \propto \beta \propto \frac{g^2}{s} + (2)$ sed non est inveni (3) sed L

1 $\beta \propto \frac{g^2}{s}$: Die Behauptung, bei der g als konstant angenommen wird, ist nicht korrekt. Dies beeinträchtigt (zusammen mit weiteren kleineren Versehen) die Diskussion bis S. 504 Z. 10; Leibniz setzt in S. 504 Z. 12 noch einmal neu an.

omnium PQ . Sunt autem $PQ \sqcap x \sqcap AC$. id est $\overline{\text{omn. } \beta}$ et $\beta \sqcap d\bar{x}$. Jam idem $\beta \sqcap \frac{g^2}{s}$. Ergo $s \sqcap \frac{g^2}{dx}$. Ergo aequatio: $\varphi \sqcap CP \sqcap \frac{sa}{\sqrt{a^2 - s^2}} \sqcap \frac{g^2 a}{d\bar{x} \sqrt{a^2 - \frac{g^4}{2} dx}}$ et $\varphi^2 \sqcap \frac{g^2 a}{\sqrt{a^2 2 dx - g^4}}$ et $\varphi^2 \sqcap \frac{g^4 a^2}{a^2 2 d\bar{x} - g^4}$ et $\varphi^2 a^2 2 dx \sqcap g^4 a^2 + \varphi^2$. et $dx \sqcap \frac{g \sqrt{a^2 + \varphi^2}}{\varphi}$. et $x \sqcap \text{sum. } \frac{g}{\varphi} \sqrt{a^2 + \varphi^2}$ et $x^2 \sqcap \frac{a^2 g^2}{\varphi^2} + g^2$. Datur ergo summa omnium x^2 , ex positis φ . adeoque datur et dimensio areae quadratricis, ex data Circuli Quadratura.

5

Veniamus ad ejus Tangentes et Curvam. Aequatio Quadratricis: $y \sqcap \frac{g^2 a - g^2 x}{\sqrt{a^2 2 dx - g^4}}$.

Differentia duarum y , erit: $\mp \frac{g^2 a - g^2 x}{\sqrt{a^2 2 dx - g^4}} \mp \frac{g^2 a - g^2 x - g^2 dx}{\sqrt{a^2 2 dx + d\bar{x} - g^4}}$. Nota ubi haec differentia $\sqcap 0$. erit maxima curvae latitudo. NB. NB.

Videndum tamen an non hic facilius res motu possit explicari: manifestum est punctum describens, pluribus ferri motibus. Et primum radius et regula uniformi feruntur motu. Cumque eorum intersectione designabitur curva.

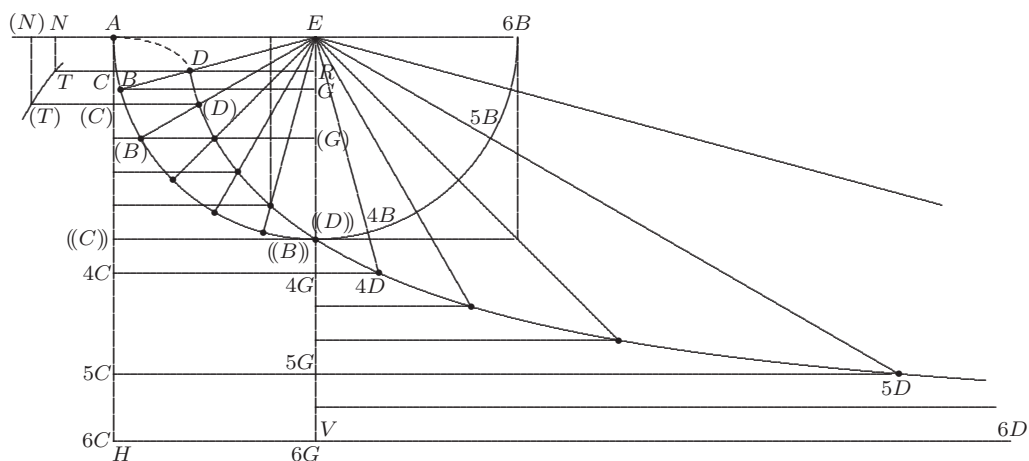
10

Sed hic illud superest admonendum non esse necesse ut aequali celeritate ferantur regula et radius. Sufficit utramque ferri uniformi; et tunc non est necesse AC aequari arcui AB . Et hoc modo haberi possunt puncta quadratricis, quot quis voluerit. Haec autem Quadratrix semper erit propositae proportionalis. Ac similiter Spiralem Archimedis concipere licet generalius, ut possint inveniri ejus puncta quaelibet, si radius scilicet pariter et punctum in eo uniformi motu ferantur, etsi motus unius non sit aequalis motui alterius. Quadratrix autem particularis veterum in eo differt ab hac generali, et mea particulari. Quod in generali nihil refert quae sit celeritas modo in singulis constans; in veterum particulari requiritur, ut eodem tempore absolvantur diameter et semicircumferentia, seu ut motus sint in ratione diametri ad semicircumferentiam, in mea ut sint aequales.

15

20

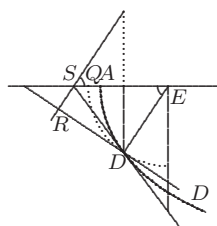
1 est (1) $\int \beta$ (2) $\overline{\text{omn } \beta} L$ 4f. et (1) curvae Cycloeidis (2) dimensio (a) Quadratricis (b) areae L
 10 describens, (1) duobus (2) pluribus L



[Fig. 3]

Centro E , radio AE , describatur semicirculus $AB(B)$ etc. Recta AH diametro dupla tangens semicirculum in extremo A . dividatur in partes divisionibus semicirculi proportionales. Semicirculo diviso punctis B . Recta AH punctis C . jungite radios AB , quae ubi

1 Neben der Figur:



Tangens quadraticis ex Robervalio[:] Centro E , radio ED , arcus circuli cujus tangens DR \cap arcui DQ . Duc(ta) RS parallela DE . secans EA in $\langle S \rangle$ erit juncta DS , tangens. Ho(c) ex compositione motuum.

1 Fig. 3: Die Figur ist zum größten Teil übernommen aus G.P. de ROBERVAL, *Observations sur la composition des mouvemens*, gedr. in *Ouvrages*, S.96. Leibniz hat das Manuskript offenbar nach dem Brief an Oldenburg vom 28. Dezember 1675 einsehen können (vgl. III, 1 N. 70 S. 328). — Die von Leibniz in der Figur angedeutete Fortsetzung der Quadratrix über D hinaus nach A (vgl. S. 503 Z.1) ist nicht korrekt. Auch der Verlauf der Kurve $T(T)$ ist fehlerhaft wiedergegeben. In Leibniz' Vorlage ist zusätzlich der auf $5D$ folgende Punkt der Quadratrix als Schnittpunkt der aus E zwischen $5B$ und $6B$ laufenden Gerade mit der entsprechenden Parallele zu $6G6D$ eingezeichnet. 6 Robervallo: *a. a. O.*, S. 97–99. — Leibniz hat in der Figur zur Tangentenkonstruktion den Punkt A irrtümlich zwischen S und Q eingezeichnet und dadurch die Quadratrix AD und den Kreisbogen QD als einander in D berührend wiedergegeben.

transeuntes per C parallelas ipsi AE , secabunt, in D , erunt puncta quadraticis: $AD(D)$ etc.

Sit $AC \sqcap x$. $DR \sqcap y$. radius a . sinus $GB \sqcap s$. Producta CD in R , ubi diametro occurrit, erunt Triangula ERD , et EGB similia. Ergo $DR(y) : BG(s) :: ER(x) : EG(\sqrt{a^2 - s^2})$. Adeoque $DR \sqcap \frac{sx}{\dagger\sqrt{a^2 - s^2}} \sqcap y$. seu ordinata quadraticis in regulam est ad arcum, ut sinus arcus ad ejus sinum complementi. Et signum ambiguum \dagger ostendit ab utraque ipsius EV parte esse ordinatas quasdam.

Quaeritur jam hujus figurae quadratura. Constat autem nobis aliunde esse $d\bar{x} \sqcap \frac{g^2}{s}$.

posita g . quadam constante. Ergo $x \sqcap g^2$ omn $\frac{1}{s}$ et $y d\bar{x} \sqcap \frac{s \frac{g^2}{s}}{\sqrt{a^2 - s^2}} \hat{=} g^2$ omn $\frac{1}{s} \sqcap \frac{g^4}{\sqrt{a^2 - s^2}}$ omn $\frac{1}{s}$. Sed quia omn $\frac{1}{s}$ non satis sic tractabile ita considerabimus: In punctis

C applicentur ubique ipsi AC , ipsae $CT \sqcap \frac{sa}{\dagger\sqrt{a^2 - s^2}}$. Ajo primum figurae inde orientis haberi summam, scilicet omnium $\frac{sax}{\dagger\sqrt{a^2 - s^2}}$. Quia $dx \sqcap \frac{g^2}{s}$, ergo $CT \sqcap \frac{ag^2}{\dagger\sqrt{a^2 - s^2}}$

quorum habetur summa. Nimirum si abscissae crescant Arithmetice, arcus ut possunt, rectangulis ex CT in differentias arcuum erunt proportionalia rectangula ex differentiis constantibus arithmeticarum, seu sinuum versorum et ipsis ordinatis figurae angulorum seu sinuum complementi reciprocis. Ni fallor autem alibi ostensum, sinuum complementi reciprocas applicatas abscissis seu sinuum complementi, seu sinuum versorum (hoc enim in differentiis coincidit) differentiis dare figuram angulorum. Sed nobis non figurae

5f. seu (1) | erit *streicht Hrsg.* | (2) ordinata quadraticis | in regulam est *erg.* | ad L 6 ad (1) sinum eius versum (2) eius L 10 quia (1) $\frac{g^4}{\sqrt{a^2 - s^2}}$ non s (2) omn $\frac{1}{s} L$ 13 summa, | ex data Circuli quadratura, prodit enim eadem quae est figurae angulorum *gestr.* |. Nimirum L 16 sinuum (1) versorum (2) complementi reciprocis, (a) id est ipsorum arithmetico-*rum*, id est ordinatarum Hyperbolae, Ergo illius figurae quadratura dabitur ex quadratura (b). Ni L 18 dare (1) Hyperb (2) figuram L

8 aliunde: S. 500 Z. 1. 15 sinuum versorum: Leibniz verwechselt Abzisse der Quadratrix und Abzisse des Kreises. 16 alibi: vgl. VII, 4 N. 34 S. 580f. Statt über der Abzisse müssten die sinu complementi über der Ordinate abgetragen werden, um die figura angulorum zu erhalten.

$CT(T)(C)$ quadratura, sed ejus momento ex vertice A . seu axe AN , opus. Id est summa quadratorum omnium NT . Jam $AC \sqcap NT \sqcap x$. $CT \sqcap \frac{sa}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. Vocemus CT, φ . Erit

$\varphi^2 \sqcap \frac{s^2 a^2}{a^2 - s^2}$. et ut x intret in aequationem, et sola quidem, ne plures duabus sint indeterminatae, cogitemus esse $s \sqcap \frac{g^2}{dx}$. Ergo $\varphi^2 \sqcap \frac{g^4 a^2}{\textcircled{2} d\bar{x}, a^2 - \frac{g^4}{\textcircled{2} dx}}$ id est $\varphi^2 \sqcap \frac{g^4 a^2}{a^2 \textcircled{2} dx - g^4}$

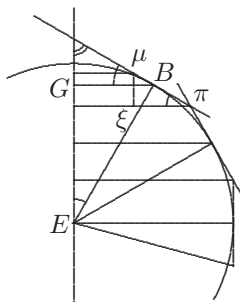
5 et $\varphi^2 a^2 \textcircled{2} dx \sqcap g^4 a^2 + g^4 \varphi^2$. et $dx \sqcap \frac{g^2}{\varphi a} \sqrt{a^2 + \varphi^2}$. et $x \sqcap \text{omn} \frac{g^2}{\varphi a} \sqrt{a^2 + \varphi^2}$. Sed hinc

non licet, ut superiore pagina male feceram, concludere $x^2 \sqcap \text{omn} \frac{g^4}{a^2} \frac{a^2}{\varphi^2} + 1$. Ergo

nondum rem absolvimus, neque adeo facile est. Invenienda scilicet summa omnium $y \sqcap \frac{g^2 x}{\sqrt{a^2 \textcircled{2} d\bar{x} - g^4}}$ positis g et a constantibus sola x variante. Haec enim est aequatio perfecte

explicans naturam quadraticis. Imo hinc oritur absurdum, quia enim in nostra potestate

10 ipsas y facere arithmeticas, fieret locus ad lineam rectam.



[Fig. 4, tlw. Blindzeichnung]

Resumamus ergo: Aequatio erat $y \sqcap \frac{sx}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. Explicetur $s \sqcap \frac{g^2}{dx}$. Hoc videndum

12 $\sqcap \frac{g^2}{d\bar{x}}$, (1) hoc enim indubitabile est. fiet $y \sqcap \frac{g^2}{dx}$ (2) Hoc L

an sit verum. Triangula similia $BGE, \mu\xi\pi$. Ergo erit $\mu\pi : EB(a) :: \mu\xi : GB$ et $\mu\pi \propto dx$.
 et $GB \propto s$. Erit $d\bar{x}s \propto a\mu\xi$. Ergo non est absolute verum esse $s \propto \frac{a}{dx}$. sed erit ipsa g
 inconstans posito $\mu\xi \propto g^2$, si scilicet sumimus dx pro constante: Cessat ergo absurditas,
 sed nondum solutum est problema.

Resumamus priora: $y \propto \frac{sx}{\sqrt{a^2 - s^2}}$. et $s \propto \sqrt{a^2 - z^2}$. posito esse z . sinum comple- 5
 menti, fiet: $\frac{\sqrt{a^2 - z^2}x}{z} \propto y$. Erit $\mu\xi \propto d\bar{z} \propto \gamma$. $\mu\pi \propto dx$. Quaeramus $\omega \propto \xi\pi$. ex cognita
 circuli tangente, scil. $\sqrt{a^2 - z^2} - \sqrt{a^2 - z^2 - 2z\gamma - \gamma^2} \propto \omega$. et fiet: $(a^2 - z^2) - 2z\gamma - \gamma^2 \propto$
 $\omega^2 - 2\omega\sqrt{a^2 - z^2} + a^2 - z^2$. Fiet: $z^2\gamma^2 \propto \omega^2 a^2 - \omega^2 z^2$. et $\omega \propto \frac{z\gamma}{\sqrt{a^2 - z^2}} \propto \xi\pi$ et
 $\mu\pi \propto dx \propto \frac{a\gamma}{s}$. et $x \propto a \sum \frac{\gamma}{s} \propto a \sum \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. et $y \propto \frac{a\sqrt{a^2 - z^2}}{z} \sum \frac{d\bar{z}}{\sqrt{a^2 - z^2}} \odot$.

Quaestio jam ad mirabilem quandam analysin reducta est, nimirum, ut liceat ipsis z 10
 quamcunque ascribere progressionem, modo illa talis fiat, ut ipsarum $\frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ inveniri
 possit summa, sed hoc omnino satis certum est fieri non posse. Si velimus jam loco z
 habere, x . id fieri puto poterit, ope aequationis superioris $x \propto a \sum \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. Ergo
 $dx \propto a \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$. et $\textcircled{2} dx \propto \frac{a^2 \textcircled{2} dz}{a^2 - z^2}$. et $\textcircled{2} d\bar{x}a^2 - \textcircled{2} d\bar{x}z^2 \propto a^2 \textcircled{2} dz$. Sed hinc jam novo ir- 15
 resolubilitatis genere valor ipsius z extra vinculum tetragonisticum haberi
 non potest, nam si faciamus ut non sit amplius intra vinculum differentiae, non ideo impe-
 diemus, quo minus sit intra vinculum summae. Nec ultra hoc iri potest $\frac{dx}{dz} \propto \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}} \textcircled{D}$.
 Leges enim novi hujus calculi non permittunt, ut ultra eatur.

7f. *Daneben*: (+ NB. Modus eligendi in calculo vane enim transponi poterat ad
 quadrandum utrobique. [+])

7f. $(a^2 - z^2) (1) \propto \omega^2 + 2\omega\sqrt{a^2 - z^2} (2) - 2z\gamma - \gamma^2 \propto \omega^2$ | + ändert Hrsg. | $2\omega\sqrt{a^2 - z^2} L$

Unum tantum videndum est, an non conjungendo aequationes \odot et \mathfrak{D} inter se tolli possit z . Ac quia patet esse $\frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} \sqcap \frac{dx}{a}$. substituendo $\frac{dx}{a}$ in aeq. \odot redibit $y \sqcap$

$\frac{\phi\sqrt{a^2 - z^2}}{z} \frac{x}{\phi}$. Hinc jam quaeramus z . Fiet: $\frac{y^2}{x^2} \sqcap \frac{a^2 - z^2}{z^2} \sqcap \frac{a^2}{z^2} - 1$ et $\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} \sqcap \frac{a}{z}$.

et $z \sqcap \frac{xa}{\sqrt{y^2 + x^2}}$. et $\frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} \sqcap \frac{d\frac{xa}{\sqrt{y^2 + x^2}}}{\sqrt{a^2 - z^2}} \sqcap \frac{dx}{a}$ et $a^2 - z^2 \sqcap -\frac{x^2 a^2}{x^2 + y^2} + a^2 \sqcap$
 5 $\frac{-x^2 a^2 + x^2 a^2 + y^2 a^2}{x^2 + y^2}$. et $\sqrt{a^2 - z^2} \sqcap \frac{ya}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. et denique $d\frac{xa}{\sqrt{y^2 + x^2}} \sqcap \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}} dx$.

Quae est aequatio explicans naturam quadraticis, posita x abscissa ex diametro, et y ordinata. Sed hinc nihil duci potest ad quadraturam, exploratis mihi hactenus artibus.

Videndum an aliquid pro quadratura duci queat, ex natura tangentium: Si sit x arithmetica, fiet: $d\frac{xa}{\sqrt{y^2 + x^2}}$ aequ. $\frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}} [dx]$. $d\frac{x}{\omega}$ aequ. $\frac{x}{\omega} - \frac{x}{\omega} \dagger \frac{d\bar{x}}{\omega \dagger d\bar{\omega}}$. Fiet: $d\frac{x}{\omega}$

10 aequ. $\dagger \frac{x d\bar{\omega}(\dagger) \omega d\bar{x}}{\omega^2}$. Ergo posito $\omega \sqcap \sqrt{y^2 + x^2}$ fiet: aequ. $\frac{\sqrt{\omega^2 - x^2}}{\omega} d\bar{x}$. Ergo inveni-

enda $\int \omega d\frac{xa}{\omega}$ seu seriei $\omega d\frac{\bar{x}\bar{a}}{\omega}$ invenienda summa sive $\int \omega d\frac{\bar{x}\bar{a}}{\omega}$. seu $\int \dagger \frac{x}{\omega} d\bar{\omega}(\dagger) \int d\bar{x}$ seu $\dagger \int \frac{x}{\omega} d\bar{\omega}(\dagger)x$. Videtur subesse error.

7–12 Sed ... error erg. L

11 $\int \dagger \frac{x}{\omega} d\bar{\omega}(\dagger) \int d\bar{x}$: In diesem und dem folgenden Ausdruck fehlt ein globaler Faktor a .

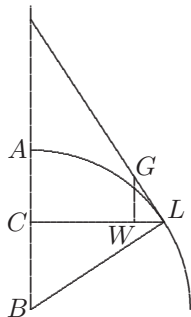
71. DE QUADRABILITATE QUADRATICIS

[Mitte 1674 – 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 133. 1 L-förmiger Streifen von max. 24 x 3,4 cm. 2 Z. auf Bl. 133r^o. Rückseite leer.
Cc 2, Nr. 702

5

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Aufzeichnung dürfte während Leibniz' Parisaufenthalt entstanden sein. Aufgrund der Notation ist sie frühestens Mitte 1674 verfasst worden. Möglicherweise steht sie in Zusammenhang mit der Studie zur Quadratrix N. 70.



[Fig. 1]

$$\frac{ax}{\sqrt{2ax-x^2}} \sqcap GL, \text{ si } AGL, \text{ arcus circuli. Ergo } \frac{a^2x^2}{2ax-x^2} + a^2 \sqcap \frac{\cancel{a^2x} + 2a^3 - \cancel{a^2x}}{2a-x} \sqcap 10$$

$$\frac{2a^3}{2a-x}. \text{ Ergo } WL \sqcap \sqrt{\frac{2a^3}{2a-x}} \text{ quae est subduplicata reciproca uniformium.}$$

$$\frac{WL}{GW} \sqcap \frac{BC}{CL}. \text{ Ergo } WL \sqcap \frac{x\beta}{\sqrt{a^2-x^2}}, \text{ et } GL \sqcap \sqrt{\frac{x^2\beta^2 + \beta^2a^2 - \beta^2x^2}{a^2-x^2}} \sqcap \frac{\beta a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Unde patet quadrari posse quadraticem.

10 $\frac{ax}{\sqrt{2ax-x^2}} \sqcap GL$: Leibniz notiert für das Kreisbogenelement GL irrtümlich den Ausdruck für die Ordinate der figura segmentorum. Auch die anschließende Berechnung von WL ist fehlerhaft. Leibniz streicht das erhaltene Resultat und setzt in Z. 12 neu an. Die abschließende Folgerung ist nicht korrekt.

72. DE CENTRO GRAVITATIS SEMICIRCULI

[April – Ende 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 1 Bl. 132. 1 Streifen von ca 17,4 x 1,5 cm. 2 Z. auf Bl. 132r^o. Rückseite leer. Geschwungene Schnittkanten. — Gedr.: Cc 2, S. 69.

5 Cc 2, Nr. 701

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Notiz dürfte während Leibniz' Parisaufenthalt entstanden sein. Auf das Theorem, das sich bereits aus PAPPUS, *Collectio* IV, prop. 26 ableiten lässt, ist Leibniz vermutlich bei der Durchsicht von Robervals hinterlassenen Papieren gestoßen. Es findet sich fast gleichlautend formuliert in Robervals Brief an Torricelli vom 1. Januar 1646 (TORRICELLI, *Opere* III, S. 356; MERSENNE, *Correspondance* XIV, S. 22) sowie in einem Manuskript (s. a. a. O., S. 24 f.). In abgewandelter Formulierung ist der Satz auch in P. GULDIN, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. I, S. 67 enthalten. Eine allgemeinere Fassung des Theorems steht in V. LÉOTAUD, *Cyclomathia*, lib. III, 1663, S. 130. Infolge der thematischen Verwandtschaft mit der auf April 1676 datierten und ebenfalls an Robervals Manuskripte anknüpfenden Studie zur Quadratrix N. 70 könnte das vorliegende Stück im selben Zeitraum entstanden sein.

10
15

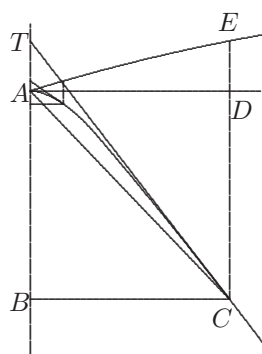
Notabile Theorema: quod Centrum gravitatis semicirculi sit idem cum vertice Quadratricis.

73. DE FIGURIS SYLLOGIS

[2. Hälfte (?) April 1676]

Überlieferung: L Notiz: LH 35 XIII 1 Bl. 412. 1 Ausschnitt von max. 21,5 x 5,8 cm. Obere Schnittkante geschwungen. 1 S. auf Bl. 412 r°. Bl. 412 v° leer. — Bl. 412 bildete ursprünglich mit LH 4 III 9 Bl. 11–12 (VI, 3 N. 65, 72 u. 73), dat. April 1676, und der mathematischen Aufzeichnung LH 35 XII 1 Bl. 343 (Cc 2, Nr. 00; Druck in einem späteren Band dieser Reihe) einen vollständigen Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1208

Datierungsgründe: N. 73 wurde unter die von den Herausgebern auf die zweite Monatshälfte datierte VI, 3 N. 72 auf den Bogen geschrieben.



[Fig. 1]

Si ABC figura curvilinea. CT . tangens. AT . interval-
lum tangentis, $DE \perp AT$. Figura $ADEA$ aequatur etiam
duplo segmento ACA . ut annotavit Tschirnhusius: Porro
ut TB ad AB , ita, ni fallor area $ACDE$ ad aream $ADCA$
reciproce. Sed necesse est, ut ipsae AB et TB constantem
habeant rationem. Quid vero si essent inconstantes, ut si
posita $AD \perp y$. sit DC ad DE , ut y ad 1, vel ut y^2 ad 1. vel
ut y^2 . ad $y + 1$, ubi quidem saepe naturam figurae ac de-
scriptionem invenire difficile. Quaeritur vero an id serviat
ad Quadraturam figurae hujus, etsi ignotae. Non puto, il-
lud tamen manifestum est si figura $ADEA$. sit sylloga fi-
gurae $ABCA$ vel ejus complemento, ita scilicet ut ex data una haberi possit altera, ad-
huc semel, ex particulari scilicet figurae proprietate, habitam iri quadraturam, quoniam
jam habitur ex generali. Idem est de aliis ejusmodi figuris quae syllogae ex generali sunt
figurarumque omnium communi natura, quod si ex peculiari figurae propositae proprie-
tate, alia adhuc ratione reperiantur syllogae, habebitur aequatio, adeoque quadratura
utriusque.

13 annotavit Tschirnhusius: Das Resultat ergibt sich unmittelbar aus Tschirnhaus' Aussagen in N. 49 S. 346 Z. 8f. Leibniz hatte den Satz bereits selbst im Januar 1675 in N. 22 prop. (11) S. 186 Z. 8f. hergeleitet. 21 Fig. 1: Das Krümmungsverhalten der Kurve AE ist nicht korrekt wiedergegeben.

74. QUADRATURA CYCLOIDIS. FIGURAE SINUUM

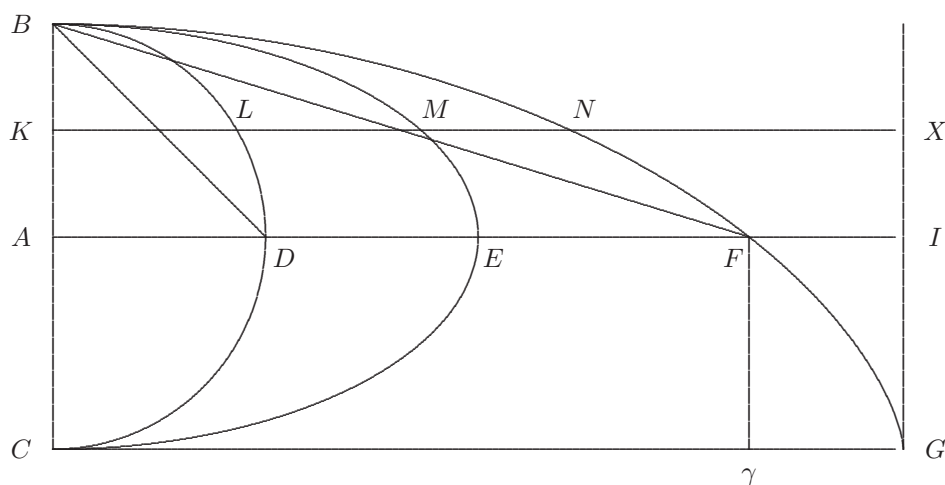
[Ende April – Anfang Mai 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 439. 1 S. auf Bl. 439 r°. Auf Bl. 439 v° N. 75.
Bl. 439 bildete ursprünglich zusammen mit LH 35 II 1 Bl. 125 (VII, 3 N. 58) einen vollständigen Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1465

Datierungsgründe: Das ursprünglich mit dem vorliegenden Stück zusammenhängende VII, 3 N. 58 ist auf den 3. Mai 1676 datiert.

Quadratura Cycloidis. Figurae sinuum.

[Erster Ansatz]



[Fig. 1]

9 qvadratura ... sinuum erg. L

11 *Fig. 1*: Leibniz übernimmt *Fig. 1* und *Fig. 2* mit den Punktbezeichnungen zum größten Teil aus H. FABRI, *Opusculum geometricum*, 2. Aufl., in: ders., *Synopsis geometrica*, 1669, Tafel 3, Figur 24; in seinem Handexemplar hat Leibniz die fehlende Punktbezeichnung *E* in die Figur eingetragen (vgl. VII, 4 N. 1 S. 21 Z. 19f.). — In *Fig. 1* hat Leibniz als Länge der Basis *CG* den vierfachen Radius *AC* statt der Bogenlänge des Halbkreises *BDC* verwendet. Die Verzerrung ist vermutlich Ursache der falschen Gleichung in S. 511 Z. 5. In *Fig. 2* hat Leibniz die Größenverhältnisse korrekt wiedergegeben.

$KL \sqcap LM$. $LN \sqcap$ arcui \widehat{BL} . $NX \sqcap$ arcui MEC . $CGB[D]C \sqcap 2BCDB$ ex data Cycloidis dimensione.

$BAD \sqcap BFNB$ probandum.

$CAIG \sqcap$ circ. $CAFG \sqcap$ circ. $-FIG$.

$\diagup \diagdown$

$$EFNBE \sqcap \frac{BLDFNB}{2}$$

5

$FI \sqcap CG - AF$. Ergo $FI \sqcap \frac{CG}{2} - AD$ et rectangulum $FIG\gamma \sqcap \frac{CG}{2} \frown AC - AD \frown AC$.

$\diagup \diagdown$

$$\left(\frac{CG}{2} \sqcap\right) DF + AD$$

Ergo $F\gamma GF \sqcap FIG\gamma - FIGF \sqcap \frac{CG}{2}, AC - AD, AC, -, -\frac{BLDFNB}{2}$ et $CAIG(\sqcap CG, AC)$

$- FIGF(\sqcap \frac{BLDFNB}{2}) + BLDFNB + BADLB$ [bricht ab]

[Zweiter Ansatz]

10

$LN \stackrel{(1)}{\sqcap}$ arc BL . $DF \stackrel{(2)}{\sqcap}$ arc BLD . $PS \stackrel{(3)}{\sqcap}$ arc BLP . $LN + PS \stackrel{(4)}{\sqcap}$ arc BL . + arc BLP . et arc $BLP \stackrel{(5)}{\sqcap}$ arc LPC . Ergo $LN + PS \stackrel{(6)}{\sqcap}$ arc BL + arc $LPC \stackrel{(7)}{\sqcap}$ semicircumf. seu $\sqcap BLC \stackrel{(8)}{\sqcap} CG$. Idemque fit ubique ergo Omnes LN . etc. seu Trilin. $BDCGFB \stackrel{(9)}{\sqcap} \square ACG$ seu Circulo. Et haec omnium simplicissima est Cycloeidem metiendi via.

15

5 (1) EFB (2) EFNBE L

1 $NX \sqcap$: Der Wert für NX ist falsch; der Fehler wirkt sich nicht aus. 4f. FIG : H. FABRI, *a. a. O.*, prop. XXIII, cor. VI u. VII, S. 383, beweist die Flächengleichheit der Dreiseite FIG und $EFNBE$ sowie des Dreiseits $BLDFNB$ und der Sinusfigur. Leibniz übernimmt daraus zunächst die Bezeichnung EFB für das zweite Dreiseit (s. Lesart) und präzisiert anschließend. Vermutlich durch die verzernte Darstellung in seiner Figur irreführend setzt er $EFNBE = \frac{1}{2}BLDFNB$, rechnet konsequent mit dem falschen Wert weiter und bricht ab. 14 simplicissima: vgl. *a. a. O.*, prop. XXIII, cor. V, S. 382f.

theoremate. Jam $BCDB \stackrel{(33)}{\sqcap} BDCEB$. per 10. Ergo erit $BCEB \stackrel{(34)}{\sqcap} 2BCDB$. Ergo per 32. erit $BCEB \stackrel{(35)}{\sqcap} r\pi$. Ergo per 31. erit $BCEB \stackrel{(36)}{\sqcap} ACGSF + BMEFNB$. Utrique commune $AEQC$ si utrinque auferatur, fiet $BAEMB \stackrel{(37)}{\sqcap} ECGSF + BMEFNB$. seu $BAEMB \stackrel{(38)}{\sqcap} BE[C]GFB$. Sed hoc jam notum.

Trapez. $CAFG \stackrel{(39)}{\sqcap} r\pi -$ Trilin. $IGSF. BMEFNB \stackrel{(40)}{\sqcap} - (BDEMB$ seu) $BADLB + BLDFNB$. Si a Circulo duplicato $BCGH$ auferas Circulum $ACGI$, quadrans $\frac{r\pi}{4}$ tem $BADLB$; et $BHIFB_{[,]}$ restabit $BLDFNB$. Jam $BHIFB \sqcap GHBFG - GIFSG$.
 semicirc.

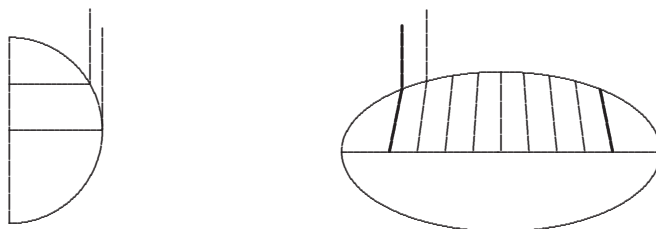
Ergo Circ. – quadrans – semicirc. + $GIFSG$.

Rursus si a circ. dupl. seu a $BCGH$. auferas [*bricht ab*]

Jungantur rectae BVF et BD . Triangulum BDF erit quadrans ergo $\sqcap DABLD$. 10
 Auferatur communis utrique $BVLD$. Ergo Triang. $BAD \sqcap$ ipsi $DFVLD -$ segm. BVB .

Superficies hemisphaerii est aequalis superficiei cylindri ejusdem altitudinis et basis adeoque semicirculo generatori.

13 *Unter generatori, gestrichen:*



1 per |19 *ändert Hrsg.* |. Ergo $L = 5 r\pi - (1) IGFS (2) Trilin.$ | $IGFS$ *ändert Hrsg.* |. $BMEFNB L$
 6 + $BLDFNB$. (1) BLD (2) |si *streicht Hrsg.* | a Circulo (a) duplicato $BCGH$ (b) $BAIH$ auferas (c)
 $BAIH$, auferas (3) si $L = 7 - GIFSG$ darunter | $BMFNM \sqcap BLDFNB - (BLDEMB$ seu) *qvad gestr.* | L
 11 Ergo (1) segmentum (2) Triang. $L = 13 - 514,1$ generatori (1) Reto (2) Si (a) in Cycloide (b) Cycloidi
 BFG . cuius vertex B. basis B (3) Si | *curvae erg.* | (a) semicycloidi (b) semicycloeidi L

1 theoremate: ARCHIMEDES, *Dimensio circuli*, prop. I; der Satz wird bereits oben im Anschluss an Gleichung (9) verwendet. 13 semicirculo: Richtig wäre duplo circulo.

Si curvae semicycloeidi occurrat recta per centrum circuli generatoris transiens basi parallela erit segmentum figurae cycloidalis recta punctum occursus et verticem cycloidis jungente, abscissum aequale semiquadrato radii circuli generatoris.

Sit semicycloeides BFG . cujus vertex B . altitudo BC . basis CG . centrum A circuli generatoris ADC per quod transiens recta ADF basi CG parallela, occurrat semicycloeidi curvae in F . Jungantur BD et BF , ajo segmentum figurae cycloidalis $BFNB$. aequari triangulo BAD seu semiquadrato radii. Quod ita demonstro. DF aequatur BLD quadranti circumferentiae, ergo triangulum ADF cujus basis DF quadrans circumferentiae, altitudo AB , radius, aequabitur ipsi $BADLB$ quadranti Circuli. Porro Retorta $BLDFNB$ aequatur duplo BAD seu ipsi quadrato radii, ut a quibusdam scriptoribus de Cycloide expresse ostenditur, ut a Wallisio et Honorato Fabri, ex aliis ut Dettonvillaeo facile duci potest. His positis reliqua sic absolvemus. Triangulum BDF + segmento Cycloidalis $BFNB$ aequatur segmento Circuli $BDLB$ + retortae, $BLDFNB$. Nam utraque componunt $BDFNB$. Pro Triangulo BDF substituatur ejus valor, quadrans $BADLB$, vel rursus pro quadrante, ejus valor, Triang. BAD + segm. circ. BD , denique pro retorta quoque substituatur ejus valor quadratum radii seu bis Triangulum BAD . et loco prioris aequalitatis habebitur haec:

(Triang. BDF . seu) Triang. BAD + segm. Circ. $BDLB$; auctum segmento Cycloidalis $BFNB$ aequatur Segmento circuli $BDLB$ + (retortae $BLDFNB$ seu) bis Triangulo BAD . Ablato utrobique segmento Circuli, et Triangulo BAD semel restabit segmentum cycloidale $BFNB$ aequale Triangulo BAD seu semiquadrato radii. Q. E. D.

2 parallela (1). Jam (a) et recta (b) segmentum | figurae cycloidalis erg. | recta punctum occursus et verticem cycloidis jungente, abscissum erit (2) erit L 7 f. demonstro. (1) Jungatur (2) DF aequatur | BLD erg. | quadranti L 10 f. a (1) scriptoribus de Cycloide partim (2) quibusdam ... expresse (a) annotatur, ut (b) ostenditur L 12 positus | facile gestr. | reliqua | sic erg. | absolvemus (1) (Triang. | qva erg. u. gestr. | BDF (seu) (a) qva (b) | quadrans erg. | $BADLB$, + (aa) $BFNB$ (aaa) + (bbb) aeq (bb) Segment. Cycl. $BFNB$ (aaa) aeqv. (bbb) seu (ccc) aeqv B (ddd) aeqvatur segmento (2) Quadrans circuli, $BDLB$ + (Retort. $BDFNB$ seu) qvadr. (3) Triang. (4) Triangulum L 13 Nam (1) ut alterutrius summa facit (2) | ex streicht Hrsq. | (3) componitur (4) utraque L

1–21 Si ... Q. E. D.: vgl. *LQK* prop. XIII S. 45 f. 11 ostenditur: Das Resultat folgt unmittelbar aus J. WALLIS, *Tractatus duo*, 1659, § 23, S. 7 u. ders., *Mechanica*, 1670–71, pars II, cap. V, prop. XX, § B, S. 374 (*WO* I S. 502 u. 805). Ausdrücklich formuliert wird es in H. FABRI, *Opusculum geometricum*, 2. Aufl., 1669, prop. XXIV, § 3, in ders., *Synopsis geometrica*, S. 385. 11 Dettonvillaeo: Bl. PASCAL, *Traité general de la roulette*, 1658, S. 3 (*PO* IX S. 120).

75. PROPOSITIONES DUAE DE ORDINATIS AD ARCUS EXTENSOS APPLICATIS

[Ende April – Anfang Mai 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 439. 1 Bl. 2^o. 1/2 S. auf Bl. 439 v^o. Durch Papierverlust fehlt die linke obere Ecke von Fig. 1a. Auf Bl. 439 r^o N. 74. Bl. 439 bildete ursprünglich zusammen mit LH 35 II 1 Bl. 125 (VII, 3 N. 58) einen vollständigen Bog. 2^o. Cc 2, Nr. 1466

5

Datierungsgründe: s. N. 74.

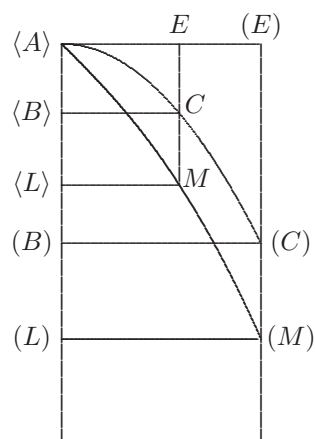
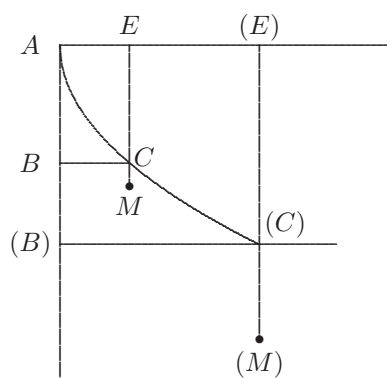


fig. 1.

[Fig. 1a]



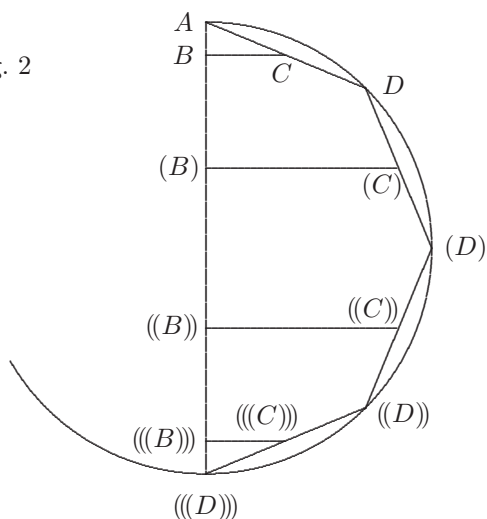
[Fig. 1b]

„Si curvae $AC(C)$ in rectam $AB(B)$ extensae applicentur normaliter LM . $(L)(M)$ 10
 „aequales ordinatis BC . $(B)(C)$. et curva nova $AM(M)$ per earum puncta transeat;
 „erit area $ALMA$ ad superficiem curvae AC . revolutione circa axem AB genitam,
 „ut radius Circuli est ad peripheriam suam.

Pro Curva fig. 1. substituatur polygonum figurae 2 cujus latera AD . $D(D)$. $(D)((D))$ 15
 etc. Punctum medium cujusque lateris, C . (C) . $((C))$ idemque et centrum gravitatis est

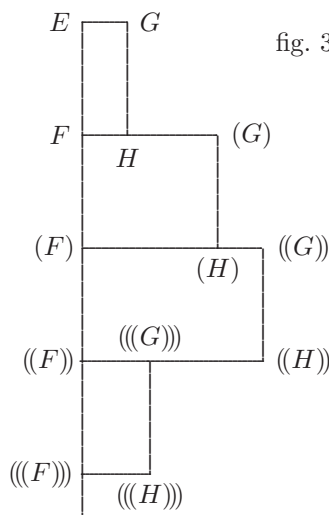
10 curvae | (1) AD (2) AC(C) erg. | in rectam | AB. A(B) erg., ändert Hrsg. | extensae L
 10 normaliter (1) in punctis (2) eius ordinatae BC, (B)(C) (3) in punctis (4) ordinatae (5) LM L
 13 ut periphèria Circuli est ad radium suum L ändert Hrsg.

fig. 2



[Fig. 2, Blindzeichnung]

fig. 3.



[Fig. 3, Blindzeichnung]

lateris ipsius. Superficies polygoni rotatione circa AB genita constat e superficibus laterum rotatione genitis. Jam Superficies lateris cujusdam, ut $D(D)$ rotatione genita ex principio Guldini aequatur rectangulo ex ipsa $D(D)$ in viam sui centri gravitatis (C) .
 5 seu in lineam quam revolutione describit, id est in circumferentiam Circuli cujus radius $(B)(C)$. Hoc vero rectangulum est ad rectangulum $F(G)(H)(F)$ figurae tertiae, factum ex $(B)(C)$ seu $F(G)$ in $D(D)$ seu $F(F)$ ut circumferentia ad suum radium $(B)(C)$; ergo et superficies rotatione ipsius $D(D)$ circa AB descripta est ad rectangulum $F(G)((G))(F)$ ut periphæria ad radium. Idemque cum fiat et in caeteris superficibus polygoni rotatione
 10 genita ad totam summam rectangulorum $EGHF + F(G)(H)(F) + (F)((G)((H))((F))$ etc. erit ut periphæria ad radium. Jam si polygonum sit infinitorum laterum coincidet cum curva $AC(C)$. et summa rectangulorum seu fig. 3 coincidet itidem cum $A(L)(M)MA$. Idem ergo de superficie rotatione curvae $AC(C)$ genita, et area figurae ALM . demonstratum erit.

3f. ex ... Guldini erg. L 6 $F(G)((G))(F)$ L ändert Hrsg. 7 radius $(B)(C)$ ad suam circumferentiam L ändert Hrsg. 9f. caeteris tota summa rectangulorum L ändert Hrsg.
 10 $EGHF + F(G)((G))(F)$ L ändert Hrsg.

4 principio: P. GULDIN, *Centrobarica*, 1635–1641, lib. II, cap. VII, prop. III, S. 147.

Prop. 2. Curva ordinarum ad arcus in rectam extensos applicatarum etiam fieri potest applicatione arcuum ad basin. Nam fig. 1. AE aequatur BC ordinatae, huic si applicetur normaliter EM aequalis AL seu curvae AC . in E habetur idem quod ante punctum M . et ita in caeteris.

76. TRIANGULUM CHARACTERISTICUM OBLIQUUM, ET MOTUS CENTRI GRAVITATIS

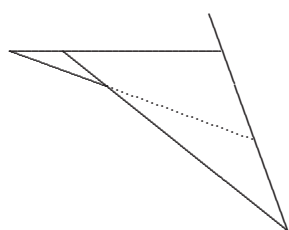
18. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 11 Bl. 4. 1 Bl. 2^o, von dem oben ein Streifen von 21,3 x max. 2 cm abgeschnitten ist. 2 S. Textfolge Bl. 4 v^o (Teil 1), 4 r^o (Teil 2). Am oberen Rand von Bl. 4 v^o Notiz (= S. 526 Z. 2–5), an der Schnittkante Reste fremden Textes. Am unteren Rand von Bl. 4 v^o Nebenbetrachtung zu Teil 2, durch Strich abgetrennt (= S. 525 Z. 7–11).
Cc 2, Nr. 1420

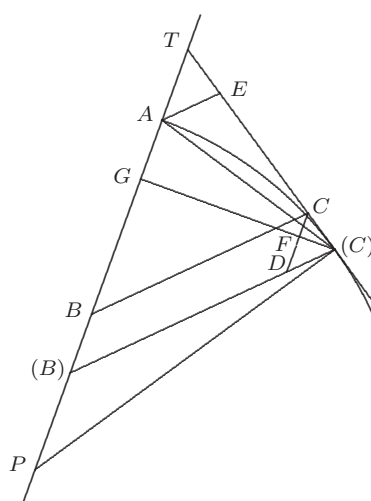
10 18 Maji 1676.

Triangulum characteristicum obliquum, et motus centri gravitatis

[Teil 1]



[Fig. 1a]



[Fig. 1b]

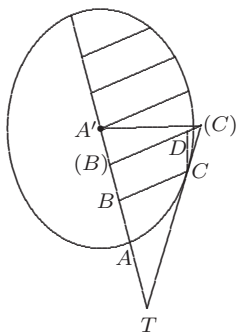
Si ordinatae [obliquae] sint, videtur idem omnino locum habere Calculus Tangentium, qui si normales. Eodem enim modo calculabitur, ostendetur CD esse ad $D(C)$ seu TB ad BC , ut calculus dabit. Etiam multa alia de quadraturis theoremata locum habe-

11 Triangulum ... gravitatis *erg. L*

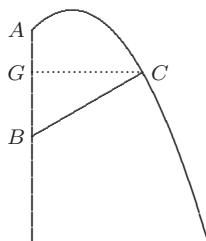
13 Fig. 1a: Zwei gestrichene Vorstufen der Figur werden nicht wiedergegeben.

bunt, ut TB in $(C)D \cap BC$ in CD . Eodem modo videtur semper haberi area omnium $P(B)$ in $B(B)$ posito $T(B)$, $(B)(C)$, $(B)P$ continue proportionales. Eodem modo demonstrabitur fore omn. AE in $B(B) \cap$ duplo segmento $A(C)A$. Unde patet hoc ex triangulis non pendere.

Videamus an ex Triangulo Characteristico obliquo aliquid possit duci ad Curvam Ellipseos. 5



[Fig. 2]



[Fig. 3]

$$AB \cap x. BC \cap \sqrt{2ax - x^2} \cap y. \text{ Ergo } 2ax - x^2 \cap y^2.$$

$$\text{sive fiet } \cancel{2}at - \cancel{2}xt \cap \cancel{2}y^2 \text{ sive } t \cap \frac{y^2}{a - x \cap \sqrt{a^2 - y^2}} \text{ sive } t \cap$$

$$\frac{ax}{a - x} + x. \text{ Ipsis } t. y. \text{ tertia proportionalis erit } \frac{y^2}{t}. \text{ At } \frac{y^2}{t} \cap y^2 \cap$$

$$\frac{y^2}{a - x} \cap a - x. \text{ Semper ergo erunt } BA' \text{ vel } (B)A. \text{ Adeoque quae } 10$$

perpendicularis locum tenet, seu perpendicularis obliquata erit semper $(C)A'$.

$$AB \cap x. BC \cap y. \text{ et } 2ax \cap y^2. \text{ Angulus vero obliquus.}$$

Demittatur ex C in AB . perpendicularis. Quia datur angulus

$$ABC. \text{ dabitur ratio } GB \text{ ad } BC. \text{ eritque hoc modo: } GB \cap \frac{e}{a}y. 15$$

$$\text{et } AG \cap x - \frac{e}{a}y \cap z. \text{ et } GC \cap \sqrt{y^2 - \frac{e^2}{a^2}y^2} \cap v. \text{ sive } v^2 \cap$$

$$\sqrt{2ax}$$

$$2ax - \frac{2e^2x}{a}. \text{ Jam } x \cap \frac{v^2}{2a - \frac{2e^2}{a}}. \text{ Ergo denique fiet } \frac{v^2}{2a - \frac{2e^2}{a}}$$

8 Nebenrechnung: $x^2 - 2ax + a^2 \cap a^2 - y^2$ et $x \cap \sqrt{a^2 - y^2} + a.$

1 in |CD ändert Hrsg. | $\cap BC$ L 1 f. omnium |PB ändert Hrsg. | in L 3 f. ex |meris gestr. | triangulis L 10 ergo (1) concurrentium per (2) erunt L 11 obliqvata (1) erit (2) CA erit constans (3) erit L

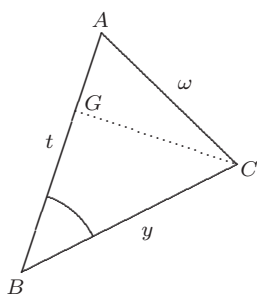
3 demonstrabitur: Die folgende Behauptung ist nicht richtig; an Stelle von AE müsste $AE \cdot \sin \alpha$ stehen, wobei $\alpha = \sphericalangle EAB$. 7 $AB \cap x$: Leibniz bezeichnet in der Figur und im Text zwei verschiedene Punkte mit A ; zur besseren Unterscheidung wird für den zweiten Punkt A' verwendet.

$$-\frac{e}{a} \sqrt{\frac{2av^2}{2a - \frac{2e^2}{a}}} \sqcap z. \text{ sive } z \sqcap \frac{a}{2a^2 - 2e^2} v^2 - \frac{ev}{\sqrt{a^2 - e^2}}.$$

Generaliter $AB \sqcap x. BC \sqcap y. GB \sqcap \frac{e}{a}y. AG \sqcap z \sqcap x - \frac{e}{a}y. GC \sqcap v \sqcap \sqrt{y^2 - \frac{e^2}{a^2}y^2}$
 sive $v \sqcap y\sqrt{1 - \frac{e^2}{a^2}}$. Adeoque $y \sqcap \frac{av}{\sqrt{a^2 - e^2}}$ et $x \sqcap z - \frac{ev}{\sqrt{a^2 - e^2}}$. Unde si hi valores substituuntur in aequatione naturam curvae explicante per relationem BC ad AB , habetur alia explicans per relationem GC ad AG .

Porro in Triangulo Characteristico $CD \sqcap dx. D(C) \sqcap dy$. Investiganda est $C(C)$. vel in Triangulo $T(B)(C)$ ex datis $T(B). (B)(C)$ et angulo $T(B)(C)$ investiganda est $T(C)$. Ducta normali $(C)G$ erit $(B)G \sqcap \frac{e}{a}(B)(C)$ seu $\frac{e}{a}y$ et $TG \sqcap t - \frac{e}{a}y$ et $(C)G \sqcap \frac{y}{a}\sqrt{a^2 - e^2}$ et $(C)T,^2 \sqcap y^2 \left[-\frac{e^2}{a^2}y^2 \right] + t^2 - \frac{2te}{a}y \left[+\frac{e^2}{a^2}y^2 \right]$.

Hic notandus compendiosus modus exprimendum tertium latus trianguli ex duobus datis, et angulo opposito.



[Fig. 4]

Data latera, $t. y.$ quaesitum ω . Datus angulus ABC , ergo et ratio CB ad BG , quae sit a ad e . Erit $AC,^2 \sqcap y^2 + t^2 - \frac{2tey}{a}$. Regula ergo haec erit in triangulo: Quadratum lateris cujusdam assumti differt a quadratis laterum reliquorum, spatium quod sit ad duplum rectangulum reliquorum laterum, ut radius ad sinum complementi anguli lateri assumpto oppositi.

Quadrata laterum duorum simul sumta differunt a quadrato tertii lateris in triangulo, figura quae sit ad duplum rectangulum sub ipsis, ut radius est ad sinum complementi anguli lateri tertio oppositi.

Sed hoc obiter.

6 $C(C)$. (1) ducta perpendiculari $(C)FG$ utiqve (2) vel L 13 ad |BT ändert Hrsg. |, quae L
 15 triangulo: (1) latus quodlibet (2) Quadratum L

6 Porro: Im Folgenden bezieht sich Leibniz auf Fig. 1b. 19 Fig. 4: Ein gestrichenes Dreieck unterhalb der Figur wird nicht wiedergegeben.

Nunc inventa $(C)T$. facile habetur $C(C)$. Nam $\frac{C(C)}{T(C) \cap \sqrt{y^2 + t^2 - \frac{2tey}{a}}} \cap \frac{D(C) \cap dy}{(B)(C) \cap y}$

$\cap \frac{CD \cap dx}{T(B) \cap t}$ et $C(C) \cap \frac{dy}{y} \sqrt{y^2 + \frac{y^4}{a^2 - y^2} - \frac{2e}{a} \frac{y^3}{\sqrt{a^2 - y^2}}}$. Sit dy . semper uniformis fiet:

$C(C) \cap \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2} - \frac{2ey}{a\sqrt{a^2 - y^2}}}$ vel $\frac{C(C)}{dy} \cap \frac{\sqrt{a^2 - \frac{2e}{a}y\sqrt{a^2 - y^2}}}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ vel $\frac{C(C)}{dy} \cap \sqrt{a^2\sqrt{a^2 - y^2} - 2eya + \frac{2ey^3}{a}} \sim a^2 - y^2$.

[Teil 2]

5

Videndum an non Guldini principium possit reddi generalius, semperque verum sit spatium alicujus figurae motu percursum aequari areae corporis ductae in viam centri gravitatis. Quod intelligendum opinor, si figurae portio durante motu in alterius portionis locum non succedit. Tunc enim calculus spatii percursi hoc modo iniri non potest.

10

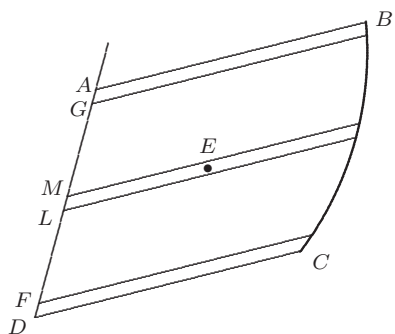
Caeterum videndum si figura $ABCD$ circa axem obliquum AD gyranda sit puncto C circa centrum D et puncto B . circa centrum A eunte, et ita de caeteris (quod non puto fieri posse, nisi rectae DC , AB , aliaeque a se invicem divisae intelligantur et moveri circa DF vel AG) tunc videndum an Spatium percursum a singulis circa diversos axes motis, motui centri gravitatis E aequiparetur. Hoc videtur ex mechanicis sequi, si verum est tantae difficultatis esse movere corpus, ac movere ejus centrum gravitatis. Fingamus esse

15

6f. *Darüber*: Vide plura schediasmate peculiari de via centri gravitatis 18 Maji 1676 ubi ista rectius.

2 $\frac{CD \cap dx}{TB \cap t}$ L ändert Hrsg. 7 sit (1) area (2) spatium alicuius (a) corporis (b) figurae L 13f. circa (1) A (2) |CF ändert Hrsg. | vel L

2 $C(C)$: Leibniz berechnet im Folgenden das Bogenelement der Ellipse von Fig. 2. 6 principium: P. GULDIN, *Centrobarica*, 1635–1641, lib. II, cap. VII, prop. III, S. 147. 17 schediasmate: N. 77.

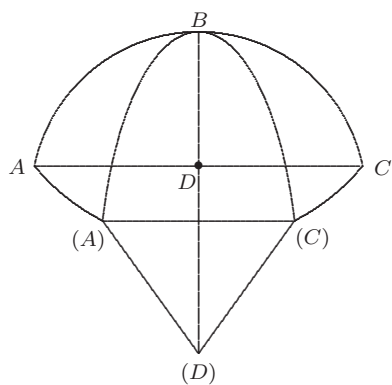


[Fig. 5]

in numeros exiguos axes ut DF . AG . LM . et uno eodemque impulsu parallelogramma singula moveri circa axem suum. Patet tantundem oneris circumagere qui omnia quo sunt situ, et, qui ex centro gravitatis suspensa circumegerit, porro quantitas motus aestimanda ex ductu corporis in spatium successivum. Et ad eandem semper motus quantitatem producendum eadem semper opus vi, et eadem semper vis, sive corpus ipsum, sive e centro gravitatis suspensum moveas. Itaque etiam

eadem semper quantitas motus, adeoque area spatii successivi seu spatium percursum, uno modo aequale viae centri gravitatis in aream. Porro eodem modo et de superficie hac revolutione geniti intelligi potest. Nempe similiter probabitur eam aequari ductui viae centri gravitatis. Unde videtur aditus quidam aperiri ad curvam Ellipseos, et ad Scalena.

Caeterum ex theorematibus hujus universalitate videtur consequentia sequi admiranda:



[Fig. 6]

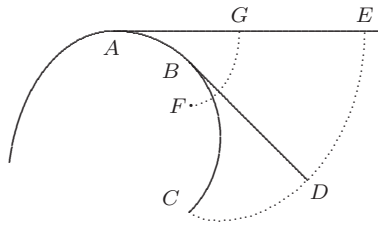
Sit arcus chorda AC , medium chordae D . super fulcro ducatur in (D) . ipsis A . C . translatis in (A) . (C) . Ajo spatium $BA(A)B(C)CB$. percursum scilicet ab arcu ABC utcunque transformato, aequari viae centri gravitatis in ipsum arcum. Itaque tantum opus est invenire centrum gravitatis arcus primi et ultimi, eorumque intervallum cognitum erit, ejusque ope et spatium.

Ecce jam inventum novum generalissimum ad Spatiorum percursorum areas inveniendas: imprimis utile illis Spatiis dimetiendis, quae a transformatis motu, percurruntur.

15 Daneben: Error hic

2 impulsu |rectangula ändert Hrsg. | singula L 3 tantundem (1) oneris attollere qvia omnia (2) oneris L 24f. generalissimum (1) tum ad eorum quae moventur, (2) ad L

14 Scalena: s. N. 78. 15 Caeterum: Die folgende Behauptung ist i. Allg. nicht richtig, wie Leibniz nachträglich am Rand anmerkt.



[Fig. 7]

Hinc si sit curva ABC evolventa, et evolutione describatur curva CDE . videndum hic, et oritur subtilissima quaestio, an si tota curva non moveatur, simul, sed partes motae crescant, nihilominus si sumatur via centri gravitatis ejus FG , quia scilicet id durante evolutione (ob partem curvae semper majorem, in re[cta]m extensam) semper mutatur; et ea via in curvam ABC , seu rec-

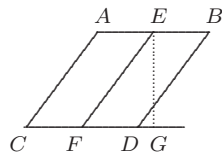
5

tam AE , ducatur, proveniat area $ABCDE$. Hoc si ita est, mirificas habebit consequentias; poterimus enim componere motum cum non moto; et aestimare centrum gravitatis totius. Caeterum cum areae habentur, utilissima erunt ista, ad dimetiendas curvas, seu vias centrorum gravitatis. Ut in circulo habebitur dimensio illius curvae. Si Curva utrinque aequaliter transformabitur, ut supra in arcu extenso et similibus, tunc centrum gravitatis describet lineam rectam adeoque facilius longe inquisitio, tantum enim opus curvam motam, et primi ultimique status centrum haberi, non loci omnium intermediorum dimensionem. Haec longe utiliora et subtiliora Geometria indivisibilium, quia non opus est ulla per parallelas aliasve resolutione. Tantum opus est, ut unum illud excipiatur, cum scilicet unum punctum durante motu intrat in alterius locum. Caeterum hinc cavendum nonnihil videndumque an non in ejusmodi flexibus quodam modo contingat ut unum in alterius locum transeat.

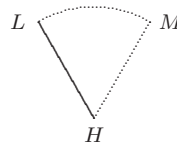
10

15

20



[Fig. 8a]



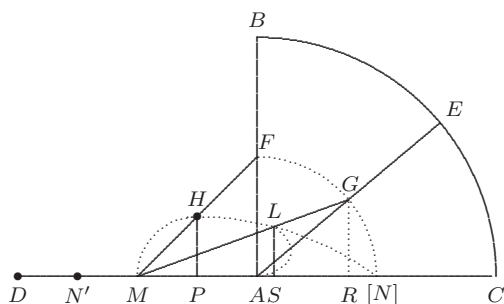
[Fig. 8b]

Et haec jam ratio est verissima cur si AB , moveatur in CD . spatium $ABDC$ non sit AB mobile ductum in EF . viam centri gravitatis E . quia hic motus compositus ex duobus[.] uno perpendiculari ex E in G . alter[o] horizontali in ipsa AB . ubi mobile sua vestigia percurrit. Idem est si mobile moveatur circa aliquod centrum. Negligendus est ad spatium metiendum motus quo corpus in suis manet vestigiis, adeoque ea tantum via

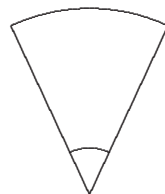
25

4 sed |tantum *gestr.* | partes L 10 moto; |est *ändert Hrsg.* | aestimare L 10 f. totius. (1) Aliud quoque videndum. (2) Caeterum L 11 area L *ändert Hrsg.* 12 Si (1) recta trans (2) Curva L 15 non (1) omnium intermediorum curvae (2) loci L

centri gravitatis metienda est, qua corpus motu movetur in sua vestigia non succedente. Itaque si pluribus simul motibus moveatur, alius ejusmodi motus secundum quem in suis vestigiis manet, negligetur. Haec si exacte considerentur, poterit credo locum habere, magno tamen judicio adhibito, generalis regula nostra.



[Fig. 9a]



[Fig. 9b]

5

Sit $DA \perp AB$. M . medium inter D et A . F medium inter A et B et H medium inter M et F et L medium inter M et G et A medium inter M et N . Demittatur perpendicularis HP erit $\perp MP$. Sit $DP \perp x$ erit $DM \perp \frac{a}{2}$ (posito $DA \perp a$) et erit $HP \perp x - \frac{a}{2} \perp MP$. Angulus FMG anguli FAG dimidius[,] est enim ille ad circumferentiam, hic ad centrum super eodem arcu FG . Jam AR anguli FAG sinus, GR . sinus complementi.

10

5 Unter Fig. 9a: H L A via centri gravitatis ipsius DAB . durante motu BA circa A .

6 Daneben: Verum

1 vestigia (1) non rede(u) (2) no (3) non L

5 Fig. 9a: Eine gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben. Die überarbeitete Figur stimmt nur unvollkommen mit dem zugehörigen Text überein. Leibniz hat erst im Verlauf der Überlegung festgestellt und am Rande angemerkt, dass der Schwerpunkt H von DAB sich bei der Rotation von AB nach AC nicht nach dem von ihm ursprünglich mit N bezeichneten Mittelpunkt von AC bewegt, sondern auf einem Kreisbogen nach A . Er hat die Punktbezeichnung N gestrichen und den Mittelpunkt von DM mit N bezeichnet. Dieser Punkt erscheint nur in einer Nebenbetrachtung und wird dort und in der Figur mit N' bezeichnet, um Verwechslungen zu vermeiden. Den Kurvenbogen LN hat Leibniz nicht gestrichen, sondern nur den Bogen LA ergänzt. Da LS immer links von AB liegen müsste, wird der Verlauf nicht richtig wiedergegeben. Eine korrekte Darstellung gibt Leibniz in fig. 2 von N. 77.

Ergo $GR \cap \sqrt{\frac{a^2}{4} - AR^2}$ et $LS \cap \frac{GR}{2}$. Sit $DS \cap x$. $AR \cap MR - \frac{a}{2}$. et $MR \cap 2MS$ et $MS \cap DS - DM \cap x - \frac{a}{2}$. Ergo $MR \cap 2x - a$ et $AR \cap 2x - \frac{3a}{2}$. et $AR^2 \cap 4x^2 - 6ax + \frac{9a^2}{4}$ et fiet: $LS \cap \frac{1}{2}\sqrt{6ax - 4x^2 - \frac{5a^2}{4}}$. punctumque L . erit ad circuli circumferentiam, adeoque et via centri gravitatis ipsius DAB , dum AB rotatur circa A erit arcus Circuli. Et videndum an Calculo suffragante area $BACEB$ sit curva HLA (arcus circuli) ducta in DC seu $DA + AB$. Ergo 2ϕ in $HLA \cap \frac{\phi}{2}$ in BEC . Ergo $HLA \cap \frac{BEC}{4}$.

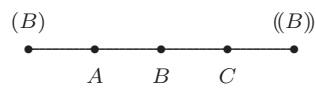
3 Nebenbetrachtung auf Bl. 4 v^o unten: $LS \cap \sqrt{\frac{3}{2}ax - x^2 - \frac{5}{16}a^2}$. Sit $x \cap z + b$. fiet $\frac{3}{2}az + \frac{3}{2}ab - z^2 - 2zb - b^2 - \frac{5}{16}a^2$ et sit $b^2 - \frac{3}{2}ab [+]$ $\frac{9}{16}a^2 \cap \frac{4}{16}a^2$ et $b - \frac{3}{4}a \cap \mp \frac{1}{2}a$. et $b \cap \frac{3}{4}a \mp \frac{1}{2}a$. Unde $\frac{3}{2}az - 2bz \cap \frac{3}{2}az - \frac{3}{2}az \mp az$. et ponendo $\mp \cap +$ fiet denique loco $\sqrt{\frac{3}{2}ax - x^2 - \frac{5}{16}a^2}$ haec: $\sqrt{az - z^2}$. Est ergo $b \cap \frac{1}{4}a$. Ergo $z \cap x - \frac{1}{4}a$. A $DS \cap x$ resecetur $DN' \cap \frac{a}{4}$ restabit $N'S \cap z$.

5 curva (1) HLN (2) HLA L 6 in (1) HLN (2) HLA L 6 ergo (1) HLN (2) HLA $\cap \frac{BEC}{4}$

|Et certe ut ab una parte curva terminatur in N, ita ab altera utiqve terminabitur in M. Jam HLN est arcus circuli ob Calculum Ergo HMN est angulus ad circumferentiam ergo duplus anguli ad centrum. (a) Angulus (b) Ergo duplus anguli cuius arcus est HLN. at item angulus (aa) HLN (bb) HMN dimidius anguli FAN. (cum ille etiam sit ad circumferentiam hic vero ad centrum arcus FGN) ergo angulus FAN, vel BAC (aaa) quadruplus (bbb) aequalis anguli cuius arcus HLN. iam ex nostra Hypothesi arcus BEC quadruplus est arcus HLN. |cumqve et angulus illius angulo huius sit quadruplus necesse est si vera Hypothesis nostra, esse arcus eiusdem circuli *gestr.* | sed haec non videntur respondere. Videndum et an et qvomodo area Ellipseos inveniri possit, motu centri gravitatis chordae describentis. *gestr.* | L 8 et |erit *ändert Hrsq.* | b² L 9 $\mp az$. (1) si $\mp \cap -$ fieret absurdum. Ergo $\mp \cap -$ et $\mp \cap +$. (2) et L 11 MS $\cap z$ L *ändert Hrsq.*

3 LS: Bei der Berechnung von LS unterläuft Leibniz ein Flüchtigkeitsfehler. Der falsche Wert geht auch in die zugehörige Nebenbetrachtung ein. Leibniz erkennt schließlich die Unstimmigkeit und streicht den Schluss der Überlegung. Korrekt durchgeführt wird sie in N. 77.

[Notiz]



[Fig. 10]

Punctum B . esse medium inter A . et C . sic exprimetur[:] $AC \sqcap AB$. et $AC \sqcap BC$.
Hinc porro consequentia seu Theorema elegans: Si $AC \sqcap AB$. et $AC \sqcap BC$. erit $AB + BC$
5 $\sqcap AC$. Vides quomodo ope situs ex majoritatibus concludatur aequalitas.

77. DE VIA CENTRI GRAVITATIS NOVA

18. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 11 Bl. 3. 1 Bl. 2°. 2 S. Figuren teilweise überarbeitet.
Abgebrochene bzw. gestrichene Vorstufen werden nicht wiedergegeben. Geringe Textverluste durch Randschäden.

Cc 2, Nr. 1419

5

18 Maji 1676.

D e v i a c e n t r i g r a v i t a t i s n o v a .

Theorema generalissimum molior: Via centri gravitatis ducta in mobile, aequatur loco mobilis successivo. Cujus rei ratio est, quia tanta vi opus est quantum est effectus. Et tantus est effectus, cum de motu agitur, quantum est motus; tantus autem est motus quanta est via mobilis successiva, seu quanta est summa omnium locorum quos occupavit mobile successive. Ergo et vis tanta est quantum est locus mobilis successivus. Porro tanta vis est necessaria ad movendum corpus quomodocunque dispositum, quanta vi opus ad ipsum movendum ex centro gravitatis libere suspensum. Tunc autem locus ejus successivus aequatur viae centri gravitatis ductae in corpus. Ergo cum eadem semper vi opus sit etiam locus successivus aequalebit. Ergo aequabitur via centri gravitatis ducta in mobile, loco mobilis successivo, seu viae mobilis.

Haec jam ad Geometriam produci possunt. Nimirum si nullum mobilis punctum durante motu succedit in locum alterius, via mobilis, seu locus mobilis successivus aequatur Spatio percurso. Ut fig. 1.

8 *Dahinter:* Adde aliud schediasma ejusdem diei ubi et de Triangulo characteristico nova.

8 De ... nova erg. *L* 9 in (1) are (2) aream mo (3) mobile *L* 18f. mobilis. (1) sed via mobilis (2) Cum (3) Haec *L*

22 aliud schediasma: N. 76.

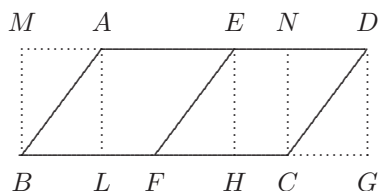


fig. 1

Si AD . transferatur in LG motu ad AD . perpendiculari, et centrum gravitatis sit punctum AD medium E , quod feretur in H . erit EH via centri gravitatis in mobile AD aequalis viae mobilis $DALG$. Eodem modo in fig. 2.

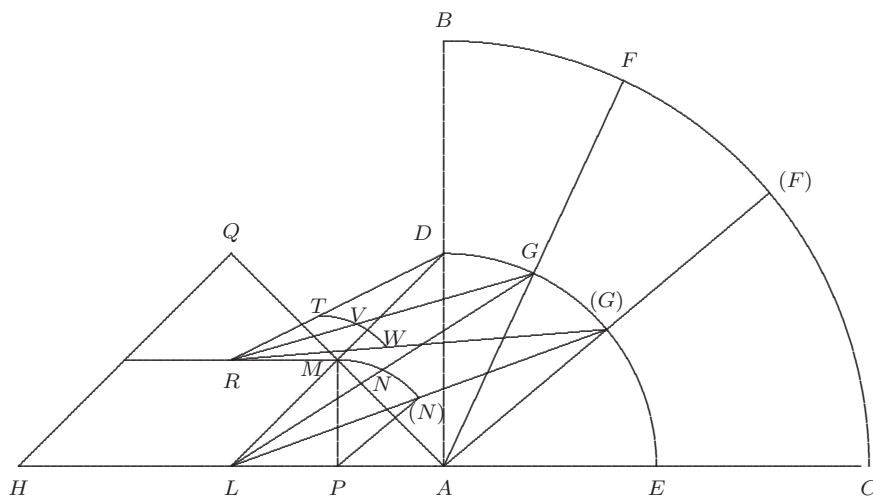


fig. 2

5

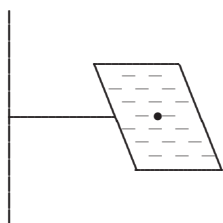
Si circa centrum A moveatur radius AB in AC . sector $BACFB$ aequabitur ipsi arcui DGE . viae centri gravitatis ipsius AB . ductae in AB . Quod verum esse constat. Idem constat de curvis aut Spatiis quae circa quendam axem immobilem feruntur ex iis quae dixit Guldinus. Opus autem est, directionem motus esse ipsi mobili perpendiculari, (lineae planove) quod fit tam in motu directo per perpendiculari, quam in motu rotationis circa quendam axem.

10

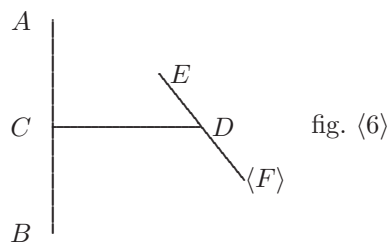
9 dixit: P. GULDIN, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. II, cap. VIII, prop. III, S. 147.

B et D . duae describantur curvae parallelae. Similiter in BD . notato puncto medio G , ipsum punctum G . tertiam describet curvam $\langle p \rangle$ arallelam HG . Ajo spatium inter duas parallelas evolutione descriptas BF, DE , duasque rectas extensas aequales BD, FE aequari rectangulo sub recta constante BD et curva parallela media HG . Erit ergo nihil aliud quam rectangulum distortum. Porro eadem omnia locum habebunt, si aliqua figura plana ut DLM fili extremitati alligata intelligatur ita tamen ut planum ejus sit perpendicularare. Nam spatium solidum ipsius DLM motu cum filo generatum, erit aequale solido ex plano DML in curvam centri gravitatis ejus N . motu descriptam, ducto.

Porro quae de Evolutis diximus ea generaliter locum habent in omnibus circumrotatis, quorum inter motum quomodocunque radius producit, aut centrum mutatur. Idem enim semper locum habebit. Imo cavendum nonnihil. Ut si durante evolutione planum DLM propius accedat a D . versus B . non poterit spatium haberi via centri gravitatis N . in ipsum planum DLM . ducta. Ob eam rationem de qua supra locuti sumus ad fig. 1. Et ratio est, quia motui plani circumrotatorio quo quodlibet ejus punctum novum semper locum invenit, componitur motus rectilineus quo planum in sua vestigia succedit. Itaque ut supra fig. 1. illum tantum consideravimus centri E . motum, qui procedit secundum directionem utilem, ita idem hic faciendum est. Nempe consideremus quantus sit motus centri N , circumrotatorius tantum omisso rectilineo, adeoque exigui circuli NP, QR etc. in unum sunt addendi. Summa autem eorum facile haberi potest, scilicet nam descrescent ut ipsae NB, QS , quarum ratio habetur ex cognito ipsius N . vel DML . motu rectilineo.



[Fig. 6a]



[Fig. 6b]

1 f. medio |E, ändert Hrsg. | ipsum punctum |E. ändert Hrsg. | (1) novam (2) tertiam L
 3 parallelas (1) curvas F (2) evolutione L 7 DLM (1) rotatione (2) motu L 8 aequale (1) curvae
 ab eius (2) solido L 11 inter | modum ändert Hrsg. | (1) quodam (2) quomodocunque L 20 potest,
 (1) quia si curva ABC divisa ponatur in partes aequales, (a) Arithmetice (b) decrescent proportionaliter
 (2) scilicet L

Considerandae quaedam rotationes obliquae, equidem si circa axem ACB . rotanda sit EDF recta, in eodem plano posita, utcunque inclinata, verum est, superficiem rotando genitam fore aequalem rectae EF in viam cen(tri). Sed si recta EF in alio sit plano, id non procedit. Ratio differentiae, quia tangens circumferentiae AB descriptae priore casu est ipsi EF normalis, posteriore non est. Directio autem in tangente esse intelligitur; itaque ut inveniatur superficies obliqua rotatione descripta, ita procedendum. Motus centri gravitatis D . resolvatur in duos, unum perpendicularem ad lineam EF , alterum in se subingredientem, et omissio subingrediente quaeratur summa motuum perpendicularem, qui etsi singuli sint infinite parvi, progressio tamen eorum poterit calculo haberi; eaque summa quae est via utilis centri gravitatis, ducta in mobile, dabit superficiem genitam. Demonstravit Wrennus talem superficiem esse cylindroidis Hyperbolici, unde operae pretium erit calculo exquirere, quae sit motuum utilium progressio; nam si aggregatum seu via haberi posset, inde haberetur curva Hyperbolae.

Caeterum notabimus Theorema generale: Via utilis centri gravitatis ducta in mobile, aequatur spatio percurso. Utilem viam voco, secundum quam mobile in sua vestigia non subingreditur. Sed quando totum mobile non uno movetur motu, ut in arcu flexo, ibi vero major difficultas. Imo generaliter cum curva movetur (in plano scilicet suo) multi enim semper sunt subingressus, et motus uni parti directus, alteri est obliquus.

Examinanda via utilis centri gravitatis chordae describentis Ellipsin. Aliaque id genus. Via utilis centri gravitatis non semper componit lineam ut patet.

1 (1) Considerandi quidam motus (2) Considerandae L 4 quia (1) recta quae plano suo eg (2) linea quae plano priore egreditur (a) $\langle - \rangle$ (b) directione ad planum suum normali nullo modo subingreditur in vestigia sua. Quatenus autem (aa) oblique (bb) obliquo movetur angulo, eatenus composito ex duobus motibus motu moveri intelligi potest, uno subingrediente, altero acqvirente. (aaa) Idque po $\langle - \rangle$ (bbb) Qvemadmodum enim id supra fig. 1. continebat (aaaa) linea (bbbb) recta in suo plano mota, ita nunc contingit ipsa in aliud planum transgrediente. Itaque ut area (aaaaa) eius aestimetur, aestimand (bbbbbb) aestimetur spatium quod percurrit, (ideo ut supra fig. 1.) aestimandus tantum motus ad planum eius directus; is autem invenietur via centri gravitatis directa tantum aestimata. Ea enim ducta in ipsum mobile dabit spatium percursum (3) tangens circumferentiae |axe gestr. | AB L 5 est. (1) Itaque (2) prorsus ut supra (3) directio L 7 unum (1) directum, seu (2) perpendicularem L 10 f. dabit (1) spatium. (2) su (3) superficiem L 12 exquirere, (1) via utilis (2) aggrega (3) quae L 18 subingressus, (1) et ob variantem perpetuo alius atque alius (2) et L 19 utilis erg. L

11 Demonstravit: Chr. WREN, *Generatio corporis cylindroidis Hyperbolici*, in: *Philosophical Transactions* IV Nr. 48 vom 21. Juni/1. Juli 1669, S. 961 f. Leibniz bezieht sich möglicherweise auf die Darstellung in J. WALLIS, *Mechanica*, 1670–1671, S. 556–567 (*WO* I S. 929–938); vgl. VII, 4 N. 34 S. 574.

Curvae Cycloidis et omnium partium habetur dimensio et centrum gravitatis. Momentum scilicet ex AB , habebitur ipsis $BC \sqcap AF$ applicatis in O . Fit enim Parabola. Momentum ex AE habebitur ipsis φC . translatis in O . Jam ob Triangula sim. \overline{EFA} et $\overline{\varphi OC}$ erit $\frac{\varphi C}{EA} \sqcap \frac{OC}{AF}$. et erit $\varphi C \sqcap \frac{OC, 2a}{AF}$ sive $\varphi C \sqcap \frac{OF 2a + FC 2a}{AF}$. Jam $\frac{OF 2a}{AF}$ haberi possunt. Eorum enim summa dat parabolam, restat tantum $\frac{FC 2a}{AF} \sqcap v$. Jam Triangula: \overline{CNM} sim. \overline{CGW} erit $CN, GW \sqcap CG, NM$. Est autem $NM \sqcap OF$. Ergo opus est OF in CG . Est autem CG differentia tum ipsarum OF , tum ipsarum FC . OF in suas differentias semper habentur. Fit enim semiquadratum ultimae OF . Eadem OF in differentias FC : Quid aliud sunt quam sinus arcibus insistentes, qui habentur, habetur. Sed haec jam patent, quia datur CN in GW aliunde. Nobis vero id non quaeritur sed $\frac{FC 2a}{AF}$. Hoc sic inveniemus. Quia CS complet FC . arcum, et EF chorda est complementi, ideo pro $\frac{FC}{AF}$ quaeramus $\frac{CS}{EF}$ quae est aequalis $\frac{CT}{AE \sqcap 2a}$. Quaeritur ergo CT ad S . ad habendam $C\varphi$ ad O . Sed aliunde omnes $C\varphi$ ad O , + omn. CT ad S . dant momentum curvae ex AE , + mom. curvae ex RS , id est curvam cycloidis ductam in ER . circumferentiam. Habetur autem curva cycloidis, ergo et rectangulum hoc ex circumferentia in curvam ex data circumferentia; ergo ex data circumferentia habentur $C\varphi$ ad O ; + CT ad S . Ergo alterutrum eorum tolli potest. Inventa sic aequatione, restabit unicum cujus valor substituat in superiori, ubi invenimus $\frac{FC}{AF}$ esse necessarium, et hoc quoque habebitur, unde oritur notabile ad inveniendum momentum Curvae cycloidis ex AE . vel SR . opus esse circumferentia circuli, nulla vero ejus portione quod mirum, et affine illi[s] quae ostendit Hugenius de cycloidis ratione temporis. Hinc jam centrum gravitatis cycloidis semper haberi potest etiam durante evolutione.

1 Dazu, unter Fig. 7: MQ in CG differentiolas arcuum si datur, datur curva cycloidis nempe secans falsa in Elementum curvae circuli. Unde methodus generalis pro talibus curvis.

20 ostendit: Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 42–58 [Marg.] (*HO XVIII* S. 158 bis 187). 24 nempe: vgl. VII, 4 N. 29 prop. 4 S. 522 u. S. 524.

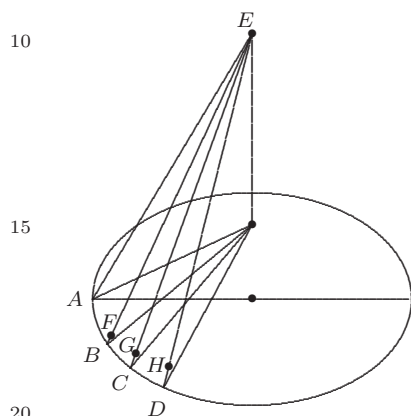
78. SUPERFICIES CONI SCALENI

24. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 6 Bl. 6. 1 Streifen von ca 21 x max. 3,8 cm. 9 Z. auf Bl. 6 r^o. Bl. 6 v^o leer. Bl. 6 bildete ursprünglich mit LH 35 XII 1 Bl. 311 (VII, 1 N. 32; VII, 3 N. 64; Cc 2, Nr. 1456; Druck in einem späteren Band der Reihe) ein vollständiges Bl. 2^o. Cc 2, Nr. 1426

24. Maji 1676

Superficies Coni Scaleni



[Fig. 1]

ducta dabit superficiem conii Scaleni.

Idem locum habet pro omnibus conoëidibus scalenis, etiãmsi basis non sit arcus Circuli.

Singularis inquisitio in superficiem Coni Scaleni ope viae centri gravitatis. Arcus Circuli $ABCD$. et E punctum in sublimi, unde fila EA . EB . EC . ED . quorum differentiae FB . GC . HD . in rectis EFB , EGC , EHD sumtae. Ponamus lineas rigidas esse EA , FB , GC , HD , ita dispositas ut figura ostendit, et EA translata in EF secum auferre FB , et EF translata in EG secum auferre GC , et EG translata in EH secum auferre HD . ita ut semper tangat arcum. Patet hoc modo describi superficiem conii Scaleni, si puncta AB . BC . CD . infinite parvo absint intervallo. Quod si jam aestimetur quomodo durante motu mutetur centrum gravitatis totius A . FB . GC . HD . viaque ejus sive linea inveniatur, ea in summam horum

7 24. Maji 1676 *erg. L* 8 Superficies ... Scaleni *erg. L* 16 et |EGH ändert Hrsg. | translata *L*

23 dabit: Die Behauptung ist nicht richtig.

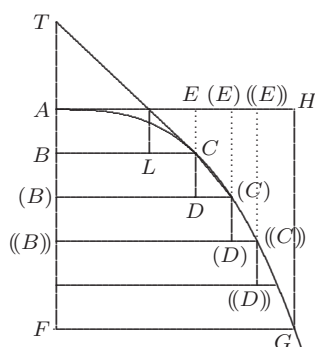
79. ANALYSIS TETRAGONISTICA

26. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 442–443. 1 Bog. 2^o, aus dem das obere Drittel von Bl. 442 ausgeschnitten ist. 2 S. auf Bl. 442 u. 1 1/3 S. auf Bl. 443. Am oberen Rand von Bl. 442 r^o Rest einer Notiz algebraischen Inhalts ohne Bezug zum Haupttext (= S. 548 Z. 14 f.).
Cc 2, Nr. 1427

26 Maji 1676

Analysis Tetragonistica



[Fig. 1]

10

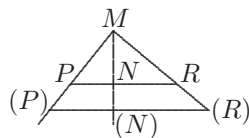
In qualibet curva, in qua TB intervallum tangentis ad AB . constantem habet rationem[,] etiam rectangulum BCD ad rectangulum $ED(C)$ constantem habebit rationem, seu eam quam $(B)(C)(D)$ ad $(E)(D)((C))$ unde non mirum si totum spatium ad totum spatium constantem habet rationem. Unde habemus has quadraturas sine ulla figurae transmutatione in novam.

15

Rem prius demonstrabo: $TB \propto \frac{z}{v} AB$. ex hypothesi, z existente numero constante. Jam $TB, D(C) \propto BC, CD$. Ergo explicando TB erit $\frac{z}{v} AB, D(C) \propto BC, CD$. Ergo rectangulum BC, CD , ad rectang: $AB, D(C)$ vel $EC, D(C)$ ut numerus ad numerum seu ut z

ad v . Ergo et summa horum rectangulorum, seu spatium $CBFGC$ ad spatium $CEHGC$ eodem erit modo nempe ut z ad v .

Hinc jam nova Analyseos quadraturarum via aperitur, nimirum Omnes paraboloides et Hyperboloides uno ex capite quadrantur, quia in illis Rectangula sub abscissis et differentiis ordinarum, habent constantem rationem ad ordinatas in differentias abscissarum.

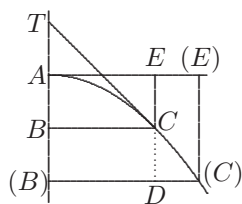


Sint rectangula abscissarum in diff. ord. ut MN . Erunt [rectangula] ordinarum in diff. absciss. ut NP . Haec pro his, sed generalius[:]. Sint ordinatae y . abscissae x . differentiae abscissarum β . ordinarum ω . Sint PN ut $y\beta$ et NR ut $x\omega$. Erit spatium $CBFGC$ ad spatium $CEHGC$ ut spatium $PN(N)(P)P$ ad spatium $RN(N)(R)R$. cum NP ad NR ut $(N)(P)$ ad $(N)(R)$. Infinitae fiunt figurae quadrabiles; quarum omnium quadratura, ut

ita dicam resolvitur in quadraturam Trianguli. Credibile est ergo adhuc infinitas alias inveniri posse, si non sint ejusdem rationis $y\beta$ et $x\omega$, sed uno verbi gratia procedente, ut ordinatae trianguli PN , alterum procedat ut ordinatas parabolae. Et sic credibile est ex sola hac applicatione, si scilicet sint $x\omega$ ad $y\beta$ ut applicatae parabolae ad abscissas debere infinitas iterum oriri curvas novas, ut ex relatione ordinatae Trianguli ad abscissas infinitae ortae sunt. Et infinities infinitae habebuntur curvae, quadrabiles novorum semper graduum quibus forte continebuntur quadrabiles omnes. Primus gradus Quadrabilium fuit paraboloeidum et Hyperboloeidum, cum eadem est ratio seu cum ut applicatae Trianguli. Proximus gradus infinitarum, cum sunt $x\omega$ et $y\beta$ ut ordinatae paraboloeidum ad abscissas. Hactenus dubitatum fuit an ullae essent figurae quarum non figura ex paraboloeidibus et Hyperboloeidibus penderet. Hic ecce novae prodeunt. Quae novae rursus alias dabunt et ita in infinitum. Praeterea hac methodo reducentur figurae ad quadraturam circuli, et Hyperbolae quando ex illis pendent, ut si PN sit applicata Trianguli NR Hyperbolae, figura in qua hoc contingeret penderet ex quadratura Hyperbolae. Poterit hoc modo fieri forte, ut figura aliqua pendet ex se ipsa, (vel pendente ex se ipsa) et habeatur aequatio.

5 ordinatas | seu ändert Hrsg. | differentias L 7 f. NP. (1) vel sunt ordin (2) | Haec . . . generalius erg. | sint L 15 parabolae (1) ita una sola figura (2) Et L 23 ex (1) parabolis (2) paraboloeidibus L

3 nova . . . via: vgl. III, 1 N. 733 S. 362 f. 11 Fig. 2: Eine gestrichene Vorstufe wird nicht wiedergegeben.



[Fig. 4]

Caeterum nonnihil exemplis haec applicando, et primum generaliter consideremus: $ax^2 + bxy + c^2x \cap ey^2 + d^2y + f^3$ unde

$$2axt + bty + c^2t \cap 2ey^2 + d^2y - bxy \text{ et: } t \cap \frac{2ey^2 + d^2y - bxy}{2ax + by + c^2}.$$

$$\text{Et } \frac{t}{y} \cap \frac{\beta}{\omega}. \text{ erit } \cap \frac{2ey + d^2 + bx}{2ax + by + c^2}. \text{ et fiet: } 2ax\beta + by\beta + c^2\beta \cap$$

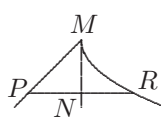
$2ey\omega + d^2\omega + bx\omega$. Ponamus $e \cap 0$. ut y habeatur pure, et fiet:

$$y \cap \frac{d^2\omega + bx\omega - 2ax\beta - c^2\beta}{b\beta} \cap \frac{ax^2 + c^2x - f^3}{d^2 - bx}. \text{ Et fiet denique: } \omega \cap b\beta ax^2 + b\beta c^2x -$$

$f^3\beta b; + 2ax + c^2, d^2 - bx, \beta, \omega, d^4 - b^2x^2$. Sed hic calculus nimis prolixus.

Sumamus potius particularia, et videamus an methodus quaedam inveniri possit,

qua fiat, ut posita $CB(B)D \cap v$ sit $DE(E)(C) \cap \frac{v^2}{a}$. Primum certum est curvam talem



[Fig. 5]

non fore paraboloidem nec Hyperboloidem; deinde erit $AECA$ ad $ABCA$ ut MNR ad MPN . seu ut trilineum parabolicum ad Triangulum, ejusdem altitudinis. Est autem $PN \cap MN$. et

$$\text{sit } PN \cap v. NR \cap \frac{v^2}{a}. \text{ Erit } MPN \cap \frac{v^2}{2}. \text{ et } MNR \cap \frac{v^3}{3a}. \text{ Ergo}$$

erit $AECA$ ad $ABCA$ ut $2v$ ad $3a$. seu ut $2y\beta$ ad $3a$. Habemus $v \cap y\beta$. et $x\omega \cap \frac{v^2\beta^2}{a^2}$.

$$ABCE \cap xy. \int \overline{y\beta} \text{ ad } \int \overline{x\omega} \text{ ut } 2y\beta \text{ ad } 3a \text{ et } \int \overline{y\beta} + \int \overline{x\omega} \cap xy. \text{ Ergo } \int x\omega \cap xy - \int y\beta \cap$$

$$3a \int y\beta \sim 2y\beta. \text{ Ergo } \frac{2xy^2\beta}{3a + 2y\beta} \cap \int y\beta. \text{ Si } y \text{ potuisset ita ut restitissent solum } x \text{ et } \beta.$$

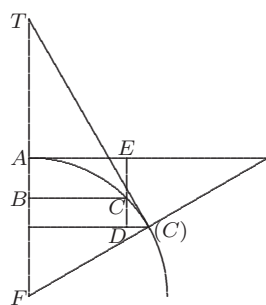
habuissemus hinc inversa methodo figuram determinatam; sed forte id fieri non potest et

1 applicando, (1) et | in erg. | Circulo primum experiamur aliqva (2) et L 2 consideremus: (1) $x^2 + 2xy$ (2) $lx^2 + bxy + c^2x$ (a) + (b) $-d^2y$ (aa) + (bb) $-c^3$ | $\cap 0$ unde transponendo *streicht Hrsg.* | fiet: $2ltx + (aaa) 2b (bbb) bty + c^2t \cap -bxy - (3) ax^2 + L$ 13 $\cap \frac{v^3}{3a}$ (1) | ergo *streicht Hrsg.* | posita $AB \cap v$ erit (2) ergo L

4 erit \cap : Auf der rechten Seite müsste es im Zähler $-bx$ lauten. Leibniz rechnet mit dem falschen Vorzeichen konsequent weiter bis Z. 7. 15 $2y\beta$ ad $3a$: Der Kehrwert $\frac{3a}{2y\beta}$ wäre richtig. Dadurch ergibt

sich in Z. 16 für $\int y\beta$ statt $\frac{3axy}{3a + 2y\beta}$ ein fehlerhafter Ausdruck.

infinite sunt figurae satisfaciens. Minime tamen licet y pro arbitrio assumere. Nondum ergo satisfactum, nec exemplum tale invenimus.



[Fig. 6]

Videamus nunc in conicis, ut analysin datae figurae hoc modo tentemus. In Circulo est $C(C) \propto \frac{FC, \beta}{BC}$ seu $\frac{a\beta}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Ergo Triangulum $FC(C) \propto \frac{a^2\beta}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$ et $BCD \propto \beta\sqrt{a^2 - x^2}$. Sit $\beta\sqrt{a^2 - x^2} \propto \varphi v$. $\sqrt{a^2 - x^2} [\propto \frac{v\varphi}{\beta}$ et $a^2 - x^2 \propto \frac{v^2\varphi^2}{\beta^2}$. et $FC(C) \propto e\varphi$. Ergo $\sqrt{a^2 - x^2} \propto \frac{a^2\beta}{2e\varphi}$. et $a^2 - x^2 \propto \frac{a^4\beta^2}{4e^2\varphi^2}$ et fiet: $a^4 - 2a^2x^2 + x^4 \propto$

$\frac{a^4v^2\varphi^2\beta^2}{4e^2\varphi^2\beta^2}$. et $a^2 - x^2 \propto \frac{a^2v}{4e}$. Ergo $x^2 \propto \frac{4ea^2 \mp a^2v}{4e}$. et $x \propto \frac{a}{2} \sqrt{4 \mp \frac{v}{e}}$. Sed hic analysi

nostrae difficilis objicitur nodus quod scilicet x reperitur non per solam v sed per $\frac{v}{e}$. Est

tamen in nostra potestate alterutram earum v . et e . explicare. Neque enim necesse est ut alterutra ipsarum v . vel e . sit ad Triangulum, sed possumus aliquam earum sumere pro arbitrio, modo illius sic haberi possit summa. Ponamus ergo $e \propto \varphi$. Aequari scilicet constanti φ , adeoque Triangula illa $FC(C)$ esse aequalia, eorum summa seu figura MNP

paginae superioris erit rectangulum et habebitur x absolute, $x \propto \frac{a}{2} \sqrt{4 \mp \frac{v}{a}}$ vel aequatio

erit: $4x^2a \propto 4a^3 \mp a^2v$. Quaeritur differentia ipsarum x . Ponimus ipsarum v differentiam esse ψ : Quaeramus differentiam ipsarum x^2 , quod fit tantum quaerendo TB tangentem

4f. Daneben: $FB \propto x$. $BC \propto y$.

10 v (1) sed per (2) | vel ändert Hrsg. | per (a) solam (b) $\frac{v}{e} L$ 17-542,1 quaerendo (1) tangentem (2) TB | tangentem erg. Hrsg. | figurae L

9 $\propto \mp \frac{a^2v}{4e}$: Der Nenner müsste $2e$ lauten. Dies wirkt sich, zusammen mit weiteren Versehen, bis S. 542 Z.6 aus.

figurae, cujus talis esset aequatio, fingendo AB esse v . et BC esse x . fingendo scilicet interim et figura priore huc utendo, ne nova opus sit, fiet $\mp 8x^2a \mp ta^2$ et $\mp \frac{8x}{a} \mp \frac{t}{x} \mp \frac{\psi}{dx} \mp \beta$ et $\beta \mp \frac{\mp a\psi}{8x}$. Et erit $\beta^2 \mp \frac{a^2\psi^2}{x^2} \mp \frac{v^2\varphi^2}{a^2 - x^2}$. et $a^4\psi^2 - a^2\psi^2x^2 \mp x^2v^2\varphi^2$. et $x^2 \mp \frac{a^4\psi^2}{v^2\varphi^2 + a^2\psi^2} \mp \frac{4a^4 \mp a^2v}{4a}$. Ergo $4v^2\varphi^2a - 4a^3\psi^2 \mp v^3\varphi^2 \mp a^2\psi^2v \mp 0$. Habemus figuram ex

5 quadratura Circuli pendentem sed non sufficienter expressam, scilicet relatione tantum ad differentias suas, ψ . exprimuntur ipsae v . aut potius $d\bar{v} \mp \psi$. et $d\bar{v}^2 \mp \frac{4v^2\varphi^2a \mp v^3\varphi^2}{\mp a^2v - 4a^3}$.

Ex his datis quaeritur v . Sed ea inventa nihil aliud habebitur quam figura pendens ex circuli quadratura.

Difficile ergo saepe etiam in datis figuris facere ejusmodi analyses. Idemque semper

10 fiet, quotiescunque in valorem ipsius x , ingrediatur utraque tam v . quam e . Quod si alterutra earum ingrediatur tantum, tunc manente altera indeterminata ut e , poterit haec quae ingrediatur ut v sumi pro arithmetica, et ejus differentia ψ . erit $\mp \varphi$. Et invenietur relatio inter v . et e . sine alia indeterminata. Itaque ex pluribus analysibus possibilibus eligendae eae, quibus valor ipsius x . habetur per solam v . vel per solam e . Fateor nihil

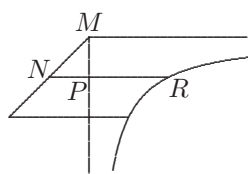
15 aliud ex hac analysi haberi, quam novam figuram ex datae quadratura pendentem, vel contra. Spes tamen magna est ingentis ex ea fructus, ob primi casus foecunditatem.

Nota quandocunque ipsae BCD sunt in reciproca ratione ipsarum $ED(C)$. tunc momentum omnium $ED(C)$ ex AB erit constans quantitas (scil. posita CD constante) factum ex BC , in $ED(C)$, quod est semper constans; + factum ex ED in $\frac{D(C)}{2}$. seu

20 + momentum omnium $\frac{D(C)^2}{2}$ ex vertice. Sed hoc obiter. Illud interim didici quod non putabam, ne in analyticis quidem figuris omnia esse in potestate, nec posse verbi gratia semper inveniri relationem inter BCD et $ED(C)$, id est figuram cujus ordinatae verbi gratia sint ad abscissas ut $ED(C)$ ad BCD .

Imo corripo me nunc et arbitror errorem ex eo ortum quod β explicare volui, nec

25 ponere constantem, aliamve, quasi scilicet x non possit sumi arithmetica aliave pro arbitrio, imo videtur nisi assumatur quaestionem esse frivolum, et relationem fore aliam atque aliam. Audacter ergo ponamus $\beta \mp \varphi$. Fiet statim: $\frac{a^2}{2e} \mp v$. ipsis itaque e . seu exiguis arcibus positis arithmetice proportionalibus (idem enim est ac si id dicas de Triangulis, erunt



[Fig. 7]

rectangula BCD harmonice proportionalia seu BCD erunt ipsi $FC(C)$ reciproca). Ergo si $NP \sqcap MP$ ut e . et PR ut v . erit curva R hyperbola. Sed quoniam ita haberetur quadratura circuli ex Hyperbolae quadratura et contra, imo et spatium Hyperbolicum infinitum, quae omnia absurda videntur, ideo redeundum ad superiora, et negandum, id

procedere quia positus β . constantibus seu x arithmetice ipsae v non sunt arithmeticae.

$$\phi, \sqrt{\beta^2 + \omega^2} \sqcap e\phi. \sqrt{a^2 - x^2}\beta \sqcap va. \frac{a\beta}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqcap \sqrt{\beta^2 + \omega^2} \text{ et } \frac{a^2\beta}{\sqrt{\dots}} \sqcap e\phi. \text{ Ergo}$$

$$a\beta^2 \sqcap aev. \text{ et } a^2 - x^2, \beta^2 \sqcap v^2a^2. \text{ et } \beta^2 \sqcap \frac{v^2a^2}{a^2 - x^2} \sqcap ev. \text{ et } va^2 \sqcap a^2e - x^2e. \beta^2 \sqcap ev.$$

$$\text{et } x^2 \sqcap \frac{a^2e - va^2}{e}. \text{ Ubi tamen non est satis datorum, ut possit adhuc semel inveniri}$$

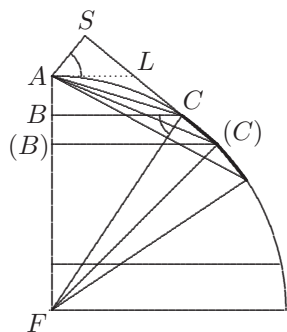
aliquid, cujus ope habeatur aequatio in qua extent non nisi e et v . Nec vero licet β pro arbitrio assumere, tunc enim frustra utemur e . et v . quia non erunt amplius liberae, sed resolvendae. Itaque nescio an sint aliae praeter paraboloeides Curvae, in quibus absolute possit inveniri, quia tamen ipsa β includit x . Ita ideo tota res huc redit: $d\bar{x}^2 \sqcap ev$. et $x^2 \sqcap \frac{a^2e - va^2}{e}$. Ope harum duarum aequationum tollenda x , unde fiet: $\int \sqrt{ev} \sqcap a\sqrt{\frac{e-v}{v}}$.

cujus figurae quadratura pendet ex quadratura Circuli. Interea methodus ista utilissima ad quaestiones tangentium inversas, ista enim figura utique certa est et exhibet relationem de qua quaeritur.

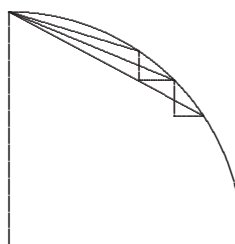
15 Am Rand, mit $\int \sqrt{ev} \sqcap a\sqrt{\frac{e-v}{v}}$ durch einen Hinweisstrich verbunden: Non-dum certum quod haec aequatio sit ad curvam unicam[,] est enim forte ad infinitas.

1 proportionalia (1) itaque ex dato quad (2) seu L 10 $\sqcap \frac{a^2e - va^2}{e}$. (1) ubi tantum opus est β . sumi talem (2) ubi L

15 $\sqcap a\sqrt{\frac{e-v}{v}}$: Richtig wäre $a\sqrt{\frac{e-v}{e}}$.



[Fig. 8a]



[Fig. 8b]

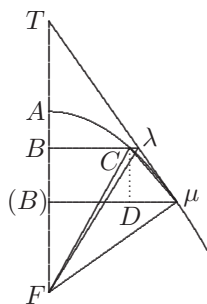
An ergo sic ob ipsam β operam ludere analysis videtur? Fatendum est, nisi unus forte casus adhuc prodesse possit cum duo Triangula conferuntur diversa, ex diversis centris. Ut in circulo ex F centro communiter dicto et A vertice. Sit $FB \sqcap x$. et $B(B) \sqcap \beta$.

5 Erit $C(C) \sqcap \frac{a\beta}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. quod ductum in $\frac{a}{2}$ dabit Triangulum rectangulum $F(C)C \sqcap \frac{a^2\beta}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \sqcap e\varphi$. Si ex A tangenti productae $(C)C$ occurrat L . erit AL in $B(B)$ aequalis duplo Triangulo $AC(C)$.

7–545,1 $AC(C)$ (1) jam si (a) $AB \sqcap (aa)$ a (bb) y . est $2ay$ (b) $BC \sqcap y$. (aa) erit $AL \sqcap (aaa) \frac{2ay^2}{a^2 + y^2}$ (bbb) y . vel $\sqcap (bb)$ erit AB . (cc) et Triangulum AC (dd) et Triangulum $AC(C)$ erit $\frac{a\beta a^2 - x^2}{a^2 + a^2 - x^2} \cdot \sqcap v\varphi$. fiet $\frac{v}{e} \sqcap \frac{a^2 - x^2}{2a^2 - x^2} \sim \sqrt{a^2 - x^2}$. seu $\frac{v}{e} \sqcap \frac{y^3}{a^2 - y^2}$ Unde rursus jungendo in unum aequationem pro valore y . et pro valore β redibit difficultas prior Qvaeramus AS perpendiculararem ad (aaa) LC (bbb) $C(C)$ AS (aaaa) \sqcap (bbbb) : $AL ::$ (aaaaa) AC (bbbbb) BC seu $y : FC$ seu a . ergo $AS \sqcap$ (aaaaaa) $\frac{2ay^3}{a^2 + y^2}$ (bbbbbb) $\frac{2y^3}{a^2 + y^2}$ sit $C(C)$ constans reddenda seu $\frac{a\beta}{y} \sqcap$ (aaaaaaaa) ψ (bbbbbbb) λ posita (aaaaaaaa) ψ (bbbbbbbb) λ constante fiet: $\frac{a\lambda}{2} \sqcap e\lambda$. qvare e in hoc casu etiam constans et $\lambda y^3 \sim a^2 + y^2 \sqcap v\lambda$. ergo (aaaaaaaa) et (bbbbbbbb) $y^3 \sim a^2 + y^2 \sqcap v$. sed restat difficultas prior, sciendum est enim quomodo (aaaaaaaa) ipsa (bbbbbbbb) ipsa y . progrediatur. eqvidem (aaaaaaaa) $\frac{v}{\beta}$ (bbbbbbbb) $\frac{y}{\beta} \sqcap \frac{a}{\lambda}$. et (2) Si $|AL$ ändert Hrsq. | sit L

Videndum est tamen adhuc an posito $\frac{e}{v} \propto \frac{a}{x}$. certo constante modo componatur ratio $\frac{\text{summ. } e}{\text{sum. } v}$ ex ratione $\frac{\int a}{\int x}$. Ut si adhuc justius dicatur $\frac{\text{summ. } e \, d\bar{x}}{\text{summ. } v \, d\bar{x}} \propto \frac{\int a \, d\bar{x} \propto a \int dx \propto ax}{\int x \, dx \propto \frac{x^2}{2}} \propto$

$\frac{2a}{x}$. Sed quoniam nondum inventus modus derivandi Unum ex altero, nec satis scio, utrum id fieri possit, et utrum constans aliqua sit derivatio: Itaque restat unicus analyseos nostrae (praeter inversas methodos hinc ducendas) fructus hic ut sumtis punctis pro arbitrio, et directricibus atque angulis pro arbitrio, quaeratur, possintne aliquando reperiri rectangula vel triangula ita assumpta, ut constantem habeant rationem. Quae inquisitio analytica sive determinata est sive in nostra potestate, generaliter enim possimus punctum eligere quodlibet et directricem eligere quamlibet.



[Fig. 10]

Nimirum non loquendum tantum de exiguis istis ad portiones tangentium infinite parvas Triangulis, sed aestimanda etiam res ad portiones majores tangentium et chordas, ut $FC\mu$. ad $BC\mu(B)$ vel $CB(B)D$. Sed videndum an non quicquid tale est. Debeat semper in tangentibus etiam apparere. Tantum videndum an nihil referat, quomodo $AB \propto x$ et $\beta \propto B(B)$. explicentur.

Et primum pro certo videtur si verbi gratia $CB(B)\mu$ ad $F\lambda\mu$ constantem habet rationem. Id semper appariturum in infinite parvis quoque. Videamus $x\beta + \beta^2$ ad

$\frac{z}{a}x\beta + \frac{z}{a}\beta^2$. Vides eodem modo appariturum etsi ponas β infinite parvam. Eodem modo credo apparebit, si constans ratio sit, nihil referre debere.

Haec ergo methodus analytica plane determinata est. In qualibet figura generali enim pro ipsa calculo enumerare licet omnes possibles Triangulorum aut rectangulorum collationes; sumtis pro arbitrio punctis fixis seu centris; angulis ordinarum, et directricibus. Et quando jam ante constat id fieri non posse, quando scilicet constat generalem non

2 $\frac{\text{summ } e \, d\bar{x}}{\text{summ } a \, d\bar{x}}$ L ändert Hrsg. 19 in (1) tangentibus quoque (2) infinite L 25 constat (1) portiones (2) generalem L

19 Fig. 10: Eine gestrichene Vorstufe zur Figur wird nicht wiedergegeben.

posse inveniri figurae quadraturam; tunc tentandum superest an non id obtineri possit diversa et a se invicem remota vel ut ita dicam opposita Triangula et rectangula inter se jungendo primum unius seriei, ultimo alterius seriei; talis enim methodi ope haberetur figura tota, etsi non singulae partes. Itaque pro analysi quadraturarum haec videtur via maxime naturalis.

Videatur variis modis quomodo in Triangula et parallelogramma resolvi possit uno calculo generali. Et utendo initio non infinite parvis sed ordinariis, nempe Triangulis aut Trapeziis aut scalaribus figuris, examinetur an non aliquando eorum sit progressio transcendens inde cum certum est non posse generalem inveniri quadraturam. Ut jam factum in Hyperbola Circulo et Ellipsi. Ubi examinandi modi quibus id maxime apparet, ut progressio Hyperbolae portionum redit ad sectionem rationis^[6] Circuli ad sectionem anguli, altiores ad alias. Videndum scilicet ad quod problema redeat aequaliter secare curvae portionem datam, seu polygonum regulare ei inscribere, aliaque id genus. Inde enim naturalissime incipietur, eamque in rem analytica quaedam paranda est via. Ea enim videtur vera Clavis, quia statim ostendit Quadraturarum generalium possibilitatem, et omnia tentamenta praescindit, quae eam dare posse videbantur: Nec dubitandum videtur rem redituram ad totidem progressionem, quot sunt radicum aequationum determinandarum modi scilicet nunc ponendo $x \sqcap a$ pro Hyperbola, nunc $x \sqcap a + b$ pro circulo et ita videndum quae figurae sectae construant omnes aequationes, ubi $x \sqcap a + b + c$. Et ut revocatur Hyperbola ad Curvam parabolicam^[7] Circulus ad Circularem, ita non videtur dubitandum et caeteras ad quasdam curvas certa ratione redituras. Quod si jam inventa est in figura portionum progressio, seu solutio problematis: datam figurae portionem aequaliter dividere, in certum partium numerum, similesque, vel etiam bisecare vel ei polygonum regulare circumscribere, vel spatium scalare adscribere, quod sit regulare, aliaque id genus; tunc superest ut videamus an non certa ratione duae diversae portiones diversis locis inter se jungi possint ut fiat progressio aliqua cujus haberi possit summa. Notabile erit si sit saltem non transcendens, sed non sufficiens, quia tunc reducetur totius inventio rursus ad alterius progressionis summationem.

25 f. NB.

6 et (1) rectangula resolvi possit (2) parallelogramma L 7 nempe (1) polygo (2) Triangulis L
 11 sectionem (1) angu (2) rationis L 12 f. secare (1) Hyperbolae aut Elli (2) curvae L 17 quod
 L ändert Hrsg.

Videndum quomodo illa methodus polygonorum regularium, et spatiorum scalarium regularium in Ellipsi et Hyperbola ad alias produci possit curvas; tentanda res in illis figuris quarum habetur sectio et dimensio, ut facilius artificium naturae intelligatur; nimirum condenda theoremata quibus curvarum anguli et similia intercedant et opus est
 5 quaeri maxima Triangula inscripta portionum; vel alia id genus; ut tandem veniatur ad aliquid constans. Haec methodus si succedit vel exhibet quadraturam generalem vel quadraturae generalis impossibilitatem, et si succedit, aequationem saltem transcendentem exhibet quadraticis, ut prior seu superior nostra si succedit exhibet quadraturam; nunquam vero probat impossibilitatem quadraturae generalis. Habet tamen hoc prae altera,
 10 ut enumerari possint omnes modi possibles; quibus scilicet inveniri possint eandem habentia rationem Triangula vel parallelogramma, ut si non succedat, certum sit non posse illa ullo modo inveniri Triangula vel parallelogramma constantem rationem habentia.

[Rest einer algebraischen Notiz ohne Bezug zum Haupttext]

Si $\frac{a^2}{b} \sqcap \frac{b}{c^2}$, erit et $\sqcap \frac{a}{c} \not\propto$. Nam $\odot \supset \sqcap \not\propto^2$. At $\odot \supset \sqcap \odot^2 \sqcap \supset^2$. Ergo $\odot^2 \sqcap \supset^2 \sqcap \not\propto^2$.

15 Ergo $\odot \sqcap \supset \sqcap \not\propto$. positis tamen omnibus affirmativis.

8 prior (1) non exhibet quadratura (2) seu L 14 (1) $\frac{a}{b} \sqcap \frac{b}{c}$ Si $\frac{a^2}{b} \sqcap \frac{b}{c^2}$, erit (a) $\frac{a}{c} \sqcap (b)$
 $\frac{b}{c^2} \sqcap \frac{a^{(2)}}{b}$ (2) Si L

80. QUADRATURA HYPERBOLAE PER LOGARITHMOS.

TENTAMENTUM DE QUADRATURA CIRCULI

27. Mai 1676

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 XII 1 Bl. 317.1 Zettel ca 21 x 10,7 cm. 1 S. auf Bl. 317 r^o. Auf Bl. 317 v^o Cc 2, Nr. 1428 B (Druck in einem späteren Band der Reihe). 5

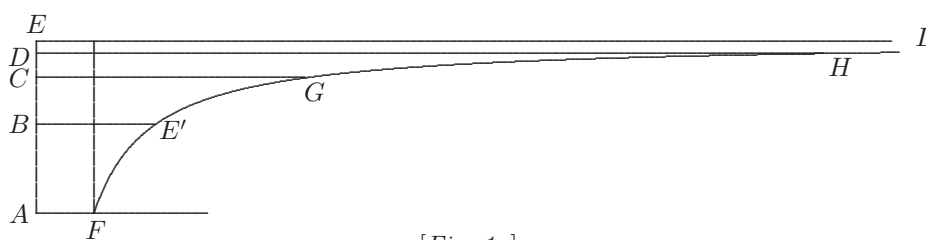
Cc 2, Nr. 1428 A

[Leibniz]

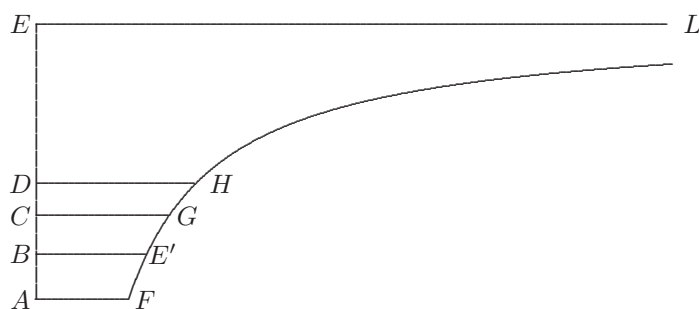
27 Maji 1676.

Quad. Hyp. per Logarithm.
Tentamentum de quad. Circ.

10



[Fig. 1a]



[Fig. 1b]

9 27 Maji 1676. *erg. L* 10f. *qvad. ... Circ. erg. L*

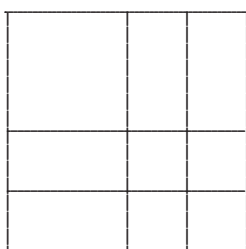
12f. *Fig. 1a ... 1b*: Leibniz hat in beiden Figuren und im zugehörigen Text zwei verschiedene Punkte mit *E* benannt. Zur besseren Unterscheidung wird jeweils einer mit *E'* bezeichnet.

Si $A. B. C. D. E.$ geometrice proportionales $ABE'F$, $BCGE'$ esse aequales verum non est. Sed ita si $ED. EC. EB. EA$ sint geometrice proportionales spatia $DCGH. CBE'G. BAFE'$ erunt aequalia. Sed non debet adjici spatium infinitum $LEDH$. Hoc etiam provenit ope serierum infinitarum. Ex hac aequalitate demonstrabitur spatium

5 Hyperbolicum esse data quantitate majus. Inferius tamen cuilibet infinities sumtae.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{2} & \frac{3}{4} & \frac{2}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{1} & \frac{2}{2} & \frac{3}{4} & \frac{4}{16} & \frac{5}{32} & \text{etc.} \\ \frac{1}{1} & \frac{2}{2} & \frac{3}{4} & \frac{4}{16} & \frac{5}{32} & \text{etc.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \pi \frac{3}{2} \\ \frac{z}{2^z} + \frac{z-1}{2^{z-1}} + \frac{z-2}{2^{z-2}} \text{ etc. } \pi 4. \\ \frac{z}{2^z} \quad \frac{z-1}{2^{z-1}} \end{array}$$

[Leibniz oder Tschirnhaus]



[Fig. 2]

10

8 Darüber, Leibniz: 100,000

1–5 Si ... E. (1) arithmetice (2) geometrice ... ABEF, |ACGF ändert Hrsg. | esse ... geometrice | aequales ändert Hrsg. | spatia ... sumtae erg. L 8 $\frac{5}{32}$ etc (1) $\frac{100,000}{2^{100,000}}$ (2) $\frac{z}{2^z}$ L

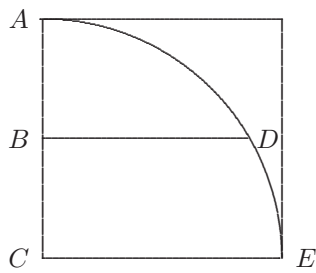
1 Si $A. B. C. D. E.$: Gemeint ist wohl, dass AB, AC, AD und AE in geometrischer Proportion sein sollen. 6 $\frac{3}{2}$: Der korrekte Wert ist $3 + \frac{1}{16}$. In den folgenden beiden Zeilen unterlaufen Leibniz weitere

Versehen. Das Bildungsgesetz der betrachteten Folge lautet richtig $a_z = \sum_{k=1}^z \frac{k}{2^{k-1}} + \sum_{k=1}^{z-1} \frac{z-k}{2^{z-1+k}}$. Es gilt

$\lim_{z \rightarrow \infty} a_z = 4.$

[Leibniz und Tschirnhaus]

[Tschirnhaus] $\sqrt{\quad}$



[Leibniz] 2 3

[Tschirnhaus] a b

[Fig. 3]

[Leibniz]

5

Si ope curvae rationalis ex circulo ortae inveniri posset certa ratio, inter duas series infinitas duo circuli segmenta, ut ABD et $BCED$ exprimentes (ut in hyperbola hoc fit) haberetur circuli quadratura, et exprimeretur ejus quantitas tantum per signum quadraticum $\sqrt{\dots}$.

Saepe dum exemplorum rationem sive demonstrationem, vel etiam si fieri posset refutationem quaerimu(s) invenimus demonstrationem generalem. 10

6–9 Si ... inter (1) duo quaedam circ (2) duas ... $\sqrt{\dots}$ erg. L

4 Fig. 3: Die Punktbezeichnungen A u. B stammen von Tschirnhaus, C–E von Leibniz.
 8 exprimeretur: Die Behauptung ist nicht richtig.

81. THEOREMATA CENTROBARYCA PLANE NOVA

1. Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 134. 1 Streifen von ca. 20,6 x 1,9 cm. 4 Z. auf Bl. 134 r^o. Bl. 134 v^o leer. Bl. 134 bildete ursprünglich zusammen mit LH 35 XV 1 Bl. 24 (VII, 1 N. 30), dat. 5. Juni 1676, einen Streifen eines Bog. 2^o.
Cc 2, Nr. 1432

5

1. Jun. 1676.

Inveniri poterunt Theoremata Centrobaryca plane nova, si non ponantur lineae directionis parallelae sed concurrentes, tunc enim quae aequaliter distant a fulcro, non ideo aequiponderabunt. Debet tamen hoc novo considerandi modo idem semper provenire centrum gravitatis quod ante. Videndum.

10

9f. distant (1) ab aliquo | puncto *streicht Hrsg.* | (2) a fulcro *L*

Constat ex demonstratione Archimedis, momentum arcus ex diametro a quo incipit esse $\frac{v\delta}{2} \sqcap m$. Superficies autem arcus revolutione circa hanc diametrum genita, est ad momentum hoc, ut peripheria ad diametrum; hanc superficiem vocemus s . Erit $\frac{s}{m} \sqcap \frac{\pi}{\delta}$.

et pro m ponendo ejus valorem $\frac{v\delta}{2}$ fiet $\frac{2s}{v} \sqcap \pi$.

5 Aliunde autem constat eandem superficiem aequari arcui ducto in viam centri gravitatis, seu arcui ducto in peripheriam circuli cujus radius est BF . Hanc ita investigabimus; erit illa via centri gravitatis c , ad peripheriam circuli circa AD , nempe ad π , ut BF dupla diameter ejus seu $2g$. ad diametrum AD ; seu ad δ . Ergo $\frac{c}{\pi} \sqcap \frac{2g}{\delta}$. seu $c \sqcap \frac{2g\pi}{\delta}$. quae c ducta in arcum dabit ac vel $\frac{2g\pi a}{\delta} \sqcap s$. Quem valorem illius s . substituendo in aequatione

10 $\frac{2s}{v} \sqcap \pi$. fiet: $\frac{2ac}{v} \sqcap \pi$. adeoque $c \sqcap \frac{\pi v}{2a}$. Ponatur jam nota esse ratio arcus a ad peripheriam, ita ut sit $\frac{\pi}{a} \sqcap$ numero r . cognito, erit $c \sqcap \frac{vr}{2}$. Ergo recta quae sit [ad] sinum versum, ut arcus duplus est ad peripheriam aequabitur circumferentiae circuli, cujus radius sit distantia centri gravitatis arcus, a diametro.

Si sit arcus HAC . $\sqcap 2a$. sinus rectus duplicatus sit $2\omega \sqcap HC$. ejus momentum

15 ex sinu recto est $\frac{2\omega\delta}{2}$ seu $\omega\delta$. Ejus centrum gravitatis sit (F) . $B(F) \sqcap g$. via centri

6 investigavimus *L ändert Hrsq.* 13f. diametro (1) Sit jam arcus heptagoni. Ponatur data esse (Lon) (2) Inventa esse peripheria circuli, adeoque π . esse quantitas cognita. Utique et arcus heptagoni datus erit is erit $\frac{\pi}{7}$. (3) Si L

1 Constat: Der folgende Satz entspricht Prop. I aus Bl. PASCAL, *Traité des sinus du quart de cercle*, 1658, S. 1 (PO IX S. 61 f.). Er lässt sich u. a. aus ARCHIMEDES, *De sphaera et cylindro* I, prop. 42 herleiten. 3 diametrum: Richtig wäre radium. Leibniz rechnet konsequent weiter; der Fehler wirkt sich bis S. 555 Z. 5 aus, beeinträchtigt die allgemeine Überlegung jedoch nicht. 5 Aliunde: s. P. GULDIN, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. II, cap. VIII, S. 147. 12 arcus ... peripheriam: Es müsste peripheria est ad arcum duplum heißen. 15 est: Richtig wäre $\omega\delta - 2a(\frac{\delta}{2} - v)$. Der Fehler wirkt sich zusammen mit einem weiteren Versehen bis S. 555 Z. 5 aus und beeinträchtigt auch die allgemeine Diskussion. Insbesondere hätte sich die letzte Gleichung in S. 555 Z. 5 bei richtiger Rechnung aufgelöst.

gravitatis c . erit $2ca \sqcap \omega\pi$, pro v sinu verso paulo ante substituendo nunc ω sinum rectum. Ergo $c \sqcap \frac{\omega\pi}{2a}$. Sit $\frac{\pi}{2a} \sqcap r$ erit $c \sqcap r\omega$. Et $\omega \sqcap \frac{c}{r}$. Porro $B(F) \sqcap g$. et $\frac{2g}{c} \sqcap \frac{\delta}{\pi}$. $AB \sqcap v$. $A(F) \sqcap v - g$. $av - ag \sqcap \text{se[g]m. dupl. } AHA$. Jam $\frown + LHA \sqcap \frac{a\delta}{2,2}$. Ergo $2\frown + 2LHA \sqcap \frac{a\delta}{2}$. Jam $2\frown \sqcap av - ag$. et $2LHA \sqcap \frac{\omega\delta}{2}$ ergo $2av - 2ag + \omega\delta \sqcap a\delta$. Porro $g \sqcap \frac{\delta}{2\pi}c$. et $c \sqcap r\omega$. Ergo $g \sqcap \frac{\delta r\omega}{2\pi}$ fietque $2av - 2a\frac{\delta r\omega}{2\pi} + \omega\delta \sqcap \frac{a\delta}{2}$. et pro v ponendo: $\sqrt{\delta^2 - \omega^2}$ habebitur aequatio in qua sola supererit ω , quae proinde poterit semper inveniri ex data Quadratura Circuli, et relatione arcus ad circumferentiam, aequatione plana quod est absurdum. Non ergo poterit inveniri quadratura circuli. Sed ne in calculo tanti momenti erremus omnia ab integro ordiemur.

Diameter $AD \sqcap \delta$. Peripheria $\sqcap \pi$. Arcus $AH \sqcap a$. Sinus versus $AB \sqcap v$. Sinus rectus $HB \sqcap \omega$. Momentum arcus AH ex tangente verticis AT est duplum segmentum AHR . $\frown \sqcap \frown - \frown$ et $\frown \sqcap \frac{\omega\delta}{2}$. Nam $AHL \sqcap AL$ in HB . Porro $\frown \sqcap \frac{\text{Arcus}}{2}$

Segm. Sect. ALH ALH
 in rad. seu $\frac{a\delta}{4}$. Ergo $2\frown$ segm. $\sqcap \frac{a\delta}{2} - \omega\delta$, arcus momentum ex AT . Ergo $A(F) \sqcap \frac{\delta}{2} - \frac{\omega\delta}{a}$. Per (F) ducatur recta ipsi BH parallela, transibit per centrum gravitatis, ducatur et LR arcum bisecans in R , transibit etiam per centrum gravitatis. Ergo duae hae rectae se secabunt in N . centro gravitatis. Sunt autem anguli T, R, L, A . et A, H, B . aequales ergo Triangula HBA (LAT vel) $L(F)N$ similia. Ergo $\frac{L(F)}{(F)N} \sqcap \frac{HB \sqcap \omega}{BA \sqcap v}$. $L(F) \sqcap \frac{\delta}{2} - A(F)$. Ergo $L(F) \sqcap \frac{\omega\delta}{a}$. Ergo $(F)N \sqcap \frac{\omega\delta v}{\omega a}$. sed nihil hinc novi.

7f. aequatione plana erg. L

12 et: Der folgende Ausdruck für das Dreieck ALH müsste $\frac{\omega\delta}{4}$ lauten. Leibniz rechnet konsequent weiter.

Ex his quatuor, Radio, sinu, angulo, Circumferentia circuli descripta a centro gravitatis arcus circa diametrum quo finitur, rotati, uno dato, dantur caetera; plane.

Ex his, radio, arcu, sinu, radio circumferentiae supra dictae, seu distantia centri gravitatis arcus a diametro dato uno dantur caetera, plane.

1 (1) Dato angulo | (id est relatione arcus ad (a) diametrum (b) peripheriam) *erg.* | et sinu, datur recta quaedam circumferentiae circuli | cuiusdam *erg.* | aequalis. plane Dato arcu et (aa) sinus (bb) sinu datur radius huius circuli; plane (2) Si dentur, radius, sinus, angulus (3) Ex *L*

1–4 Ex ... plane: Bei beiden Sätzen muss der Kreisradius gegeben sein, die Behauptungen gelten dann jeweils nur für die drei letztgenannten Größen.

83. CENTRUM GRAVITATIS ARCUS CIRCULI

[4. Juni – August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 170. 1 Ausschnitt von max. 20,4 x 2,4 cm. Linke Schnittkante schräg, obere Schnittkante geschwungen. 6 Z. auf Bl. 170 r^o. Bl. 170 v^o leer. — Bl. 170 bildete ursprünglich mit VII, 1 N. 31 einen Teil eines Bl. 2^o.
Cc 2, Nr. 1288

5

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum Januar bis August 1676 belegt. N. 83 greift die in N. 82 S. 554 Z. 1–10 hergeleitete Beziehung zwischen *via centri gravitatis* und *sinus versus* eines um den Kreisdurchmesser rotierenden Kreisbogenstücks einschließlich eines dortigen Fehlers im Vorfaktor auf. Das Stück dürfte demnach kurz nach dem auf 4. Juni 1676 datierten N. 82 entstanden sein.

10

Centrum gr. arcus circuli.

Quidam arcus circuli rectae aequalis.

Invenire rectam cuidam arcui circuli aequalem.

Subtensa *CD* aequatur circumferentiae *BG* circuli novi centro *A* radio *AB* descripti
posito *B* esse centrum gravitatis arcus. Tacquet demonstravit in casu semicirculi. Imo
reperio jam regulam esse talem: Arcus *ED* rotetur circa *EA*. Ejus centri gravitatis ab *EA*
distantia sit *AG*. *Via centri gravitatis, seu circumferentia* cujus radius *AG*, erit ad *EA*

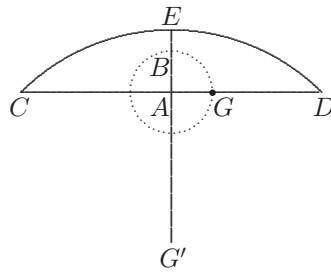
15

15 Über circumferentiae: (an duplo. \mathfrak{S} .)

12 Centrum ... circuli *erg. L* 13 quidam ... aequalis *erg. L* 14 invenire ...
aequalem *erg. L* 15 subtensa | arcus circuli *CED* *erg. u. gestr.* | *CD* *L* 17 talem: (1) circumferentia
circuli (2) arcus *L* 18 ad (1) *AD* sinum (2) *EA* *L*

15 aequatur: Die anschließende Behauptung ist im Allgemeinen nicht korrekt. Im Falle eines Halbkreises *CED* gibt sie die Aussage aus A. TACQUET, *Cylindricorum et annularium liber V*, 1659 (in der uns zugänglichen Ausgabe 1669, prop. 33, S. 131) wieder, sofern man den von Leibniz in Z. 19 nachträglich in Erwägung gezogenen Faktor 2 nicht dem Kreisumfang, sondern der Länge der Sehne *CD* zuordnet.

18–558,3 *Via ... descripti peripheriam*: Richtig wäre $\frac{2\pi\overline{AG}}{EA} = \frac{2\pi\overline{G'E}}{\widehat{ED}}$; vgl. N. 82 S. 554 Z. 10.



[Fig. 1]

sinum versum, ut arcus ED duplicatus, est ad totius circuli centro G' . radio $G'E$ descripti peripheriam; ergo requiritur ut nota sit ratio arcus ED . ad peripheriam. Demonstratio facilis quia momentum arcus ex EA , est radius in EA .

2 duplicatus erg. L

1 Fig. 1: Leibniz hat in Figur und Text die Punktbezeichnung G doppelt verwendet. Zur besseren Unterscheidung wird einer der Punkte mit G' bezeichnet. 3 Demonstratio: s. N. 82 S. 554 Z. 1–10.

Ut sit aequatio trium indeterminatarum, in qua x abscissa, y . ordinata; et z . arcus circuli, cujus sinus complementi sit x . verbi gratia aequatio: $b^2y \sqcap cx^2 + fz^2$. Pro sequente y invenienda loco x sumatur $x + \beta$. et pro z , sumatur $z - dz$. Est autem $d\bar{z} \sqcap \frac{\beta r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

posito [r esse radium circuli] et sumemus, $z - \frac{\beta r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Ergo $b^2(y) \sqcap cx^2 + 2cx\beta \left(\frac{+c\beta^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)$

5 $+ fz^2 - \frac{2fz\beta r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \left(\frac{+f\beta^2 r^{[2]}}{r^2 - x^2} \right)$. Unde jam differentia inter y et (y) erit:

$$\dagger b^2y \dagger b^2(y) \sqcap \left(\dagger cx^2 + fz^2 \right), \dagger \left(cx^2 \right) + 2cx\beta \left(\dagger fz^2 \right) - \frac{2fz\beta r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqcap b^2 d\bar{y}. \text{ Ergo } \frac{d\bar{y}}{\beta} \sqcap \frac{\dagger 2cx\sqrt{r^2 - x^2} \dagger 2fzr}{b^2\sqrt{r^2 - x^2}} \sqcap \frac{t}{y} \sqcap \frac{tb^2}{cx^2 + fz^2}.$$

Unde et curvae flexus seu sinuatio poterit inveniri. Prout scilicet nunc $\dagger 2cx\sqrt{r^2 - x^2}$, nunc $\dagger 2fzr$ praevalet. Tunc enim incipit ordinata quae a parte antea erat major, fieri minor, cum aequantur.

10 Idem est si aliae quoque quantitates indeterminatae plures, ut logarithmus, aliaeque ingrediantur, utcunque sint affectae, ut si sit aequatio: $b^2y \sqcap cx^2 + fz^2 + xzl$. posito z esse arcum. l logarithmum. x sinum complementi arcus, y numerum logarithmi, radio et unitate existente b . vel r . Idem est, quandocumque indeterminata transcendens ex dimensione quadam vel quadratura inexplorata deducta est.

15 Caeterum ex his jam praeclara emergunt auxilia pro Methodo tangentium inversa. Nimirum aequationes generales seu indefiniti gradus poterunt fieri, initio quidem ex duabus tantum indeterminatis, x . et y . Sed si hoc modo res non succedit, quod conditis tabulis, quales expeto, facile apparebit, tunc, poterit assumi litera alia una pluresve; ejusque differentia assumi pro arbitrio formula quaevis, quo facto necesse est utique
20 tandem reperiri formulam qualis desideratur; adeoque curva quae satisfaciat, ejus vero

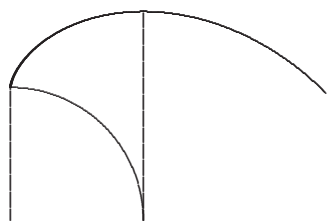
2 sinus (1) versus (2) complementi L 4 $-\frac{\beta r}{\sqrt{r^2 - z^2}}$ L ändert Hrsg. 4 $\left(\frac{+2c\beta^2}{\sqrt{r^2 - z^2}} \right)$ L ändert Hrsg.

5 $-\frac{2fz\beta r}{\sqrt{r^2 - z^2}} \left(\frac{+c\beta^2 r}{r^2 - z^2} \right)$ L ändert Hrsg. 7 flexus (1) contrarius (2) seu L 8 f. ordinata

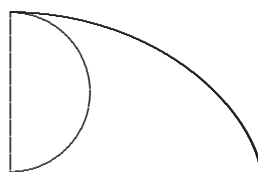
| quae gestr., erg. Hrsg. | (1) antea erat (2) a L

7 $\sqcap \frac{t}{y}$: Richtig wäre $\frac{dy}{\beta} = \frac{y}{\sqrt{t^2 - y^2}}$. Der Fehler beeinträchtigt die weitere Überlegung nicht.

descriptio earum literarum exhibitiones, id est summas differentiarum pro arbitrio assumptarum, postulabit. Inventa semel curva hanc quam postulamus tangentium proprietatem habente, facilius erit postea simpliciores ejus constructiones invenire.



[Fig. 2a]



[Fig. 2b, gestrichen]

Illud quoque commodi habemus ut possimus pluribus uti quantitibus Transcendentibus sed inter se condependentibus exempli causa quae omnes ex quadratura Circuli aut Hyperbolae pendeant. Ex his speculationibus etiam apparebit possintne quadraturae aliae ad quadraturam Circuli et hyperbolae reduci. Caeterum cum inventio maximorum et minimorum utilis sit ad polygonorum inscriptionem et circumscriptionem. Hinc etiam istis transcendentibus magnitudinibus adhibitis poterunt Series inveniri convergentes, earumque eodem modo quaeri terminationes; seu quantitates eodem modo compositae. Tametsi tunc non ita facile sit ratiocinari de impossibilitate. Imo vero eodem modo. Tantum non video quomodo possimus invenire an non v. g. ex Circuli quadratura inveniri possit aliqua summa, quando nulla quantitas ex circuli magnitudine pendens calculum ingressa est.

2 postulabit (1) Ut quaeratur curva (2) Inventa L 9 minimorum (1), seu p (2) necessaria (3) utilis L 9 f. etiam (1) mechanicis isti (2) istis L 15 est | sed tunc facile puto (1) inveniri posse, ut (2) posse effici ut ingrediatur, quaerendo *gestr.* | L

85. QUADRATURAE EX SUMMIS ORDINATARUM

[28. Juni 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 433. 1 Ausschnitt von max. 21,5 x 5,5 cm. 9 Z. auf Bl. 433 v^o. Bl. 433 r^o leer. Bl. 433 bildete ursprünglich mit LH 35 XII 1 Bl. 24 u. 25 (VII, 3 N. 61) ein vollständiges Bl. 2^o.
Cc 2, Nr. 1449

Datierungsgründe: Der Text von N. 85 wurde im selben Duktus und in derselben Tinte im Anschluss an den Haupttext des auf den 28. Juni 1676 datierten Stückes VII, 3 N. 61₁ geschrieben, der Haupttext des auf den 29. Juni 1676 datierten N. 61₂ steht auf LH 35 XII 1 Bl. 29. N. 85 dürfte also am selben Tag wie VII, 3 N. 61₁ entstanden sein.

Quadraturae ex summis ordinatarum

Non inelegans observatio circa quadraturas, ex summis ordinatarum:

Sit $x \propto \sqrt{y^2 + \sqrt{b + y^2}} + \sqrt{y^2 - \sqrt{-b + y^2}}$ fiet $x^2 \propto y^2 \left(+ \sqrt{\begin{matrix} b \\ + y^2 \end{matrix}} + y^2 \left(- \sqrt{\begin{matrix} b \\ + y^2 \end{matrix}} + \right. \right.$

$2\sqrt{b} \propto 2y^2 + 2\sqrt{b}$. ad Hyperbol.

15 $x^2 + 2bx \propto dy^2 + ey + f$. vel $x \propto \sqrt{dy^2 + ey + f} - b$ et $x^2 \propto dy^2 + ey + f - 2[b]\sqrt{\dots} + b^2$

etc. Sed ita nihil novi pro x^2 . Interim hoc notabile, in ejusmodi aequationibus, ut $x^2 + 2bx \propto y$ etc. ubi in altera parte y . non radicem nec fractionem ingreditur, semper ex dato momento ex axe, seu ex data omnium x^2 summa, haberi figurae aream, et contra. Nam $\int x^2 \propto \int \sqrt{dy^2 + ey + f} - 2b \int x$. Haberi autem potest $d \int y^2 + e \int y + \int f \propto \frac{dy^3}{3} + \frac{ey^2}{2} + fy$.

20 Ergo si habeatur $\int x$. habebitur $\int x^2$. et contra, cum eorum summa vel differentia sit cognita. Idem si altius assurgant aequationes de summis cubicis, intelligendum.

11 Quadraturae ... ordinatarum erg. *L* 13 $\sqrt{y^2 + \sqrt{b + y^2}} + (1)$
 $\sqrt{y^2 - \sqrt{b + y^2}} (2) \sqrt{y^2 - \sqrt{-b + y^2}} L$ 15 +f. | et (1) $x^2 \propto (2) x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$ (3) $x^2 + 2bx + b^2 \propto$
 $dy^2 + ey + f + b^2$. seu $x + b \propto \sqrt{dy^2 + ey + f}$ gestr. | vel *L*
 $+ b^2$

13 $x \propto$: Der von Leibniz teilweise korrigierte Ansatz (vgl. N. 54₁ S. 401 Z. 5 u. N. 54₂ S. 403 Z. 7) müsste $x = \sqrt{y^2 + \sqrt{y^4 - b}} + \sqrt{y^2 - \sqrt{y^4 - b}}$ lauten. Der Fehler wirkt sich nicht weiter aus.

86. DE QUADRATRICE

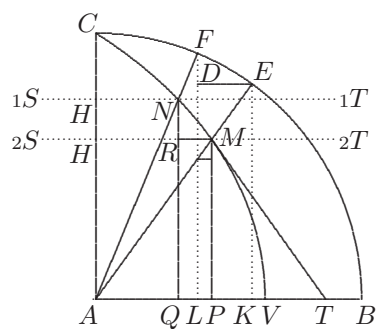
Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 234–235. 1 Bog. 2°. Von Bl. 234 wurde unten ein Abschnitt von 21,9 x max. 10,3 cm entfernt (= N. 87), oben fehlt ein Ausriss von 10,5 x max. 2,5 cm. Haupttext: 2 S. auf Bl. 235 v°, 235 r°. Zusatz: 2/3 S. auf Bl. 234 v°. Notiz (in Zusammenhang mit N. 87): 7 Z. auf Bl. 234 r°. — An der Risskante auf Bl. 234 r° Rest fremden Textes: „(—) figuram“. Cc 2, Nr. 1464 A, B, 00

Junii 1676.

De Quadratrice.

10



[Fig. 1]

Quadratricis natura in eo consistit, ut sit motus Regulae *ST* ex *N*. in *RM*. servato parallelismo, proportionalis motui radii *AF* circa centrum *A*, per arcum *FE*, circuli *CFEB*. posito *AF* transire per *N*, et *AE* per *M*. Proportionalis inquam in ratione radii *AC*, πr . ad peripheriae quadrantem *CFB*. Ergo $\frac{NR}{FE} \pi \frac{r}{\pi}$ et $\frac{MP}{\text{arc. } EB} \pi a \frac{r}{\pi}$. $MP \pi \frac{r}{\pi} a$ ex 2. $FE \pi$

16 *Am Rande:* Rad. *r*. Peripheriae quadr. *CFB* π . *EB* π arc. *EK* sinus πy . *AK* sinus compl. πv . *AP* πp . *AQ* $\pi \overline{p}$. *FE* $\pi \overline{a}$. *DE* πLK $\pi \overline{d}$. *FD* $\pi \overline{y}$ $\pi \beta$. *RM* $\pi \overline{d}$. *NR* $\pi \overline{m}$. *m* πMP .

10f. Quadratrice. |sub finem de centrobarycis novis gestr. | Quadratricis *L* 15 AM per *N L* ändert Hrsg. 20 sinus |versus ändert Hrsg. | πv . *L* 20 πp |NQ ändert Hrsg. | $\pi \overline{p}$ *L*

10 Quadratrice: Die Aufzeichnung knüpft an die Diskussion der Quadratrix in I. BARROW, *Lectiones geometricae*, 1672, S. 83 [Marg.] an; Fig. 1 entspricht im Wesentlichen Barrows Figur 119, Gleichungen 17 und 19 sind direkt aus dem Werk übernommen. Vgl. Leibniz' Marginalien zu Barrows *Lectiones geometricae* N. 43 S. 303 Z. 2. 22 centrobarycis novis: N. 87.

$d\bar{a}$. et $NR \stackrel{(5)}{\propto} \frac{r}{\pi} d\bar{a} \propto d\bar{m}$. Ob Triangula AMP , AEK similia erit $AM : MP :: AE : EK$.

$$: \frac{ra}{\pi} :: r : y$$

Ergo $AM \stackrel{(6)}{\propto} \frac{r^2 a}{\pi y}$. et $AM^2 \stackrel{(7)}{\propto} \overline{AP^2} + \overline{PM^2}$. Unde junctis

$$\frac{r^4 a^2}{\pi^2 y^2} [\propto] p^2 + \frac{r^2 a^2}{\pi^2}. \text{ et } p \stackrel{(8)}{\propto} \frac{ra}{\pi y} \sqrt{r^2 - y^2} \propto HM \text{ ordinata}$$

quadraticis. Jam $\frac{\overline{AE^2} - \overline{EK^2}}{r^2 - y^2} \stackrel{(9)}{\propto} \frac{AK^2}{v^2}$. et $y \stackrel{(10)}{\propto} \sqrt{r^2 - v^2}$. Erit $p \stackrel{(11)}{\propto} \frac{rav}{\pi \sqrt{r^2 - v^2}}$.

5 $\int p d\bar{a} \propto \int \frac{rav d\bar{v}}{r^2 - v^2}$ area quadraticis.

$\frac{d\bar{a} \propto EF}{d\bar{v}} \propto \frac{r}{y}$. et $d\bar{a} \stackrel{(12)}{\propto} \frac{rd\bar{v}}{y}$ et $a \stackrel{(13)}{\propto} \int \frac{rd\bar{v}}{y}$. Inventa AP seu p . inveniatur

jam AQ . seu $\bar{2}p$. Erit $\bar{2}p \stackrel{(14)}{\propto} \frac{ra\sqrt{r^2 - y^2 - 2y\beta} + \frac{r^2 d\bar{v}}{y} \sqrt{r^2 - y^2 - 2y\beta}}{\pi y + \pi \beta}$. Unde habe-

3 Unter $p \stackrel{(8)}{\propto} \frac{ra}{\pi y} \sqrt{r^2 - y^2}$: $\int p d\bar{a}$ area quadraticis.

4 Am Rande: Pro $r^2 - v^2$. pone y^2 et $y \propto \frac{rd\bar{v}}{d\bar{a}}$. Fiet $p \propto \frac{rav}{\pi rd\bar{v}}$ seu $p \propto \frac{vad\bar{a}}{rd\bar{v}}$.

Horum quaeritur summa. Ergo quaeritur $\int p d\bar{a} \propto \int \frac{vad\bar{a}^2}{rd\bar{v}}$ et $d\bar{a}^2 \propto \frac{r^2 d\bar{v}^2}{r^2 - v^2}$. Ergo posito

$d\bar{v} \propto$ constanti quaeritur: $\int \frac{var}{r^2 - v^2} d\bar{v}$. Hinc jam per infinitam seriem haberi potest area quadraticis sed ipsa ex momentis.

5 $\int p d\bar{a} \dots$ quadraticis erg. L 7 jam |NQ ändert Hrsq. | seu L

9 $p \propto \frac{vad\bar{a}}{rd\bar{v}}$: Richtig wäre $p = \frac{vada}{\pi dv}$. Der daraus berechnete Ausdruck für $\int p da$, der bis auf einen Vorfaktor die eigentlich durch $\int pdm$ bestimmte Fläche unter der Quadratrix gibt, wird dadurch fehlerhaft. Dies wirkt sich im Haupttext nur in Z. 5 aus.

tur $\overline{2p} - p \stackrel{(15)}{\sqcap} RM$. Et quoniam NR ad RM , ut MP ad PT . seu $PT \stackrel{(16)}{\sqcap} \frac{RM, MP}{NR}$.

Ex purgata 15. per 8. et 14. habebimus denique $AT \stackrel{(17)}{\sqcap} \frac{AM^2}{AV}$. sive $AT \stackrel{(18)}{\sqcap} \frac{p^2 + m^2}{\frac{r^2}{\pi}}$.

Nam $AV \stackrel{(19)}{\sqcap} \frac{r^2}{\pi}$. Ergo $AT \stackrel{(20)}{\sqcap} \frac{\pi p^2 + \pi m^2}{r^2}$. At per 11. est $p^2 \stackrel{(21)}{\sqcap} \frac{r^2 a^2 r^2 - y^2}{\pi^2 y^2}$ et

$m^2 \stackrel{(22)}{\sqcap} \frac{r^2 a^2}{\pi^2}$. Ergo $AT \stackrel{(23)}{\sqcap} \frac{\boxed{r^2} a^2 r^2 - y^2 + \boxed{r^2} a^2 y^2}{\pi y^2 \boxed{r^2}}$ adeoque $AT \stackrel{(24)}{\sqcap} \frac{r^2 a^2}{\pi y^2}$. seu

AT ad AV ut a^2 ad y^2 , seu in duplicata ratione arcus ad sinum. $PT \sqcap \frac{r^2 a^2}{\pi y^2} - p \stackrel{(25)}{\sqcap}$ 5
 $AT \quad \frac{r^2}{\pi} \quad \quad \quad EB \quad EK \quad \quad \quad AT - AP$

$\frac{r^2 a^2}{\pi y^2} - \frac{ra\sqrt{r^2 - y^2}}{\pi y}$. Jam MP ad PT , ut RN ad RM . Ergo $RM \stackrel{(27)}{\sqcap} \frac{r^4 a^2 d\bar{v}}{\pi^2 y^3} -$
 seu $m \quad \dots \quad \frac{r^2 d\bar{v}}{\pi y}$
 seu $\frac{r}{\pi} a$

$\frac{r^3 a d\bar{v} v}{\pi^2 y^2}$. Horum ergo datur summa. Ergo si [summa] unius ex iis nempe posterioris detur, dabitur et prioris: at priori dato per 34 datur figura. Quod dabitur ex ipso per v . diviso. Detur summa summarum producti.

Porro ex his patet tangentem ad quadratricem non posse duci, quin detur ratio 10
 quadrantis ad radium et arcus ad sinum.

Hactenus linearum valores habemus: Nunc quaedam circa spatii dimensionem tentabimus. $p d\bar{m} \sqcap \frac{r^3 a d\bar{v}}{\pi^2 y^2} \sqrt{r^2 - y^2}$. $PT d\bar{m} \sqcap MP d\bar{p}$. seu $\frac{PT}{MP} \sqcap \frac{d\bar{p}}{d\bar{m}}$. $\frac{PT}{MP} \sqcap \frac{AT - AP}{MP \sqcap m}$.

2 per (1) 11 (2) 8 L 3 per | 11. ändert Hrsg. | est L 7–9 Horum ... diviso (1) differentiarum (2) detur ... producti erg. L 10f. detur (1) ratio composita ex duabus, (2) ratione (3) ratio ... radium (a) et duplicata arcus (b) et L

6 $RM \stackrel{(27)}{\sqcap} \frac{\pi}{ar} = \frac{1}{MP}$; das Versehen wirkt sich nicht weiter aus.

$AT \sqcap \frac{r^2 a^2}{\pi y^2}$. Ergo $\frac{PT}{MP} \sqcap \frac{d\bar{p}}{d\bar{m}} \stackrel{(28)}{\sqcap} \frac{r^2 a^2 - p\pi y^2}{m\pi y^2}$ et fiet: $d\bar{p}m \sqcap \frac{r^2 a^2}{\pi y^2} d\bar{m} - pd\bar{m}$. sive $d\bar{p}m +$
 $pd\bar{m} \stackrel{(29)}{\sqcap} \frac{r^2 a^2 d\bar{m}}{\pi y^2}$. $\int d\bar{p}m \stackrel{(30)}{\sqcap}$ spat. $VQNMV$. et $\int pd\bar{m} \stackrel{(31)}{\sqcap}$ spat. $VAHNMV \stackrel{(32)}{\sqcap}$
 spat. $VQNMV + \underbrace{\text{rectang. } AHNQ}_{pm}$. Ergo per 29. 30. 32. erit duplum spatium $VQNM$,

seu $2 \int d\bar{p}m$, + $pm \stackrel{[(33)]}{\sqcap} \frac{r^2}{\pi} \int \frac{a^2}{y^2} d\bar{m}$. $d\bar{m} \sqcap \frac{r^2 d\bar{v}}{\pi y}$. per aeq. 5. 12. $a \sqcap r \int \frac{d\bar{v}}{y}$ per 13.

5 Ergo $2 \int m d\bar{p} + pm \stackrel{(34)}{\sqcap} \frac{r^6}{\pi^2} \int \boxed{2} \int \frac{d\bar{v}}{y}, \frac{d\bar{v}}{y^3}$. Adde 27. Itaque ad aream Quadratricis
 habendam hac posteriore summa est opus.

Nimirum quaerenda est area figurae, in qua ad axem seu sinus versos vel com-
 plementi, applicentur quadrata arcuum, divisa per cubos sinuum. Videtur autem haec
 summa esse in potestate, quia posita $d\bar{v}$ constante idem est ac si dicas a te quaeri aream

10 factam ex $\boxed{2} \int \frac{d\bar{v}}{y}$ ductis in $\frac{d\bar{v}^3}{y^3}$. sive ex summae quadrato ducto in differentiarum cubos;

seu $\int a^2$ in $d\bar{a}^3$. Illud utique certum est si ipsae AK . sumantur progressionis arithmeticae;
 figuram in qua arcus quadratum in differentiae arcus cubos ducatur fore homogeneam
 sive proportionalem figurae quadratricis duplici eo quo dixi modo. Ergo ex unius quadra-
 tura habetur altera (absolute, nullo amplius respectu habito ad $d\bar{v}$ constantem, quae rem

8 *Dazu oberhalb der Zeile:* Fuit error, in progressu detectus pagina sequenti.

10 *Unter factam:* error

9 dicas (1) curvam (2) a te quaeri (a) figuram (b) aream L 11 $\int a^2$ in $d\bar{a}^3$. (1) pro $\frac{d\bar{v}^3}{y^3}$
 scribatur z. fiet $\frac{d\bar{v}}{y} \sqcap \sqrt[3]{z}$ et pro $\int a^2$ in $d\bar{a}^3$. scribatur $\int \boxed{2} \int \sqrt[3]{z}$ in z. (2) Illud L 13 modo. (1)

Hoc ergo demonstrato nihil quaerendum amplius quam sum (2) Ergo L 14 altera (1). Hoc semel
 demonstrato jam constr (2) (absolute L)

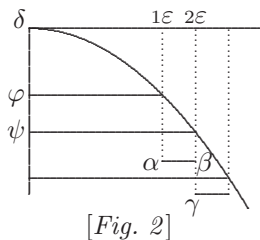
10 $\frac{d\bar{v}^3}{y^3}$: Der Übergang von $\frac{dv}{y^3}$ zu $\frac{dv^3}{y^3}$ ist, wie Leibniz auch später erkannt hat, nicht zulässig.

Dies beeinträchtigt die anschließende Diskussion bis S. 567 Z. 19.

detexit tantum). Superest ergo inveniri hanc figuram in qua arcus ubique suae differentiae tali modo applicatur. $\frac{d\bar{v}^3}{y^3}$ sit $d\bar{z}$ erit $\frac{d\bar{v}}{y} \sqcap \sqrt[3]{d\bar{z}}$; et fiet figurae ordinata: $\underbrace{\boxed{2} \int \sqrt[3]{d\bar{z}}}_{\odot}$ in $d\bar{z}$.

cujus figurae quadratura habita demonstravimus haberi quadraticis quadraturam.

Quaerenda ergo hujus figurae ordinatam \odot habentis descriptio. Ubi videndum ante omnia eademne prodeat curva, quomocumque assumatur z . Ut si dicas $\int \sqrt[3]{d\bar{z}}$ in $d\bar{z}$. seu z in $d\bar{z}$ fit enim Triangulum quodsi enim eadem prodiret figura semper tunc ista foret Parabola. Nam posita z . arithmetica fieret $d\bar{z}$ constans, ergo $\sqrt[3]{d\bar{z}} \sqcap d\bar{z}$ seu et $\int \sqrt[3]{d\bar{z}} \sqcap \int d\bar{z}$ et $\int d\bar{z} \sqcap z$. Ergo $\boxed{2} \int \sqrt[3]{d\bar{z}} \sqcap z^2$. Ordinata ergo foret z^2 ad parabolam. Si sumatur z non arithmetica sed parabolica $\sqcap \frac{e^2}{2}$. fiet $d\bar{z} \sqcap e$ et $\int \sqrt[3]{d\bar{z}}$ in $d\bar{z}$. erit $\frac{e^2}{2}$ in e . Videtur hoc eandem quam ante dare curvam, cum sit determinata quaedam tangentium proprietas, ut figura constatur ex ordinatis ad differentias applicatis, quae figura necessario dat Tri-

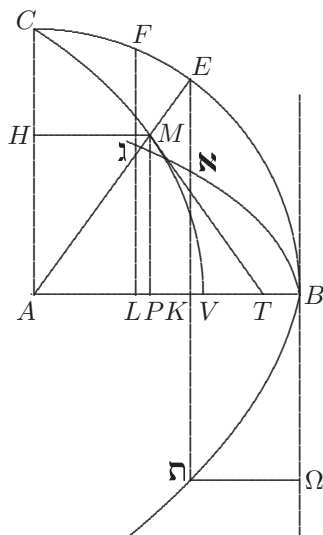


angulum. Nam quoniam $\alpha\beta$ est aequalis ipsi $\beta\gamma$, ubique, erit $\delta\epsilon \sqcap \epsilon\alpha$, abscissa ordinatae. Si jam esset $\alpha\beta$ non aequalis $\beta\gamma$. sed si esset $\epsilon\alpha$ talis, ut fierent semper $\beta\gamma$. radices cubicae ipsarum $\alpha\beta$, tunc dubito. Neque enim certum est hic eademne prodeat curva qualiscumque sumatur $\psi\phi$ seu utcunque secetur $\delta\phi$. Imo patet fore aliam, nam prout alia est $1\epsilon 2\epsilon$, seu $\alpha\beta$. alia habebitur $\beta\gamma$; aliae ergo ipsarum $\beta\gamma$ summae.

Res ergo sic non succedit. Et redibimus ad priora, ut quaeramus summam ex quadraticis arcuum per sinuum cubos divisus et ad diametrum applicatis. Quod et aliter explicare

6 f. foret (1) etiam triangulum (2) Parabola L 11 f. Triangulum (1) Eodem modo sit quaelibet figura facta ex (2) Nam L 14 esset (1) radix quadratica | ab *streicht Hrsg.* | ea (2) $\epsilon\alpha$ L 15 $\alpha\beta$, (1) foret (2) tunc (a) video cessare (b) dubitandum (c) dubito. (aa) Ante omnia certum (bb) Neque L 17 $\delta\phi$. (1) Secetur δ $\xrightarrow{\quad \bullet \quad \bullet \quad}$ θ recta ut lubet in (2) Imo L 20 redivimus L *ändert Hrsg.*

18 Fig. 2: Eine gestrichene Vorstufe zur Figur wird nicht wiedergegeben.



[Fig. 3]

poterimus, si fingamus aliam curvam $B\aleph$. cujus arcus $B\aleph$, $B\aleph$ sint ut arcuum circuli EB quadrata per cubos EK sinuum divisa. Hi arcus $B\aleph$ applicentur ad $[L]K$ axem et fiat nova curva $B\aleph$. Figura $BK\aleph B$ ubique illa est quae arcubus $B\aleph$ vel quadraticis areae supra dicto modo est proportionalis. Eiusdem curvae $B\aleph$ momentum ex $B\Omega$ eidem proportionale, demto aliquo scilicet cognito nam ipsas KB , sinus versos insistere ipsis $\aleph B$ normaliter, vel $\aleph B$ in rectum extensis ipsas KB $\aleph \Omega$ applicari arcubus idem est. Porro momentum ipsarum \aleph ex vertice idem est, ubicunque locentur, modo maneant inter parallelas, FL, EK . Itaque differentiae ex quadratis arcuum per sinus divisis; ducantur in sinus

versos. $-\frac{a^2}{s^3} + \frac{2a^2}{2s^3}$. Est autem $2a \propto a + \frac{d\bar{v}}{s}$. et $2s \propto s + d\bar{s}$. Scribamus $-\frac{a^2}{s^3} + \frac{2a^2}{2s^3} \propto \aleph$. Fiet

$$\aleph \propto \frac{\overbrace{a^2}^{///} + \frac{2ad\bar{v}}{s} \left(\overbrace{+\frac{d\bar{v}^2}{s^2}}^{///} \right), s^3, -a^2, \overbrace{+s^3}^{///} + 3s^2 d\bar{s} \left(\overbrace{+3sd\bar{s}^2}^{///} \right) + \overbrace{d\bar{s}^3}^{///}}{s^6} \text{ seu } \aleph \propto \frac{2ad\bar{v} - 3a^2 d\bar{s}}{s^4}$$

2 circuli (1) quos ad (a) arcum (b) axem LK applicari (2) EB L

10 $-\frac{a^2}{s^3} + \frac{2a^2}{2s^3}$: Im Folgenden verwendet Leibniz s statt y für den sinus rectus EK .

□ \mathfrak{N} et quaeritur summa $\int v$, seu $\frac{2ad\bar{v}v - 3a^2d\bar{s}v}{s^4 \square r^2 - v^2}$. Quaerenda forent primum $\frac{2ad\bar{v}v}{r^2 - v^2}$.

Quod posset forte inveniri si posset haberi $\frac{2ad\bar{v}}{r^2 - v^2}$.

Et variae porro institui possent resolutiones, quas nunc omittam, ubi unum adhuc adjecero, ex dato momento figurae quadratricis $VPMV$, ex AB , haberi et ejus aream.

Nam per superiora $\frac{MP}{PT}$, □ $\frac{d\bar{m}}{d\bar{p}}$. At PT □ $\frac{AM^2}{AV} - AP$. seu $\frac{AM^2 - AP \cdot AV}{AV}$. AM^2 □ 5

$AP^2 + MP^2$. seu $p^2 + m^2$. Ergo PT □ $\frac{p^2 + m^2 - pAV}{AV}$. Ergo $\frac{d\bar{p}}{d\bar{m}}$ seu $\frac{PT}{MP \square m}$ □

$\frac{p^2 + m^2 - pAV}{AV, m}$. Ergo $AV, m, d\bar{p}$ □ $p^2 d\bar{m} + m^2 d\bar{m} - pAV d\bar{m}$ seu

$$\int \overline{AV m d\bar{p}} \quad \square \quad \underbrace{\int \overline{p^2 d\bar{m}}}_{\text{Cylind. sub}} \quad + \quad \underbrace{\int \overline{m^2 d\bar{m}}}_{\text{duplo momento}} \quad - \quad \int \overline{pAV d\bar{m}} \quad \text{Cylind. sub}$$

spatio $VPMV$ omni. HM ex spatio $VAH MV$ 10
 in AV CA proportionali in AV .
 solido circa HA

Ergo ex solido quadratricis circa axem datur figurae dimensio, et contra.

Pro ipso spatio $p d\bar{m}$ sic investigabimus. Invenimus p □ $\frac{rav}{\pi y}$. et $d\bar{m}$ □ $\frac{rd\bar{v}}{\pi y}$. Fiet

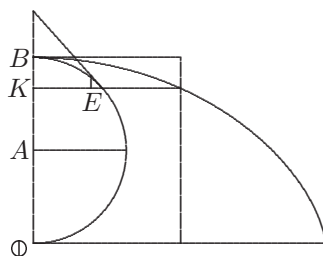
$p d\bar{m}$ □ $\frac{r^2 av d\bar{v}}{\pi^2 y^2}$ seu $\frac{r^2 av d\bar{v}}{\pi^2 r^2 - \pi^2 v^2}$. Omissa $\frac{r^2}{\pi^2}$. quaerenda summa seriei $\frac{av d\bar{v}}{r^2 - v^2}$. seu po- 15

sitis v sinibus rectis arithmetice proportionalibus quaerenda summa omni. $\frac{av}{r^2 - v^2}$. seu

sum. $\frac{av}{r + v, r - v}$. Quod si ergo detur $\int \frac{av}{r + v}$. item $\int \frac{av}{r - v}$ dabitur area quadratri-

1 quaeritur (1) figura cuius (2) summa L 2 forte erg. L

14 $d\bar{m}$ □ $\frac{rd\bar{v}}{\pi y}$: Auf der rechten Seite müsste $\frac{r^2 dv}{\pi y}$ stehen. Das Versehen wirkt sich wegen der anschließenden Vernachlässigung des konstanten Faktors nicht weiter aus.



[Fig. 4]

cis. (Ordinata quadraticis p . divisa per arcum dabit $\frac{v}{r^2 - v^2}$. quae habentur ex hyperbolae quadratura.)

Pro $r + v$ scribatur λ . etiam arithmetica. Fiet: $v \propto \lambda - r$ et

$\int \frac{av}{r+v} \propto \int \frac{a\lambda - ar}{\lambda} \cdot \int \bar{a} - \int \frac{ar}{\lambda}$. Superest ergo summa omnium $\frac{ar}{\lambda}$ quaerenda; seu

5 arcus per arithmetica divisi, seu summa omnium μ quae sint ad r , ut arcus BE ad BA

$\propto BK$. Si fuisset $\lambda \propto r - v$ fuisset BK , pro $\propto K$. Talis figura describenda ejusque quaerenda λ

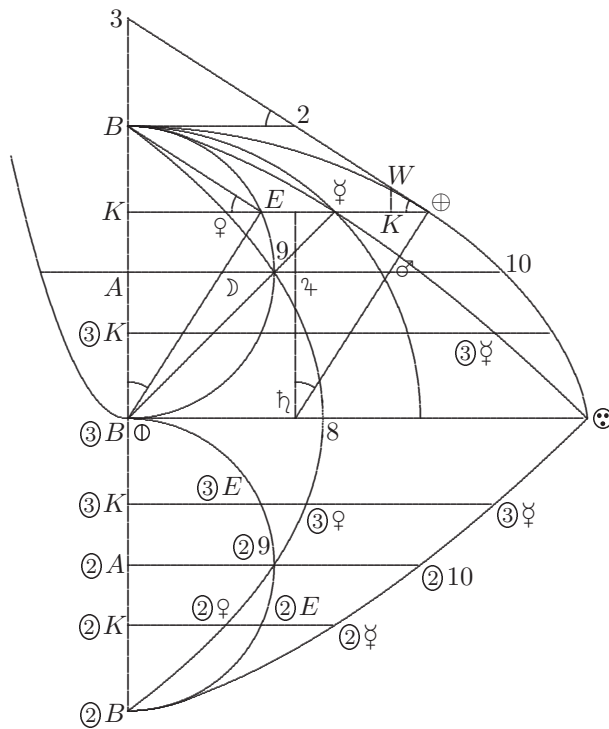
area; optime autem apparebit Cycloide vel Evolutionali adhibitis, ubi linea arcus integra in comparationem cum aliis venit. Quaerenda figura quadraturae arcuum ad axem applicatorum. Ea autem haberi potest, est enim linea sinuum versorum quadratrix, quae

10 haberi potest ex circuli quadratura, ejus differentiola est arcus. Quoniam autem res ad eam est reducta simplicitatem, puto dimensionem quadraticis adeo difficilem amplius non fore. Superest ut aliquando horum calculorum occasione rem eo reducam, ut non sit opus varias novas describere curvas, sed ut ipse calculus utiles describendas (in plerisque saltem casibus) ostendat.

6 eiusque (1) quaerendum momentum. (2) quaerenda L 8 f. figura (1) summae (2) quadraturae arcuum | ad axem applicatorum *erg.* |. Ea L 9 potest, (1) Eius vero differentiola | est *erg.*, *streicht Hrsq.* | arcus (2) est L 10 eius (1) tangentes sunt arcus. (2) differentiola L

2 $\frac{v}{r^2 - v^2}$: Richtig wäre $\frac{v}{\sqrt{r^2 - v^2}}$; die $\frac{p}{a} dm$ hingegen sind (bis auf Vorfaktoren) gegeben durch $\frac{v}{r^2 - v^2} dv$, deren Summe somit auf die Hyperbelquadratur zurückführt.

[Zusatz zu S. 569 Z. 14 – S. 570 Z. 14]



[Fig. 5]

$AB \perp r$. BE arcus $\perp a$. $\phi K \perp \lambda$. $\perp K\psi$. $B\psi\phi$ linea sinuum. Sit nova μ ad AB , ut a ad λ . Erit $\mu \perp A\delta$. $\perp K\psi$. $\perp \psi\sigma$. $B\phi\phi$ est Cycloides.

4 $\perp \psi\sigma$ erg. L 4-572,1 Cycloides (1) $\eta\phi \perp \phi E$, est perpendicularis ad Cycloidem $\frac{AB \perp \eta\psi}{\mu \perp \psi\sigma} \perp$
 $\frac{K\phi}{KW} \perp \frac{B2}{3B} \perp (a) \quad (b) \quad \frac{KE}{BK} \perp (aa) \quad \frac{\phi K}{KE \perp \lambda} \quad (bb) \quad \frac{\phi K \cdot \lambda}{KE} \quad \mu \perp \frac{ra}{\lambda}$ (aaa) id est radius per sinum versum
 mu (bbb) Jam $\frac{AB}{\mu} \perp \frac{\lambda}{KE}$. erit $\mu \perp \frac{AB, KE}{\lambda}$. si $\lambda \perp r + v$. fit $KE \perp \sqrt{r^2 - v^2}$ ergo $\mu \perp (2)$ Omissa L

2 Fig. 5: Die Punktbezeichnung δ ist gegenüber der Vorlage vom Schnittpunkt von $\phi\psi$ mit $A10$ zu demjenigen von ϕE mit $A10$ verschoben worden ($A\delta = \psi\sigma$). Leibniz hat die Verläufe der Kurven $B\psi\phi$ (linea sinuum) sowie $B\psi\phi$ (definiert durch $K\psi = \frac{ra}{\lambda}$) nicht korrekt wiedergegeben; die Figur orientiert sich an Leibniz' Darstellung. 4 $\mu \perp \dots \perp \psi\sigma$: Im Allgemeinen ist $\mu = K\psi$ ungleich $A\delta = \psi\sigma$.

Omissa cycloide tantum ipsas $K\varphi$ consideremus. Earum momentum ex $\textcircled{1}$ habetur. Est enim $\mu\lambda \cap ra$. Ergo momentum omnium μ seu $K\varphi$ ex $\textcircled{1}$ aequatur spatio $BK\varphi B$. Continuetur linea sinuum $B\varphi\textcircled{2}$ usque ad $\textcircled{2}\varphi\textcircled{2}B$ ut sit utrobique similis eodem modo, $B\varphi 98$ in $\textcircled{2}9$, $\textcircled{2}\varphi\textcircled{2}B$. Eodem modo constituatur et $\textcircled{3}K.\textcircled{3}E.\textcircled{3}\varphi$.

$$\begin{array}{l} 5 \quad \textcircled{3}K\textcircled{3}\varphi \text{ in } \textcircled{1}\textcircled{3}K \cap \textcircled{3}K\textcircled{3}\varphi. \\ \quad K\varphi \text{ in } \textcircled{1}K \cap K\varphi \end{array}$$

Ergo totius $\textcircled{2}B\textcircled{1}8\textcircled{2}9\textcircled{2}B$ momentum ex $\textcircled{1}8 \cap$ spatio sinuum, $\textcircled{2}B\textcircled{1}\textcircled{2}10\textcircled{2}B$.

Equidem $\textcircled{1}\textcircled{3}K + \textcircled{1}K \cap \textcircled{1}B$. et $K\varphi + \textcircled{3}K\textcircled{3}\varphi \cap$ semicircumferentiae seu $\textcircled{1}\textcircled{2}$. Sed quod inde $\textcircled{1}\mu \wedge 2r - v$, + $\textcircled{3}\mu v \cap \pi$. Ergo: $2r\textcircled{1}\mu \cap + \textcircled{1}\mu v - \textcircled{3}\mu v + \pi$. $\textcircled{1}\mu$, $\textcircled{1}\lambda$ seu

$$10 \quad \textcircled{1}K, K\varphi \cap rK\varphi \cap r\textcircled{1}a \text{ per superiora ubi } \textcircled{1}\mu \cap \frac{r\textcircled{1}a}{\textcircled{1}\lambda}. \quad \textcircled{3}\mu\textcircled{3}\lambda \text{ seu } \textcircled{3}\mu 2r - \textcircled{3}\mu\textcircled{1}\lambda \text{ seu}$$

$\textcircled{1}\textcircled{3}K, \textcircled{3}K\textcircled{3}\varphi, \cap r\textcircled{3}K\textcircled{3}\varphi \cap r\textcircled{3}a$.

Jam $K\varphi + \textcircled{3}K\textcircled{3}\varphi$, seu $\textcircled{1}a + \textcircled{3}a \cap 2\pi \cap \textcircled{1}\textcircled{2}$ quia $K\varphi$ arc. BE et $\textcircled{3}K\textcircled{3}\varphi$ arc. $E9\textcircled{1}$. At hi duo arcus simul \cap semicircumferentiae $B9\textcircled{1} \cap \textcircled{1}\textcircled{2} \cap 2\pi$.

Ergo $2r\pi(\cap 2r\textcircled{1}a + \textcircled{3}a) \cap \textcircled{1}\mu\textcircled{1}\lambda + \textcircled{3}\mu 2r - \textcircled{3}\mu\textcircled{1}\lambda$. Est autem $\int \overline{\textcircled{1}\mu\textcircled{1}\lambda} \cap \int \overline{\textcircled{1}a}$.

$$15 \quad \text{Ergo } \int 2r\pi \cap \int \overline{\textcircled{1}a} + 2r \int \overline{\textcircled{3}\mu} - \int \overline{\textcircled{3}\mu\textcircled{1}\lambda}. \text{ Eodem modo } \int 2r\pi \cap \int \overline{\textcircled{3}a} + 2r \int \overline{\textcircled{1}\mu} -$$

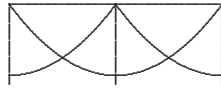
$$\int \overline{\textcircled{1}\mu\textcircled{3}\lambda} \text{ et } \boxed{2 \int 2r\pi} \cap \begin{array}{l} + \int \overline{\textcircled{1}a} \\ + \int \overline{\textcircled{3}a} \end{array} + 2r \int \overline{\textcircled{3}\mu} - \int \overline{\textcircled{3}\mu\textcircled{1}\lambda}. \text{ Si de totis loquamur jam}$$

$2r \int \overline{\textcircled{3}\mu} \cap 2r \int \overline{\textcircled{1}\mu}$ in totis. Sed si de totis loquamur, in $\int \overline{\textcircled{1}\mu\textcircled{3}\lambda}$ et $\int \overline{\textcircled{3}\mu\textcircled{1}\lambda}$ etiam est

9 *Dazu am Rande:* $\textcircled{1}B \cap 2r$. $\textcircled{1}K \cap \textcircled{1}\lambda$. $BK \cap \textcircled{1}\textcircled{3}K \cap 2r - \textcircled{1}\lambda \cap \textcircled{3}\lambda$. $K\varphi \cap \textcircled{1}\mu$. $\textcircled{3}K\textcircled{3}\varphi \cap 3\mu$. $\textcircled{1}\textcircled{2} \cap 2\pi$. $K\varphi \cap \textcircled{1}a$. π arcus quadrantis $\textcircled{3}K\textcircled{3}\varphi \cap \textcircled{3}a$.

2 ex | φ ändert Hrsq. | aequatur L 4f. $\textcircled{3}K.\textcircled{3}E.\textcircled{3}\varphi$. (1) patet momentum omnium (2) omnes (a) A (b) $\textcircled{3}K\textcircled{3}Q$, in $A\textcircled{3}K$. aequari spatio (aa) $\textcircled{2}3B\textcircled{2}A\textcircled{2}10\textcircled{2}$ (bb) $\textcircled{2}\textcircled{1}\textcircled{2}A\textcircled{2}10\textcircled{2}$ Rursus omn. (3) $\textcircled{3}K\textcircled{3}\varphi L$ 7 Ergo ... $\textcircled{2}B\textcircled{1}\textcircled{2}10\textcircled{2}B$ erg. L

9 inde: Auf der rechten Seite der folgenden Gleichung müsste $2r\pi$ stehen. Leibniz benutzt ab Z. 14 den korrekten Ausdruck, unterschlägt dann aber bei Ersetzung der $\mu\lambda$ durch a einen Faktor r .

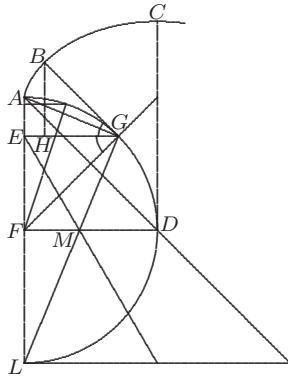


[Fig. 6]

quasi quoddam complementum. Una quaeque enim ①λ etiam est ③λ et una quaeque ①μ etiam est ③μ. Sed nihil hinc, et video nihil hinc haberi.

Si integrum $B8②B$ sumas redibunt simul et ordinatae et abscissae suntis abscissis BK . $B③K$. $B②K$.

5

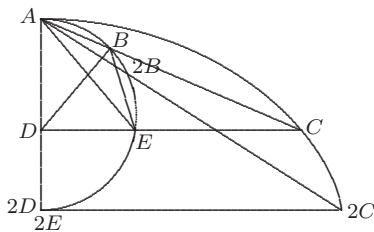


[Fig. 7]

Sit ABC curva circuli evolutione descripta[,] erit BG arcus. $\frac{EF + FL}{FL} \propto \frac{EF}{FM}$. Ergo $\frac{EF}{FL} \propto \frac{EF - FM}{FM}$.
 $FM \propto \frac{FL, EF}{EF + FL}$.

[Notiz]

10



[Fig. 8]

$2\widehat{CA} \propto \widehat{AEC\hat{A}}$. $\widehat{ABC\hat{A}} \propto \widehat{ACA} - \widehat{ABA}$. et $\widehat{ACA} \propto \widehat{ABC\hat{A}} + \widehat{ABA}$ et $\widehat{AEC\hat{A}} \propto 2\widehat{ABC\hat{A}} + 2\widehat{ABA}$.

$$\underbrace{\widehat{ABC\hat{A}}}_{\text{AEC}} + \underbrace{\widehat{BECB}}_{\text{ABE}}$$

$$AD \text{ in } EC - ABE - B\widehat{EB}$$

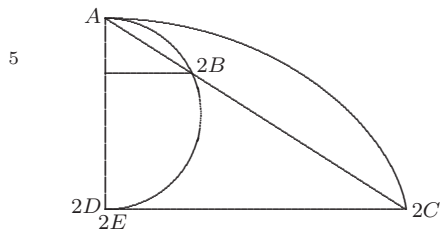
15

3f. haberi. (1) Res aliter instituenda momenta sumendo (2) Si L

$7 \propto \frac{EF}{FM}$: Im Allgemeinen wäre $\frac{EG}{FM}$ richtig. $EG = EF$ gilt im in der Zeichnung wiedergegebenen

Spezialfall, den Leibniz konsequent weiterrechnet. 15 $AD \text{ in } EC$: Richtig wäre $\frac{AD \cdot EC}{2}$. Leibniz benutzt den fehlerhaften Ausdruck konsequent weiter, notiert in S. 574 Z. 4 allerdings das korrekte Resultat für die Zykloidenfläche.

Ergo $\underbrace{AD \text{ in } EC}_{\cap} \cap \widehat{ABCA} + 2\widehat{ABA} + ABE + B\widehat{EB}$
 in $2E$. est duplex circulus $\cap \underbrace{\widehat{ABCA} + ABA}_{\text{bricht ab}}$
 semicirc.



[Fig. 9]

Figura Cycloëidis est tres semicirculi. Ergo re-
 torta ejus est Circulus.

4 (1) Cycloëides (2) figura |Cycloëides ändert Hrsg. | est L

6 Fig. 9: Eine weitere gestrichene Zykloidenskizze wird nicht wiedergegeben.

87. NOVA CENTROBARYCA

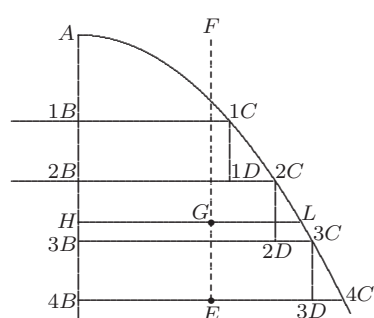
Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 37 V Bl. 50. Ca 1/3 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 50 r°. Bl. 50 v° leer. Geringe Textverluste durch Papierschäden am Rand. — Bl. 50 bildete ursprünglich zusammen mit N. 86 einen vollständigen Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 1474

5

Junii 1676

Nova Centrobaryca



[Fig. 1]

Regula rigida descendit per $1B1C$. $2B2C$ etc.

Ex $1B1C$ progressa in $2B2D$, ibi secum assumit 10
 $1D2C$, et facta $2B2C$ simul progrediuntur ambo in

$3B2D$, ubi rursus assumpta $2D3C$ fit $3B3C$, quae

procedit in $4B3D$. et ita porro. Ajo aream percur-

sam viae centri gravitatis omnium $1B1C$, $1D2C$,

$2D3C$, $3D4C$ etc. in omnium summam $4B4C$ duc-

tae, aequari. Primus situs omnium est $1B1C$, $1D2C$,

$2D3C$, $3D4C$. Momentum eorum ex AB est semper

idem durante motu, seu ultima $4B4C$ bisecta in E .

centrum gravitatis cadet in rectam per E transeuntem axi AB parallelam, EF . Via ergo

centri gravitatis hujus rectae portio est. Novissimum punctum viae erit ipsa E . Tunc enim

omnes in directum jacebunt seu erunt in recta $e(t)$ tantum ergo primo opus est puncto

viae G . id est centro gravitatis primi status. Quod punctum G jam video fore in recta

HGL . aream $1C1B4B4C1C$ id est momentum mobilis in primo situ, bisecante. Et erit

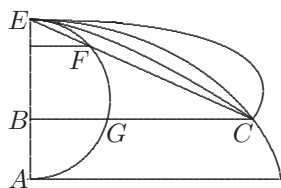
GE in $4B4C$ \cap huic areae. Hinc videtur data area semper dari bisectionem; applicando

7 Junii 1676 in altera Tinte erg. L

23 aream . . . bisecante: Die Linie HGL teilt die Fläche $1C1B4B4C1C$ im Allgemeinen nicht in zwei gleiche Stücke. Außerdem ist das Moment der aus den horizontalen Linienstücken $1B1C$, $1D2C$, $2D3C$, $3D4C$ bestehenden Ausgangskurve bezüglich der horizontalen Achse gleich der Fläche zwischen Achse und Kurve. Leibniz rechnet mit der Aussage zur Teilung der Fläche bis zum Schluss der Aufzeichnung weiter.

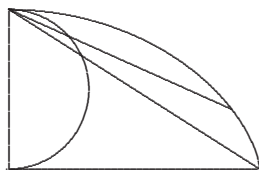
aream basi, seu dividendo aream per basin vicissim qui in binas partes aequales secari potest; aream invenire potest. Sed hoc diligentius excutiendum, quod si verum est, sane mirabile est.

5



[Fig. 2a]

10



[Fig. 2b]

15

adeoque ex circuli quad. habetur. Ex eadem habetur Triangulum EBC . Ergo et eorum summa. At haec adhuc semel habetur, videndum an aequatio fiat identica. Si vera nostra propositio quaelibet figura quadrabilis poterit per parallelas bisecari, quadrisecri, in octo secari partes etc. Et contra quae bisecari potest poterit quadrari. Jam spatium hyperbolicum saepe per parallelas nonne bisecari potest, adeoque et quadrari? Ideo his

20

non fido. Si verum esset quod diximus posset arcus quidam circuli rectificari.

Hinc sequeretur innumeras novas fieri posse dimensiones. Sequeretur posse cycloidem in binas partes aequales secari geometricae, recta basi parallela, area quae ex quad. circuli pendet, per basin quae pendet ex eadem, divisa; quotiens erit quantitas pure geometrica. Cycloides est tres semicirculi. Circulus est semicircumf. in semirad. (seu quadrans in rad). Ergo semicirculus est semicircumf. in $\frac{\text{rad}}{4}$. Ergo tres semicirculi erunt semicircumf. in $\frac{3 \text{ rad}}{4}$. Divide per semicircumf. fit $3 \frac{\text{rad}}{4}$. Erit $AB \frac{3 \text{ rad}}{4}$ et BC bisecabit cycloidem. Jam ECE

segmentum Cycloidis aequatur figurae sinuum dimidio,

17 bisecari, (1) trisecri (2) qvadrisecri L 20 rectificari. | Nam linea sinuum (bis) gestr. | L

9 Cycloides ... semicirculi: s. die diesbezügliche Notiz in N. 86 S. 573 Z. 10 – S. 574 Z. 5.
9f. semicircumf. in semirad.: Die Kreisfläche entspricht dem Produkt aus Halbkreisumfang und Radius. Leibniz rechnet mit dem fehlerhaften Wert konsequent weiter. Insbesondere ist dadurch auch die Lage der Linie BC in Fig. 2a nicht korrekt wiedergegeben.

88. DE EXPONENTIBUS ET INDICIBUS AD QUADRATURAS APPLICATIS. DE MAXIMIS ET MINIMIS. CURVA HASTARIA. METHODUS TANGENTIUM INVERSA

Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 445 u. 447. 1 Bog. 2°. 4 S. Teil 1 ist wahrscheinlich während eines Gesprächs entstanden. 5
Cc 2, Nr. 1470

Jun. 1676.

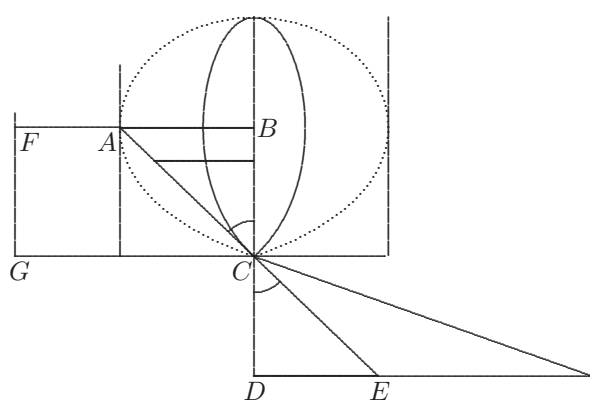
De exponentibus et indicibus ad quadraturas applicatis.

De Maximis et Minimis. Curva Hastaria.

10

Method. tang. invers.

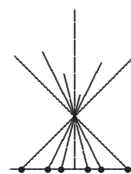
[Teil 1]



[Fig. 1a]



[Fig. 1b]



[Fig. 1c]

8 *Daneben:* De Maximo et Minimo et quaedam de Methodo tangentium inversa logarithmis, indicibus, seriebus infinitis.

14 *Dazu am oberen Rand:* Quaestio de maximo transmutari sic potest in quaestionem de minimo, sit AB maxima ordinarum ex Curva in CB erit FA minima ordinarum ex Curva in GF .

8 Jun. 1676. *erg. L* 9–11 De ... *invers. erg. L*

$$\frac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{AE - AC} \propto \frac{CD}{CB} \propto \frac{CB}{AC} \quad AC + CE \propto AE$$

$$\frac{AB}{AC} \propto \frac{DE}{CE} \quad DE \propto \sqrt{CE^2 - DC^2}$$

$$\propto AE - AC \quad \wedge \quad AE^2 - 2AE, AC + AC^2$$

5

$$\frac{CD}{AE - AC} \propto \frac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{AC}$$

$$\frac{AB}{AC} \propto \frac{\sqrt{AE^2 - 2AE, AC + AC^2 - DC^2}}{AE - AC}$$

$$AB^2, \overline{AE - AC^2} \propto \overline{AE - AC^2}, AC^2, -, DC^2, AC^2$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} \propto \frac{\overline{AE^2 - 2AE, AC; + AC^2 - DC^2}}{\underbrace{AE^2 - 2AE, AC + AC^2}_{\overline{AE - AC} [2]}}$$

6f. Daneben:

$$\frac{CD}{AE - AC} \quad \boxed{AE} \quad CD \text{-----} AE$$

$$AB$$

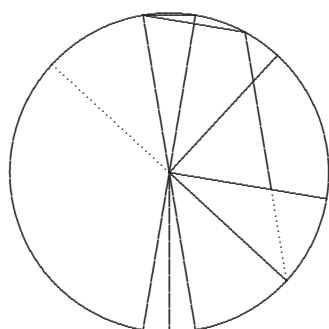
$$AC$$

$$\frac{AB}{AC} \propto \frac{CE}{CD} \quad CE \propto AE - AC$$

14 (1) $\frac{AB}{BC}$ (2) $\frac{AB}{AC} \propto \frac{CE}{CD}$ | CE gestr., erg. Hrsq. | $\propto AE - AC$ L

14 $\frac{AB}{AC} \propto \frac{CE}{CD}$: Die falsche Gleichung geht nicht in den Text ein.

$$\begin{aligned}
 & DC^2, AC^2 \sqcap AC^2, \overline{AE - AC^2 - AB^2}, \overline{AE - AC^2} \\
 & \frac{\boxed{DC^2}, AC^2}{AC^2 - AB^2} \sqcap \overline{AE} - AC^2 \qquad \frac{CD^2}{\overline{AE - AC} \boxed{2}} \times \frac{AC^2 - AB^2}{AC^2} \\
 & DC^2, AC^2 \sqcap AE^2 - 2AE, AC + AC^2 \qquad \overline{AE - AC^2} \sqcap \frac{AC^2, CD^2}{AC^2 - AB^2} \\
 & \qquad \qquad \qquad AC^2 - AB^2 \\
 & - AE^2, AB^2 + 2AE, AC, AB^2 - AC^2, AB^2 \sqcap DC^2, AC^2 \\
 & + AE^2 AC^2 - 2AE, AC^3 + AC^4 \qquad \qquad \qquad 5 \\
 & \frac{-DC^2, AC^2, + AE^2 AC^2, -2AE, AC^3 + AC^4}{+AE^2, -2AE, AC + AC^2} \sqcap AB^2
 \end{aligned}$$



[Fig. 2]

$$\begin{aligned}
 & \frac{z}{a+z} \times \frac{a^2 - z^2}{b+z} \\
 & bz + 2z^2 \sqcap a^2 \boxed{-z^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{z}{a+z} \quad \frac{a-z}{b-2z} \quad \frac{a+z}{b+2z} \\
 & \frac{z}{a+z} \sqcap \frac{a^2 - z^2}{b^2 - 4z^2} \\
 & b^2 z \boxed{-z^3} \sqcap a^3 - az^2 + a^2 z \boxed{-z^3}
 \end{aligned}$$

10

2 Nebenbetrachtung, gestrichen:

$$\begin{aligned}
 & AE - AC \\
 & \quad \vee \\
 & \frac{CE}{AE - AC} \sqcap \frac{\sqrt{AC^2 - AB^2}}{AC}
 \end{aligned}$$

9 2 erg. L 10f. Faktoren 2 und 4 in den Nennern erg. L

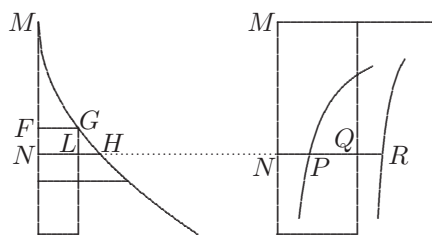
[Zusatz zu S. 579 Z. 7]

$AB \propto \frac{AC}{AE - AC} \sqrt{AE^2 - 2AE, AC + AC^2, - DC^2}$ vel brevius $AE - AC$, est CE .

Ergo $AC \propto AE - CE$. Ergo $AB \propto \frac{AE - CE}{CE} \sqrt{CE^2, -DC^2}$.

$AB \propto y$. $AE \propto a$. $DC \propto c$. $CE \propto e$. $\frac{y^2 e^2}{a^2 - 2ae + e^2} \propto e^2 - c^2$. $\frac{ye}{a - e} \text{ [2] } \propto e + c, e - c$.

5 $y^2 \propto e + c, e - c, \frac{a - e^2}{e^2}$. Examinandum quando: $\frac{e^2 - c^2, a - e^2}{e^2}$, omnium possibilium maxima, ad examinandum quando AB maxima. Nam si y maxima, etiam y^2 maxima, e est magna etiam $e^2 - c^2$ est magna, sed contra $\frac{a - e}{e} \text{ [2] }$ est parva.

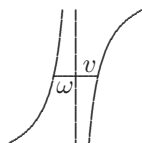


[Fig. 3]

$MN \propto e$. $NH \propto e^2$. $FG \propto NL \propto c^2$ et $LH \propto e^2 - c^2$. $\frac{a - e}{e} \text{ [2] } \propto \frac{a^2}{e^2} - \frac{2a}{e} + 1$.

$\propto PR \quad QR \quad [N]R + NQ$

10 Ergo examinandum quando rectangulum ex PR in LH est omnium possibilium maxi-



[Fig. 4]

mum. Sit ωv rectangulum. Sint ω ascendentes, v descendentes quaeritur rectangulum maximum. Sit $z \propto \text{f}\omega \text{f}v$ et $\omega \propto \text{f}z + v$. et $\omega v \propto \text{f}zv + v^2$. Ponamus ω esse majus et v minus. Erit ωv maximum, tum cum z maximum, tum cum v maximum, quae inter se pugnant, et concilianda ex posita ⟨val⟩orum natura.

15

10f. maximum, (1) $a + b \sim a \propto a^2 + ba$. Hac tantum rectangulum tanto ma (2) Sit L
 13 $\propto \text{f}zv + v^2$. (1) quod erit maximum, si v est maximum et (2) quod redditur maius minus (3)
 ponamus L

[Zusatz zu S. 580 Z. 5, von dort mit Hinweisstrich verbunden]

Pro y^2 ponamus ψ . Fiet $\psi e^2 \sqcap e^2 a^2 - 2e^3 a + e^4 - c^2 a^2 + 2c^2 a e - c^2 e^2$ et ordinando erit $\psi e^2 \sqcap e^4 - 2ae^3 + a^2 e^2 + 2c^2 a e \langle - \rangle c^2 a^{(2)}$ et ordinando ad tangentes:

$$\begin{aligned}
 & - c^2 \\
 & te^{\cancel{2}} \sqcap 4e^{\cancel{3}} - 6ae^{\cancel{2}} + 2a^2 e^{\cancel{1}} + 2c^2 a e \\
 & \qquad \qquad \qquad - 2c^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad - 2\psi
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

et pro $2\psi e^2$ ponendo ejus valorem, fiet:

$$\begin{aligned}
 te^2 \sqcap & 2\textcircled{4}e^4 - 2\textcircled{6}ae^3 \left[\begin{array}{l} + 2a^2 e^2 \\ - 2c^2 \dots \end{array} \right] + \textcircled{2c^2 a e} \\
 & \left[\begin{array}{l} - 2e^4 \\ + 4ae^3 \end{array} \right] - 2\textcircled{4}c^2 a e + 2c^2 a^2 \\
 & \left[\begin{array}{l} + 2a^2 e^2 \\ + 2c^2 \dots \end{array} \right]
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Jam quando tangens axi parallela ipsa t est minima seu indivisibilis ergo omittatur. Et fiet $2e^4 - 2ae^3 - 2c^2 a e + 2c^2 a^2 \sqcap 0$ seu $0 \sqcap e^2 - ae, e^2, -ae + a^2, c^2$ quae dividi potest per $e - a$, (nam $e - a$ non potest esse aequationis radix, quia e certo minor quam a) et fiet $e^3 - ac^2 \sqcap 0$.

15

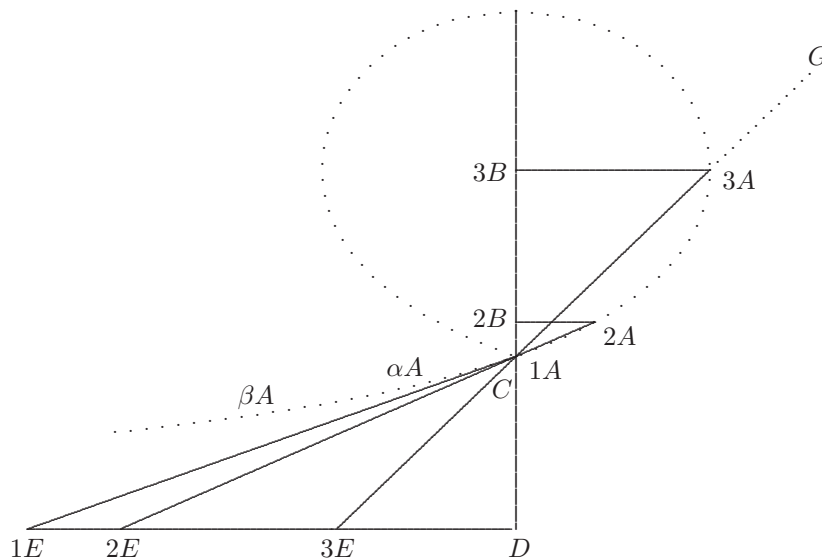
15 Error puto quia hac regula tangentium est solum pro ordinatis et abscissis parallelis.

11 f. $+2c^2 \dots$ (1) necessario e, est infinite parva (2) iam ... est (a) infinita ergo (b) minima L
14 major L ändert Hrsg.

16 Error: Der Einwand ist nicht gerechtfertigt; das Ergebnis für die maximale Ordinate ist korrekt, wie Leibniz auch später selbst in S. 584 Z. 10–12 feststellt.

[Teil 2]

La Piqueline.



[Fig. 5]

5 *Pique AE. dont un bout demeure toujours dans la ligne 1E2E, sur la terre elle meme toujours couchée sur l'épaule DC, vel D1A la pointe A, décrira la courbe Piqueline, 1A.2A.3A. etc. On demande la plus grande largeur de la courbe, ou la plus grande ordonnée 3B3A.*

3 *Am linken oberen Rand:* Video hanc lineam non nisi alterius esse partem. Et scilicet longior hasta quam EA . procedens in G indefinite. punctoque in E . manente in ED plano hasta semper incumbente in humero CD . puncto in hasta notato A . Describatur curva transiens per puncta $3A$, $2A$, $1A$, αA , βA etc. quae est asymptotos ipsi ED .

3 *Fig. 5:* Eine nicht gestrichene Vorstufe zur Zeichnung wird nicht wiedergegeben.

$CD \sqcap c. EC \sqcap e. AE \sqcap a. CA \sqcap a - e. AB \sqcap y. ED \sqcap \sqrt{e^2 - c^2}. \frac{AB \sqcap y}{CA \sqcap a - e} \sqcap$
 $\frac{ED}{CE \sqcap e}. \text{ Ergo } \frac{y}{a - e} \sqcap \sqrt{\frac{e^2 - c^2}{e}}. \text{ Quaeritur } y \text{ omnium maxima: Si } y \text{ sit omnium ma-}$
 $\text{xima, erit etiam } y^2, \text{ omnium maxima. Novum ergo faciamus } i\psi \sqcap y^2. \text{ et fiet } \frac{i\psi}{a^2 - 2ae + e^2}$
 $\sqcap \frac{e^2 - c^2}{e^2}. \text{ et quaeritur } \psi \text{ omnium possibilem maxima. Hic utile foret methodum tan-}$
 $\text{gentium habere, qui non tunc solummodo succedat, cum } \psi. \text{ et } e. \text{ sunt una abscissa ex}$ 5
 $\text{quodam axe, altera ordinata normalis, sed tunc etiam cum convergentes adhibentur cum}$
 $\text{ordinatis, ut } AB \text{ et } CE. \text{ ubi } AB \text{ ordinatae } CE, \text{ convergentes, sed hoc obiter. Nunc vero}$
 $\text{quoniam de maximo tantum et minimo agitur, utamur Huddenii methodo: Multiplicando}$
 $\text{per crucem, fiet: } i\psi e^2 \sqcap a^2 e^2 - 2ae^3 + e^4, - a^2 c^2 + 2ac^2 e - c^2 e^2. \text{ Abjiciatur cognita, reli-}$
 $\text{qui termini per numerum dimensionum ipsius } e, \text{ multiplicentur, divisisque omnibus per } e,$ 10
 $\text{fiet: } i\psi 2e \sqcap 2a^2 e - 6ae^2 + 4e^3 - 2ac^2 + 2c^2 e. \text{ Sed quoniam ita adhuc opus esset ope prioris}$
 $\text{aequationis ex hac nova tollere ipsam } \psi. \text{ ideo satius erit ab initio ordinata aeuatione ita}$
 $\text{multiplicare, ut tollatur } \psi. \text{ Ordinata ita stabit:}$

$$\begin{array}{rcccccc}
 e^4 & - & 2ae^3 & + & a^2 e^2 & + & 2ac^2 e & - & a^2 c^2 & \sqcap & 0. \\
 & & & & - & c^2 & & & & & \\
 & & & & - & i\psi & & & & & \\
 2 & & 1 & & 0 & & -1 & & -2 & & \\
 & & & & & & & & & & 15
 \end{array}$$

1 f. *Daneben:* Aliter: $\frac{AB \sqcap y}{CB \sqcap v} \sqcap \frac{CD \sqcap c}{ED}$.
Am Rande: $CB \sqcap v. AC \sqcap \sqrt{v^2 + y^2}. e \sqcap a - \sqrt{v^2 + y^2}.$
 $ED \sqcap \sqrt{+a^2 - 2a\sqrt{v^2 + y^2} + v^2 \overbrace{(-c^2)}^{+y^2}}.$
 \odot

Pro $a^2 - c^2$, ponamus d^2 . Fiet $ED \sqcap \sqrt{d^2 - 2a, AC + AC^2}$.

8 Huddenii: J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507. 11 $-2ac^2 + 2c^2 e$: Richtig wäre $+2ac^2 - 2c^2 e$. Leibniz setzt im Folgenden noch einmal neu an.

et fiet: $2e^4 - 2ae^3 - 2ac^2e + 2a^2c^2 \sqcap 0$. quae aequatio dividi potest per $e - a$, fiet: $e^3 - ac^2 \sqcap 0$. seu $e \sqcap \sqrt[3]{ac^2}$. Sit $a \sqcap \frac{cf^3}{i^3}$. foret $e \sqcap \frac{cf}{i}$. Si autem datae sint a . et c , patet tantum inter a et c . inveniendas duas medias proportionales c . e . $\frac{e^2}{c}$. a . Scilicet erit e minor duarum mediarum proportionalium inter c et a .

5

Constructio:

Curvae Hastariae maximam latitudinem invenire: Centro E , radio $C3E$, minore duarum proportione mediarum inter CD altitudinem humeri, et AE , hastae longitudinem, describatur circulus, qui lineam horizontalem DE , secabit in $3E$, ex $3E$, per C trajicatur hasta $3E3A$ eritque $3A$ punctum maximi curvae in latitudinem excursus, quaesitum.

10

Notabile hic est, quod idem prodit quod pagina praecedente, ubi methodo Tangentium usus eram, quasi ipsae EC non essent convergentes, sed ex eadem recta abscissae aut ordinatae parallelae; alterum, quod mihi videtur ex his agnosci posse cum generaliter de maximis et minimis, et de tangentibus nullo ad ordinatas respectu agitur, videndum esse, quousque Slusiana Methodus sufficiat Huddeniana generalior est, et in omnem apta

15

casum.

Illud quoque praeclarum in Huddenii methodo, quod ipsa maxima quaesita, hoc loco ψ . tractatur instar cognitae, quod habet rationem, quia ipsa unica est; imo idem futurum non dubito, etsi maxima ψ . ad quadratum aliamve potentiam unam pluresve assurgeret quod mihi valde notabile videtur.

1 *Daneben, gestrichen.* Nota si pateremus fieri e majus [*bricht ab*]

2 *Nebenbetrachtung.* Sit $c \sqcap 1$. $f \sqcap 2$. $a \sqcap 8$. fiet $e \sqcap 2$.

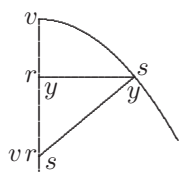
Unterhalb von Fig. 5: $DC \sqcap 1$. $AE \sqcap 8$. $3EC \sqcap \sqrt[3]{8} \sqcap 2$. Erit $3B3A$ omnium BA maxima.

17–19 NB.

14 Slusiana: s. *An Extract of a Letter from the Excellent Renatus Franciscus Slusius, Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673 S. 5143–47 (Nachtrag in VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059).

[Teil 3]

Methodus tangentium inversa:



[Fig. 6]

ordinata s . abscissa y . (aliterve) maximam quaereret ordinatam s . quod a nostra quaestione est alienum. r . non est constans sed variabilis, et v , et s . sunt constantes. $v^2 - 2vx + x^2, +y^2 \sqcap s^2$. Sit $v \sqcap x + b$. cujus aequationis ope tollatur v . Fiet: $v \sqcap x - b$. et erit $x^2 - 2bx + b^2, -2x^2 + 2xb + x^2 + y^2 \sqcap s^2$. Fiet: $b^2 + y^2 \sqcap s^2$. ad Parabolam. Sit $v^2 - 2vx + x^2 \sqcap a^2 - x^2$, fiet $a^2 - x^2 + y^2 \sqcap s^2$. $s^2 - a^2 \sqcap y^2 - x^2$ seu $\frac{s+a}{y-x} \sqcap \frac{y+x}{s-a}$ quae curva supponit quadraturam circuli.

$r^2 + y^2 \sqcap s^2$. et $r^2 \sqcap a^2 - y^2$. fiet: $a^2 \boxed{-y^2 + y^2} \sqcap s^2$ unde s constans.

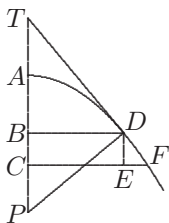
$r^2 + y^2 \sqcap s^2$. Sit $r^2 \sqcap a^2$. fiet $a^2 + y^2 \sqcap s^2$. ad Parabolam. 5

Quam aequationem si quis ad duas radices aequales accommodare vellet; ob s maximam is eo ipso determinaret y ad certum casum, non ergo amplius maneret locus. Sed idem foret ac si in curva cujus

ordinata s . abscissa y . (aliterve) maximam quaereret ordinatam s . quod a nostra quaestione est alienum. r . non est constans sed variabilis, et v , et s . sunt constantes. $v^2 - 2vx + x^2, +y^2 \sqcap s^2$. Sit $v \sqcap x + b$. cujus aequationis ope tollatur v . Fiet: $v \sqcap x - b$. et erit $x^2 - 2bx + b^2, -2x^2 + 2xb + x^2 + y^2 \sqcap s^2$. Fiet: $b^2 + y^2 \sqcap s^2$. ad Parabolam. Sit

$v^2 - 2vx + x^2 \sqcap a^2 - x^2$, fiet $a^2 - x^2 + y^2 \sqcap s^2$. $s^2 - a^2 \sqcap y^2 - x^2$ seu $\frac{s+a}{y-x} \sqcap \frac{y+x}{s-a}$ quae

curva supponit quadraturam circuli.



[Fig. 7]

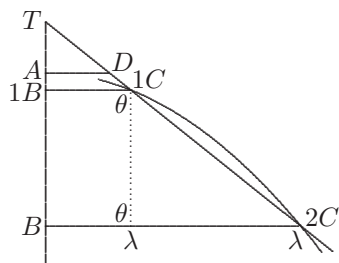
Inventa generali omnium ordinatarum expressione, pura rationali, videtur hinc quoque aliquid duci posse ad methodum tangentium inversam. Sit $y \sqcap bx + cx^2 + dx^3$ etc. $AB \sqcap x$. $BD \sqcap y$. $dx \sqcap \beta$. $\sqcap 1$ erit $dy \sqcap 1b + 2cx + 3dx^2$ etc. $TB \sqcap t$. et $\frac{t}{y} \sqcap \frac{\beta 1}{dy}$. Ergo $t \sqcap \beta \frac{bx + cx^2 + dx^3 \text{ etc.}}{1b + 2cx + 3dx^2 \text{ [etc.]}} \sqcap \frac{y}{d\bar{y}}$. Quaeritur curva in qua: BP sit $\sqrt{a^2 - x^2}$. Sit curva haec: seu $y \sqcap bx + cx^2$ etc. Habemus t ex hoc dato, ut et $d\bar{y}$. Dividamus per y^2 , fiet: $\frac{1}{d\bar{y}y} \sqcap BP$ at idem $BP \sqcap \sqrt{a^2 - x^2}$ ergo $a^2 - x^2, d\bar{y}^2 y^2$

4f. constans, |Ecce circulus inversus *gestr.* | $r^2 + y^2 \sqcap L$ 15 omnium (1) curvarum exp (2) ordinatarum L

21 $\frac{1}{d\bar{y}y} \sqcap BP$: Richtig wäre $BP = ydy$ ($dx = 1$).

$\square 1$ seu $y^2 \square \frac{1}{a^2 - x^2, d\bar{y}^2}$ vel $y^2 d\bar{y}^2 \square \frac{1}{a^2 - x^2}$. Dividatur per $a^2 - x^2$, habebitur series infinita aequalis priori; in qua valores y quadrat(i) ducuntur in valorem $d\bar{y}$ quadratum. Finiatur alicubi, et aequationis instituendae causa, ut possit manere x . Comparentur termini terminis, ita literae $b. c. d.$ etc. invenientur, quod quaerebatur.

5



[Fig. 8]

10

Videtur methodus Huddenii adhuc brevior Slusiana, ad tangentem vel perpendicularem facile una incognita tantum inveniendam, cum Slusiana relinquat duas: Sit $TB \square t. A1B \square x. TA \square \theta. AD \square \lambda. TB \square \theta + x. 1B1C \square y. \frac{y}{\theta + x} \square \frac{\lambda}{\theta}$. erit $y \square \frac{\lambda\theta + \lambda x}{\theta} \square \lambda + \frac{\lambda x}{\theta}$. Hic valor ipsius y substituendus ubique in aequatione data determinanda ad duas radices aequales ut inveniantur $\lambda.$ et θ . Hoc in omnibus succedit, sed imprimis est aptum infinitis rationalibus ut in aeq. $y \square bx + cx^2 + dx^3$ etc. scribetur:

15

$$\lambda \square - \frac{\lambda}{\theta} x + cx^2 + dx^3 \text{ etc.} \\ + b \quad . \\ 0 \quad \langle 1 \rangle \quad 2 \quad 3$$

sive $\frac{\lambda}{\theta} \square 1b + 2cx + 3dx^2$ etc. Pro $\frac{\lambda}{\theta}$ sufficit scribi γ . est differentia ipsius ordinatae.

Hinc generalis calculus pro invenienda differentia:

$$y \square \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ etc. } \mathcal{D}}{f + gx + hx^2 + lx^3 \square \ominus} \square \lambda + \frac{\lambda}{\theta} x \text{ unde fiet:}$$

2 ducitur L ändert Hrsg. 6 facile (1) | sine streicht Hrsg. | ulla (2) una L 13 rationalibus erg. L

8f. $TA \square \theta. AD \square \lambda$: Leibniz verwendet θ und λ zusätzlich zu den in Fig. 8 eingezeichneten Größen auch für TA und AD . Wegen $\frac{AD}{TA} = \frac{\lambda}{\theta}$ (λ und θ wie in der Figur markiert) ist die folgende Rechnung dennoch korrekt.

$$\begin{array}{l|l}
 + a & + b \textcircled{x} + c \textcircled{x^2} + d \textcircled{x^3} - \frac{l\lambda}{\theta} \textcircled{x^4} \textcircled{\pi} 0. \\
 -f\lambda & -\frac{f\lambda}{\theta} \cdot -\frac{g\lambda}{\theta} \cdot \cdot -\frac{h\lambda}{\theta} \cdot \cdot \cdot \\
 0 & -g\lambda \cdot -h\lambda \cdot \cdot -l\lambda \cdot \cdot \cdot \\
 & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 & x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3
 \end{array}$$

5

unde $\lambda \textcircled{\pi} \frac{1 \textcircled{\wedge} + b \textcircled{2} \textcircled{\wedge} + c \textcircled{x} \textcircled{3} \textcircled{\wedge} + d \textcircled{x^2} \textcircled{4} \textcircled{\wedge} - 4 \frac{l\lambda}{\theta} \textcircled{x^3} \textcircled{\wedge}}{1g + 2hx + 3lx^2} \textcircled{\wedge} \frac{\textcircled{\wedge}}{\textcircled{\ominus}} \textcircled{\wedge} \sqrt{\textcircled{\wedge}} \textcircled{\wedge} y - \frac{\lambda}{\theta} x$. Fiet $\textcircled{\wedge}$ determinata ad 2

radices sit signum $\overline{\textcircled{\wedge}}$ et $\textcircled{\ominus}$ determ. sit sign. $\overline{\textcircled{\ominus}}$. $\frac{\overline{\textcircled{\wedge}} - \overline{\textcircled{\ominus}} x \frac{\lambda}{\theta}}{\overline{\textcircled{\ominus}}}$ $\textcircled{\pi} \lambda \textcircled{\pi} \frac{\textcircled{\wedge}}{\textcircled{\ominus}} - \frac{\lambda}{\theta} x$. unde $\frac{\overline{\textcircled{\wedge}} - \textcircled{\wedge}}{\overline{\textcircled{\ominus}} - \textcircled{\ominus}}$ $\textcircled{\pi}$

$\frac{\lambda}{\theta}$ unde patet quomodo per regressum invenienda $\frac{\textcircled{\wedge}}{\textcircled{\ominus}}$ ex data $\frac{\lambda}{\theta}$, aut exacte, aut quando id rationaliter fieri non potest, per seriem infinitam, appropinquantem quantumlibet.

Aequationes notabiles: $a + bx + cx^2 + dx^3$ etc. $\textcircled{\pi} \textcircled{\wedge}$ determinata ad duas radices 10 aequales dat: $b + 2cx + 3dx^2$ etc. $\textcircled{\pi} \overline{\textcircled{\wedge}}$. Ducatur hoc in illud fiet $\overline{\textcircled{\wedge}} \overline{\textcircled{\wedge}}$. Ajo $\int \overline{\textcircled{\wedge}} \overline{\textcircled{\wedge}}$ id est $\int \overline{\textcircled{\wedge}} \overline{\textcircled{\wedge}} \textcircled{\pi} \frac{\textcircled{\wedge}^2}{2}$. Itaque

$$\left. \begin{array}{l} a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ etc.} \\ b + 2cx + 3dx^2 \text{ etc.} \end{array} \right\} \textcircled{\pi} \left. \begin{array}{l} a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ etc.} \\ a + bx + cx^2 + dx^3 \text{ etc.} \end{array} \right\} \textcircled{\wedge} 2$$

prorsus ut x in $1+2+3+4+5+6$ etc. $\textcircled{\pi} \frac{x^2}{2}$. Eodem modo puto esse $a+bx+cx^2+dx^3$ etc. in 15

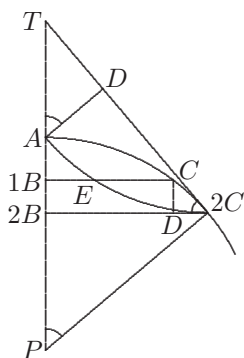
6f. ad 2 radices erg. L

7 $\frac{\overline{\textcircled{\wedge}} - \textcircled{\wedge}}{\overline{\textcircled{\ominus}} - \textcircled{\ominus}}$: Im Nenner müsste es $\frac{\overline{\textcircled{\ominus}} x}{\overline{\textcircled{\ominus}}} - x$ heißen. 15 puto esse: Die anschließende Behauptung ist nicht zutreffend.

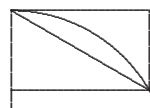
$b + 3cx + 6[d]x^2 + 10[e]x^3, \sqcap \frac{a + bx + cx^2 + dx^3}{3}$ imo ista diligentius excutienda. Est hoc
 determinatio ad tres radices aequales. Eadem res videtur redire debere, si $b + 2cx + 3dx^2$
 etc. rursus multiplicetur per 0. 1. 2. 3. 4. etc. fiet $2c + 6dx + 12$ etc. Horum dimidium
 dat numeros triangulares: $1c + 3dx + 6$... etc. Videndum quomodo id possit conciliari
 5 cum directa multiplicatione per 0. 1. 3. 6. quia initio multiplicari potest: $a + bx + cx^2$
 etc. Plura ex his satis mira duci possint. Videndum et si radices non sint aequales, sed
 differentiam habeant certam, quid fiat. Item reciproce, qualesnam sint illae aequationes,
 et ad quid determinentur si multiplicata ordine per numeros quadratos, debeant manere
 nihilo aequales. Aliaque id genus quae quaeri possint infinita.

10

[Teil 4]



[Fig. 9]



[Fig. 10]

Sit v.g. $AD \sqcap A1B$ quaeritur curva $AB \sqcap x$. $CD \sqcap dx$. $D2C \sqcap dy$. $\frac{T1B}{1B1C \sqcap y} \sqcap \frac{dx}{dy}$.
 et $T1B \sqcap t \sqcap \frac{dx}{dy}y$. $TA \sqcap t - x \sqcap \frac{dx}{dy}y - x$. $\frac{AD}{TA} \sqcap \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$. et $AD \sqcap \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$,

13 $\frac{AD}{TA} \sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung müsste $\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ stehen. Leibniz rechnet mit

dem falschen Ausdruck konsequent weiter; die allgemeine Überlegung wird dadurch jedoch nicht be-
 einträchtigt.

$\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}y - x \cap x$. Unde: $\frac{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}d\bar{x}y - \sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}d\bar{y}x}{d\bar{y}^2} \cap x$. Quaeritur relatio inter x .

et y . ex hac aequatione: constat eam esse ad Circulum. Sed hoc nisi nossemus non facile

devinaremus. $d\bar{x}y - d\bar{y}x \cap \frac{x d\bar{y}^2}{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}$. Ergo $\underbrace{\int d\bar{x}y - \int d\bar{y}x}_{\text{id est duplum segmentum}} \cap \int \frac{x d\bar{y}^2}{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}$.

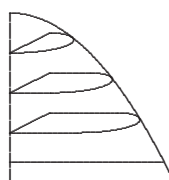
id est duplum segmentum

Si generalis reddi posset doctrina, quod indicum additio exhibeat summam facti serierum, praeclare ista omnia possent solvi. Non video quomodo possit reperiri curva, quae det indices, ut Logarithmica exponentes. Exempli causa satis videmus indicem quantitatis

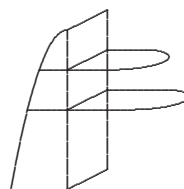
$\sqrt[2]{ax}$ esse $\frac{1}{2}$. Sed indicem quantitatis $\sqrt{ax + a^2}$ quomodo exhibebimus? Eum vero scimus

dari ex supposita circuli Quadratura. Quod si ergo generaliter demonstrari posset Indices ejusmodi esse veras quantitates exprimibiles utcunque, aut motu aliquo descriptibiles; et

Tetragonismos ipsis esse proportionales, vicissemus. Imo indices ejusmodi sunt etiam pro affectis, ut si dicamus: $x^2 + bx \cap y^2$. erit $x \cap \overline{[e]b.c.y}$. Itaque ejusmodi problemata methodi tangentium inversae redirent ad indices.



[Fig. 11a]



[Fig. 11b]

Area ductuum exprimeretur summa indicum: Certum est experimento et demonstratione id succedere in curvis Analyticis simplicibus: Si jam ostendi posset ex generali omnium ordinatarum per series infinitas expressione, eas quodammodo revocari posse ad analyticas, res foret manifesta. Sed res vel ideo difficilis, quia id quod indicem dicimus

$3 \cap \frac{x d\bar{y}^2}{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}$. (1) Est autem differentia inter $d\bar{x}y$ et $d\bar{y}x$. idem quod duplum segmentum, seu

idem quod AC2CEA. (a) quod est ad $x d\bar{y}$ (b) id vero est ad (2) Ergo L 7 quomodo (1) aliqua curva (2) exhibebimus L 9 esse (1) realia (2) veras L 14f. et demonstratione erg. L 15 simplicibus: (1) |jam streicht Hrsg. | quaelibet curva Analytica (2) Si |jam erg. | ostendi L

determinandum paulo strictius. et ista e , alia atque alia erit pro varie assumtis b . c . y . Substituatur ubique in locum ipsius x , valor assumtus: $\underline{e} \overline{b.c.y}$ et fiet: $\underline{2e} \overline{b.c.y} + [b] \underline{e} \overline{b.c.y} \cap y^2$ in assumpto ipsius y . valore. Non potuit credo omitti y . et assumi tantum b verbi gratia nam sic potuissemus b sumere pro unitate, et evanesceret etiam e , seu fieret 1. Dubito tamen adhuc ea de re, interim videndum si sit: $b^e + b^{2e}c + b^{3e}d + b^{4e}f$ etc. $\cap g$. possitne generali aliquo calculo inveniri e . $g - b^e \cap b^e$. dabit $e \cap \frac{g - b^e}{1} - \frac{g^2 - 2gb^e + b^{2e}}{2b^1} + \frac{g^3 - 3g^2, b^e + 3g, b^{2e} - b^3}{3b^2}$ etc. posito esse e , logarithmum a b . supposita aliqua certa unitate (unde cessat difficultas paulo ante mota). Rursus $g - b^{2e}c \cap b^e c$. seu $\frac{g}{c} - b^{2e} \cap b^{2e}$. eadem prodibunt quae ante, pro valore ipsius e , tantum pro g scribetur $\frac{g}{c}$, et pro b^e , scribetur b^{2e} ; et ita de caeteris, omnibus. Quod si jam omnes illi valores addantur, vel sibi adimantur, utique semper innumerae novae aequationes habebuntur infinitae, non tamen ideo video me \underline{e} habere pure. Caeterum ex hac sola consideratione infinitis modis habebitur \underline{e} . adeoque et x . et ipsarum b . c . e . relatio. Sed nondum satis simplex haec methodus. Aliud interim index quam logarithmus.

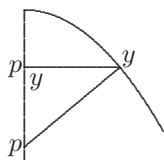
Caeterum hinc praeclarae de indicibus inveniendis habebuntur rationes ex ductuum areis. ex. g. $\int \sqrt{a+x}$ in \sqrt{x} aequale $e + \frac{1}{2}x$. si $\underline{e}x \cap \overline{a+x}$. Tantum videndum an haec ratiocinatio sit pro totis velut pro partibus arearum; ergo hinc inveniri potest index ω , si sit $\underline{\omega}x \cap \sqrt{a-x}$ id est ex dato indice e , datur index ω . quia $\int \sqrt{a+x}$ in \sqrt{x} , datur ex $\int \sqrt{a+x}$ in $\sqrt{a-x}$, utraque enim est ad circulum. Re semel generaliter stabilita infinita hinc haberi poterunt nova. Videndum an indicum natura in eo consistat, ut eorum ope explicatio fieri possit, ut in numeris combinatoriis, ut si sit $\underline{4}x$. ponendo $x \cap y + b$. fiet $\underline{4}x \cap y^4 + 4y^3b + 6y^2b^2 + 4yb^3 + b^4$. Quaeritur, quomodo id fiat sit $\underline{\frac{1}{2}}x$. id est \sqrt{x} item si sit $\underline{e}x$. Est aliqua haud dubie in numeris combinatoriis proprietas, quae generalis reddi possit.

Caeterum stabilitis indicibus pulcherrime habebitur methodus tangentium inversa. Pone enim in aequatione: esse $\int \overline{dxy} - \int \overline{dyx} \cap \int \frac{[x]d\overline{y}^2}{\sqrt{d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2}}$. Jam $\int \overline{dxy}$ est area figurae, seu omnium y ad axem applicatorum. Sit index \underline{e} , $\int \overline{dxy} \cap x^e$ ordinata scil. Curvae quadraticis, quae si subtrahatur a rectangulo yx , fiet $\int \overline{dyx}$. Ergo $2, x^e - xy$ ($\cap \int \overline{dxy} -$

$\int \overline{dy}x) \cap \int \frac{x d\overline{y}^2}{\sqrt{d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2}}$. Ponamus esse $y \cap x^\omega$. fiet $\int \overline{dy} \cap x^\omega$. et $\int \overline{dy}^2 \cap x^{2\omega}$. Ponamus

esse x . progressionis arithmeticae, fiet: index ab x . erit 1. puto et dx erit constans. His positis tantum ex priori ω . facile habetur $\int x d\overline{y}^2$, quia $d\overline{y}^2$ index, est solum 2ω . si index a $d\overline{y}$ est ω . Superest, ut inveniamus indicem $\sqrt{d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2}$. Sed hoc satis difficile, ut autem res in talibus procedat melius generali indicum contemplatione demonstrata, opus erit varias postea aequationes generales ex natura curvae in genere ductas adjicere, ut relationes ad varios axes etc.

5



[Fig. 12]

Si esset $p \cap x^\omega$. et $y \cap x^e$. sitque ω . cognita, e , incognita. constat esse $\int p \cap \frac{y^2}{2}$. et erit $\left[\frac{1}{2}\right] x^{2e} \cap \int x^\omega$. Haec omnia sunt examinanda

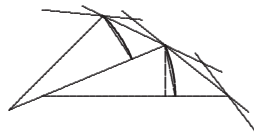
diligentius. Huc illud pertinet si sit $c^e \cap x$. seu si e . logarithmus, valor logarithmi erit puto: $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2c} + \frac{x^3}{3c^2} - \frac{x^4}{4c^3}$ etc. $\cap e$. Logarithmus

10

1–3 Am Rande:



8–10 Am Rande, ohne eindeutigen Bezug zum Text:



16 Zur Lesart: \mathfrak{S}

1 $\cap \int \frac{x d\overline{y}^2}{\sqrt{d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2}}$. (1) | est autem: *streicht Hrsg.* | index de y (2) ponamus L 2 puto *erg.* L

10f. logarithmus, (1) | c. *streicht Hrsg.* | unitas (2), valor L

1 fiet: Der folgende Schluss von $\int dy$ auf $\int (dy)^2$ ist nicht zulässig.

ipsius x^2 . erit $\frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2c} + \frac{x^6}{3c^2} - \frac{x^8}{4c^3}$ etc. $\pi 2e$. Unde illud admirabile. Posterius esse duplum. Multiplicatio et divisio numerorum fit additione et subtractione Logarithmorum; involutio et extractio Numerorum fit multiplicatione logarithmorum. Quaeritur quid fiat in numeris ductu logarithmi in se ipsum aut extractione radicis Logarithmi, ac denique
 5 quid fiat in logarithmis additione numerorum cogitandum posse fieri logarithmos logarithmorum in infinitum. Itaque si logarithmi logarithmorum v.g. duplicentur habebitur potestas. Imo videndum quid sint medii inter logarithmos et numeros. Si summis duplis etiam differentiae duplae, ergo $-x + x^2 - x^3$ etc. dimidium $\langle ip \rangle$ sius: $-x^3 + x^5 - x^7$ etc. Sed hoc falsum.

2 et divisio *erg. L* 2 et subtractione *erg. L* 6 si (1) addantur (2) logarithmi *L*
 6f. habebitur (1) indicis (2) potestas *L*

89. DE SUMMIS PER CALCULUM INVERSUM EX DIFFERENTIIS, DEQUE
METHODO TANGENTIUM INVERSA; ET QUADRATURAE CIRCULI
IMPOSSIBILITATE

Juli 1676

Überlieferung: L Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 448. 1 Bl. 2°. 2 S. Auf Bl. 448 v° verworfene 5
Notiz, tlw. gestrichen bzw. vom Haupttext überschrieben (= S. 597 Z. 14–17).
Cc 2, Nr. 1482

Jul. 1676.

De summis per calculum inversum ex differentiis,
deque Methodo tangentium inversa; 10
et quad. Circ. im⟨pos⟩sibilitate.

$$y \sqcap \frac{b+cx}{m+nx}. \quad d\bar{y} \sqcap \dagger \frac{b+cx}{m+nx} \dagger \frac{b+cx+c\beta}{m+nx+n\beta} \sqcap \frac{\dagger \overline{b+cx} n\beta \dagger \overline{m+nx} c\beta}{\boxed{2}m+nx}.$$

$$d\bar{y} \sqcap \dagger \frac{b+cx+ex^2}{m+nx+px^2} \dagger \frac{\begin{matrix} b+cx+ex^2 \\ +c\beta+e2x\beta \\ \boxed{+e\beta^2} \end{matrix}}{\begin{matrix} m+nx+px^2 \\ n\beta \quad p2x\beta \\ \boxed{p\beta^2} \end{matrix}}$$

$$[\sqcap] \frac{\dagger \overline{b+cx+ex^2}, n\beta+2p\beta x, \dagger \overline{m+nx+px^2}, c\beta+2e\langle x\beta \rangle}{\boxed{2}m+nx+px^2}$$

Hinc jam apparet regula generalis: 15

$$\text{§ } y \sqcap \frac{D[\sqcap]b+cx+ex^2+fx^3+gx^4}{E[\sqcap]m+nx+px^2+qx^3+rx^4}. \text{ Erit}$$

$$\text{⊙ } \frac{d\bar{y}}{\beta} \sqcap \frac{\dagger \overline{b+cx+ex^2+fx^3+gx^4}, \overline{n+2px+3qx^2+4rx^3},}{\boxed{2}m+nx+px^2+qx^3+rx^4} [\sqcap] \frac{F}{G}$$

9–11 De (1) Me (2) summis ... im⟨pos⟩sibilitate. erg. L 16f. +qx³ + px⁴
L ändert Hrsg. dreimal 17 +3qx² + 4px³ L ändert Hrsg.

Idem aliter investigemus ope methodi ordinariae:

$ym + nxy + px^2y \sqcap b + cx + ex^2$. Determinando ad tangentes:

$$ym + nxy + px^2y \sqcap ct + 2etx - nty - 2pxty. \text{ Ergo } \frac{y}{t} \sqcap \frac{c + 2ex, -ny - 2pxy}{m + nx + px^2} \sqcap \frac{d\bar{y}}{\beta}.$$

Prodibunt quae ante.

5 Sit jam formula data: $\mathfrak{D} z \sqcap \frac{(A)s + tx + vx^2}{(B)\theta + \lambda x + \mu x^2} \sqcap d\bar{y}$. Quaeritur y .

Ante omnia autem ut haec formula z in aeq. \mathfrak{D} formulae $d\bar{y}$ in aeq. \odot comparetur opus est ut B multiplicando reddatur quadratus, nimirum vel jam per quadratum divisibilis est B , et tunc reliquum tantum adhuc semel in se multiplicandum ($\omega^2 v$ in v) vel si non est: ipse B . multiplicandus in se; scilicet tam numerator quam nominator per eundem, ut fiat nominator quadratus. Porro idem infinitis modis fieri potest ut fiat nominator quadratus, semper altiores atque altiores formulas adhibendo in quas tam numerator quam nominator ducatur. Proba elegans Calculi hic habetur, formula per quam multiplicatur tam numerator quam nominator, est integer utique.

Hinc aequatio $zB \hat{=} F \sqcap \mathfrak{D}F$ (posito F esse multiplicatorem qui facit ut BF sit quadratus). Ergo sequitur vel esse $zB \sqcap \mathfrak{D}$, vel esse $F \sqcap 0$. Videndum an hinc etiam inventa y signo \mathfrak{F} tam nominator quam numerator dividi possit per F vel per $\int \bar{F}$, vel aliud quiddam, necesse est enim F influere. Hoc enim posito si semper posset dividi etiam D et E cum dividi potest $F.G.$ vel cum $A.B.$ multiplicata est; tunc ponamus divisionem omnem in $D.E.$ jam esse factam, seu reducta esse ad terminos minimos; non poterit
20 $F.G.$ amplius dividi; e(r)go necesse est ut comparatio cum $\frac{A}{B}$. institui possit sine ulla multiplicatione. Ergo jam haberemus pro certo, nullius figurae rationalis summam haberi posse, nisi nominator sit quadratus, et statim praeterea sciri poterit quousque assurgat figura summatrix, adeoque facile erit instituere comparationes.

Hoc semel posito admiranda sequerentur compendia in methodo tangentium inversa; 25 eaque tam certa ac determinata foret quam directa, determinato quippe semper gradu,

11 tam |nominator *ändert Hrsg.*| qvam L 13f. utiqve. (1) Hinc $d\bar{y}$ |seu z erg. | duos habet valores unum integrum per qvem facta est multiplicatio, alterum fractum, qvi fuit multiplicatus, patet ex aequatione quae hoc modo duas habebit radices unam (2) Hinc L

14 $zB \hat{=} F \sqcap \mathfrak{D}F$: Leibniz verwechselt A und \mathfrak{D} ; es müsste AF und in der folgenden Gleichung $zB \sqcap A$ heißen. Das Versehen hat keine weiteren Auswirkungen.

cum quo comparandum. Certum est impossibile esse ut fractus sit summator integrorum, vel integer factorum. Examinandum an possibile sit, ut indivisibilis sit summator divisibilium, nec video quomodo id fieri possit.

$$d\bar{y} \sqcap \frac{\dagger D, d\bar{E} \dagger Ed\bar{D} \sqcap F}{E^2 \sqcap G}. \text{ posita } y \sqcap \frac{D}{E}. \text{ sive erit } d\bar{y} \sqcap \dagger \frac{Dd\bar{E}}{E^2} \dagger \frac{d\bar{D}}{E}.$$

Si $d\bar{y}$ deprimi potest necesse est aliquo divisore ipsius E , dividi posse D vel $d\bar{E}$ vel $d\bar{D}$ vel aliquo divisore ipsius E^2 ; dividi potest $Dd\bar{E}$, item $Ed\bar{D}$, si divisor ipsius E^2 sit non-quadratus, nec divisibilis per quadratum, imo primus. Tunc cum eo dividi possit E adeoque et ED , necesse est per eum et dividi posse $Dd\bar{E}$. Ergo dividet vel $d\bar{E}$ vel D cum sit primus; non dividet $d\bar{E}$, quia dividit E . Puto autem E , et $d\bar{E}$ non posse habere divisorem communem. Quo semel demonstrato, ut fieri posse puto, sequeretur dividere D . Ergo si F . et G . habent divisorem communem primum, etiam D . et E . habebunt contra hypothesin, posuimus enim ad simplicissimos reducta.

Ut autem demonstretur ipsas E et $d\bar{E}$ non habere divisorem communem tantum demonstrandum est: $a + bx + cx^2 + dx^3$ etc. et $1b + 2cx + 3dx^3$ [etc.] non habere posse communem divisorem utcunque explicentur $b.c.d.$ etc. Quod vel hinc videtur probari posse quia $d\bar{E}$ eadem futura est, qualiscunque sit litera a , sed nondum hoc satis clare. Si posset fieri multiplicatio fieret

$$\begin{array}{r} 1b + 2cx + 3dx^2 \\ f + gx \\ \hline + 1bgx + 2cgx^2 \quad [+] \quad 3dgx^3 \\ + 1fb + 2cfx + 3fdx^2 \\ \hline a + bx + cx^2 + dx^3 \end{array} \quad \begin{array}{r} + dx^3 + cx^2 + bx + a \quad f \frac{1}{3}x \quad \boxed{+c} + \frac{1}{3}c \\ \boxed{3dx^2 + 2cx + 1b} \\ - \frac{3}{3}dx^3 - \frac{2}{3}cx^2 - \frac{1}{3}bx \\ \boxed{3dx^2 + 2cx + 1b} \\ - \frac{1}{3}cx^2 - \frac{2}{3}bx - \frac{1}{3}b \end{array} \quad \begin{array}{r} \boxed{-\frac{2}{3}c} \\ \hline \end{array}$$

4–12 Nebenbetrachtung, durch Strich abgetrennt: $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2 + 2\beta y \boxed{+\beta^2}} \sqcap \frac{2\beta y}{y^4} \sqcap \frac{2\beta}{y^3}$

7 imo primus erg. L 16 litera a, (1) imo etsi absit; omittamus ergo; nam adeo (2) sed L

18–22 Bei der Division unterläuft Leibniz ein Rechenfehler, der in die folgende Bestimmung von a und b eingeht, die weitere Überlegung aber nicht beeinträchtigt.

Ergo $g \propto \frac{1}{3}$ et $f \propto \frac{a}{b}$. Ergo debet esse $a \propto \frac{1}{3}b$. $b \propto c^2$. Atque ita in infinitum poterit determinari quando possint habere divisorem communem; habebitur enim progressio satis elegans. Si longior assumatur formula et per eam dividatur. Sed hinc jam illud saltem necessario colligitur; E et $d\bar{E}$ non posse habere divisorem commune(m) nisi simplicissimi-

5 mum, eumque unicum seu semel. Itaque si data sit formula $d\bar{y}$ vel $\frac{A}{B}$ non potest A et B , nisi per formulam simplicem, ut $gx + f$. ad complendum quadratum ipsius B . vel si jam B . quadratus est, $\sqrt{2}gx + f$, multiplicari. Habemus ergo pulcherrime determinatam hic methodum Tangentium inversam. Nec dubito quin idem se extendat in genere ad alias omnes ejusmodi comparationes methodi tangentium inversae. Quodsi autem nulla extet
10 in rerum natura curva Analytica aequabilis quae satisfaciat quaestioni; quaerenda erit aliqua forte ex data Circuli quadratura quae satisfaciat, quod semper fieri posse video hoc modo pulcherrime: Sit valor datus hic:

$$y \propto \frac{D \propto a + bx + cx^2, + h\pi + l\pi^2 + k\pi^3}{E \propto m + nx + px^2} \text{ ubi quia } d\bar{\pi} \propto \frac{1}{1+x^2}. \text{ posito } \pi \text{ arcu circu-}$$

lari. Ideo $d\bar{y}$. nullam continebit π cum non sit π in nominatore. Et

$$15 \quad d\bar{y} \propto \frac{\dagger Dd\bar{E} \dagger Ed\bar{D}}{E^2} \propto \frac{\dagger [E], b + 2cx, + hd\bar{\pi} + 2l\pi d\bar{\pi} + 3k\pi^2 d\bar{\pi}, \dagger Dd\bar{E}}{\sqrt{2}, m + n[x + px^2]}$$

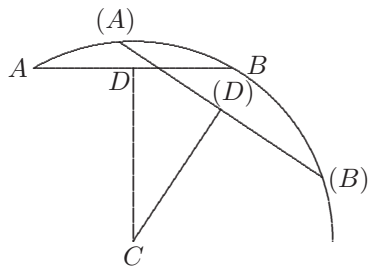
Quaerenda etiam generalis ratio curvarum analyticarum quarum quadratura pendet ex Quadratura Circuli. Caeterum ab his veniemus et ad series numerorum, ubi nihil quidem destruendum, (et) quaeremus sintne numeri in natura rerum, qui possint exhibere Circuli Quadraturam, seu $\int \frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ etc. Ubi ante omnia quemadmodum in his

20 quoque inquirendum an possibile sit summam esse irrationale(m). Videndum an quodcumque arcus ductu rectae geometricae, cujus ratio ad radium nota est, determinari potest, an possit reperiri saltem in aequatione aliqua altiore ejus ratio ad circumferentiam. Non puto.

25 Utilis Methodus Tangentium inversa, etiam in inveniendas Curvas, quae proprietates quasdam habeant duobus punctis pluribusque quibuscunque assumtis semper veras, ut

$$13 \quad \frac{x}{1+x^2} \quad L \text{ ändert Hrsg.} \quad 25-597,1 \text{ ut (1) in Circulo (2) figuram (3) invenire } L$$

14 nullam continebit: Wie die anschließende Berechnung von dy zeigt, bleiben im Zähler Terme mit π erhalten.



[Fig. 1]

invenire curvam $A(A)B(B)$ talis naturae, ut junctis $AB_{[,]}$ $(A)(B)$, et bisectis in D . (D) ducta(s) inde perpendicularares omnes conveniant in centro eodem C . Quaeritur an talis curva sit in rerum natura; ponantur primum intervalla AB . infinite parva, seu tangentium portiones, res ergo eo redit curvam invenire ad quam perpendicularares omnes concurrant in uno centro. Haec curva per methodum tangentium inversam inventa si pateat eam (in plano) non

esse nisi unicam, videndum est an ea simul habeat proprietatem de qua agitur, ut idem eveniat etiamsi puncta $A. B.$ distent notabiliter; nam si non praestitisset, conclusissemus talem curvam esse impossibilem.

[Notiz, verworfen]

y^6	*	py^4	qy^3	...
z^{30}	z^{24}	z^{18}	etc.	
v^5	v^4	v^3	etc.	
y^9	y^8	y^6		

$z^6 \sqcap v$	$z \sqcap \sqrt[6]{v}$
$v \sqcap \dots$	
z	○ □

15

90. METHODUS TANGENTIUM INVERSA

Juli 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 10 Bl. 3. 1 Ausschnitt von ca 20,7 x 13,7 cm. 2 S. Amrechten oberen Rand von Bl. 3r^o gestrichenes Fragment einer Notiz: „ $\langle - \rangle \cap \frac{\langle - \rangle}{\boxed{3}z^2 + 1}$ “.

5

AE \cap *z*. *EF* \cap *v*.“ Ursprünglich bildete das Blatt zusammen mit N. 91, 92 und 93 sowie VII, 3 N. 42 einen Teil eines Bog. 2^o. — Gedr.: 1. *LBG*, 1899, S. 201–203; 2. (engl. Übers. von 1.) *CHILD*, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 118–122.

Cc 2, Nr. 1483 A

Jul. 1676.

10

M e t h o d u s t a n g e n t i u m i n v e r s a

In Tertio Tomo literarum Cartesii video eum credidisse methodum Fermatii de maximis et minimis non esse universalem. Putat enim (pag. 362. epist. 65.) non servire ad inveniendam tangentem curvae, cujus natura sit ut ex quovis puncto ejus ductae rectae ad quatuor puncta data aequentur rectae datae.

15

Mons. des Cartes lettre 71. partie 3 pag. 409. à Mons. de Beaune. *Je ne croy pas qu'il soit possible de trouver generalement la Converse de ma regle pour les Touchantes, ny de celle dont se sert Mons. de Fermat, bien que la pratique y soit en plusieurs cas plus aisée que la mienne, mais on en peut deduire a posteriori des theoremes qui s'etendent à toutes les lignes courbes qui s'expriment par une equation en la quelle*

9 Darunter: Solvi una die duo problemata methodi tangentium inversae, quorum alterum solus solvit Cartesius; alterum ne ipse quidem fassus non posse.

9 Jul. 1676. *erg. L* 10 Methodus ... inversa *erg. L* 13 inveniendam (1) curvam (2) tangentem curvae, cuius (a) aequatio est (b) natura *L* 21 alterum (1) | nec streicht Hrsg. | ipse potuit (2) solus *L*

12 Putat: Descartes an Mersenne, 23. August 1638, in: DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 362 (*DO* II S. 324). 15 des Cartes: Descartes an Debeaune, 20. Februar 1639, *a. a. O.*, S. 411 f. (*DO* II S. 514). 20 duo problemata: s. die Erläuterungen zu S. 602 Z. 2 f.

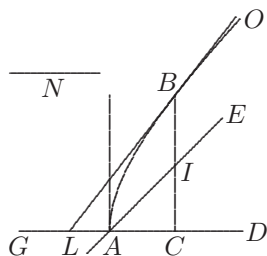
l'une des quantitez x ou y n'ait point plus de deux dimensions encor que l'autre en eust mille. Il y a bien une autre façon qui est plus generale et a priori, a sçavoir par l'intersection de deux tangentes la quelle se doit tousiours faire entre les deux points où elles touchent la courbe, tant proches qu'on les puisse imaginer, car en considerant quelle doit estre cette courbe, à fin que cette intersection se fasse tousiours entre ces deux points, et non au deça ny au dela, on en peut trouver la construction; mais il y a tant de divers chemins à tenir, et je les ay si peu pratiquez, que je n'en sçaurois encor faire un bon conte.

5

Mons. des Cartes parle avec un peu trop de presomtion de la posterité; il dit pag. 449. lettre 77, que sa regle pour resoudre generalement tous les problemes sursolides *a esté sans comparaison la [plus] difficile à trouver de toutes les choses qui ont esté inventées jusque à present en Geometrie et qui le sera peut estre encor cy apres en plusieurs siecles, si ce n'est que je prenne moy meme la peine d'en chercher d'autres* (+ comme si plusieurs siecles n'estoient capables de produire homme qui pût faire une chose qui ne paroist pas des plus considerables [+]).

15

Pag. 459 la question des quatre globes propre à examiner si un homme sçait le calcul, c'est donc de Mons. des Cartes, mais comme elle est dans le livre elle paroist bien prolix.



[Fig. 1]

Probleme de la methode inverse des touchantes que Mons. des Cartes dit avoir resolu Tom. 3. Ep. lettre 79 pag. 460. *EAD* angulus 45 grad. *ABO* curva. *BL* tangens.

20

BC ordinata ad *CL*, ut linea *N* ad *BI*. $CL \propto \frac{BC \propto y[,] n}{BI \propto y - x}$.

$CL \propto t. t \propto \frac{ny}{y - x}. \frac{n}{t} \propto \frac{y - x}{y} \propto 1 - \frac{x}{y}. \frac{x}{y} \propto \frac{t - n}{t}$.

$\frac{t}{y} \propto \frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}. \text{Ergo } \frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} \propto \frac{n}{y - x}. d\bar{x}y - xd\bar{x} \propto d\bar{y}n. \text{Ergo}$

5 entre | ceux ändert Hrsg. | points L 6 tout L ändert Hrsg. 18–20 que ... 460 erg. L

9 dit: Descartes an Carcavy, 17. August 1649, *a. a. O.*, S. 449 (*DO V S. 399*). 16 question: Descartes an — (?), Juni (?) 1645, *a. a. O.*, S. 459 (*DO IV S. 228*). 19 dit: *a. a. O.*, S. 460 (*DO IV S. 230*). Dabei handelt es sich um eine leicht veränderte Wiederholung des sog. 2. Debeauneschen Problems (s. Erl. zu S. 600 Z. 4). 22 $t \propto \frac{ny}{y - x}$: Richtig wäre $\frac{y(y - x)}{n}$; Leibniz rechnet konsequent weiter bis S. 600 Z. 3.

$\int d\bar{x}y - \underbrace{\int x d\bar{x}}_{\frac{x^2}{2}} \sqcap n \int d\bar{y}$. Porro $\int d\bar{y} \sqcap y \cdot \int x d\bar{x} \sqcap \frac{x^2}{2}$. et $\int d\bar{x}y$ est area $ACBA$. et quaeritur

curva, in qua Area $ABCA$ sit $\sqcap \frac{x^2}{2} + ny$ seu $\sqcap \frac{AC^2}{2} + n \hat{=} BC$. Rescindatur ab area hoc $\frac{x^2}{2}$ id est triangulum ACI , debet reliquum $AIBA$ aequari rectangulo ny .

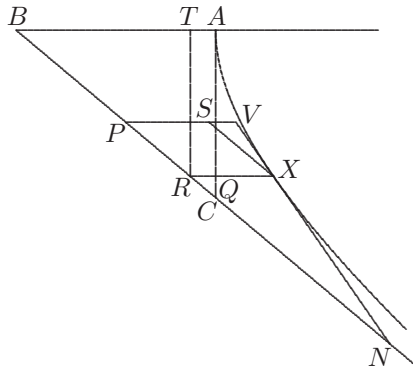
- 5 Linea quam Beunius Cartesio quaerendam proposuit, quae huc redibat, ut sit BC asymptotos curvae, BA axis, A vertex, AB , BC constantes, nam BAC est ad angulos rectos. Sit ordinata RX , tangens XN , debetque esse RN semper constans seu aequalis ipsi BC , quaeritur natura curvae. Hic ita procedendum ego putem, sit alia ordinata PV , differens a priore RX recta SV , ducendo scilicet ipsi RN parallelam XS , erunt triangua SVX , et RXN similia. $RN \sqcap t \sqcap c$ constanti. $PR \sqcap SX \sqcap \beta \sqcap d\bar{x}$. $BR \sqcap x$.
- 10 $RX \sqcap y$. $SV \sqcap d\bar{y}$. Fiet $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \sqcap \frac{y}{t \sqcap c}$. Ergo $cy \sqcap \int y d\bar{x}$ sive $cd\bar{y} \sqcap y d\bar{x}$. Sit AQ vel $TR \sqcap z$. et sit $AC \sqcap f$. Cum fuerit $BC \sqcap a$ fiet $\frac{AC}{BC} \sqcap \frac{f}{a} \sqcap \frac{TR}{BR} \sqcap \frac{z}{x}$. Ergo $x \sqcap \frac{az}{f}$.

1 Nebenbetrachtung: $\int d\bar{x}y^2 - \int xy d\bar{x} \sqcap \underbrace{\int d\bar{y}yn}_{\frac{y^2}{2}n}$

$$\int d\bar{x}yx - \underbrace{\int x^2 d\bar{x}}_{\frac{x^3}{3}} \sqcap [\int] d\bar{y}nx$$

2 AC^2 L ändert Hrsg. 8 ipsi | RX ändert Hrsg. | parallelam L 9 $\sqcap c$ constanti erg. L

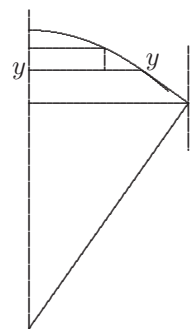
4 Linea ... proposuit: Die Aufgabenstellung zum 2. Debeauneschen Problem vom Spätsommer 1638 ist nicht erhalten, erschließt sich aber aus der Beilage zum Brief von Debeaune an Roberval vom 16. Oktober 1638 (*DO V* S. 519) als im Wesentlichen mit der in S. 599 Z. 21 formulierten Bedingung übereinstimmend. Descartes behandelt das Problem in seinem Brief an Debeaune vom 20. Februar 1639, DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 412–415 (*DO II* S. 514–517). Die dort geforderte Kurveneigenschaft, dass RN für alle Kurvenpunkte X konstant sein soll (s. Fig. 2 und Z. 6), ist äquivalent zur ursprünglichen Bedingung S. 599 Z. 21.



[Fig. 2]

Si $d\bar{x}$ constans erit et $d\bar{z}$. constans. Ergo $cd\bar{y} \sqcap \frac{a}{f}ydz$. vel $cy \sqcap \frac{a}{f} \int yd\bar{z}$. $cyd\bar{y} \sqcap \frac{a}{f}y^2dz$. ergo $c\frac{y^2}{2} \sqcap \frac{a}{f} \int y^2d\bar{z}$. Habetur ergo et area figurae et momentum quodammodo (addendum enim aliquid ob obliquitatem[]). Et $czd\bar{y} \sqcap \frac{a}{f}yzd\bar{z}$ 5
 ergo erit $c \int z d\bar{y} \sqcap \frac{a}{f} \int yz d\bar{z}$. $\frac{cd\bar{y}}{y} \sqcap \frac{a}{f}dz$. Ergo $c \int \frac{d\bar{y}}{y} \sqcap \frac{a}{f}z$. Est autem ni fallor $\int \frac{d\bar{y}}{y}$ sem-

per in potestate. Res tota eo reedit ut inveniamus curvam in qua redeat ordinata, fiat differentiis ordinarum per differentias abscissarum divisus ejusque figurae quadraturam:



[Fig. 3]

$d\sqrt{ay} \sqcap \frac{1}{[2]\sqrt{ay}}$. Quaerendae ejusmodi figurae quarum ordi- 10
 natae: $\frac{d\bar{y}}{y} \cdot \frac{d\bar{y}}{y^2} \cdot \frac{d\bar{y}}{y^3}$, quemadmodum eas habeo quarum ordinatae
 $\sqcap \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{y^3}$
 $y d\bar{y} \cdot y^2 d\bar{y}$ etc. Quoniam $d\bar{y}$ potest intelligi constans $\sqcap \beta$. hinc curva
 in qua $\frac{\omega}{a} \sqcap \frac{d\bar{y}}{y}$ dabit $\omega y \sqcap a\beta$, quae foret hyperbola. Nam figura
 ergo in qua $\frac{d\bar{y}}{y} \sqcap z$. est hyperbola, quomodocunque explices y . at si

y explices per φ^2 , fiet $d\bar{y} \sqcap 2\varphi$ et $\frac{2\varphi}{\varphi^2} \sqcap \frac{2}{\varphi}$. Jam $[c] \int \frac{d\bar{y}}{y} \sqcap \frac{a}{f}z$. ergo $\frac{fc}{a} \int \frac{1}{y} \sqcap z$. quae 15
 est ad logarithmicam.

12f. Daneben: $\frac{\omega}{a} \sqcap \frac{d\bar{y}}{y}$

1 constans. (1) porro PS (2) Ergo L 9 per |abscissas ändert Hrsg. | divisus L

Ita solvimus omnia problemata methodi tangentium inversae quae extant in tomo 3. Epistolarum Cartesii quorum unum solvit ipse ut ait pag. 460. Epist. 79 Tom. 3. sed solutio non extat; alterum solvere tentavit, sed non potuit, fassus irregularem esse lineam et descriptione utendum esse, quae utique non est in humana potestate; imo nec angelica
5 nisi aliunde constet ars describendi.

2 ut ... 3. *erg. L* 3 alterum (1) solvit (2) solvere (a) non (b) tentavit *L*

1–5 Ita ... describendi: vgl. *LQK* prop. XLVI S. 107. 2 unum: DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 460 (*DO* IV S. 229f.). 3 alterum: vermutlich *a. a. O.*, S. 412–415 (*DO* II S. 514–517). Leibniz entgeht, dass es sich um alternative Fassungen der 2. Debeauneschen Aufgabe handelt.

91. SOLUTIO PROBLEMATIS CARTESII INVERSARUM

[Juli 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 226. 1 Ausschnitt von max. 20,8 x 4,7 cm. 11 Z. auf Bl. 226 r^o und 10 Z. auf Bl. 226 v^o. Auf Bl. 226 r^o oben links Überschrift von N. 93 irrtümlich ergänzt und mit Strich abgetrennt. Bl. 226 bildete ursprünglich zusammen mit N. 90, 92 und 93 sowie VII, 3 N. 42 einen Teil eines Bog. 2^o.
Cc 2, Nr. 1484

Datierungsgründe: Das Stück wurde nach dem auf Juli 1676 datierten N. 90 und vor N. 92 und 93 auf dem Träger notiert.

Notabile quod $d\frac{x^2}{2}$ semper $\sqcap x d\bar{x}$. Et ita similia possunt fieri_[,] aliquando enim 10
ista erunt utilia, ut ad deprimendum, ut si sit $d\frac{x^2}{2} \sqcap y x d\bar{x} + y d\bar{x}$. Inde fieri poterit
 $x d\bar{x} \sqcap x y d\bar{x} + y d\bar{x}$ seu $y \sqcap \frac{x}{x+1}$ sive $\frac{x^2}{2} \sqcap \int \overline{y x d\bar{x}} + \int \overline{y d\bar{x}}$ seu curva in qua momentum
ex axe additum areae aequatur semiquadrato abscissae, quam figuram ope hujus artificii
invenio esse hyperbolam.

Cartesii problema inversarum, a Beunio propositum reducitur ad hanc: $d\bar{x}y -$ 15
 $x d\bar{x} \stackrel{(1)}{\sqcap} d\bar{y}n$. seu summam sumendo: $\int \overline{y d\bar{x}} - \left(\int \overline{x d\bar{x}} \right) \frac{x^2}{2} \stackrel{(2)}{\sqcap} \left(\int \overline{d\bar{y}n} \right) n y$. Multiplicando
aeq. 1 per y . fit: rursus $y^2 d\bar{x} - x y d\bar{x} \stackrel{(3)}{\sqcap} y n d\bar{y}$ seu $\int \overline{y^2 d\bar{x}} - \int \overline{x y d\bar{x}} \stackrel{(4)}{\sqcap} n \frac{y^2}{2}$. Rursus mul-
tiplicando 1 per x . fiet $y x d\bar{x} - x^2 d\bar{x} \stackrel{(5)}{\sqcap} n x d\bar{y}$ et summamus $\int \overline{x y d\bar{x}} - \frac{x^3}{3} \stackrel{(6)}{\sqcap} n \int \overline{x d\bar{y}}$.
Hinc jam video problema esse in potestate. Ope trium aequationum 2. 4. 6. reducuntur
enim omnia ad tres incognitas_[:] aream; momentum ex vertice, momentum ex basi, pro 20
quibus tres habentur aequationes. Nam $\int \overline{y^2 d\bar{x}}$ est momentum ex *AC*. $\int \overline{x y d\bar{x}}$ est mo-

15 Cartesii . . . propositum: s. N.90 S. 599 Z. 18 – S. 600 Z. 3. 21 momentum ex *AC*: s. N.90 Fig. 1 S. 599 Z. 23.

mentum ex vertice_[,] $\int \overline{xdy}$ est areae complementum_[,] $\int \overline{xydx}$ bis habetur ex 4. et 6. Ergo $\frac{x^3}{3} + n \int \overline{xdy} \stackrel{(7)}{=} \int \overline{y^2dx} - \frac{ny^2}{2}$. et $\int \overline{y^2dx} \stackrel{(8)}{=} \frac{x^3}{3} + n \int \overline{xdy} + n \frac{y^2}{2}$. Jam $\int \overline{ydx} \stackrel{(9)}{=} xy \mp \int \overline{xdy}$ (aliquando $\int \overline{ydx} \cap \int \overline{xdy}$). Pro $\int \overline{ydx}$ ponendo ejus valorem ex aeq. 2 fiet $+\frac{x^2}{2} + ny \stackrel{(10)}{=} xy \mp \int \overline{xdy}$. adeoque $n \int \overline{xdy} \cap \mp nxy \mp \frac{nx^2}{2} \mp n^2y \cap \int \overline{xydx} - \frac{x^3}{3}$ et $\int \overline{xydx} \cap$
5 $\mp nxy \mp \frac{nx^2}{2} \mp n^2y + \frac{x^3}{3} \cap n \int \overline{xdy} + \frac{x^3}{3}$. Ut brevius agam res reducitur ad aequationes [duas] (nam ipsa 4 inutilis.) ubi prius compendii causa $\int \overline{ydx}$ vocabo (12) *an* (ab area) $\int \overline{xdy}$ vocabo (13) *cn* a complemento et $\int \overline{xydx}$ vocabo (14) *mn*² a momento: Ex 2. fit: $na \stackrel{(15)}{=} ny + \frac{x^2}{2}$. et ex 6. fit $n^2m - \frac{x^3}{3} \stackrel{(16)}{=} n^2c$ denique ex generali natura curvarum fit: $xy \stackrel{(17)}{=} na \mp nc$. Ergo $na \stackrel{(18)}{=} nc \mp xy$ et per 15 $n^2c \stackrel{(19)}{=} nxy \mp n^2y \mp \frac{nx^2}{2}$.
10 Sed jam video quod res est posse quidem hinc haberi valorem ipsorum, *m. n. a.* etc. sed non posse ex his solis haberi aequationem in qua nulla harum extet. Videtur ergo adhuc una ejusmodi haberi posse aequatio: 15 multiplicetur per $d\bar{x}$ fit: $nad\bar{x} \stackrel{(20)}{=} nyd\bar{x} + \frac{x^2}{2}d\bar{x}$ et $n \int \overline{ad\bar{x}} \stackrel{(21)}{=} n \int \overline{yd\bar{x}} + \frac{x^3}{6}$. Est autem $\int \overline{ad\bar{x}}$ seu summa summarum idem cum $\int \overline{xyd\bar{x}}$ (certis casibus) aliquo noto detracto vel addito_[,] scribamus ergo $\int \overline{ad\bar{x}} \stackrel{(22)}{=} \int \overline{xyd\bar{x}} +$
15 pn^2 . Ergo $n \int \overline{xyd\bar{x}} \stackrel{(23)}{=} n \int \overline{yd\bar{x}} + \frac{x^3}{6} - pn^2$ seu $n^2m \stackrel{(24)}{=} n^2a + \frac{x^3}{6} - pn^2$. Ergo n^2a . substituendo valorem ex aeq. 15 fit $n^2m \stackrel{(25)}{=} n^2y + \frac{nx^2}{2} + \frac{x^3}{6} - pn^2$ quem valorem ipsius

$2 + n \frac{y^2}{2}$. (1) $\stackrel{(9)}{=} \int \overline{xyd\bar{x}} + n \frac{y^2}{2}$ redit aequatio prior 6. (2) jam *L* 5f. res (1) ad duas (2) reducitur ad aequationes | has *gestr.* | (nam *L*

6 (12): Die Gleichungsnummerierung springt von (10) auf (12). 13 $\int \overline{xyd\bar{x}}$: Richtig wäre $-\int \overline{xyd\bar{x}}$. Leibniz rechnet konsequent weiter; das Versehen hat keinen Einfluss auf die allgemeine Überlegung. 14 $\int \overline{ad\bar{x}}$: Es müsste $n \int \overline{ad\bar{x}}$ lauten; Leibniz rechnet ab Gl. (24) wieder mit dem richtigen Vorfaktor weiter.

n^2m inserendo in aeq. 16 fit $n^2c \stackrel{(26)}{\sqcap} n^2y + \frac{nx^2}{2} \boxed{+\frac{x^3}{6}} - \frac{x^3}{\textcircled{3}6} - pn^2$. Quem valorem

inserendo in aeq. 19. seu duos n^2c valores aequando fiet: $\mp nxy \mp n^2y \mp \frac{nx^2}{2} \sqcap n^2y + \frac{nx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - pn^2$. ubi p . continet in se x . et y . noto quodam modo et determinato (duplici forte aut triplici ex quibus eligendum) secundum naturam curvarum generalem. Solutum ergo a me est unius horae spatium problema, quod Geometras primarios frustra exercuit, et ipsi Cartesio difficillimum visum est. 5

5 quod (1) doctissimos (2) Geometras (a) omnes frust (b) primarios L

5 Geometras primarios: Leibniz bezieht sich möglicherweise auf Descartes' Anspielungen auf Roberval, Fermat und Beaugrand in seinem Brief von Juni (?) 1645, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 460 (*DO II* S. 230).

92. VIA PROBANDAE IMPOSSIBILITATIS QUADRATURARUM

[Juli 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 V 6 Bl. 8. 1 Ausschnitt von max. 20,8 x 4,9 cm. 11 Z. auf Bl. 8 r^o. Bl. 8 v^o leer. Bl. 8 bildete ursprünglich mit N. 90, 91 und 93 sowie VII, 3 N. 42 einen Teil eines Bog. 2^o.
Cc 2, Nr. 1247

Datierungsgründe: Das Stück wurde nach N. 90, dat. Juli 1676, und N. 91 und vor N. 93 auf dem Träger notiert.

Via probandae impossibilitatis quadraturarum etiam singularum ut circuli totius. Si $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{99}$ etc. seu seriei $\frac{1}{y^2 - 1}$ (posito y certo modo) haberi non potest summa; nimirum enumerando determinari potest an summa haberi possit talium serierum, videndum an summa seriei rationalis semper rationalis. Hinc et ad caeteros casus dabitur progressus: ut $\frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$. an haberi possit in numero posita x minore quam 1. vel r . Debebit enim etiam series ista esse alterius seriei analyticae exprimabilis differentia. Itaque res huc redit ut serierum quarundam^[,] quarum aequatio hoc modo transcendens seu vadit de aequatione in aequationem^[,] quaeramus summas, ut $\frac{x^m}{m}$ series est quae etiam differentias habet, atque ita serierum quoque transcendentium in numeris quaerendae differentiae. Curvae ab hujusmodi seriebus etiam fiunt, etsi videantur esse finitae earum summae; prorsus ut logarithmica curva fit ex progressionem Geometrica, et hoc modo tangentium, differentiarum^[,] summarum inventio etiam ad has porrigetur curvas.

17 habet, (1) ita serie omnes eiusmodi possibles (2) atque ita (a) aequationum (b) serierum *L*
18 numeris | (eodem modo et serierum ab ipsis) *gestr.* | quaerendae *L*

93. CALCULUS DIFFERENTIALIS TRANSCENDENS

[Juli 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 10 Bl. 2. 1 Ausschnitt von max. 21,0 x 7,3 cm. Untere Schnittkante unregelmäßig. 2 S. Textverlauf Bl. 2 v^o, 2 r^o. Überschrift irrtümlich oben links auf LH 35 XII 1 Bl. 226 (N. 91). Bl. 2 bildete ursprünglich mit N. 90, 91 und 92 sowie VII, 3 N. 42 einen Teil eines Bog. 2^o.
Cc 2, Nr. 1483 B

Datierungsgründe: Das Stück wurde nach N. 90, dat. Juli 1676, N. 91 und N. 92 auf dem Träger notiert.

C a l c u l u s d i f f e r e n t i a l i s t r a n s c e n d e n s

10

Videndum an Methodus tangentium Cartesii applicabilis ad Curvas Transcendentes; sit aequatio $x^3 + cz^2x^2 + fz^2x + g^3 \mp 0$. Sit aequatio determinanda ad duas radices aequales. Videndum an si forte sumatur $x^2 - 2ex + e^2 \mp 0$ multiplicetur per formulam arbitrariam $mx + nz^2$ quae si comparari posset priori utique haberetur tangens eodem calculo. Alia adhuc via: licebitne in se ducere $x + z - e \mp 0$ et postea multiplicare per formulam quo datae fiat similis, ac comparare. Sed dubito quoniam z potest continere x^2 . x^3 , aliaque. Quo casu verum esset nihilominus tamen aequationem $x^3 + cz^2x^2$ etc. habere duas radices aequales, sed revera plures habebit aequales quam duas nam aeq. $x + z - e \mp 0$ plurium potest esse radicum, quarum unaquaque bis est radix aequationis $x^3 + cz^2x^2$ etc. atque ita in nostra potestate efficeret in curva data ut circulus idem in pluribus locis curvam tangat. Cum tamen id sit determinata, si tamen aequatio $x + z - e \mp 0$ ubi $z \mp x^2$. x^3 etc. omnes praeter unam haberet radices imaginarias, cessaret ista difficultas, sed nec ita video, nam nec illud in potestate, ut idem circulus tangat curvam in pluribus punctis imaginarie. Fortasse tamen, videndum quid si fortasse uti liceat methodo Slusii quem plures arbitrariae non morantur.

Quoniam mea referendi methodo infinitae haberi possunt expressiones ejusdem curvae; hinc idem fieri poterit etiam in curva transcendente referendo modo ordinatas par-

10 Calculus ... transcendens erg. *L* 11 tangentium erg. *L* 26 mea |ordinatas
gestr. | referendi *L*

11 Cartesii: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 43–45. 25 Slusii: R.-Fr. de SLUSE, *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/73, S. 5143–5147 sowie VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059.

allelas ad abscissas, modo ordinatas convergentes ad abscissas, modo ordinatas convergentes inter se, modo ordinatas parallelas inter se scilicet (ex diversis axibus), modo ordinatas parallelas ad ordinatas convergentes, modo contra. Et si res sumatur generalissima, ut ordinatae convergentes referantur ad alias convergentes, quia parallelae ordinatae sub convergentibus possunt contineri, imo et abscissae, habebitur generalissima relatio possibilis de curva, in qua plures arbitrariae. Et ope harum arbitrariarum effici saepe poterit ut conferri possit aequatio curvae ita formata, ut maximum vel minimum comprehendat, cum arbitraria eadem indeterminatas x . z . continente facta ex formulae mutatione per $x^2 - 2xe + e^2$. Et facile ista poterunt examinari; investigando tangentem alio modo scilicet per differentias.

Video jam potuisse etiam sine x , fieri $z - \omega \sqcap 0$ et in se duci, scribique $z^2 - 2\omega z + \omega^2 \sqcap 0$, eamque formulam multiplicari ex x et z . compositam, productumque datae comparari. Quae comparatio si absolvi potest, habebitur hoc modo utique tangens. Notandum quoniam hoc modo in calculum non intrat specialis natura ipsius z . hinc talis tangentis inventio erit infinitis simul communis curvis, qualiscunque scilicet quantitas sumatur pro z . finita scilicet vel infinita. Et hoc etiam pro geometricis utile ad universalia. Si comparatio non succedat videndum an succedere possit mutata relatione (forte mutatio relationis nihil hic praestare potest) vel si nec hoc succedat, mutata litera z . vel x . aliaque substituta. Sed pro x . dubito. Pro z hoc modo alia potest substitui, ut si z . sit arcus circuli, substituatur alia ut v , quae sit ordinata summae sinuum ad axem applicatorum, quae utique dari potest ex data z vel contra, adhibita ipsa x . et mutabitur formula. Nota forte dum his artibus diversis modis inveniri potest tangens, poterit aequatio inveniri diversa, seu tangens diversimode expressa, in quibusdam scilicet figuris ejus rei capacibus, et habebitur quadratura. Sed ista exemplis tractanda.

2 scilicet (1) ad diversa puncta (2) ex L

94. DIFFERENTIAE CONVERGENTIUM

[Ende Juni – August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 229. 1 Streifen von 5,4 x 21,0 cm, unregelmäßig beschnitten. 16 Z. auf Bl. 229 r^o. Auf Bl. 229 v^o gestrichenes Fragment einer Vorstufe zu Cc 2, Nr. 1429. Bl. 229 bildete ursprünglich den mittleren Teil eines Bl. 2^o; der obere bzw. untere Teil bestand aus LH 35 VIII 30 Bl. 13 u. LH 35 II 1 Bl. 127 (Cc 2, Nr. 1547 u. 1429; Druck in späteren Bänden der Reihe).
Cc 2, Nr. 1550

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum Januar bis August 1676 belegt. N. 94 dürfte kurz vor der auf dem ursprünglichen Bl. 2^o darunter geschriebenen Cc 2, Nr. 1429 sowie deren gestrichener Vorstufe auf der Rückseite entstanden sein. Der in Cc 2, Nr. 1429 formulierte Satz zur näherungsweise Berechnung des Kreisbogens (vgl. *LQK* prop. L S. 116–118) ist nach der entsprechenden Aussage in Cc 2, Nr. 1460, dat. 29. Juni 1676, anzusetzen.

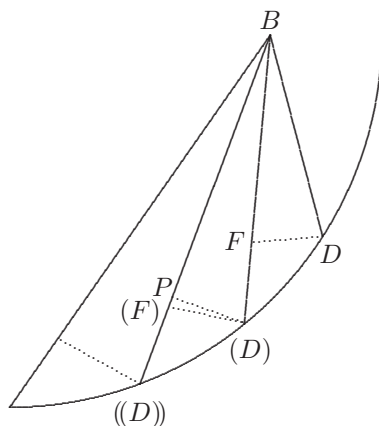
Differentiae convergentium

Ex puncto dato B ponantur infinitae duci rectae ad curvam, eaeque arithmetice proportionales. Erunt differentiae ipsarum $F(D)$ (F)((D)) quadraticae proportionales et chordae DF erunt arithmetice proportionales. Sed jam video angulos $(D)BD$ variare pro natura curvae, adeoque et rectas $P(D)$. Posset tamen videri, quis ita pro curvis fiat calculus: ut quaeratur $P(F)$. Erit $B(D) \propto x$. $(D)P \propto \alpha$. $x^2 - \alpha^2 \propto PB^2$ et $PB \propto \sqrt{x^2 - \alpha^2}$. et $(F)P \propto x - \sqrt{x^2 - \alpha^2}$. Auferatur ejus quad. ab $(F)(D)^2 \propto \frac{x^2 \beta^2}{c^2}$. fiet $-2x^2 + \alpha^2 + 2x\sqrt{x^2 - \alpha^2} + \frac{\beta^2 x^2}{c^2} \propto (D)P^2 \propto \alpha^2$. Unde $-2x^2 + \frac{\beta^2 x^2}{c^2}$, $\square \propto 4x^4 - 4x^2 \alpha^2$, sive

14 *Darunter:* Error est quia ipsae FD non crescunt arithmetice, sed varie pro natura curvae.

14 Differentiae convergentium erg. *L* 21 $+ \alpha^2 \mid - 2x\sqrt{x^2 - \alpha^2} + \frac{\beta x^2}{c^2} \propto DP^2$
ändert Hrsg. $\mid \propto \alpha^2 L$

16f. Erunt ... proportionales: Beide Aussagen treffen nicht zu und führen zu einem Widerspruch. Leibniz erkennt nachträglich den Fehler in der zweiten Aussage.



[Fig. 1]

- $\boxed{4x^4} - \frac{4x^4\beta^2}{c^2} + \frac{\beta^4x^4}{c^4} \sqcap \boxed{4x^4} - 4x^2\alpha^2$ et rejecto ubi β^4 . fiet $\alpha \sqcap \frac{x\beta}{c}$. Ergo ipsae α . erunt
 arithmetice proportionales, ergo et ipsae $(F)P$. Jam $(F)((D))$ sunt quadraticae, ergo $P((D))$
 sunt arithmetice et quadraticae proportionalium, quorum quadrata si addentur quadratis
 5 $P(D)$ arithmetice proportionalium, dant $(D)((D))$ elementum curvae, ergo semper eodem
 modo quod non capio.

1 Fig. 1: Eine zerschnittene und vom Text überschriebene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

95. DE CIRCULI DIFFERENTIIS ET DESCRIPTIONIBUS

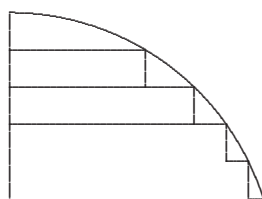
[März – August 1676]

Überlieferung: L Notiz: LH 35 II 1 Bl. 275. 1 L-förmiger Abschnitt bestehend aus einem Streifen von ca 21,5 x max. 3,5 cm und einem Streifen von max. 1,4 x 8 cm. 5 Z. auf Bl. 275 r°. Bl. 275 v° leer. Bl. 275 bildete ursprünglich mit VII,3 N. 67 sowie LH 35 II 1 Bl. 178 (Cc 2, Nr. 00; Druck in einem späteren Band der Reihe) einen Teil eines Bog. 2°. Cc 2, Nr. 860

5

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen ist für den Zeitraum März bis August 1676 belegt. Aufgrund der inhaltlichen Nähe und der Ähnlichkeit der beiden Gesprächsaufzeichnungen mit Tschirnhaus VII,3 N. 67 und VII,3 N. 68, dat. August 1676, in Tinte und Duktus könnte N. 95 im August entstanden sein.

10



[Fig. 1]

$$\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2 + 2\beta x} \sqcap \omega. \sqrt{a^2 - x^2} - \omega \sqcap \sqrt{a^2 - x^2 + 2\beta x}, \text{ vel } \boxed{a^2 - x^2} - 2\omega\sqrt{a^2 - x^2} + \omega^2 \sqcap \boxed{a^2 - x^2} + 2\beta x \text{ et } \frac{\omega}{\beta} \sqcap \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \frac{\omega}{x} \sqcap \frac{\beta}{\sqrt{a+x, a-x}}.$$

On pourroit examiner omnes modos quibus Circulus describi potes(t), variorum motuum compositione, ex variis circuli relationibus ad varias abscissas et ordinatas, convergentes et parallelas.

15

13–15 $\sqcap \frac{\beta}{\sqrt{a+x, a-x}}$ (1) vel $\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{2ax - 2}$ (2) V(ous) po (3) On L

15 Fig. 1: Das Fragment einer zerschnittenen Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

96. CALCULUS TANGENTIUM DIFFERENTIALIS

November 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 12 Bl. 3–4. 1 Bog. 4^o. 3 S. auf Bl. 3 r^o–4 r^o mit Seitenzählung pag. 1, pag. 2, pag. 3. Auf Bl. 4 v^o Aufzeichnung zu einem algebraischen Instrument (Druck in einem späteren Band der Reihe). — Gedr.: 1. *LBG*, 1899, S. 229–231 (tlw. = Z. 9 – S. 615 Z. 13); 2. (engl. Übers. von 1.) *CHILD*, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 124–127; 3. *HESS*, *Vorgeschichte der Nova Methodus*, 1986, S. 86–92. Cc 2, Nr. 00

Novemb. 1676

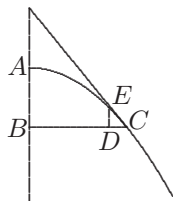
Calculus Tangentium differentialis

$$\begin{array}{llll} d\bar{x} \sqcap 1 & d\bar{x}^2 \sqcap 2x & d\bar{x}^3 \sqcap 3x^2 & \text{etc.} \\ d\frac{1}{x} \sqcap -\frac{1}{x^2} & d\frac{1}{x^2} \sqcap -\frac{2}{x^3} & d\frac{1}{x^3} \sqcap -\frac{3}{x^4} & \text{etc.} \\ d\sqrt{x} \sqcap \frac{1}{[2]\sqrt{x}} & \text{etc.} & & \end{array}$$

Ex his colligitur regula generalis haec pro differentiis ac summis simplicium potestatum

10 adjecta sub finem Machina construendi aequationes per Logarithmicam

Darunter, vorher geschrieben: Pag. 3. signum # est optima methodus pro spa-



tiis ad curvas reducendis. Paucis $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $DE \sqcap d\bar{x}$.

$DC \sqcap d\bar{y}$. $EC \sqcap z$. $z \sqcap \sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}$. Ergo $x \sqcap \int \sqrt{z^2 - d\bar{y}^2}$ [1]

$y \sqcap \int \sqrt{z^2 - d\bar{x}^2}$: datur autem ratio ipsarum z . ad x vel ad y . Ergo valore ipsius x vel y pro arbitrio ad alium relato, quaeri potest modus inveniendi x ex y vel y ex x .

10 Calculus ... differentialis *erg. L* 12 $d\frac{1}{x^3} \sqcap | -\frac{3}{x^2}$ ändert Hrsg. | etc *L*

19 ad (1) rectas (2) curvas *L* 21 autem (1) progressio (2) relatio *L* 23 modus (1) metiendi curvam (2) inveniendi *L*

18 Pag. 3. signum # : s. Zusatz S. 617 Z. 14 – S. 618 Z. 13.

$$d\bar{x}^e \sqcap e, x^{e-1} \text{ et contra } \int \bar{x}^e \sqcap \frac{x^{e+1}}{e+1}.$$

Unde $d\frac{1}{x^2}$ seu d, \bar{x}^{-2} erit $-2x^{-3}$ seu $-\frac{2}{x^3}$ et $d\sqrt{x}$ seu $d, \bar{x}^{\frac{1}{2}}$ erit $\boxed{\frac{1}{2} - 1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ seu $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}$.

Sit $y \sqcap x^2$. et erit $d\bar{y} \sqcap \boxed{+x^2} + 2xd\bar{x} + \boxed{d\bar{x}^2}, \boxed{-x^2}$. Ergo: $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \sqcap 2x$. Quae ratiocinatio est generalis, nec refert quae sit progressio ipsarum x . Eodemque modo generalis regula ita stabit: $\frac{d\bar{x}^e}{d\bar{x}} \sqcap e, x^{e-1}$ et vicissim $\int \bar{x}^e d\bar{x} \sqcap \frac{x^{e+1}}{e+1}$. 5

Sit aequatio quaelibet, v.g. $ay^2 + byx + cx^2 + f^2x + g^2y + h^3 \sqcap 0$ et pro y scribendo $y + d\bar{y}$, ac pro x similiter $x + d\bar{x}$, fiet omissis omittendis alia aequatio:

$$\left. \begin{array}{l} ay^2 + byx + cx^2 + f^2x + g^2y + h^3 \sqcap 0 \\ a2d\bar{y}y + byd\bar{x} + 2cx d\bar{x} + f^2d\bar{x} + g^2d\bar{y} \\ + bxd\bar{y} \end{array} \right\} \sqcap 0$$

$$\frac{\quad}{ady^2 + bd\bar{x}d\bar{y} + cd\bar{x}^2} \sqcap \boxed{0}$$
10

8 *Am Rande:* Alterutra ex his $d\bar{x}$ vel $d\bar{y}$ pro arbitrio explicari potest, adhibita aequatione nova, et alterutra harum $d\bar{x}$ vel $d\bar{y}$ sublata, et x scilicet vel y aliter per quamlibet explicando. Verum non puto id esse, quia catalogus omnium curvarum quadrabilium prodire debet, alterutram sumendo constantem.

9–12 *Am Rande:* Praeclara haec observatio est ad calculum meum differentiarum. Si sit $b, yd\bar{x} + xd\bar{y} + \text{etc.} \sqcap 0$ fore $b\bar{y}\bar{x} + \int \text{etc.} \sqcap 0$ et ita de caeteris. Videndum quid de h^3 faciendum. Ad istos calculos melius faciendos poterit aequatio $ay^2 + byx + cx^2$ etc. transmutari in aliam alia curvae relatione, et comparabitur proveniens, alio differentiarum calculo, cum eo quod per istum prodiit.

3f. $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}$ (1) Sit $\dagger y^2 + \boxed{2} \overline{y + \beta} \sqcap z$. seu $\dagger y^2 + y^2 + 2y\beta + \beta^2$ (2) Sit L

3 $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}$: Richtig wäre $+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 8 aequatio: Die in der dritten Gleichung wiedergegebene Beziehung zwischen den Produkten der Größen dx und dy , die Leibniz durch erneutes Ersetzen von x und y durch $x + dx$ bzw. $y + dy$ gewonnen hat, ist nicht korrekt.

Quae est regulae a Slusio publicatae origo. Eam vero ita in infinitum amplificabimus: sint literae quotcunque; et ex iis composita formula, verbi gratia ex literis tribus sit formula:

$$ay^2 \quad bx^2 \quad cz^2 \quad fyx \quad gyz \quad hxz \quad ly \quad mx \quad nz \quad p \quad \square \quad 0.$$

Unde fiet alia aequatio:

$$5 \quad \frac{ay^2 \quad bx^2 \quad cz^{[2]} \quad fyx \quad \text{simi-} \quad \text{simi-} \quad ly \quad mx \quad \text{simi-} \quad p}{2ad\bar{y}y \quad 2bd\bar{x}x \quad 2cd\bar{z}z \quad fyd\bar{x} \quad \text{liter} \quad \text{liter} \quad ld\bar{y} \quad md\bar{x} \quad \text{liter}} \quad \left| \begin{array}{l} fxd\bar{y} \quad . \quad . \\ ad\bar{y}^2 \quad bd\bar{x}^2 \quad [c]d\bar{z}^2 \quad fd\bar{x}d\bar{y} \quad . \quad . \end{array} \right|$$

10 Unde patet eadem methodo haberi tangentia superficierum plana, et alioqui, nihil referre an non ipsae literae x . y . z . aliquam habeant cognitam relationem, ea enim postea substitui potest.

Hinc praeclare serviet eadem methodus; etsi compositae fractiones aut irrationales calculum ingredientur, nec opus est earum tollendarum causa caetera exaltari, cum potius ipsarum differentiae separatim inveniri ac substitui possint; deinde cum methodus tangentium publicata non nisi tunc procedat, cum ordinatae parallelae sunt, ista et ad convergentes et alias quascunque, imo illas quoque relationes accomodari potest, quae sunt ordinarum ad curvarum portiones aut in quibus angulus ordinarum certa lege mutatur. Caeterum speciatim operae pretium erit rem ad irrationales ac fractiones compositas accomodare. Ut $d\sqrt[2]{a+bz+cz^2}$, ponatur $a+bz+cz^2 \square x$ et $\frac{d\sqrt[2]{x}}{d\bar{x}} \square -\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Jam

$$20 \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{z}} \square b+2cz \text{ ergo } d\sqrt[2]{a+bz+cz^2} \square -\frac{b+2cz}{2d\bar{z}, \sqrt{a+bz+cz^2}}.$$

Sumta aequatione duarum literarum x . y pro curva, et determinata aequatione ad tangentes, tolli potest alterutra ipsarum x . et y . ita ut restet altera tantum una cum $d\bar{x}$ et $d\bar{y}$. quod per omnes casus calculari operae pretium est.

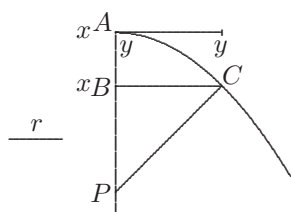
18 mutatur. | Unde nihil generalius vel fingi potest. *gestr.* | Caeterum L

1 Slusio: s. Sluses Tangentenbrief in den *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673 S. 5143–47 (Nachtrag in VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059). 19 $\frac{d\sqrt[2]{x}}{d\bar{x}} \square -\frac{1}{2\sqrt{x}}$:

Leibniz übernimmt das falsche Vorzeichen von S. 613 Z. 3. Zudem notiert er im folgenden Ausdruck für $d\sqrt{a+bz+cz^2}$ die Größe dz im Nenner statt im Zähler.

Datis tribus literis, ut x . y . z . et val(or)e ipsius $d\bar{z}$ ope ipsius x . vel y . (: vel etiam utriusque :) expresso, habebitur denique aequatio tangentium, in qua erit etiam tantum alterutra harum x . et y et duae $d\bar{y}$, $d\bar{x}$; aliquando et ipsa z non poterit tolli. Hoc etiam per omnes casus assumti valoris ipsius $d\bar{z}$ deduci potest, eodem modo plures adhuc literae assumi possunt: Et conjunctis in unum calculis universalibus omnibus, universalissimus ex ipsis fiet.

5



[Fig. 1]

aequatur rectangulo ABC .

Caeterum assumtio plurimarum literarum usum habere potest ad methodi tangentium inversae problemata ope quadraturarum solvenda ut si propositum sit problema solvere, in quo summa rectarum CB , BP sit data seu $y + \frac{y d\bar{y}}{d\bar{x}} \cap xy$ fiet $d\bar{x} + d\bar{y} \cap x d\bar{x}$ seu $x + y \cap \frac{x^2}{2}$. Ita habemus curvam in qua summa earum $CB + BP$ (in constantem r)

10

$$y d\bar{y} + y d\bar{x} \cap \frac{y d\bar{x}}{1+y} \text{ seu } y + x \cap \int \frac{1}{1+y} d\bar{x} \text{ sive } x \cap \int \frac{1}{1+y} d\bar{x} \text{ [bricht ab]}$$

$$d\bar{y} + d\bar{x} \cap \frac{1}{1+y} d\bar{x} \text{ seu } \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + 1 \cap \frac{1}{1+y} \text{ seu } \frac{d\bar{x}}{d\bar{y}} \cap \frac{1}{\frac{1}{1+y} - 1} \cap \frac{1+y}{-y} \text{ seu } -x \cap \int \frac{1}{y} + y. \quad 15$$

$y d\bar{y} + y d\bar{x} \cap z d\bar{x}$. Fiet: $y d\bar{y} \cap z d\bar{x} - y d\bar{x}$. vel fiet: $\frac{y d\bar{y}}{z-y} \cap d\bar{x}$. vel $x \cap \int \frac{y d\bar{y}}{z-y}$. Et pro z . posito ejus valore ex dato y reductum erit problema ad quadraturas. Sed si sit z data ex data x tunc ex datis quadraturis dabitur $\overline{z d\bar{x}}$: Ergo fiet $\frac{y^2}{2} + \int y d\bar{x} \cap \int z d\bar{x}$.

Nota si curva explicaretur hoc modo ut non certa aliqua detur vel ordinatae vel abscissae natura differentiarum, sed ut fiat semper differentia unius aequalis differentiae alterius proximae, fiet $2y \cap$ dato z .

3 aliquando ... tolli. erg. L 15 $d\bar{y} + d\bar{x} \cap \dots$ seu (1) $\int \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \cap$ (2) $\int \frac{1}{d\bar{x}} \cap \int \frac{1}{1+y} - y$

streicht Hrsg. | (3) $\frac{dx}{d\bar{y}} \cap \dots \int \frac{1}{y} + y$ erg. L

12 constantem r : Leibniz rechnet mit $r = 1$.

$d\bar{x}^2 y^2 + y^2 d\bar{y}^2 \sqcap z^2 d\bar{x}^2$. Fiet $y \sqcap \frac{z d\bar{x}}{\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}}$, ubi posito z dari.

$\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2} \sqcap \frac{z d\bar{x}}{a}$. Fiet $d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 \sqcap \frac{z^2 d\bar{x}^2}{a^2}$ ponendo z dari ex data x . Scribe
 $2d\bar{x}d\bar{y} + d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 \sqcap \frac{z^2}{a^2} d\bar{x}^2 + 2d\bar{x}d\bar{y}$ seu $d\bar{y} + d\bar{x} \sqcap \sqrt{\frac{z^2}{a^2} d\bar{x}^2 + 2d\bar{x}d\bar{y}}$.

Ut ista tractari possint ubi $d\bar{x}^2$, vel $d\bar{y}^2$ et similia, ut $d\bar{x}d\bar{y}$, quoniam illa ex simplici
 5 inventione differentiarum duci non possunt, fieri possunt variae aequationes simplices
 differentiales, eaeque multiplicatae per $d\bar{x}$ vel $d\bar{y}$ aut eorum potentias componi inter se
 ad inveniendas aequationes novas.

Poterunt ejusmodi excitari aequationes ope theorematis Huddeniani, quo nihil re-
 fert quae adhibeatur arithmetica progressio, ita aequatio multiplicari secundum unam
 10 progressionem poterit in aliam duci secundum aliam, nec ideo multiplicatur numerus
 radicum problematis, quia una alteri aequivalet, imprimis si semel in eam ducitur, et ei
 addatur. Ex his compositionibus credibile est varia formari posse, apta solvendis methodi
 tangentium inversae problematis.

$\sqrt{BC^2 + BP^2} \sqcap z$, seu $y^2 + \frac{y^2 d\bar{y}^2}{d\bar{x}^2} \sqcap z^2$. Pone z dari ex data y . fiet $d\bar{x} \sqcap \frac{y[d\bar{y}]}{\sqrt{z^2 - y^2}}$.

15 unde dabitur problema. Sin detur z ex data x , difficilis solutio est. Ponamus x arith-

1 Auf Bl. 3 r^o zwischen den Text notiert: $d\bar{x}^{[2]} \sqcap \frac{d\bar{y}^2}{y^2} - d\bar{y}^2$ seu $x \sqcap \int d\bar{y} \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$.

$\left(\frac{1}{y^2}\right) - \frac{1}{1} \sqcap \left(\frac{1}{y^2}\right) - \frac{2z}{y} + z^2$. Ergo $y \sqcap \frac{2z}{z^2 + 1}$. Ergo $\sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \sqcap \dagger \frac{z^2 + 1}{2z} \dagger z$. $d\bar{y} \sqcap \frac{2}{z^2 + 1} \wedge$
 „ $2z^2 d\bar{z} - 2d\bar{z} \wedge z^2 + 1$. $d\bar{y} \sqcap \frac{4z^2}{z^2 + 1} d\bar{z} - 4d\bar{z}$. $x \sqcap \frac{4z^2 d\bar{z}}{z^2 + 1} - 4d\bar{z}$ per $\dagger \frac{z^2 + 1}{2z}$ seu fiet
 $\sqcap \frac{-4d\bar{z} \wedge \dagger z^2 + 1}{z^2 + 1, 2z}$ quae formula quadranda ad describendam talem curvam. Sed nota

hujus formulae partem pendere ex quad. Circuli.

15 solutio est *gestr. L, erg. Hrsq.*

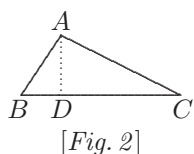
8 theorematis Huddeniani: J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 433–439 u. 507–516.

17 $d\bar{y} \sqcap$: Das korrekte Ergebnis wäre $\frac{2 - 2z^2}{(z^2 + 1)^2} dz$. Im Folgenden kommen weitere Rechenfehler hinzu.

meticam fietque: $y\sqrt{1-d\bar{y}^2} \sqcap z$. seu $\int y\sqrt{1-d\bar{y}^2} \sqcap \int \bar{z}$. Datur autem summa z , ex hypothesi quadraturarum. Tantum ergo hujusmodi summa quaeritur, haberi poterit per series infinitas.

Videndum, si sit $y d\bar{y} d\bar{x} \sqcap x^2$, liceatne ponendo $d\bar{x}$ ut constantem seu x ut arithmetica inde facere, $y d\bar{y} \sqcap x^2$, seu $\frac{y^2}{2} \sqcap \frac{x^3}{3}$. Ita puto.

5



Maximi foret momenti ad perfectionem Geometriae curvas invenire figuris proportionales. $AB \sqcap e$. $BC \sqcap c$. $AD \sqcap f$. $BD \sqcap e\sqrt{1-f^2}$ et $DC \sqcap c-e\sqrt{1-f^2}$ et $AC^{[2]} \sqcap \sqrt{f^2e^2} + c^2 - 2ce\sqrt{1-f^2} + e^2\sqrt{-e^2f^2}$. Ergo $AC^2 \sqcap AB^2 + BC^2 \mp 2CBD$. Sit $e \sqcap d\bar{x}$. et $c \sqcap d\bar{y}$, et

angulus expressus per f , fiet: $AC \sqcap$ elemento curvae: $\sqcap d\bar{y}^2 + d\bar{x}^2 - 2d\bar{x}d\bar{y}\sqrt{1-f^2} \sqcap z^2$. Pone z dari ex data x , fiet $d\bar{y}^2 - 2d\bar{y}\sqrt{1-f^2} + 1 - f^2 \sqcap \textcircled{1} - f^2, + z^2\textcircled{-1}$ et fiet $\mp d\bar{y} \mp \sqrt{1-f^2} \sqcap \sqrt{z^2-f^2}$. seu $\mp y \mp x\sqrt{1-f^2} \sqcap \int \sqrt{z^2-f^2}$.

[Zusatz auf Bl. 4 r^o, in Höhe von S. 618 Z. 3f. mit # markiert]

$d\bar{x} \sqcap \frac{d\bar{y}}{\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}}$ et sumendo z dari ex data y habetur solutio ex quadraturis, sed si z

datur ex data x tunc ita procedendum $d\bar{y} \sqcap d\bar{x}\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}$. Nam priore modo ponendo y esse

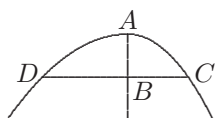
arithmeticae progressionis fiet: $x \sqcap \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}}$. posteriore ponendo x arithmetica, fiet

y , aequ. $\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}$. Solutum est ergo problema reperiendi curvam datorum elementorum ex datis scilicet quadraturis.

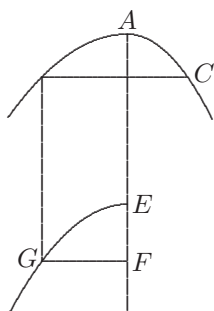
Videtur male proposita quaestio, neque talis esse aequatio: $\sqrt{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2} \sqcap z d\bar{x}$ vel $\sqcap z d\bar{y}$, sed $\sqcap z$. Fiet $d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 \sqcap z^2$ et si z datur ex data y , fiet: $x \sqcap \int \sqrt{z^2-1}$ vel si datur z ex x , fiet $y \sqcap \int \sqrt{z^2-1}$. Itaque ad quadrandam parabolam per exten-

1 fietque: Richtig wäre $y\sqrt{1+d\bar{y}^2} = z$.

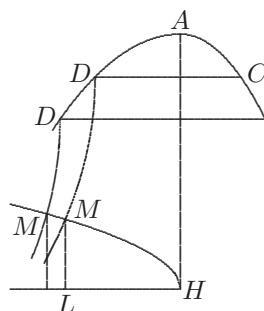
sionem curvae in rectam opus est quadraturae Hyperbolae. Aliunde autem quadratura Hyperbolae inveniri potest per curvam parabolae, ergo per curvam parabolae inveniri potest quadratura parabolae; sed non contra. Resumatur aequatio: $x \propto \int \sqrt{z^2 - dy^2}$, et ponatur neutra esse progressionis arithmeticae, scilicet neque y , neque x , sed ponatur tam z quam y explicari ex alia data quae sit ejusmodi, ut formula $\sqrt{z^2 - dy^2}$ sit quadrabilis et habebitur quadratura figurae ex data curvae extensione in rectam.



[Fig. 3a]



[Fig. 3b]



[Fig. 3c]

Nam si y arithmetica tunc fit res ita[:] curva AC spatio $ABDA$ proportionalis; sin aliter explicetur y scilicet rursus per aliam tunc fiet ex. gr. curva AC . proportionalis spatio $EFGE$, vel aliter adhuc res fieri potest, ut fiat curva AC , proportionalis spatio HLM posito DM esse certam curvam ex dato quolibet puncto D describendam, et curvae HM occurrentem unde amplissimus patet campus spatia ad lineas revocandi.

97. REDUCTIO PLURIUM AEQUATIONUM AD UNAM SEU SUBLATIO INCOGNITARUM

[Kurz vor dem 28. November 1676]

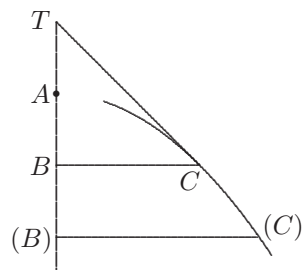
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 304. 1 Ausschnitt von ca 18,2 x max. 15,7 cm.
 1 S. auf Bl. 304 v^o. Auf der Vorderseite Fragment einer Aufzeichnung zur Planung der
 Reise von Amsterdam nach Hannover.
 Cc 2, Nr. 00

5

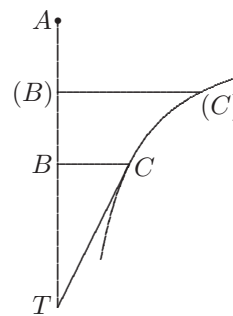
Datierungsgründe: Die Aufzeichnung diene als Vorlage für einen Abschnitt im Brief Leibniz' an Oldenburg vom 18./28. November 1676 (III, 5 N. II S. 7f.). Infolge des auf der Vorderseite des Blattes befindlichen Reiseplans wurde die Aufzeichnung wahrscheinlich während des Amsterdamaufenthalts kurz vor Abfassen des Briefs an Oldenburg geschrieben.

10

Reductio plurium aequationum
ad unam seu sublatio incognitarum



[Fig. 1a]



[Fig. 1b]

AB sit x . BC sit y . quantitates indeterminatae: determinatae vero, a . b . c . d . e . f . Aequatio relationem explicans inter x et y , $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

15

12f. Reductio ... incognitarum erg. *L*

14 Fig. 1b: Eine gestrichene Vorstufe zur Zeichnung wird nicht wiedergegeben.

quae in suo gradu generalissima seu plenissima est, et ad quodcunque exemplum potest applicari, pro varia explicatione literarum, quae et nihilo aequales ponentur cum aliqui termini desunt, et quantitati negativae, quoties non adduntur sed auferuntur. Jam ex methodo tangentium Huddenii vel Slusii posita CT tangente, et $\frac{BC}{TB}$ vocata z . erit $-z$

$$5 \quad \text{aequ. } \frac{2ax + cy + d}{2by + cx + e}.$$

Habemus ergo duas aequationes unam datam, quae continet duas indeterminatas x et y . alteram, inventam quae continet tres z . x . y . Quaeritur ex his alia in qua nulla sit y . sed tantum duae literae x . et z , sive quaeritur ratio ipsius z sive $\frac{BC}{TB}$, ad so-

lam x sive AB . Ut ergo tollatur y , consideratur ex aequatione priore haberi y aequ. ⁽³⁾

$$10 \quad \frac{-ax^2 - dx - f}{by + cx + e} \text{ sive per compend. } y \text{ aequ. } \frac{p}{by + q}. \text{ (posito } p \text{ aequ. } -ax^2 - dx - f \text{ et}$$

q aeq. $cx + e$.) Ex 2^{da} aequatione fiet y aeq. ⁽⁷⁾ $\frac{2ax + d - cxz - ez}{2bz - c}$ seu posita r aequ. ⁽⁸⁾

$2ax + d - cxz - ez$. et s aequ. $2bz - c$ fiet y aequ. ⁽⁹⁾ $\frac{r}{s}$. Ergo aequando aeq. 4 et 10 fiet ps

aequ. $bry + qr$. et y aequ. ⁽¹²⁾ $\frac{ps - qr}{br}$ quam aequationem jungendo aequationi 10, fiet $ps^2 - qrs$

aequ. ⁽¹³⁾ br^2 .

$$15 \quad \left. \begin{array}{l} s^2 \quad \text{aequ.} \quad + 4b^2z^2 - 4bcz + c^2 \\ p \quad \quad \quad - \frac{ax^2 - dx - f}{-4b^2fz^2 + 4bcfz - fc^2} \\ \quad \quad \quad - 4b^2dz^2x + 4bcdzx - c^2dx \\ - 4ab^2x^2z^2 + 4abcxz^2 - ac^2x^2 \end{array} \right\} ps^2 \quad qs \left\{ \begin{array}{l} q \quad \quad \quad cx + e \\ s \quad \quad \quad \frac{2bz - c}{-c^2x - ce} \\ + 2bczx + 2bez \end{array} \right.$$

8 $\frac{TB}{BC}$ L ändert Hrsg.

4 Huddenii: J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516. 4 Slusii: R.-Fr. de SLUSE, *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/73, S. 5143–5147 sowie VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059. 11 Ex 2^{da} aequatione: Leibniz übernimmt die Gleichung Z. 4f. ohne das Minuszeichen vor z und rechnet konsequent weiter.

$$\begin{array}{r}
 qs \text{ aequ.} \quad 2bczx + 2bez - c^2x - ce \\
 r \text{ aeq.} \quad - \quad czx - \quad ez + 2ax + d \\
 \hline
 \left. \begin{array}{l}
 + 2bcdzx + 2bdez - c^2dx - cde \\
 + 4abczx^2 + 4abezx - 2ac^2x^2 - 2acex \\
 - 2bcez^2x - 2be^2z^2 + 2ec^2zx + ce^2z \\
 - 2bc^2z^2x^2 - 2bcez^2x + c^3zx^2 + c^2ezx
 \end{array} \right\} qsr \qquad 5
 \end{array}$$

r^2 aequ. $4a^2x^2 + 4adx - 4aczx^2 - 4aezx, +d^2 - 2cdzx - 2dez, +c^2x^2z^2 + 2cexz^2 + e^2z^2.$

Unde ordinando habebimus:

$$\begin{array}{r}
 3bc^2x^2z^2 + 6bcexz^2 - 12abczx^2 + 4a^2bx^2 + 3be^2z^2 - 8abexz + 4abdx - 4bdez + bd^2 \neq 0. \\
 4ab^2 \quad + 4b^2d \quad - \quad c^3 \quad + 3ac^2 \quad + 4b^2f \quad - 4bcd \quad + 2ace. \quad - \quad ce^2 \quad + cde \qquad 10 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - 3c^2e \quad + 2c^2d. \quad - 4bcf \quad + fc^2
 \end{array}$$

Ubi notabilia: idem semper numerus literarum cognitarum in quolibet totius aequationis articulo; eadem signa in quolibet articulo ejusdem membri[;] denique binos articulos cujuslibet altiorum membrorum, ternos inferiorum.

12f. in (1) termino (2) quolibet totius aequationis (a) membro (b) articulo L

5 $+2ec^2zx$: Richtig wäre $+ec^2zx$; Leibniz rechnet konsequent weiter. 8 habebimus: Leibniz rechnet irrtümlich $br^2 - qrs - ps^2$. Zudem müsste in Z. 10 bei konsequenter Rechnung $-8bcdxz$ stehen.

98. FIGURA QUADRANDA COMPARATUR CUM ALTERIUS DIFFERENTIIS

Dezember 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 227. 1 Bl. ca 4°. 1 S. auf Bl. 227 r°. Rückseite
 5 leer. Untere Risskante geschwungen.
Cc 2, Nr. 00

Xb. 1676.

F i g u r a q u a d r a n d a c o m p a r a t u r
 c u m a l t e r i u s d i f f e r e n t i i s

10 In Epistola mea ad Oldenburgium Amstelodamo Novemb. scripta 1676. est formula
 generalis differentiarum gradus cubici, ubi si tolli possent tres priori termini x^2z^2 . xz^2 .
 x^2z haberetur quadratura Hyperbolae modo restet xz . Videamus, fit, $3bc^2 + 4ab^2 \neq 0$.
 seu $3c^2 + 4ab \neq 0$. rursus $6bce + 4b^2d \neq 0$. seu $3ce + 2bd \neq 0$. et $-12abc - c^3 \neq 0$. seu
 15 $12ab + c^2 \neq 0$. Fiet: $c^2 \neq -\frac{4ab}{3} \neq -12ab$ quod est impossibile. Ergo tolli non possunt hi
 termini.

P r o p o s i t a c u r v a i n v e n i r e s i f i e r i p o t e s t q u a d r a b i l i t a t e m a n a l y t i c a m a b s o -
 l u t a m , i d e m e s t a c p r o p o s i t a c u r v a e [q u a d r a t r i c i s] a e q u a t i o n e i n v e n i r e a e q u a t i o n e m
 e x p r i m e n t e m r e l a t i o n e m d i f f e r e n t i a r u m i n t e r e j u s o r d i n a t a s , e t h a n c d a t a c o m p a r a r e ; s e d

7 Xb. 1676. *erg. L* 8f. figura ... differentiis *erg. L* 10 Novemb. *erg. L* 16 si
 fieri potest *erg. L* 18 experimentem | aequationem *erg.*, ändert *Hrsg.* | differentiarum *L*

10 Epistola: Leibniz an Oldenburg, 18./28. November 1676, III, 5 N. II, insbesondere S. 7–9.
 10f. formula ... cubici: Es handelt sich um die zur allgemeinen Kurvengleichung 2. Grades $ax^2 + by^2$
 $+ cyx + dx + ey + f = 0$ gehörende Beziehung zwischen x und $z = \frac{dy}{dx}$ (*a. a. O.*, S. 8); dementsprechend
 müsste es quadratici statt cubici heißen. Leibniz leitet im genannten Brief die Gleichung für x und
 z nicht korrekt her (s. dortige Erl.). Da die erste Kurve wegen $z = \frac{dy}{dx}$ als Quadratrix der durch x
 und z gegebenen Kurve aufgefasst werden kann, unternimmt Leibniz im Folgenden den Versuch einer
 Reduktion auf die Hyperbelquadratur durch Nullsetzen von Koeffizienten in der Beziehung zwischen
 x und z . Diese Untersuchung ist unvollständig, hätte aber auch anhand der korrekten Gleichung bei
 vollständiger Durchführung zum gleichen negativen Ergebnis geführt.

quia id saepe prolixatum alia circumspicienda ars:

$$[I] \quad a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + lx^3 + my^3 \cap 0$$

fiet alia

$$[II] \quad b\delta x + dx\delta y + 2ex\delta x + 2gxy\delta x + 2hxy\delta y \text{ etc.}$$

$$c\delta y \quad [+]\quad dy\delta x + 2fy\delta y + gx^2\delta y + hy^2\delta x$$

$$+ 3lx^2\delta x$$

$$[+]\quad 3my^2\delta y$$

5

Alterutra jam ex his, δx vel δy pro constante altera pro variante, sumi potest, et pro varia substitui z . Ponamus δx esse constantem et $\delta y \cap z$ et data sit aliqua aequatio exprimens relationem inter z et x ,posito z esse ordinatam, x abscissam curvae cujus quadratura quaeritur. Quaeritur an ex illa data aequatione inter z et x , assumto pro arbitrio valore ipsius y per z et x expresso, duae aequationes datis similes, formari possint. Hoc ita procedet, fingatur aequatio relationem exprimens inter z . x . y . et [ex] ea tollatur z ope datae quod generalissime fiet: nata comparetur cum generalissima ex solis x . y composita. (An rectius erit non universalem assumere ex x . y . z . sed datam inter x . y . dividere in duas ut $x^2 + zx + z^2 \cap 0$ ita dividere, $bx^2 + fayzx$ etc. $\cap 0$.)

15

$$cyx^2 + gay^2 \text{ etc.}$$

$$dy^2x^2$$

etc.

14 fiet: (1) sublata (2) nata L

VERZEICHNISSE

PERSONENVERZEICHNIS

Verfasser bzw. Mitverfasser von hier abgedruckten Stücken werden mit der betreffenden Stücknummer genannt, ebenso Personen, auf die sich ein ganzes Stück bezieht. Diese Nummerneintragen sind zur Unterscheidung von den Seitenangaben mit einem Stern versehen. Im Übrigen wird nach Seiten zitiert. Bei Autoren ist zusätzlich das Schriftenverzeichnis heranzuziehen. Variierende Namensformen werden nur genannt, wenn sie stärker voneinander abweichen. Kursivdruck weist auf den Petitteil hin.

- Abbé 17. Jh.: S. **441**.
- Albius s. White
- Apollonius v. Perga 3./2. Jh. v. Chr.: S. **123**. **194**.
- Archimedes † 212 v. Chr.: S. **31**. **194**. **267**. **296 f.** **420**. **501**. **512**. **554**.
- Barrow, Isaac † 1677: N. **43***. S. **313**. **563**.
- Bartholin, Rasmus † 1698: S. **21 f.**
- Beaugrand, Jean de † 1640: S. **605**.
- Beaune s. Debeaune
- Bertet (Berthet), Jean S. J. † 1692: N. **45***. **63***. **64***. S. **434**.
- Boulliau (Bullialdus), Ismael † 1694 : S. **31**.
- Brouncker, William, Viscount † 1684: S. **297**.
- Carcavy, Pierre de † 1684: S. **599**.
- Cardano, Girolamo † 1576: S. **41**.
- Cavalieri (Cavalierius), Bonaventura † 1647: S. **296**. **313**.
- Collins, John † 1683: S. **297**. **301**. **332**.
- Debeaune (Beaune), Florimond † 1652: S. **22**. **179**. **598**. **598**. **600**. **600**. **603**.
- Dechales (De Chales), Claude François Milliet S. J. † 1678: S. **239**.
- Descartes (Cartesius), René † 1650: N. **3***. **90***. **91***. S. **16 f.** **16**. **20**. **22**. **63**. **77**. **78**. **85**. **92**. **97**. **98**. **103**. **117 f.** **117**. **140–142**. **141**. **149**. **168**. **179**. **179**. **202**. **307**. **342**. **343**. **357**. **369**. **559**. **607**.
- Euklid 3. Jh. v. Chr.: S. **296**.
- Fabri, Honoré S. J. † 1688: S. **441**. **514**.
- Fermat, Pierre de † 1665: S. **84**. **220**. **449**. **463** bis **465**. **463**. **598**. **605**.
- Gent, Pieter van 17. Jh.: S. **346**.
- Gregorius a S. Vincentio s. Saint-Vincent.
- Gregory (Gregorius), James † 1675: N. **47***. S. **115**. **272**. **296 f.** **301**. **307**. **313**. **351 f.** **354**.
- Guldin, Paul S. J. † 1643: S. **297**. **420**. **434**. **436**. **516**. **521**. **528**.
- Heuraet (Heuratus), Hendrik van † 1660: N. **30***. S. **132**. **138**. **168**. **194**. **297**. **297**. **374**. **375**. **393**.
- Hudde, Jan † 1704: S. **14**. **62**. **62**. **84 f.** **100**. **145**. **148**. **151**. **214**. **216**. **218**. **228**. **234**. **343**. **357**. **583**. **584**. **586**. **616**. **620**.
- Huygens (Hugenius), Christiaan † 1695: N. **3***. S. **16**. **31**. **62**. **115**. **115**. **135**. **136**. **272**. **282**. **296 f.** **297**. **420**. **535**.
- Justel, Henri † 1693: S. **31**.
- Mercator, Nicolaus † 1687: S. **296**. **332**. **422**.
- Mersenne, Marin † 1648: S. **91**. **369**. **598**.
- Neile, William † 1670: S. **297**.
- Newton, Isaac † 1727: S. **142**.
- Oldenburg, Heinrich † 1677: S. **15**. **62**. **297**. **301**. **347**. **502**. **619**. **622**.
- Ozanam, Jacques † 1717: S. **317**.
- Pascal (Dettonvillaeus), Blaise † 1662: S. **514**.
- Ricci, Michelangelo † 1682: S. **332**. **449**. **480**.
- Roberval, Gilles Personne de † 1675: S. **91**. **91**. **502**. **508**. **600**. **605**.
- Rømer, Ole Christensen † 1710: S. **420**. **420**.

- Saint-Vincent (Gregorius a S. Vincentio),
Grégoire de S. J. † 1667: S. 262. 291. 296 f. 313.
314. 350.
- Schooten (Schoten, Schotenius), Frans van
d. J. † 1660: S. 80. 84 f. 103. 117. 127. 195. 207.
234. 281.
- Sluse (Slusius), René-François de † 1685: S. 62.
109. 109. 225. 228. 323. 342. 343. 400. 437. 463.
584. 586. 607. 614. 620.
- Snell (Snellius) van Royen, Willebrord † 1625:
S. 115. 296.
- Tacquet, André S. J. † 1660: S. 297. 557.
- Torricelli, Evangelista † 1647: S. 296. 297.
508.
- Tschirnhaus, Ehrenfried Walter v. † 1708:
N. 42*. 49*. 51₁*. 62*. 67₁*. 80*. S. 267. 301.
363. 372. 373. 375. 431. 509. 509. 553. 611.
- Viète (Vieta), François † 1603: S. 115. 307.
- Wallis, John † 1703: S. 199. 272. 296 f. 297.
313. 329. 332 f. 332. 340. 402. 442. 514.
- White (Albius), Richard S. J. 17. Jh.: S. 297.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

Das Schriftenverzeichnis (SV.) enthält die im Text und in den Apparaten angeführte Literatur. Darin sind Autoren, die Leibniz grundsätzlich zugänglich waren, einschließlich ihrer modernen Ausgaben verzeichnet. Abkürzungen von in den Erläuterungen oder Überlieferungen erwähnter Literatur werden im Abkürzungsverzeichnis aufgeführt. Noch nicht edierte Leibniz-Stücke sind im Handschriftenverzeichnis Teil 3 zu finden. — Jeder Autor und Sachtitel erhält eine Leitnummer, die Reihenfolge der Einzelwerke ist chronologisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern ausgezeichnet sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einen bestimmten Titel zuzuordnen ist. Werke mit eigenhändigen Eintragungen von Leibniz sind mit dem Zusatz [Marg.] versehen. Für die Erwähnung von Autorennamen ist auch das Personenverzeichnis mitheranzuziehen. Kursiv gedruckte Seitenangaben weisen auf den Petitteil hin.

1. *Acta Eruditorum*. Leipzig 1682 ff.:
— Dez. 1682: S. **347**.
2. APOLLONIUS v. Perga, *Conica*: S. **123**.
3. ARCHIMEDES
 1. *De aequiponderantibus*: S. **420**.
 2. *De conoidibus et sphaeroidibus*: S. **31. 296**.
 3. *De sphaera et cylindro*: S. **31. 297. 554**.
 4. *Dimensio circuli*: S. **296. 297. 513**.
 5. *Quadratura parabolae*: S. **296**.
4. BARROW, I., *Lectiones geometricae: In quibus (praesertim) generalia curvarum linearum symptomata declarantur*. London 1670. Titelaufgabe in: *Lectiones XVIII ... in quibus opticorum phaenomenon genuinae rationes investigantur, ac explicantur. Annexae sunt Lectiones aliquot geometricae*. London 1672 [Marg.]: N. **43***. S. **313. 563**. — Ergänzte Titelaufgabe in: *Lectiones opticae et geometricae*. London 1674; Nachdr. der *Lectiones geometricae Hildesheim* [u. a.] 1976: S. **301. 309**.
- BARTHOLIN, R. [Hrsg.] s. SV. N. 9,1.
5. BERTET, J., Bertet an Wallis, 1. Dezember 1671. [Gedr.: SV. N. 38,6 S. 355–358; auch in: *WO* II S. 410–413; Marg.]: S. **442**. — s. a. SV. N. 21,73. 21,76. 38,8.
6. BRONCKER, W., Brouncker an Oldenburg, 18. Oktober 1673. In: *Philosophical Transactions* vol. 8, 1673, S. 6149 f. [Auch in: *OC* X S. 291 f.]: S. **297**.
7. CAVALIERI, B.
 1. *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bologna 1635; 2. Aufl. ebd. 1653: S. **296. 313**.
 2. *Exercitationes geometricae sex*. Bologna 1647; Nachdr. Urbino 1980: S. **296**.
- CLERSELIER, Cl. de [Hrsg.] s. SV. N. 10,5.
8. COLLINS, J., Collins an Gregory, 29. Oktober 1675. [Gedr. u. a.: *GT* S. 337–343]: S. **301**. — s. a. SV. N. 38,7.
9. DEBEAUNE, Fl.,
S c h r i f t e n :
1. *De aequationum natura, constitutione et limitibus, opuscula duo*. Hrsg. R. Bartholin. In SV. N. 14,2 Tl II S. 49–152: S. **21. 22**.
B r i e f e :
2. Debeaune an Roberval, 16. Oktober 1638. [Gedr.: *DO* V S. 517–524; auch in: MERSENNE, *Correspondance* VIII, S. 139–152): S. **600**. — s. a. SV. N. 10,7.
10. DESCARTES, R.
S c h r i f t e n :

1. *Discours de la Methode ... Plus La Dioptrique. Les Météores. Et La Géométrie. Qui sont des essais de cete Methode.* Leiden 1637 [auch in *DO VI* S.1–515.]; Nachdr. Osnabrück 1973; Lecce 1987. [Darin SV. N. 10,2, 10,3.]
2. *La Dioptrique.* In SV. N.10,1 S.1–153 (2. Zählung) [auch in *DO VI* S.79–228]; lat. Fassung u. d. T. *Dioptrice* in SV. N.10,4 S.71–206 [auch in *DO VI* S.584–650]: S. 141.
3. *La Géométrie.* In SV. N.10,1 S.297–413 (2. Zählung) u. ö. [auch in *DO VI* S.367–485]; lat. Fassung u. d. T. *Geometria* hrsg. v. Fr. v. Schooten in SV. N.14,1 S.1–118.; 2. Ausg. in SV. N.14,2 Tl I S.1–106 [Marg.]: N. 4*. 14*. 17*. S. 14. 15. 77. 85. 92. 96. 97. 98. 103. 202. 208. 342. 343. 607.
4. *Specimina philosophiae.* Amsterdam, 1644 u. ö.
5. *Lettres.* Hrsg. Cl. de Clerselier. 3 Bde. Paris 1657–67 [Marg.]; Nachdr. Lecce 2005; lat. Fassung u. d. T. *Epistolae.* Amsterdam 1668–82: N. 90*. S. 84. 449. 463. 598 f. 602. [Darin SV. N.10, 6–9.]
- Briefe:
6. Descartes an Mersenne, 23. August 1638. [Gedr. SV. N.10,5 S.350–363; auch in: *DO II* S.307–343; MERSENNE, *Correspondance VIII*, S.34–69]: S. 369. 598.
7. Descartes an Debeaune, 20. Februar 1639. [Gedr. SV. N.10,5 S.409–416; auch in: *DO II* S.510–523]: S. 179. 598 f. 600. 602.
8. Descartes an (?), Juni (?) 1645. [Gedr. SV. N.10,5 S.458–460; auch in: *DO IV* S.227 bis 232]: S. 599. 602. 605.
9. Descartes an Carcavy, 17. August 1649. [Gedr. SV. N.10,5 S.443–450; auch in: *DO V* S.391–401]: S. 599.
11. *Divers ouvrages de mathematique et de physique. Par messieurs de l'Academie Royale des Sciences.* Paris 1693. [Darin u. a.: HUYGENS, Chr., SV. N.20,2 u. 20,3. ROBERVAL, G. P. de, SV. N.30,1.]
12. EUKLID, *Elemente*: S. 296.
13. FABRI, H.
1. *Opusculum geometricum de linea sinuum et cycloide.* Rom 1659; 2. Aufl. in SV. N.13,3 [Marg.]: S. 510. 511. 514.
2. *Dialogi physici.* [Tl 1]: *In quibus de motu terrae disputatur.* Lyon 1665: S. 445. — [Tl 2]: *Quorum primus est de lumine. Secundus et tertius, de vi percussione et motu. Quartus, de humoris elevatione per canaliculum. Quintus et sextus, de variis selectis.* Lyon 1669: S. 442.
3. *Synopsis geometrica cui accessere tria opuscula, nimirum; De linea sinuum et cycloide; De maximis et minimis, centuria; et Synopsis trigonometriae planae.* Lyon 1669 [Marg.]: S. 510. 511. 514.
14. *Geometria*
1. *Geometria*, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita; nunc autem cum notis Florimondi de Beaune ... in linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten. Leiden 1649. [Darin: DESCARTES, R., SV. N.10,3; DEBEAUNE, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*, S.119–161; SCHOOTEN, Fr. v., SV. N.32,1; ders., *Additamentum*. S.295–336]
2. *Geometria*, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum notis Florimondi de Beaune... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten ... Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus ... exornata. 2 Tle. Amsterdam 1659–61 [Marg.]. [In Tl I: DESCARTES, R., SV. N.10,3; DEBEAUNE, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*; SCHOOTEN, Fr. v., SV. N.32,1; ders., *Appendix de cubicarum aequationum resolutione*. 2. Aufl.; ders., *Additamentum*; HUDDE, J., SV. N.19; HEURAET, H. v., SV. N.18. In Tl II: SCHOOTEN, Fr. v., *Principia*

- matheseos universalis, seu introductio ad geometriae methodum Renati des Cartes*. Hrsg. E. Bartholinus. 2. Aufl.; ders., *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*. Hrsg. P. v. Schooten; Debeaune, Fl., SV. N. 9,1; Witt, J. de, SV. N. 40.]: S. 84. 234.
15. GREGORY, J.
 1. *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Padua 1667; Nachdr. ebd. 1668 [Marg.]: S. 115. 296. 313. 332. 336. 337. 351. 352. 354.
 2. *Geometriae pars universalis*. Padua 1668 [Marg.]: S. 115. 272. 296. 297. 313. 340. 346.
 3. *Exercitationes geometricae*. London 1668 [Marg.]: N. 47*. S. 115. 296. 313.
16. GULDIN, P., *Centrobaryca*. Bd 1, Buch I, Wien 1635; Bd 2, Buch II–IV, Köln 1640–1641.: S. 297. 434. 436. 508. 516. 521. 528. 554.
17. HERIGONE, P., *Cursus mathematici tomus sextus ac ultimus, sive supplementum*. Paris 1644: S. 84. 463.
18. HEURAET, H. v., *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*. In SV. N. 13,2 TI I S. 517–520 [Marg.]: S. 8. 132. 138. 234. 297. 374. 393.
19. HUDDE, J., *Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit*. In SV. N. 14,2 TI I S. 401–516 [Marg.]: S. 14. 59. 84. 145. 214. 343. 583. 616. 620.
20. HUYGENS, Chr.
 S c h r i f t e n :
 1. *De circuli magnitudine inventa*. Leiden 1654 [auch in *HO XII* S. 113–181]: S. 115. 296.
 2. *Demonstratio regulae de maximis et minimis*. 1667. Ms. [Gedr.: SV. N. 11 S. 326–330; auch in: *HO XX* S. 229–241]: S. 465.
 3. *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum*. 1667. Ms. [Gedr.: SV. N. 11 S. 330 bis 335; auch in: *HO XX* S. 243–255]: S. 465.
 4. *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. Paris 1673 [Marg.]; Nachdr. London 1966; [auch in *HO XVIII* S. 69–365 u. XVI S. 315–318]: S. 15. 31. 115. 135. 136. 272. 282. 297. 535.
 5. *Ovale de Descartes en verre*. 1676/1677 u. 24. März 1678. Ms. [Gedr.: *HO XIX* S. 424 bis 426]: S. 15.
 6. *Traité de la lumiere*. Leiden 1690. Nachdr. u. a. London 1966; Brüssel 1967; Eindhoven 1980; [auch in: *HO XIX* S. 451–537]: S. 15.
 B r i e f e :
 7. Huygens an Oldenburg, 27. September 1672. [Gedr. u. a.: *HO VII* S. 228 f.; mit engl. Übers. auch in *OC IX* S. 247–251]: S. 62.
 — s. a. SV. N. 21,79. 21,80.
21. LEIBNIZ, G. W.
 S c h r i f t e n :
 1. *Observata Philosophica in Itinere Anglicano sub initium anni 1673*. Januar bis Februar 1673. Ms. [Gedr. tlw. C. I. GERHARDT, *Leibniz in London*, 1891, S. 165 f.]: S. 301.
 2. Zu Fabri, *Synopsis geometrica*. Frühjahr 1673. Marginalien. [Gedr.: VII, 4 N. 1 S. 3–26]: S. 510.
 3. Zu Huygens, *Horologium oscillatorium*. April/Mai 1673. Marginalien. [Gedr.: VII, 4 N. 2 S. 27–47]: S. 136. 282.
 4. Zu Mercator, *Logarithmotechnia*, und zu Ricci, *Exercitatio geometrica*. Marginalien. Frühjahr 1673. [Gedr.: VII, 4 N. 3 S. 48–56]: S. 296. 332. 468.
 5. *Theoremata notabilia ex Fabio, Slusio et Gregorio Scoto*. Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 8 S. 89–92]: S. 332.
 6. *Mathematicae collectionis plagulae* 1. Spätes Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 16 S. 256–331]: S. 332.
 7. *Mathematicae collectionis plagulae seiunctae*. Spätes Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 17 S. 332–360]: S. 236. 332.
 8. *Varia ad cyclometriam II*. Frühsommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 22 S. 391–408]: S. 332.

9. *De conchoeide*. Frühsommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 24 S. 415–420]: S. **332**.
10. *De ductibus*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 26 S. 425–464]: S. **184**.
11. *Trigonometria inassignabilium*. Sommer 1673. Ms. [Gedr. VII, 4 N. 27 S. 465–500]: S. **19. 184. 292. 305. 332. 339**.
12. *Triangulum characteristicum ellipsis*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 28 S. 501 bis 517]: S. **31**.
13. *Triangulum characteristicum speciatim de trochoidibus et cycloide*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 29 S. 518–535]: S. **535**.
14. *Annotationes ad Honoratum Fabri et Wallisium. De hyperbola*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 34 S. 568–583]: S. **503. 533**.
15. *De paraboloeidum et hyperboloeidum quadratura III*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 39 S. 617–655]: S. **236. 294. 314**.
16. *Methodus tangentium inversa seu De functionibus*. August 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 40 S. 656–710]: S. **97. 102. 204. 355**.
17. *Characteristica geometrica. De lineis et angulis*. Frühjahr – Sommer 1673 (?). Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 9 S. 109–119]: S. **92**.
18. *Ex datis tangentibus invenire figuram*. Herbst 1673. Ms. [Gedr. VII, 4 N. 41 S. 711 bis 724]: S. **14. 62**.
19. *Prima circuli quadratura*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 42 S. 725–753]: S. **101. 109. 296**.
20. *Varia circa functiones tang. invers. quad. circ. et hyperb. ex se invicem*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 44 S. 755–761]: S. **100**.
21. *De quadratura circuli et hyperbolae et aliis curvis inde pendentibus*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 45 S. 762–770]: S. **310**.
22. *Curva quam P. Berthet Osannae proposuerat*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 50 S. 808–812]: S. **317. 318**.
23. *Radicum extractio per seriem infinitam*. Sommer 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 32 S. 346 f.]: S. **3**.
24. *De radicibus ex binomiis quantitibus extrahendis specimen universale*. Sommer 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 33 S. 348–352]: S. **3**.
25. *De appropinquatione circuli per seriem II*. Sommer 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 34 S. 353–360]: S. **3**.
26. *De polygonis circuli deque magno theoremate trigonometrico. Continuatio secunda animadversionum ad tentamen sextum. De summa quadratorum aequanda numero dato*. 25. August 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 47₁₀ S. 308–317]: S. **411**.
27. *De serierum summis et de quadraturis plagulae quindecim*. Okt. 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 38 S. 382–554]: S. **96. 104. 107. 132. 311. 422**.
28. *Arithmetische Kreisquadratur*. Okt. 1674. Ms. [Gedr.: III, 1 N. 39 S. 141–169]: S. **109**.
29. *Duo quadrati aequales numero dato*. August – Oktober 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 64 S. 463 f.]: S. **112**.
30. *De aequationum divisoribus*. Dezember 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 141 S. 904 f.]: S. **229**.
31. *Calculus per instrumenta*. Dezember 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 142 S. 902 f.]: S. **113. 115**.
32. *Aequationis cubicae divisor*. Dezember 1674. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 4 S. 34]: S. **113. 115**.
33. *Schediasma de divisionibus aequationum ope diversarum literarum*. Dezember 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 143 S. 906–910]: S. **229**.
34. *De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa*. Dez. 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 39 S. 555–574]: S. **120. 130. 140. 143. 179. 180. 181. 229. 395**.
35. *De la methode de l'universalité*. ca. 1674. Ms. [Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, S. 97–122]: S. **224**.
36. *Les inventions belles et ingenieuses*. 19. Oktober 1675. Ms. [Gedr.: J. E. HOFMANN, *Über frühe mathematische Studien von G. W. Leibniz*, 1970, S. 104]: S. **248**.
37. *Über Gespräche mit Tschirnhaus, Mathion und Justel*. Am oder kurz nach dem

19. Oktober 1675. Ms. [Gedr. VI, 3 N. 33 S. 382–384]: S. [248](#).
38. *De superficibus coniformium rectilinerorum inprimis cono scaleno*. 30. Oktober 1675. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 16 S. 149–155]: S. [297](#).
39. *Modus datus duabus figuris inveniendi proprietatem communem, ut nullis aliis quam ipsis communis sit*. 31. Oktober 1675. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 17 S. 156–158]: S. [296](#).
40. *Trisectione radicum*. Oktober (?) 1675. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 53 S. 704–709]: S. [298](#).
41. *De quantitibus irrationalibus. De resolutione aequationum*. Oktober (?) 1675. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 54 S. 710–712]: S. [298](#). [431](#).
42. *De inventione theorematum elegantium*. Um den 22. November 1675 [noch]. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 51 S. 697–699]: S. [341](#).
43. *Tangentium applicatio ad numerorum series*. Dezember 1675. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 50 S. 691–696]: S. [355](#).
44. *Imaginarie*. Dezember 1675. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 61 S. 745 f.]: S. [372](#).
45. *Quantitates imaginariae*. Dezember 1675. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 62 S. 747–753]: S. [372](#).
46. *Wallisii series interpolanda pro circulo. Fractionum resolutio dividendo per fractiones. Osannae methodus cum summa numerorum quadratus, alia Diophantea*. Dezember 1675. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 85 S. 569–575]: S. [350](#). [352](#). [420](#).
47. *Connexio inter bisectionem anguli et bisectionem rationis*. Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 20 S. 174 f.]: S. [428](#). [432](#).
48. *Modus quaerendi per analysin problema pythagoricum*. Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 21 S. 176 f.]: S. [428](#). [432](#).
49. *Pro dimetiendis triangulorum sphaericorum areis*. Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 22 S. 178 f.]: S. [443](#). [444](#).
50. *De constructione quantitatum irrationalium*. 2. Hälfte Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 72 S. 839]: S. [434](#). [439](#). [441](#).
51. *De aequatione resolvenda sexti gradus*. 2. Hälfte Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 73 S. 840 f.]: S. [434](#). [439](#). [441](#).
52. *De aequatione sursolida interrupta*. 2. Hälfte Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 74 S. 842–844]: S. [434](#). [439](#). [441](#).
53. *Numeri progressionis harmonicae*. 8. Februar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 54 S. 715 bis 730]: S. [445](#).
54. *Progressionis harmonicae proprietates*. Am oder kurz nach dem 8. Februar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 55 S. 731–733]: S. [445](#).
55. *Linea interminata*. April 1676. Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 65 S. 485–489]: S. [509](#).
56. *De formis seu attributis dei*. 2. Hälfte (?) April 1676. Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 72 S. 513 bis 515]: S. [509](#).
57. *De reminiscencia et de reflexione mentis in se ipsum*. 2. Hälfte (?) April 1676. Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 73 S. 515–517]: S. [509](#).
58. *Quadratura arithmetica circuli et hyperbolae*. 3. Mai 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 58 S. 749–754]: S. [510](#). [515](#).
59. *Series convergentes duae*. Um den 24. Mai 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 64 S. 799–801]: S. [536](#).
60. *De angulo contactus*. Um den 24. Mai 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 32 S. 205]: S. [536](#).
61. *Nova consideratio de locis*. 5. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 30 S. 201 f.]: S. [552](#).
62. *Clavis constructionum et descriptionum per parallelogramma rigida*. Frühjahr bis Sommer 1676 (?). Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 31 S. 203 f.]: S. [557](#).
63. *Series convergentes seu substitutrices*. 26. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 60 S. 757 bis 767]: S. [559](#). [561](#).
64. *De figurarum areis per infinitas series exprimendis*. 28. Juni 1676 – 29. November 1678 und danach. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 61 S. 768–782]: S. [562](#).
65. *Theorema analyticum de maximis et minimis*. April – Juli 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 65 S. 802–804]: S. [480](#).
66. *De generalibus calculis constituendis*. Juli 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 42 S. 606]: S. [598](#).

603. 606. 607.
67. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Ende 1675 bis Herbst 1676. Ms. [Gedr.: Hrsg. E. Knobloch. Göttingen 1993 = Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Dritte Folge Nr. 43]: S. 441. 443. 449. 480. 514. 602. 609.
68. *Series differentiarum generalis*. März bis August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 67 S. 809–813]: S. 611.
69. *De summis serierum generalissima*. August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 68 S. 814 bis 823]: S. 611.
- Briefe:
70. Leibniz für Gallois, Ende 1672. [Gedr.: II, 1 (1926), S. 222–229; II, 1 (2006), S. 342 bis 356; III, 1 N. 2 S. 1–20]: S. 422.
71. Leibniz an Oldenburg, 26. April 1673. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 17 S. 83–89; mit engl. Übers. in *OC IX* S. 593–601]: S. 301.
72. Oldenburg an Leibniz, 10. Oktober 1675. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 65 S. 286–302; mit engl. Übers. in *OC XI* S. 517–521]: S. 297.
73. Leibniz an Bertet, ca. 3. November 1675. [Gedr.: III, 1 N. 68 S. 308–310]: S. 317.
74. Leibniz an Oldenburg, 28. Dezember 1675. [Gedr. u. a.: III, 1 N. 70 S. 326–334]: S. 502.
75. Leibniz an [Gallois?], Ende 1675. [Gedr.: III, 1 N. 73 S. 355–363]: S. 538.
76. Bertet für Leibniz, ca. 9. Februar 1676. [Gedr.: III, N. 6 S. 366–370]: S. 434. 442.
77. Leibniz an Oldenburg, 28. November 1676. [Gedr. u. a.: III, 5 N. II S. 5–11]: S. 15. 619. 622.
78. Tschirnhaus an Leibniz, 27. Januar 1678. [Gedr. u. a.: III, 2 N. 134 S. 314–333]: S. 267.
79. Huygens an Leibniz, 22. November 1679. [Gedr. u. a.: III, 2 N. 359 S. 886–890; *HO VIII* S. 243–245]: S. 15.
80. Leibniz an Huygens, 6. Februar 1691. [Gedr. u. a.: III, 5 N. 6 S. 38–51; *HO X* S. 9 bis 16]: S. 420.
22. LÉOTAUD, V., *Cyclomathia seu multiplex circuli contemplatio*. Lyon 1663: S. 508.
23. MERCATOR, N., *Logarithmotechnia: sive methodus construendi logarithmos nova, accurata, et facilis ... cui nunc accedit vera quadratura hyperbolae, et inventio summae logarithmorum ... Huic etiam jungitur Michaelis Angeli Riccii Exercitatio geometrica de maximis et minimis ...* London 1668 [Marg.]; Nachdr. Hildesheim 1975: S. 296. 332. 422.
24. MERSENNE, M., *L'optique et la catoptrique*. Paris 1651: S. 91. — s. a. SV. N. 10,6.
25. NEWTON, Isaac, *A Letter ... containing his New Theory about Light and Colours*. In: *Philosophical Transactions* vol. 6, 1671/1672, S. 3075–3087: S. 142.
- OLDENBURG, H., s. SV. N. 6. 20,7. 21,71. 21,72. 21,74. 21,77. 38,9. 41,2.
- OZANAM, J., s. SV. N. 21,22. 21,46.
26. PAPPUS, *Mathematica collectio*: S. 203. 508.
27. PASCAL, Bl.
1. *Lettres de A. Dettonville*. Paris 1659. Nachdr. London 1966. [Darin mit separater Paginierung: SV. N. 27,2; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur Hugguens de Zulichem*. Paris 1659; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Shuze Chanoine de la cathedrale du Liège*. Paris 1658; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur A. D. D. S.* Paris 1658; auch in: *PO VIII* S. 325–384 u. *IX* S. 1–149.]
2. *Lettre de A. Dettonville a Monsieur de Carcavy*. Paris 1658. In: SV. N. 27,1. [Darin mit separater Paginierung: *Lettre de Monsieur de Carcavy à Monsieur Dettonville*; *Lettre de Monsieur Dettonville, à Monsieur de Carcavy*; *Traité des trilignes rectangles, et de leurs onglets*; *Propriétéz des sommes simples, triangulaires, et pyramidales*; SV. N. 27,3; *Petit traité des solides circulaires*; SV. N. 27,4.]
3. *Traité des sinus du quart de cercle. Traité des arcs de cercle*. In: SV. N. 27,2. [Auch in:

- PO IX S. 60–104]: S. 554.
 4. *Traité général de la roulette*. In: SV. N. 27,2. [Auch in: PO IX S. 116–133]: S. 514.
28. *Philosophical Transactions*. London 1665 ff.
 — 21. Juni/1. Juli 1669: S. 533.
 — 19./29. Februar 1671/1672: S. 142.
 — 20./30. Januar 1672/1673: S. 62. 109. 204. 225. 323. 342. 437. 463. 584. 607. 614. 620.
 — 23. Juni/3. Juli 1673: S. 109. 204. 225. 323. 342. 437. 463. 584. 607. 614. 620.
 — 17./27. November 1673: S. 297.
29. RICCI, M., *Exercitatio geometrica de maximis et minimis*. Rom 1666. Nachdr. London 1668 zus. mit SV. N. 23 [Marg.]: S. 332. 468.
30. ROBERVAL, G. P. de
 S c h r i f t e n :
 1. *Observations sur la composition des mouvemens, et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes*. Ms. [Gedr.: SV. N. 11 S. 69–111]: S. 502. 502.
 B r i e f e :
 2. Roberval an Torricelli, 1. Januar 1646 [Gedr. u. a.: TORRICELLI, *Opere* III, S. 349 bis 356; MERSENNE, *Correspondance* XIV, S. 1–25]: S. 508.
 — s. a. SV. N. 9,2.
31. SAINT-VINCENT, Gr. de, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii decem libris comprehensum*. Antwerpen 1647 [Marg.]: S. 262. 291. 296. 313. 314. 350.
32. SCHOOTEN, Fr. v.
 1. *In geometriam Renati Des Cartes commentarii*. In SV. N. 14,1 S. 162–294. 2. Aufl. in SV. N. 14,2 Tl I S. 143–344 [Marg.]: S. 80. 84. 85. 103. 123. 127. 179. 207. 281. 284. 369. 463.
 2. [Hrsg.] SV. N. 10,3. 14. 37,2. 40.
33. SLUSE, R.-Fr. de
 1. *Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas ... exhibitae*. Lüttich 1659. 2. Aufl. ebd. 1668 [Marg.]: S. 400. 437. 468.
 2. *An extract of a letter from the excellent Renatus Franciscus Slusius ... to the Publisher ... concerning his new and easie method of drawing tangents to all geometrical curves*. In: *Philosophical Transactions* vol. 7, 1672/1673, S. 5143–47; Nachtrag a. a. O. vol. 8, 1673, S. 6059: S. 62. 109. 204. 225. 323. 342. 437. 463. 584. 607. 614. 620.
34. SNELL VAN ROYEN, W., *Cyclometricus, de circuli dimensione secundum logistarum abacos, et ad mechanicam accuratissima; atque omnium parabilissima*. Leiden 1621: S. 115. 296.
35. TACQUET, A., *Cylindricorum et annularium libri IV*. Antwerpen 1651 u. 1657. — *Liber V*. Ebd. 1659. [Auch in: TACQUET, *Opera mathematica*. Antwerpen 1669]: S. 297. 553. 557.
36. TSCHIRNHAUS, E. W. v.
 S c h r i f t e n :
 1. *Nova methodus tangentis curvarum expeditae determinandi*. In: *Acta Eruditorum*, Dez. 1682, S. 391–393: S. 347.
 2. *Medicina mentis*. Amsterdam 1687. Erweiterte Ausgabe Leipzig 1695: S. 436.
 B r i e f e :
 3. Tschirnhaus an Oldenburg, Anfang Juli 1675. [Gedr. u. a.: OC XI S. 397–401]: S. 347.
 4. Tschirnhaus an Pieter van Gent, 19. Dezember 1675. Ms. [Faksimiledruck in: TSCHIRNHAUS, *Briefe*, S. 13–15]: S. 346.
 — s. a. SV. N. 21,41. 21,44. 21,45. 21,54. 21,68. 21,69. 21,78.
37. VIÈTE, Fr.
 1. *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*. Tours 1593. Nachdr. in: SV. N. 37,2 S. 347–435: S. 115.
 2. *Opera mathematica, opera atque studio Fr. a Schooten*. Leiden 1646 [Marg.]; Nachdr. Hildesheim 1970. [Darin u. a. SV. N. 37,1.]
38. WALLIS, J.
 S c h r i f t e n : 1. *De sectionibus conicis*. Oxford 1655. In: *Operum mathematicorum pars altera*; [auch in: WO I S. 291–354; Marg.]: S. 199.
 2. *Arithmetica infinitorum*. Oxford 1656. In: *Operum mathematicorum pars altera*; [auch

- in: *WO* I S.355–478; Marg.]: S. **199**. **296**. **313**. **329**. **402**. **419**. **442**.
3. *Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum*. Oxford 1658; [auch in *WO* II S.757–860, Marg.; WALLIS, *Correspondence* I S.275–278, 281–300, 302–393, 397–496]: S. **340**. **402**.
4. *Tractatus duo, prior de cycloide ... Posterior ... de cissoide*. Oxford 1659; [auch in *WO* I S.489–569; Marg.]: S. **272**. **297**. **514**.
5. *Mechanica sive de motu tractatus geometricus*. 3 Tle. London 1670–71; [auch in *WO* I S.570–1063; Marg.]: S. **199**. **297**. **313**. **442**. **514**. **533**.
6. *A Treatise of Algebra*, 1685. [Erweiterte lat. Übers. in *WO* II S.1–482; Marg.]: S. **442**.
B r i e f e :
7. Wallis an Collins, 18. September 1668. [Gedr. u. a.: WALLIS, *Correspondence* II, S.596–601]: S. **332**.
8. Wallis an Bertet, 29. Dezember 1671. [Gedr.: SV. N.38,6 S.358–362; auch in: *WO* II S.414–417; Marg.]: S. **442**.
9. Wallis an Oldenburg, 14. Oktober 1673. In: *Philosophical Transactions* vol. 8, 1673, S.6146–6149. [Mit engl. Übers. auch in: *OC* X S.276–283]: S. **297**.
— s. a. SV. N.5.
39. WHITE, R., *Hemisphaerium dissectum. Opus geometricum in quo obiter tractatur de maximis inscriptibilibus, et minimis circumscriptibus ... Accessit Appendix de inscriptione in sphaera conii scaleni, et de superficie eius*. Rom 1648: S. **297**.
40. WITT, J. de, *Elementa curvarum linearum*. Hrsg. Fr. v. Schooten. In SV. N.14,2 Tl II S.153–340: S. **124**.
41. WREN, Chr.
S c h r i f t e n :
1. *Generatio corporis cylindroidis Hyperbolici*. In: *Philosophical Transactions* vol. 4, 1669, S.961f.: S. **533**.
B r i e f e :
2. Wren an Oldenburg, ca 18. Oktober 1673. In: *Philosophical Transactions* vol. 8, 1673, S.6150. [Auch in: *OC* X S.292]: S. **297**.

SACHVERZEICHNIS

Die Grundsprache des vorliegenden Sachverzeichnisses ist deutsch. Leibniz' termini technici erscheinen in Kursivschrift. Zu Leibniz' Terminologie s. a. die Einleitung, insbesondere S. XXXI f. Die Sachworte sind alphabetisch geordnet, die Untergliederung in Einzelfällen auch systematisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur besseren Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern versehen sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einem bestimmten Sachwort zuzuordnen ist. Kursiv gedruckte Seitenangaben beziehen sich auf Herausgebertext.

aequatio

absurda: S. 148. 152.
acephala: S. 77.
ad superficiem: S. 94.
affecta: S. 77. 86.
analytica: S. 192.
arbitraria: S. 22.
collatitia: S. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 66. 98. 106. 183. 231.
continua: S. 74.
cubica: S. 80. 230.
definita: S. 289.
differentialis: S. 616.
divisibilis: S. 44. 289.
factitia: S. 106.
finita: S. 289.
generalis: S. 75. 98. 102. 149 f. 157. 226. 295. 371. 396. 413. 560. 591.
hemicephala: S. 74.
hians, hiatica: S. 74. 79.
identica: S. 23. 84. 217. 225 f. 576.
imaginaria: S. 233.
impossibilis: S. 73. 220. 458. 480.
inadaequata: S. 361. 366.
indefinita: S. 75. 289. 294 f.
indivisibilis: S. 289.
infinita: S. 289.
linearis: S. 50.
notabilis: S. 587.
plana: S. 555.
plena: S. 73. 74 f.
pura: S. 77. 79 f. 84. 86. 91. 177. 180. 216.
quadratica: S. 79 f. 180.

quadraturarum: S. 407.
semiplena: S. 73. 74.
similis: S. 44. 45. 71. 74–77. 84. 85. 97. 105 f. 623.
simplex: S. 50. 616.
tetragonistica: N. 55*. 60*. S. 293. 400. 419.
transcendens: S. 548. 606.
Algebra: S. 31.
s. a. Gleichung. Wurzeln.
amphibolia: S. 28.
Amsterdam: S. 619. 622.
analogia (Proportionalität): S. 110. 231. 233. 340. 412. 493 f.
s. a. Verhältnisrechnung.
Analogie: S. 92. 302. 307. 334. 337.
analysis: S. 31. 73. 132. 233. 321. 323. 333. 487. 539. 541 f. 544.
communis: S. 204.
mirabilis: S. 505.
nostra: S. 546.
quadraturarum: S. 538. 547.
tetragonistica: N. 38*. 40*. 44*. 79*. S. 398.
Analysis situs: S. 526.
s. a. *characteristica*.
analytica quadraturarum: S. 413.
antiparabola s. Hyperbel, höhere, quadratische.
apex
centrobarycae: S. 264. 266.
geometriae: S. 143.
applicata obliqua: S. 260.
s. a. Koordinaten, schiefwinklige.
arithmetica infinitorum: S. 31. 429.
Arithmetik s. Bruch. Neunerprobe. Wurzelziehen.

ars

analytica: S. 148. 471.
describendi: S. 602.
tentamentorum: S. 479.

Atomisten: S. 302.

axis

aequilibrii: S. 265.
conjugatus: S. 316. 391 f. 401. 403. 408–410. 414.
directus: S. 184. 391.
librationis: S. 265–267.
reciprocus: S. 184. 186.

Bertetsche Kurve: N. 45*. 63*.

Fadenkonstruktion: S. 319.

Quadratur: S. 319 f.

Tangente: N. 63*. S. 318 f.

Bewegung (*motus*, *mouvement*): S. 90. 129 f. 192. 202 f. 268. 291. 302. 366. 371. 441. 472. 501. 527 bis 529. 532–534. 536. 563. 575. 589.

Bewegungsgröße: S. 522. 527.

Drehbewegung: S. 268. 302. 528. 532 f.

einfache: S. 302.

Fall: S. 11–13.

Freiheitsgrad: S. 268.

geradlinige: S. 532.

Geschwindigkeit: S. 501.

gleichförmige: S. 11. 94. 328. 501.

kontinuierliche: S. 202 f.

zusammengesetzte: S. 158. 302. 371. 502. 523. 529. 611.

s. a. *compositio motuum*. *concursum motuum*.

Kurven, Konstruktion. *motus*. Pendelbewegung.

Beweis, Beweise

allgemeiner: S. 551.

der Unmöglichkeit: S. 561.

durch Rechnung: S. 460 f.

geometrischer: S. 343.

Methode: S. 410. 481.

Sätze über Eigenschaften von Gleichungen: S. 73.

Sätze von Archimedes über Konoide und Sphäroide: S. 31.

Sätze von Archimedes über Kugel und Zylinder: S. 31. 267.

Satz von Saint-Vincent über Hyperbelquadratur: S. 262.

von Archimedes für die Mantelfläche eines Kugelsegments: S. 554.

von Bertet für Ausflusskurve: N. 64*.

von Descartes für Lösung inverser Tangentenprobleme: S. 16.

von Guldin für Hebelgesetz: S. 434. 436.

von Newton für Dispersion des Lichts: S. 142.

von Römer für Hebelgesetz: S. 420 f.

von Tacquet für Schwerpunkt des Halbkreisbogens: S. 557.

Binom, Binome: S. 26. 27.

cardanisches: S. 41.

Potenzen: S. 454–456. 459–467. 479 f.

Bogen, gespannter: S. 522. 525. 533.

brachylogia: S. 56. 58. 166. 285.

Brennspiegel

Oberfläche: S. 91.

Bruch, Brüche: S. 67. 68. 264. 422. 595. 614.

Näherung durch geometrische Reihen: N. 57*.

calculus

analyticus: S. 114. 125. 217.

differentialis: N. 60*. S. 310.

tangentium: N. 96*.

transcendens: S. 607.

differentiarum: N. 53*. S. 613.

generalis: S. 162. 265. 290. 295. 351. 547. 586. 590.

indefinitus: S. 114.

mirabilis in se reflexus: S. 223.

non tetragonisticus: S. 444.

novus: S. 292. 505.

per lineas: S. 21.

per literas: S. 21.

simplex: S. 366.

tetragonisticus: S. 444.

universalis: S. 615.

verus: S. 58. 164.

campus analyticus novae geometriae: S. 193.

catalogus

curvarum tangentiumque: S. 387.

omnium curvarum quadrabilium: S. 613.

centrobaryca: N. 38*. 44*. S. 416. 552.

nova: N. 87*. S. 563.
centrum agitationis s. Stoßmittelpunkt.
centrum gravitatis s. Schwerpunkt.
cercle generateur: S. 439.
character analyticus: S. 31.
characteristica
 geometrica: S. 92. 281.
 in lineis: S. 244.
 s. a. Analysis situs.
circulus generator: S. 129. 513 f.
clavis vera: S. 547.
combinatio subcontraria: S. 244.
compendium: S. 58. 63. 106. 114. 127. 325. 341. 594.
 calculi: S. 66. 314.
 constructionum: S. 79.
 Huddenü: S. 214.
compositio motuum: S. 158. 302. 502. 611.
concursum motuum: S. 302.
coniforme: S. 267 f.
 ellipticum: S. 267.
conoeides: S. 31. 90 f. 94. 267. 296 f. 536.
constitutio aequationum: S. 21 f.
constructio aequationum s. Gleichung, Konstruktion.
conus: S. 26. 111. 239. 241. 267. 297.
 rectus: S. 239. 267.
 scalenus: S. 267. 297. 536.
corps: S. 420.
corpus: S. 292. 302. 521–524. 527. 534.
crementum s. Differenzen, Zuwächse.
curva
 analytica: N. 13*. 26*. S. 92. 139. 192 f. 322. 380. 387. 392. 486. 589. 596.
 quadrabilis: S. 392.
 simplex: S. 485–488. 589.
 simplex rationalis: S. 473–475. 481. 485.
commensurabilis: S. 254.
concava: S. 252. 410.
construens: S. 132.
convexa: S. 252. 410.
describens: S. 129. 157 f. 192–194.
descriptrix: S. 157.
excipiens: S. 194.
generatrix: S. 370 f.

geometrica: S. 92. 116. 139. 322. 380.
homogena: S. 8–10. 13. 138 f. 156. 177.
homologa: S. 7–11.
imaginaria: S. 353.
indeterminata: S. 288.
materialis: S. 319. 366.
mensurabilis: N. 30*.
non analytica: S. 139.
non descriptibilis: S. 269.
non geometrica: S. 139.
non transcendens: S. 387.
parallela: S. 531 f.
protensa: N. 45*.
quadrabilis: S. 234. 394. 396. 538. 613.
quadratrix: S. 10. 203. 269. 590.
rationalis: S. 472 f. 551.
reciproca: S. 475. 478.
rectificabilis: S. 269.
recurrens: S. 110.
recurvata: S. 110.
semianalytica: S. 192 f.
similis: S. 129. 193.
solida: S. 89.
sygnota: S. 168.
transcendens: S. 422. 607.
vix tractabilis: S. 395.

Definition

der Quadratrix der Hyperbel: S. 13.
 von *curva rationalis*: S. 473.
 von *dignitas*: S. 468.
 von *figura simplex*: S. 450.
 von *latus lineae*: S. 456 f.
 von *ordinata*: S. 467.
 von *potentia*: S. 468.
 von *potentia lineae*: S. 456 f.
 von *similitudo rerum*: S. 411.
differentia, differentiae
 homogena: S. 100. 157.
 temporum: S. 12.
 Differentialgleichung: N. 55*. S. 66. 325. 326–328. 343 f. 365 f. 385 f. 394. 396 f. 506. 542. 588 f. 599 bis 601. 603. 615–617.
 s. a. *aequatio tetragonistica*.
 Differentialrechnung: N. 96*. S. 607 f.
 Differentiationsregeln

- Kettenregel: S. 614.
 Potenzregel: S. 603. 612 f.
 Produktregel: S. 328–330. 365.
 Quotientenregel: S. 328–330. 593–595.
 Notation: S. 293 f. 322. 324. 332.
 Zusammenhang mit Integralrechnung: N. 89*.
 S. 204. 293 f.
 s. a. *calculus differentialis*. *calculus differentia-*
rum. Tangenten.
differentioli: S. 535. 570.
 Differenz, Differenzen: S. 262. 400. 535. 608. 622.
 von Abszissen bzw. Ordinaten: N. 5*. 22*. 94*.
 S. 7. 32. 35. 37. 100 f. 103 f. 260. 293 f. 311.
 313. 353. 354. 367–371. 383. 386. 394 f. 501.
 503. 538. 567. 601. 606. 615.
 Quadrat der Ordinate: S. 19. 25.
 von Reihengliedern: S. 293. 355. 606.
 Zuwächse: S. 130. 143. 184. 187. 190 f. 203 f.
 Differenzenfolgen: S. 606.
 Differenzenschema: S. 6.
dignitas: S. 454. 468 f. 474–476. 481. 485.
 Dimensionen: S. 84. 167. 199. 230. 235. 292. 293.
 395. 471 f. 485. 583. 599.
 Dioptrik: S. 15. 141.
 Dreieck, Dreiecke
 ähnliche: S. 17. 42. 124 f. 136. 141. 158. 161. 162.
 184. 186. 187. 195. 244 f. 257. 294. 312. 318.
 339. 350. 367. 374. 393. 427. 432. 477. 492.
 496 f. 503. 505. 535. 555. 564. 600.
 charakteristisches: N. 22*. 59*. S. 125. 137–139.
 157. 243–246. 253. 254. 391. 432. 518–521.
 527.
 s. a. Integralrechnung, Integraltransformation.
 einbeschriebenes: S. 349–353.
 maximales: S. 350. 548.
 Fläche: S. 296. 322.
 gleichschenkliges: S. 123 f.
 gleichseitiges
 Schwerpunkt: S. 420.
 rechtwinkliges: S. 17. 112. 141. 241. 544.
 Schwerpunkt: S. 362.
 Seitenberechnung: S. 520.
 Dreieckslehre
 der Indivisiblen: S. 351. 361. 367–371.
 Dreiseit (*trilineum*): S. 8 f. 12. 249. 511. 511. 540.
 Moment: S. 408–411.
ductus: S. 91. 95. 291. 314. 417. 522. 589 f.
effectus: S. 302. 527.
 Ellipse: S. 23. 34. 71. 71. 95. 111. 129. 164. 238.
 247. 254. 255. 260. 400.
 Gleichung: S. 35. 48. 70. 155. 282–284.
 Konstruktion: S. 533.
 Normale: S. 37. 281. 519.
 Ordinate: S. 37.
 Parameter: S. 280. 287.
 Quadratrix: S. 48.
 Quadratur: N. 36*. S. 267. 272. 282. 547 f.
 Rektifikation: N. 6*. 39*. S. 246 f. 415. 519. 522.
 Abhängigkeit von Hyperbelquadratur: S. 155.
 267.
 Abhängigkeit von Kreisquadratur: S. 267.
 Bogenelement: S. 34 f. 246 f. 274. 278. 521.
 521.
 Bogenlänge: S. 34.
 Moment des Bogens: S. 34. 282. 285. 414.
 Schwerpunkt des Bogens: S. 34. 34. 37.
 Sektor: S. 333. 355.
 Subnormale: S. 285.
 Subtangente: S. 258.
 Tangentenrechnung: S. 258. 284 f.
 Zentrum: S. 149.
 s. a. Kegelschnitt.
 Ellipsoid s. Sphäroid.
 Engel: S. 602.
 Evolute: N. 66*. S. 130. 133–137. 135. 158. 349.
 386. 432. 523. 529 f. 561.
 Normale: S. 136.
 Quadratur: S. 386.
 Tangente: S. 136.
 Evolvente: N. 16*. 66*. S. 130. 349. 386. 432. 523.
 529 f. 561.
 Normale: S. 136.
 Quadratur: S. 386.
 Subnormale: S. 137.
 Tangente: S. 136. 432.
 s. a. *curva parallela*.
 Exponent: S. 63. 260 f. 454–456. 467–469. 474–476.
 478 f. 481–483. 491 f. 577. 589.
 Exponentialfunktion: N. 1*.

- Extremwerte: N. 24*. S. 14. 109–111. 109. 342. 350. 444. 449–51. 458. 561. 577. 584. 608.
Bestimmung: S. 198. 199. 348. 501. 580 f. 583 f.
Methode von Fermat: S. 348. 463–465. 598.
Beweis: S. 463. 465.
- Fass: S. 239.
- Figur, geometrische s. Dreieck. Dreiseit. *figura*.
gnomon. Körper, geometrischer. Kreis. Kreis-
polygon. Parallelogramm. Polygon. Quadrat.
Rechteck. Trapez. Treppenfigur.
- figura*
ambigua: S. 289.
analytica: S. 130. 202. 204. 288. 392. 472. 485 f. 542.
simplex: S. 486.
angulorum: S. 254. 503. 503.
concava: S. 111.
convexa: S. 111.
corresolubilis: S. 39. 41.
curvilinea: S. 40. 245. 288. 310 f. 398. 509.
describens: S. 157. 387.
dioptrica: S. 15.
finita: S. 353.
generalis: S. 363. 546.
geometrica: S. 3. 14. 202.
homogenea: S. 24. 95. 245. 267. 269. 278 f. 353. 566.
immensurabilis: S. 416.
indefinita: S. 289.
infinita: S. 354.
multilatera: S. 104.
non stationaria: S. 409.
plana: N. 53*. S. 28. 267. 291. 532.
primaria: S. 295.
quadrabilis: S. 5. 39. 77. 202. 204. 236. 269. 288. 369. 394. 401 f. 403. 538 f. 576.
quadranda: S. 290. 622.
quadratrix: S. 8. 10. 13. 202. 269. 288.
rationalis: S. 594.
directa: S. 472.
reciproca: S. 417.
recurrens: S. 40.
retrograda: S. 409 f.
scalaris: S. 547.
secundaria: S. 295.
segmentorum: N. 25*. 31*. S. 10 f. 13. 353 f. 507.
similis: S. 189. 401.
simplex: N. 68*. S. 486.
sinuum: S. 40. 510. 576.
summatrix: S. 279. 426 f. 594.
sygnota, sygnotos, σύγγ(γ)νωτος: S. 88. 117. 331. 392. 413. 416. 419.
sylloga: N. 73*. S. 392.
symmetra: S. 34. 378. 392.
syndota: S. 392.
transcendens: S. 323.
vera: S. 354.
finis centrobarrycae: S. 267.
Fläche, gekrümmte: S. 89–92. 291. 315 f. 614.
Erzeugung: S. 291. 302.
Tangentialebene: S. 104. 614.
flexus: S. 560.
contrarius: N. 10*. S. 560.
focus s. Kurve, Brennpunkt.
Folge, Folgen
Bildungsgesetz: S. 352.
Differenzenfolge: S. 351.
diskrete: S. 311. 355.
Fortsetzung: S. 402.
Grenzwert: S. 333. 351. 354.
kontinuierliche: S. 311. 355.
konvergente Doppelfolgen (Gregory): S. 333. 351 f. 354 f. 561.
Methode: S. 351 f. 354 f.
rekursiv definierte: S. 222. 561.
spezielle
 $(a + y)(a - y)$: S. 8. 9.
$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2^{n-1+k}}$$
: S. 550. 550.
arithmetische: S. 84. 99–103. 145. 151. 214. 228. 319. 324–328. 343. 364. 377. 566. 591. 609 f. 616–618.
geometrische: N. 57*. S. 3. 6. 260–262. 328. 420. 442. 606.
harmonische: S. 3. 355. 402.
quadratische: S. 609 f.
reziproke figurierte Zahlen: S. 311. 402.

- reziproke Polynome ($\frac{1}{y^2-1}$): S. 606.
- transzendente: S. 354. 547.
- von geometrischen Größen: S. 157. 261.
- Bogenelemente: S. 137 f.
- Differenzen von Ordinaten: S. 104. 156. 260.
- Flächen: S. 104. 262.
- Ordinaten: S. 3. 97. 104. 156. 260–262. 393.
- Polygone: S. 104. 349.
- Tangenten: S. 453.
- von Gleichungen: S. 264. 307–309.
- forma demonstrandi*: S. 481.
- formula*
- arbitraria*: S. 85. 607.
- generalis*: S. 85. 622.
- plena*: S. 69.
- simplex*: S. 85. 596.
- frustum*
- conicum*: N. 32*.
- cylindricum*: S. 241.
- functio*: S. 3. 131.
- fundamentum*: S. 29. 62. 293.
- calculi*: S. 240. 294.
- Funktion s. *functio*. Kurve.
- geometria*
- hyperbolica*: S. 422.
- nova*: S. 193.
- Geometrie: S. 101. 132. 143. 321. 527. 599. 617.
- der Indivisiblen: S. 313 f. 351. 523.
- Gerade: S. 146. 155. 392. 451.
- Gleichung: S. 8. 62 f. 205. 230. 342. 417. 451 f.
- Schnittpunkt: S. 265 f.
- Tangentenrechnung: S. 205. 330.
- Glas, optisches: S. 141–143.
- konisches: S. 142.
- planes: S. 142.
- sphärisches: S. 142.
- Gleichung, Gleichungen
- Division: N. 28*. S. 233. 289 f. 581. 584.
- Eliminierung von irrationalen Termen: S. 173. 218. 235.
- Koeffizienten: S. 307.
- Koeffizientenvergleich: N. 73*. S. 21–23. 44. 48 f. 51–56. 51. 84. 86 f. 97 f. 103. 105 f. 142. 144 bis 146. 148. 177 f. 183. 228. 231. 288–290. 294. 343. 586. 607 f. 622 f.
- Methode von Descartes: S. 22. 343.
- Konstruktion: S. 79. 229. 231. 307–309. 547. 612.
- kubische: S. 230.
- Wurzeln: S. 80.
- mit Doppelwurzeln: N. 73*. 8*. S. 21–23. 44. 59–63. 83–87. 84. 94. 108. 142. 144–146. 148–152. 149. 174–179. 180. 182 f. 210–212. 214. 216. 218. 220. 223–225. 228. 247. 342 f. 585–587. 607.
- Methode von Hudde: S. 84 f. 99–103. 100. 145. 148. 151. 214. 216. 228. 343. 357. 616.
- mit Dreifachwurzeln: S. 588.
- mit einer Unbekannten: S. 22. 75 f. 87. 142. 149 f. 199. 342.
- mit zwei Unbekannten: S. 21. 62. 73 f. 76. 83. 86 f. 94. 97. 101. 104. 150. 199.
- mit mehreren Unbekannten: S. 19. 66. 83. 94. 97 bis 104. 142. 157. 212 f. 214. 216. 218. 220. 222. 233. 560.
- mit entgegengesetzten Wurzeln: S. 80. 177. 180.
- mit imaginären Wurzeln: S. 229. 233. 372.
- quadratische
- Wurzeln: S. 79 f. 180. 360.
- Substitution: N. 97*.
- transzendente: S. 548. 606.
- Umordnung: N. 28*.
- unendliche: S. 289.
- Zerlegung: N. 28*. S. 232.
- s. a. *aequatio. constitutio aequationum*. Differentialgleichung. Ellipse. Gerade. Hyperbel. Kegel. Kegelschnitt. Konoid. Kreis. Kugel. Kurve. Parabel. Verhältnisrechnung.
- gnomon*: S. 407 f.
- Größe (*magnitudo*): S. 115. 127. 192. 222 f. 245 f. 264 f. 267. 302. 305. 392. 396. 423. 486. 488. 561.
- transzendente: S. 561.
- Größe (*quantitas*)
- geometrische: S. 576.
- irrationale: S. 173. 218. 231. 235. 366. 614.
- Kontrollgröße: S. 57.

- negative: S. 48. 71. 109. 111. 114. 284. 411. 475. 479. 620.
 positive: S. 34. 71. 109. 111. 414. 548.
 rationale: S. 90. 231. 330. 399. 422. 428 f. 606.
 zusammengesetzte: S. 332 f. 351 f. 354. 561.
- hastaria* s. Konchoide.
- Hebelgesetz: S. 420 f. 434. 436.
 Beweis von Guldin: S. 420. 434. 436.
 Beweis von Rømer: S. 420 f.
- Homogenität: S. 292.
- Hyperbel (*hyperbola*, *hyperbola conica*): S. 3. 9. 19. 23. 39. 42. 71. 71. 117. 121. 123–128. 129. 155. 164. 197. 199. 230. 250. 253. 260 f. 307–309. 392. 418. 426 f. 543. 547. 601. 603.
circularis: S. 34. 94. 316.
figura segmentorum: S. 13.
 Fläche: S. 241 f. 576.
 unbegrenzte: S. 550.
 gleichseitige: S. 241. 249. 270–272. 273.
 Gleichung: S. 33–37. 48. 65. 70. 155. 155. 164. 167. 227. 231. 250. 260. 271. 282. 284. 287. 300. 388. 393. 562.
 inverse Tangentenrechnung: S. 65 f. 98–100.
 Normale: S. 36. 38. 65. 373. 374–380.
 Ordinate: S. 37. 199. 503.
 Differenzen: N. 5*. S. 37. 65. 100 f. 104. 260. 270. 378.
 Parameter: S. 34. 94. 121. 241.
 Polygon: S. 24.
primaria: S. 297. 313. 316.
 s. a. *circularis*.
- Quadratrix: S. 8. 11–13. 203. 296.
 s. a. Logarithmus.
- Quadratur: S. 8. 13. 19. 34. 132. 155. 173. 195. 197. 202 f. 231. 239. 241 f. 249. 261 f. 267. 268. 271. 278. 282. 299. 313. 314. 374. 376. 393. 414. 416 f. 422. 538. 545. 547 f. 561. 570. 570. 618. 622. 622.
 Abhängigkeit von Kreisrektifikation: S. 174.
 Abhängigkeit von Kreisquadratur: S. 129. 167. 543.
 Abhängigkeit von Parabelrektifikation: S. 174. 547. 618.
 näherungsweise: S. 241. 296.
- Reihe: S. 299.
- Rektifikation: N. 6*. 39*. 52*. S. 24–26. 173. 195. 297. 415. 533.
 Abhängigkeit von Hyperbelquadratur: S. 155. 267. 271 f. 271.
 Abhängigkeit von Kreisquadratur: S. 267.
 Bogenelement: N. 5*. S. 34 f. 37. 41. 270 f. 273 f. 388 f.
 Bogenlänge: S. 34. 41.
 Moment des Bogenelements: S. 271. 388. 389.
 Moment des Bogens: S. 34. 37–40.
 Näherung: S. 373.
 Schwerpunkt des Bogens: S. 34. 36–40. 195. 271.
- Rollkurve: S. 378–380.
- Segment: S. 547.
 Fläche: S. 250. 254. 338. 340. 299.
 Sektor: S. 249. 333. 336 f. 339. 355.
 Subnormale: S. 38. 98. 285. 285. 376–378.
 Subtangente: S. 65. 123. 199. 227. 249.
 Tangente: S. 37. 41. 65. 123–128. 227 f. 270. 373. 376 f.
 Tangentenrechnung: S. 37. 199. 249. 284 f. 470 f. 475.
 Transmutation: S. 248–250.
 ungleichseitige: S. 272.
 Zentrum: S. 149. 270.
 s. a. Hyperboloid. Kegelschnitt.
- Hyperbel, höhere (*hyperbolocides*): S. 8. 19. 77. 117. 201. 307–309. 392. 401. 540.
 Differenzen der Ordinaten: S. 595.
 kubische: S. 26.
 Ordinate: S. 28.
 Quadratur: S. 26.
- quadratische (*antiparabola*, *hyperbola cubica*):
 N. 64*.
 Fläche eines Segments: S. 262.
 Gleichung: S. 262.
 Ordinate: S. 100.
 Quadratur: N. 65*. S. 434. 442.
 Tangentenrechnung: S. 471.
- Quadratur: N. 80*. S. 416. 442. 538.
 Methode von Bertet: N. 64*. S. 434.
 Methode von Wallis: S. 442. 442.
 Tangenten: N. 68*.

- Hyperboloid
 Oberfläche: S. 65. 125. 296 f. 533.
 s. a. Konoid.
- incrementum* s. Differenzen, Zuwächse.
- indeterminata*
correctangula: S. 403.
transcendens: S. 560.
- index*: S. 413. 577. 589–592.
- Indivisiblen: S. 302. 313. 325. 349.
 s. a. Dreieckslehre der Indivisiblen. Geometrie der Indivisiblen.
- Induktion: S. 329. 402.
- infinitesima*
axis: S. 353. 362.
temporis: S. 12.
- Infinitesimalen s. *differentiola*. Differenz. *infinitesima*. unendlich (klein).
- Instrument zur Konstruktion von Gleichungen: S. 612.
- Integralrechnung
 Integraltransformation
 algebraische Umformungen: N. 28*. 29*. 54*. 85*.
 charakteristisches Dreieck: N. 59*. S. 253 f. 257.
 Transmutationssatz: N. 25*. 31*. 34*. S. 181 bis 183. 185. 244. 294. 314. 346 f. 352–354. 359. 519. 509. 537.
- Integrationsregeln: S. 293. 562.
 partielle Integration: S. 263 f. 268. 292.
 Potenzregel: S. 291–294. 304 f. 359. 612 f.
 Produktregel: S. 290 f. 293. 328 f.
 Summenregel: S. 294.
- Notation: S. 264. 292–294. 301. 322. 332. 400.
- Zusammenhang mit Differentialrechnung: N. 89*. S. 204. 293 f.
 s. a. *calculus tetragonisticus*. Differentialgleichung. Komplanation. Quadratur. Rektifikation. Tafelwerke. Tangentenmethode, inverse.
- Interpolation, Wallissche: S. 402.
- irrationalitas*: S. 235. 366.
- Kegel: S. 26. 111.
 allgemeiner: S. 267 f.
 gerader: S. 267.
 Volumen eines Abschnitts: N. 32*.
 Huf bzw. Stumpf: S. 26.
 Oberfläche: S. 267. 297.
 Gleichung: S. 90.
 schiefer: S. 267.
 Oberfläche: S. 297. 536.
 s. a. *conus*.
- Kegelschnitt: S. 31. 110 f. 142. 168. 281. 296. 541.
 Gleichung: S. 31. 35. 190. 205. 343. 382. 413.
 Moment der Zuwächse: S. 184. 190.
 Normale: S. 413.
 Ordinate: S. 31 f. 35.
 Differenzen: S. 32. 35.
 Quadratur: N. 41*. S. 129. 168. 184. 189. 190.
 Rektifikation: N. 41*. 56*.
 Bogenelement: S. 33. 35. 246. 273 f. 382–385. 413.
 Moment des Bogens: S. 287. 413 f.
 Rollkurve: S. 385 f.
 Differentialgleichung: S. 385 f.
 Subnormale: S. 413.
 Tangentenrechnung: S. 205–207. 330 f. 382.
 s. a. Ellipse. Gerade. Hyperbel. Konoid. Kreis. Parabel.
- Körper, geometrischer: S. 291. 302. 534.
 Konstruktionsmethode: S. 267 f.
 s. a. Fass. *frustum*. Hyperboloid. Kegel. Konoid. Kugel. Paraboloid. Prisma. Rotationskörper. Schiefkörper. *solidum*. Sphäroid. Torus. *ungula*. Zylinder.
- Komplanation: N. 41*. 53*. S. 257.
- Konchoide: S. 340. 437.
 Fläche: S. 339 f. 339.
 Wendepunkt: S. 437.
 Zweig (*hastaria*, *piqueline*): N. 88*. S. 345. 363.
 Extremwert: S. 577–584. 581.
 Konstruktion: S. 582.
- Konoid: S. 90. 267.
 Oberfläche: N. 6*. 41*. S. 94.
 Gleichung: S. 90 f. 94.
 Rauminhalt: N. 41*.
 schiefes: S. 536.
 s. a. *coniforme ellipticum*. *conoeides*. Hyperboloid. Paraboloid. Sphäroid.

- Konstruktion: S. 412.
 geometrische: S. 115. 131. 343. 350.
 s. a. Bertetsche Kurve. Ellipse. Gleichung. Instrument. Körper, geometrischer. Konchoide. Kreis. Kurve. Quadratrix (Dinostratus). Quadratrix (Leibniz). Spirale, Archimedische.
- Kontrollgrößen und -zahlen: S. 45. 45. 47. 47. 49 bis 51. 56–58.
 s. a. *litera fictitia*. *numerus fictitius*. *numerus sumtitius*. *quantitas fictitia*.
- Koordinaten: S. 267. 607 f. 614.
 Polarkoordinaten: S. 179. 361. 366. 367. 380. 559. 583 f. 608. 609 f. 611. 614.
 rechtwinklige: S. 40. 179. 179. 263. 581. 583 f.
 schiefwinklige: S. 179. 179. 260. 518–521. 546. 600 f. 614.
- Koordinatensystem
 Transformation: S. 127. 195. 207. 284. 591. 607 f.
 Methode von Schooten: S. 127. 195.
- Kraft (*vis*): S. 199. 527.
- Kreis: S. 42. 43. 66. 70. 71. 71. 83. 96–98. 129. 142. 149. 153. 188. 189. 219. 308. 372 f. 375 f. 418. 507. 540. 579. 584. 589. 590. 607.
 Abszisse: S. 503.
 Evolvente: S. 573.
figura segmentorum: S. 10 f. 101. 237. 300. 435. 507. 507. 545.
 Reihenentwicklung: S. 435.
 Fläche: S. 574. 576. 576.
 Gleichung: S. 35. 70. 164. 167. 173. 179. 300. 342. 348. 400. 403.
 Halbkreis: S. 94 f. 95. 156. 498. 502. 573 f. 576.
 Bogen: S. 501. 572. 576. 576.
 Schwerpunkt des Bogens: N. 72*.
- Konstruktion: S. 302. 611.
- Möndchen: S. 437.
 des Hippokrates: S. 436 f.
- Normale: S. 375.
- Ordinate: S. 7. 7. 116. 311 f. 314. 403.
 Differenzen: S. 611.
 Moment: S. 401.
- Quadrant: S. 94 f. 115. 253. 303. 334–340. 496. 513 f. 563. 565. 576.
- Moment: S. 311–313. 405.
- Quadratrix: S. 8. 48. 203. 296. 376.
- Quadratur: N. 82*. S. 34. 35. 70. 101. 109. 129. 167. 173. 202 f. 238. 239. 241. 254. 259. 267. 272. 278. 299 f. 376. 401. 403. 405. 414. 416. 499–501. 503. 538. 542. 545. 547. 549. 551. 561. 570. 576. 585. 589. 593. 596. 616.
 Abhängigkeit von Hyperbelquadratur: S. 543.
 Abhängigkeit von Kreisrektifikation: S. 174. 547.
 Abhängigkeit von Parabelrektifikation: S. 174.
 Moment der Fläche: S. 403.
 näherungsweise: S. 241. 296.
- Radius: S. 556. 556. 558. 576. 576.
- Rektifikation: S. 7 f. 40. 173. 297. 500. 523. 547. 557. 576. 596.
 Bogenelement: S. 34 f. 35. 275. 277. 373. 499. 507. 507. 535. 541. 544.
 Moment des Bogens: S. 339. 554 f. 558.
 näherungsweise: S. 115 f. 609.
 Schwerpunkt des Bogens: N. 82*. 83*.
 Unmöglichkeit: S. 606.
- Rollkurve: S. 159–164. 173.
- Segment: S. 7. 10. 236. 247. 339 f. 339. 544. 555.
- Sehne: S. 95. 498 f. 557. 557.
 Mittelpunktswinkel: S. 381.
 Winkel mit der Tangente: S. 381.
- Sekante: S. 254. 336 f. 339.
- Sektor: S. 240–242. 302. 332 f. 355. 541. 544.
- Subnormale: S. 101.
- Subtangente: S. 237. 541 f.
- Tangente: S. 237. 318. 336–340. 544. 555.
- Transmutation: S. 237 f. 253 f. 300. 338–340. 346. 435. 544 f.
- Umfang: S. 40. 88. 225. 535. 554–556. 557 f. 557.
- Viertelkreisbogen
 Länge: S. 496. 514. 563. 572.
 Moment: S. 313.
- Zylinder: S. 95.
 s. a. *cercle*. *circulus*. Kegelschnitt. Sinus. *sinus*.
 Zykloide.
- Kreispolygon: S. 241.
 umbeschriebenes
 Quadrat: S. 299.
- Kreisreihe: S. 299. 596.

- Kugel: S. 90. 297.
 Oberfläche: S. 34. 267. 297. 513.
 Gleichung: S. 90.
 s. a. Konoid. Sphäroid.
- Kurven: S. 146. 147. 267. 291. 315 f. 606.
 Abszisse: S. 269. 279. 292. 311. 394 f.
 algebraische: N. 13*. 26*. S. 10. 130. 288 f. 291. 392. 485 f. 542. 589.
 Gleichung: S. 174. 202. 264. 288. 298. 342. 347 f. 446. 447. 619. 623.
 höheren Grades: S. 264. 446. 448. 623.
 zweiten Grades: S. 264. 298. 347 f. 447. 540. 619 f. 622.
 s. a. *curva analytica. curva geometrica. curva non transcendens. figura analytica. figura geometrica.*
- Berührungskreis: S. 149.
- Bildungsgesetz, Gleichung: S. 3. 14. 24. 94. 110. 131 f. 149. 157. 174. 199. 254. 351 f. 391–393. 395. 428 f. 585 f. 613.
 s. a. *locus.*
- Brennpunkt: S. 110. 126. 200. 233. 401.
 höhere: S. 110 f.
- Konstruktion: S. 132. 561. 599.
 durch (zusammengesetzte) Bewegungen: S. 158. 575.
 Fadenkonstruktion: S. 233.
 näherungsweise: S. 327 f. 444.
- Krümmungsverhalten: S. 111. 252.
 Konkavität: S. 111. 410.
 Konvexität: S. 410.
- Ordinate: S. 3. 14. 120 f. 138. 351 f. 394 f.
 Pol: S. 110. 129.
- Polygonzug: 104. 107. 155. 251 f. 256 f. 311. 328. 392 f. 444. 515 f.
- quadrerbare: S. 5. 39. 77. 204. 236. 269. 288 f. 331. 369. 392. 394. 401 f. 539. 576.
 Katalog: S. 613.
 Klassifikation: S. 538.
 s. a. *curva quadrabilis. figura quadrabilis.*
- Raumkurve: S. 89.
- Reihenentwicklung: S. 419. 589.
 durch fortgesetzte Division (Mercator): S. 422. 422.
- rektifizierbare: N. 30*.
 s. a. *curva mensurabilis. curva rectificabilis.*
- Schnittpunkte mit Kreis: S. 149. 149.
- Segment: S. 181. 351–354. 539. 588 f.
 Fläche: S. 236. 314. 509. 589.
- Sehne: S. 351–353. 546.
- Sektor: S. 539. 546.
- transzendente: N. 1*. 93*. S. 323.
 Tangenten: S. 422.
 s. a. *curva non analytica. curva non geometrica. curva semianalytica. curva transcendens. figura transcendens. linea non geometrica.*
- Wendepunkt: N. 10*. S. 109.
- Zentrum: S. 129. 200. 401.
 s. a. *curva.* Extremwerte. *figura. functio.* Komplanation. *linea.* Normale. Quadratur. Rektifikation. Subnormale. Subtangente. Tangente.
- Kurven, spezielle
- Ausflusskurve: N. 64*.
- Ordinaten in geometrischer Progression: S. 3.
 Ordinaten in harmonischer Progression: S. 3.
 Ordinaten rekursiv definiert: S. 351 f.
 s. a. Bertetsche Kurve. Ellipse. Exponentialfunktion. Hyperbel. Hyperbel, höhere. Kegelschnitt. Konchoide. Kreis. Logarithmus. Ovale, Cartesische. Parabel. Parabel, höhere. Perlen, Slusesche. Rollkurven. Quadratrix (Dinostratus). Quadratrix (Leibniz). Sinus. Spirale, Archimedische. Trisektrix, Maclaurinsche. Zykloide.
- latus, semilatus*
rectum: S. 34. 94. 121. 169. 241. 272. 280. 287. 323. 351. 373. 396.
transversum: S. 34. 121. 272.
- lex*
calculi: S. 27. 505.
homogeneorum: S. 292.
- Lichtstrahlen: S. 141 f.
- linea*: S. 3 f. 104. 292. 302. 353 f.
analytica: S. 203. 291.
circularis: S. 188.
describens: S. 192.
homogenea: S. 26 f.
irregularis: S. 602.

- meridiana*: S. 334. 337.
non geometrica: S. 27.
quadratrix: S. 203. 291. 570.
sinuum: S. 571 f. 571. 576.
sustinens: S. 192.
- litera fictitia*: S. 56.
 s. a. Kontrollgrößen und -zahlen.
- locus*
ad circumulum: S. 164. 530.
ad circumferentiam circuli: S. 530.
ad curvas: S. 417.
ad ellipsin: S. 23.
ad hyperbolam: S. 23.
ad lineam rectam: S. 266. 369. 394. 417. 504.
ad parabolam: S. 207.
ad rectangulum: S. 159.
ad superficiem: N. 74*. S. 24. 26. 43. 93.
aequationis: S. 22. 106.
descriptibilis: S. 418.
differentiarum: S. 28.
homogeneous: S. 28.
linearis: S. 26.
planus: S. 390.
superficialis: S. 26.
tetragonisticus: S. 418.
transcendens: S. 422.
 s. a. Örter, geometrische.
- Logarithmus: N. 37*. 80*. S. 203. 296. 323. 336 f. 354. 426. 467–469. 560. 577. 589–592. 601. 606. 612.
 Quadratur: S. 268.
 Rechenoperationen: S. 469. 478. 592.
 Reihe: S. 299. 592. 606.
 Tangente: S. 426 f.
 s. a. Exponent. Hyperbel, Quadratrix. *tangentes artificiales*.
- magnitudo* s. Größe.
margaritae s. Perlen, Slusesche.
 Maschine: S. 199. 612.
mathesis: S. 302.
- Mechanik
 Grundsätze: S. 420. 521.
- s. a. Bewegung. Bogen, gespannter. *corps. corpus. effectus*. Hebelgesetz. Kraft. Pendelbewegung. Stoßmittelpunkt.
- Mensch: S. 599. 602.
- methodus*
analytica: S. 546.
apagogica: S. 113.
demonstrandi: S. 410.
determinandi: S. 104. 413.
dimetiendi: S. 257.
generalis: S. 113 f. 207. 535. 559.
infallibilis: S. 104.
inveniendi: S. 16. 138. 215.
inversa: S. 540. 546.
nova: S. 129. 159. 257. 351. 413. 559.
vera: S. 104.
- Mittel
 geometrisches: S. 333. 355.
 s. a. Proportionale, mittlere.
 harmonisches: S. 333. 355.
- modus*
describendi: S. 91. 110. 120. 142. 158. 214. 267. 343. 378.
efficiendi: S. 105.
inquirendi: S. 128.
inveniendi: S. 22. 217. 229. 612.
irregularis: S. 354.
lacionis: S. 302.
metiendi: S. 612.
possibilis: S. 128. 548.
- moles*: S. 80. 180.
- Moment: S. 325. 368.
 Fläche: S. 40. 186. 263–267. 311. 313. 315 f. 351. 362 f. 364. 474. 499 f. 504. 573. 601. 603 f.
 Bestimmung aus Fläche und Schwerpunkt: S. 295.
 bzgl. beliebiger Achse: S. 311–313. 315 f.
 bzgl. nicht paralleler Achsen: S. 266.
 bzgl. paralleler Achse: S. 266 f. 310.
 Kurvenbogen: S. 35. 40. 153. 157. 184. 187. 257. 264. 313 f. 568.
 Ordinaten: S. 278. 311 f. 575.
 Differenzen von Ordinaten: S. 326.
 Subtangentenabschnitte: S. 237. 238.

- von Differenzen: S. 268. 575.
 s. a. Dreiseit. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitt.
 Kreis. Parabel. Quadratrix (Dinostratus).
 Quadratrix (Leibniz). Quadrat. Rechteck.
 Schwerpunkt. Vierseit. Zykloide.
- momentum homogenum*: S. 153.
- motus*: S. 90. 192. 268. 291. 302. 472. 501 f. 518.
 521–525. 527–529. 532–534. 536. 563. 575. 589.
- aequabilis sive uniformis*: S. 11.
- compositus*: S. 302. 523. 529.
- continuus*: S. 202 f.
- conversivus*: S. 302.
- directus*: S. 528. 533 f.
- geometricus*: S. 366.
- compositus*: S. 371.
- obliquus*: S. 533.
- parallelus*: S. 302.
- perpendicularis*: S. 533.
- progressivus*: S. 302.
- rectilineus*: S. 532.
- rotationis*: S. 528.
- simplex*: S. 302.
- transversus*: S. 534.
- uniformis*: S. 13. 94. 328. 501.
- s. a. Bewegung.
- Näherung: S. 411 f.
- s. a. Kurven, Konstruktion. Zykloide.
- Neunerprobe (*calculus novenarius, calculus Enneadicus*): S. 53. 57. 58. 67–69. 67.
- Normale: N. 66*. S. 14. 70. 87–89. 92. 97. 104. 120.
 131. 138. 153. 155 f. 157. 184. 185. 187. 189.
 192. 194. 209. 221. 224. 244 f. 298. 305. 381. 426.
 449 f. 585 f.
- Summation: S. 35. 153. 185. 313 f.
- Notation: S. 16. 234. 301. 332. 466.
- s. a. Differentialrechnung. Integralrechnung. Ungleichungen. Vorzeichen.
- numerus*
- affirmativus*: S. 58.
- combinatorius*: S. 590.
- compositus*: S. 290.
- denominatus*: S. 290.
- essentialis*: S. 58.
- fictivus*: S. 58.
- ordinalis*: S. 269. 279. 292 f. 311.
- summarius*: S. 290.
- sumtitius*: S. 51. 58.
- occurrens*: S. 186. 236. 353. 367. 427.
- Örter, geometrische: N. 74*. S. 3. 23. 24. 26. 28. 40.
 106. 159. 164. 230 f. 233. 266. 325. 369. 390. 394.
 413. 417–419. 422. 504. 530.
- s. a. *locus*.
- Optik
- Brechung: S. 14. 141.
- Brechungsgesetz: S. 141. 141.
- Dispersion: S. 142 f.
- s. a. Brennspiegel. Dioptrik. Gläser, optische.
 Lichtstrahlen. Ovale, Cartesische.
- Ovale, Cartesische: N. 4*. 14*. 17*. S. 14. 14. 15.
 141.
- Normale: S. 17. 141.
- Subnormale: S. 18 f. 117.
- Parabel (*parabola, parabole*): S. 3. 9. 15. 112. 116.
 129. 130. 148. 150. 164 f. 169. 197. 199. 227. 392.
 393–396. 411. 443. 451. 491. 519. 567. 585.
- Apollonische: S. 194.
- Evolute: S. 132.
- Gleichung: S. 3. 8. 10. 33. 35. 63. 64. 77. 112.
 155. 179. 201. 347. 356. 394. 403. 451 f.
- inverse Tangentenrechnung: S. 64. 356–358.
- Normale: S. 64. 200. 356. 396.
- Ordinate: S. 4. 13. 116. 152 f. 182. 199. 538.
- Differenzen: S. 64.
- Parameter: S. 169. 396. 451. 473.
- Quadratrix: S. 10.
- Quadrat: S. 31. 84. 102. 267. 322. 405. 617.
- Rektifikation: S. 8. 547.
- Abhängigkeit von Hyperbelquadrat: S. 33.
 195.
- Bogenelement: S. 33. 394–396.
- Moment des Bogens: N. 24*.
- Schwerpunkt des Bogens: S. 37. 195.
- Rollkurve: S. 129. 132. 132. 164–168. 169–173.
- Segment: S. 349 f.
- Fläche: S. 443.
- größtes einbeschriebenes Dreieck: S. 350.
- subalterne: S. 314.
- Subnormale: S. 169. 200. 227. 350. 356.

- Subtangente: S. 4. 347. 350.
 Abschnitt (Tschirmhaus): S. 356.
 Tangente: S. 169. 200. 350. 356. 394.
 Tangentenrechnung: S. 103. 469. 471.
 Transmutation: S. 200f. 347.
 s. a. Kegelschnitt. Paraboloid.
- Parabel, höhere (*parabolooides*): S. 4. 9f. 77. 116. 392. 399. 446. 491. 540. 543.
 Auflistung: S. 446.
 Gleichung: S. 234.
 kubische: S. 3. 116. 322f. 396f. 400. 451. 481. 491.
 Gleichung: S. 323. 451f.
 Tangente, Tangentenrechnung: S. 323. 469f. 471f. 475. 481.
 Quadratur: S. 399. 416. 538.
 Rektifikation: N. 30*.
 Reziproke der Parabel (Antiparabel) s. Hyperbel, höhere, quadratische.
 semikubische (Heuraet): S. 194.
 Rollkurve: S. 168.
 Subtangente: S. 4.
 Tangente, Tangentenrechnung: N. 68*. N. 69*.
- Paraboloid
 Oberfläche: S. 33.
 s. a. Konoid.
- Parallelogramm
 ein-, umschriebenes: S. 203.
 Schwerpunkt: S. 420.
- Parameter: S. 323. 352. 455f. 469. 471. 473.
 s. a. Ellipse. Hyperbel. *latus rectum*. Parabel.
- Pendelbewegung: S. 107.
perfectio geometriae: S. 617.
- Perlen, Slusesche (*margaritae*): S. 400.
perpendicularis s. Normale.
- Physik s. Atomisten. Mechanik. Optik. Zeit.
- piqueline* s. Konchoide.
- planisphaerium nauticum*: S. 334. 337.
- planum*
commensurable: S. 257.
quadrabile: S. 27.
- Polygon: S. 104. 155. 241. 369.
 ein-, umschriebenes: N. 12*. 50*. S. 224. 515f. 547f. 561.
- Tangente: S. 355.
 s. a. Dreieck. Parallelogramm. Quadrat. Rechteck. Trapez.
- polygonum*
infinitanangulum: S. 24. 155. 392f.
ordinatum: S. 224. 311.
regulare: S. 547f.
- Polynom: S. 597.
 Zerlegung in Faktoren: S. 594–596.
- portiuncula*: S. 375. 392.
- Potenzen: S. 290. 307. 428f. 592. 612f.
 Notation: S. 466.
 s. a. Binome. *dignitas*.
- potestas*
angelica: S. 602.
humana: S. 602.
- principium*
inveniendi: S. 402.
inventionis: S. 113.
- Prisma: S. 302. 534.
- Probleme
 bestimmte: S. 19. 94. 199. 210. 219. 223.
 diophantische: S. 412.
 einem Quadrat ein gleichschenkliges Dreieck einbeschreiben: S. 247.
 geometrische: S. 425.
 Hyperbel bzw. Parabel finden, die eine gegebene Kurve berühren: S. 450.
 irreguläre: N. 57*. S. 351. 363. 412.
- Kurven
 Quadratur: N. 20*. S. 154. 248.
 lösbar: S. 77. 212. 217. 363. 395.
 mechanische: N. 58*.
 Oberfläche eines Paraboloids (Huygens): S. 297.
 reziproke: S. 378.
 sursolide (Descartes): S. 599.
 unlösbar: S. 129. 203. 213. 215. 217. 219.
 Beweis: S. 75. 381.
 Vierglobenproblem: S. 599.
 Volumen eines Kegelabschnitts: N. 32*.
 s. a. Tangentenmethode, inverse.
- producta* s. Subtangente.
- progressio*: S. 246. 269. 419.
arithmetica: S. 84. 99. 101f. 145. 214. 228. 324 bis 328. 343. 364. 377. 566. 591. 616–618.

- replicata reciproca*: S. 311.
geometrica: S. 3. 260–262. 606.
harmonica: S. 3. 355.
in se continue reflexa: S. 222.
indicum: S. 413.
linearis: S. 311. 355.
non transcendens: S. 547.
numerica: S. 311. 355.
summatix: S. 97. 279.
sygnotos: S. 279.
tangentium: S. 453.
transcendens: S. 354. 547.
- Proportionale
 dritte: S. 198.
 mittlere: S. 25. 124. 198. 262. 274. 334. 372. 375.
 403 f. 456. 584.
- Proportionalität s. Verhältnisrechnung.
- propositio*
impossibilis: S. 458.
negativa: S. 412.
tetragonistica: S. 412.
- Quadrat
 Schwerpunkt: S. 420.
- Quadratrix (Dinostratus): N. 70*. 86*. S. 303 f.
 Abszisse: S. 503.
 Fläche: S. 564–566. 564. 569 f.
 Gleichung: S. 504–506.
 Konstruktion: S. 502 f.
 durch Bewegung: S. 501. 563.
 Ordinate: S. 503. 564. 570.
 Quadratur: N. 71*. S. 503. 506. 566 f.
 Moment der Fläche: S. 564. 569 f.
 Scheitelpunkt: S. 508.
 Tangente: S. 303 f. 502. 506. 565.
 Konstruktion: S. 502. 502.
- Quadratrix (Leibniz): N. 70*.
 Extremwert: S. 501.
 Fläche: S. 500.
 Gleichung: S. 496. 501.
 Konstruktion durch Bewegung: S. 501.
 Ordinate: S. 496–499.
 Differenz: S. 501.
 Quadratur: N. 71*.
 Moment der Fläche: S. 500 f.
- Tangente: S. 496. 501.
- Quadratrix (Stammfunktion): N. 13*. S. 8. 10 f.
 202 f. 269. 288–291. 296. 570. 590. 622.
 s. a. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.
- Quadratur: N. 28*. 29*. 42*. 51₂*. 54*. S. 17. 25.
 27. 32. 35. 40 f. 87 f. 131 f. 139. 143. 189. 191.
 212. 215. 217. 246. 248. 343 f. 415–419. 509. 537
 bis 539. 547. 560. 562. 577. 608. 615.
 absolute: S. 168. 236. 238. 392. 622.
 algebraische: S. 77. 132. 288–290. 292. 392. 622.
 Beweis: S. 422.
 Methoden: S. 93.
 ein- und umbeschriebene Polygone: N. 50*.
 S. 113 f. 547 f.
 (Saint-Vincent): S. 291.
 Schwerpunktmethode (statische Momente):
 N. 38*. 44*. 55*. S. 195–197. 351. 416–419.
 562.
 Schwerpunktmethode (*via centri gravitatis*):
 N. 82*. S. 432. 518. 521–525. 527–534. 536.
 557 f. 575 f.
 Transformationsmethoden: S. 331. 375 f.
 (Tschirnhaus): S. 267.
 unbestimmte Koeffizienten: N. 98*. S. 288
 bis 290.
 Untersuchung der Quadrierbarkeit von Kur-
 ven: N. 92*. S. 288–290. 294 f. 546–548. 622.
 näherungsweise: S. 288 f.
 Reduktion auf Kreis- und Hyperbelquadratur:
 S. 376.
 Zusammenhang mit inverser Tangentenme-
 thode: S. 70. 93. 365 f. 615.
 Zusammenhang mit Reihensummation: S. 96.
 351 f. 564. 606. 617.
 Zusammenhang mit Rektifikation: N. 20*. 61*.
 S. 7–11. 24. 132. 137–139. 153. 155. 267. 269.
 392. 612. 617 f.
 Zusammenhang von Quadraturen: N. 61*. 73*.
 S. 39–41. 128–130. 159. 167 f. 250. 254. 264 f.
 267. 269. 304–307. 314. 346 f. 352–354. 359.
 392. 430. 566 f.
 s. a. *catalogus*. Integralrechnung. Tangentenme-
 thode, inverse. *tetragonismus*. *tetragonistica*.
quadrilineum s. Vierseit.
quantitas

- minima seu indivisibilis*: S. 581.
motu descriptibilis: S. 589.
ordinata: S. 311.
pure geometrica: S. 576.
vera exprimibilis: S. 589.
s. a. Größe.
- ratio*
agendi: S. 411.
analytica: S. 96.
composita: S. 136. 272. 277. 456. 477. 496–498. 565.
describendi: S. 94. 233.
efficiendi: S. 105. 159.
inquirendi: S. 180.
inveniendi: S. 16. 96.
minor assignabilis: S. 293.
- ratiocinatio*
generalis: S. 613.
universalis: S. 410.
- rationalitas*: S. 366.
- Rechteck
Gleichung: S. 91.
Moment: S. 407–411.
- recta*
aequilibrii: S. 311.
librationis: S. 311.
- recurvatio*: S. 110 f.
- reducta* s. Subnormale.
- Regel
Bestimmung von Flächen aus Momenten: S. 311.
Dispersion des Lichts: S. 143.
Extremwertbestimmung: S. 199. 581.
Koordinatentransformation: S. 127.
Lösung sursolider Probleme (Descartes): S. 599.
Momente von Flächen bzgl. beliebiger Achsen: S. 311 f.
Schwerpunkt eines Kreisbogenstücks: S. 557.
Seitenberechnung eines Dreiecks: S. 520.
Tangentenbestimmung: S. 199. 343.
s. a. Differentialrechnung. Integralrechnung.
Satz.
- regula falsi*: S. 64.
- Reihe, Reihen
analytische: S. 606.
- arithmetische: S. 445.
geometrische: S. 289. 434 f. 445.
harmonische
Divergenzbeweis: S. 402. 550.
rationale: S. 606.
Summe: S. 606.
reziproke figurierete Zahlen: S. 402.
Summation: S. 96. 101. 107. 212. 217. 261. 351. 354. 434. 547.
Summationsreihe: S. 97. 279.
summierbare: S. 606.
transzendente: S. 606.
unendliche: S. 351. 402. 564. 586 f. 589. 592. 617.
Rektifikation: N. 20*. 52*. 53*. S. 129. 132. 137 bis 139. 153. 217. 227. 235. 267. 351. 432 f.
Bogenelement: N. 5*. S. 137 f. 157. 176. 267. 269. 313 f. 370. 374 f. 392 f. 395 f. 444. 535. 610. 612. 617.
Bogenlänge: S. 392. 395 f.
Methode (Heuraet): N. 30*. S. 132. 138. 374 f. 393.
näherungsweise: S. 115 f. 373.
- res ordinata*: S. 292.
- resecta*: S. 186.
- Rest (*residuum*): S. 400.
- Rollkurven: N. 15*. 18*. 19*. 23*. S. 131 f. 139. 140. 153–158. 179. 226 f. 368–371. 378–380. 385 f. 561.
Differentialgleichung: S. 387.
generatrix: S. 370 f.
Normale: S. 157. 369 f.
Oberfläche des Rotationskörpers: S. 370.
Quadratur: S. 387.
s. a. Hyperbel. Kegelschnitt. Parabel. Parabel (höhere), semikubische. Zykloide.
- rota*: S. 192.
- Rotationskörper: S. 306. 532 f.
Oberfläche: S. 297.
- Satz, Sätze
der Analysis situs: S. 526.
der Arithmetik des Unendlichen: S. 429 f.
der Geometrie der Indivisiblen: S. 313 f.
von Barrow: S. 313.
von Cavalieri: S. 313.

- von Gregory: S. 313.
 von Saint-Vincent: S. 313.
 von Wallis: S. 313.
- Integralrechnung
 lineare Transformation von Abszissen bzw.
 Ordinaten: S. 275–277.
 partielle Integration: S. 268. 292 f.
 Potenzregel: S. 292 f.
 Produktregel: S. 293.
- mathematische
 Bezeichnungen: S. 412.
- über Bestimmung durchlaufener Räume: S. 521.
 527. 533.
- über Bestimmung von Flächen aus Momenten:
 S. 267. 313. 351. 411.
- über den Schwerpunkt des Halbkreisbogens:
 S. 508. 508.
- über den Zusammenhang von Normale und Mo-
 ment eines Bogens: S. 313 f.
- über die kubische Parabel: S. 322 f.
- über die Quadratrix: S. 498 f.
- über Eigenschaften von Gleichungen: S. 73 f.
- über einfache algebraische Kurven: S. 485–488.
- über Kreissektoren: S. 240.
- über Oberflächen von Rotationskörpern: N. 75*.
- über Potenzen von Binomen: S. 456. 459.
- über Quadraturen: N. 34*. 35*. S. 518 f.
- über Schwerpunkte: S. 552.
- über Sekanten von höheren Parabeln: S. 483.
- über Sekanten von Kurven: S. 486–488.
- über Tangenten von einfachen Figuren: S. 454.
 467. 468. 469. 474.
- über Tangenten von (höheren) Parabeln: S. 482.
 491 f.
- verneinende: S. 412.
- von Archimedes
 über Konoide und Sphäroide: S. 31.
 über Kreisfläche: S. 512 f. 513.
 über Kugel und Zylinder: S. 31.
 über Quadraturen: S. 267.
 s. a. Hebelgesetz.
- von Guldin: S. 516. 521. 554.
- von Ricci: S. 480. 480.
- von Saint-Vincent
 über Duktus subalterner Parabeln: S. 314.
 über Hyperbelquadratur: S. 262.
 s. a. Beweis. Regel. Transmutationssatz.
- Schiefkörper: S. 522.
- Schwerpunkt: S. 416–418. 420. 518. 552.
- Fläche: S. 40. 264–266. 295. 311. 313. 361–363.
 Bestimmung aus Momenten: S. 264. 266.
- Dreieck: S. 351. 362.
- Kurvenbogen: S. 129. 264. 351.
- Ordinaten: S. 315. 368.
- s. a. Dreieck. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Moment.
 Quadraturen, Methoden. Parabel. Parallelo-
 gramm. Quadrat. Zykloide.
- secans falsa*: S. 535.
- series*: S. 246.
- analytica*: S. 606.
- convergens*: S. 333. 351. 354. 559. 561.
- infinita*: S. 351. 402. 550 f. 564. 577. 586 f. 589.
 617.
- rationalis*: S. 606.
- transcendens*: S. 606.
- signum*
ambiguum: S. 294. 503.
- sinuatio*: S. 560.
- Sinus: S. 576.
- Quadratur: S. 40. 510. 511.
- sinus*
complementi: S. 198. 237. 498 f. 503. 503. 505.
 520. 524. 560. 563. 566.
- rectus*: S. 159. 161. 198. 203. 237. 498 f. 554 f.
 568. 569.
- versus*: S. 159. 198. 203. 503. 553–555. 557. 558.
 560. 563. 566. 568. 570 f.
- sinus* (Kreisordinate): S. 7. 7. 70. 116. 496. 499.
 503. 556. 563. 565–568. 608.
- solidum*: S. 26 f. 31. 89. 91 f. 239. 267. 291. 296. 306.
 311. 351. 353 f. 532. 534. 569.
- cavum*: S. 240.
- cochleatum*: S. 240.
- contortum*: S. 240 f. 240.
- circulare*: S. 241.
- rectilineare*: S. 241. 242.
- cylindricum*: S. 302.
- homogeneum*: S. 269.
- prismaticum*: S. 302.

- rectilineum*: S. 267.
regulare: S. 110.
spatiolum: S. 262.
spatium
commensurabile: S. 257.
conchoidale: S. 340.
curvilineum: S. 246.
finitum: S. 199.
hians: S. 257.
homogeneum: S. 254.
hyperbolicum: S. 339 f. 550. 576.
infinitum: S. 543.
infinitem: S. 353. 550.
mixtilineum: S. 249.
ordinare: S. 262.
percursum: S. 521 f. 527. 529. 533.
planum: S. 391.
quadrabilis: S. 392.
quadrato-quadratum: S. 472.
quadrilineum: S. 249. 276.
rectilineum: S. 202.
scalare: S. 547 f.
solidum: S. 532.
successivum: S. 522.
surdesolidum, sursolidum: S. 291. 472.
trilineum: S. 408.
ungulare: S. 378.
speculum: S. 142.
Sphäroid
Oberfläche: N. 6*. S. 90. 282. 297.
s. a. *coniforme ellipticum*. Kugel.
Spirale, Archimedische: S. 501.
Konstruktion durch Bewegung: S. 501.
Stoßmittelpunkt: S. 413. 417.
Subnormale: N. 15*. 18*. 19*. S. 25. 25. 70–73. 77
bis 85. 97 f. 101 f. 107. 131 f. 138. 143 f. 147–152.
154. 155. 180 f. 184. 185. 187. 189. 192 f. 203.
220 f. 305. 321–325. 359. 363–365. 585.
Summation: S. 143. 184 f. 359. 426. 430.
Subtangente: S. 109. 111. 137. 174 f. 184. 197–199.
199. 204. 225. 288. 306 f. 348. 395. 428–430.
447 f. 540. 581. 588. 599.
Abschnitt (Tschirnhaus): S. 298. 347. 347. 445.
445. 509.
Bestimmung: S. 3. 65.
s. a. Tangentenmethoden.
subtensa: S. 306. 351. 557.
superficies
analytica: S. 94. 291.
anticonooides: S. 94.
conica, conooides, conooidica: S. 90. 94.
curva, curvilinea: S. 89. 91. 93. 104. 257. 291.
cylindrica, cylindroidica: S. 90 f. 302. 335 f. 339.
390 f. 423.
cylindriformis: N. 53*.
truncata: S. 391.
homogenea: S. 269. 291.
hyperbolica: S. 261.
prismatica: S. 302.
ungularis: S. 378.
synthesis: S. 100. 132. 204. 487.
Tafelwerke: S. 204. 387. 560. 613.
Tangenten: N. 34*. 42*. 66*. S. 3f. 14. 65. 76. 87.
109–111. 109. 121. 179. 184. 185. 187. 189. 194.
204. 211 f. 216 f. 221–224. 236. 245. 257. 279.
305 f. 350. 353. 360. 367. 376. 380. 391 f. 426.
432. 449 f. 509. 546. 567. 581. 586. 598 f. 606.
607 f. 612. 615. 620.
s. a. *catalogus*. Tangentialebene.
Tangentenmethode, inverse: N. 7*. 14*. 15*. 21*.
27*. 46*. 48*. 50*. 51*. 51*. 512*. 84*. 88*. 89*.
90*. S. 96 f. 105. 107. 142. 143. 352. 355. 397.
540. 546. 615 f.
Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten: S. 585
bis 587.
(Descartes): N. 3*. S. 16. 16. 168.
durch Bestimmung von Doppelwurzeln: N. 4*.
8*. 9*. 17*. 20*. S. 131. 180. 585–587.
näherungsweise: S. 587.
Probleme: S. 14. 105. 203. 215. 217. 355. 543.
589. 616.
2. Debaunesches Problem: N. 90*. 91*. S. 599.
600. 602.
analytische Lösung: S. 129. 152.
Bestimmung der Basiskurve eines Zylinder-
hufs aus der Schnittkurve: N. 58*.
(Descartes): N. 4*. S. 598. 602.
Differenzen der Abszissen reziprok zu Bogen-
elementen: S. 394.

- Differenzen der Ordinaten reziprok zu Bogenelementen: S. 394.
- geometrische Lösung: S. 77. 129.
- Hyperbel als Lösung: S. 65 f.
- Normale gegeben: S. 153–156.
- Normale gleicht Ordinate der Parabel: S. 153.
- Normale konstant: S. 225. 585.
- Normalen treffen sich in einem Punkt: S. 596 f.
- Ordinate reziprok zu Subnormale: N. 15*.
- Parabel als Lösung: S. 63 f.
- Rückführung auf Quadraturen: S. 365 f. 615.
- Rückführung auf Rektifikationen: S. 129. 179.
- Subnormale gegeben: S. 180.
- Subnormale gleicht Ordinate der Ellipse: S. 70 bis 73.
- Subnormale gleicht Ordinate des Kreises: S. 70 bis 73. 585 f.
- Subnormale gleicht Ordinate einer (höheren) Hyperbel: S. 70–73. 77. 155.
- Subnormale gleicht Ordinate einer (höheren) Parabel: S. 77–85. 150–152. 155.
- Subnormale gleicht Ordinate einer quadrierbaren Figur: S. 77.
- Subnormale gleicht Ordinate eines Kegelschnitts: S. 176–178.
- Subnormale gleicht Sehne: S. 327 f.
- Subnormale konstant: S. 143 f. 148. 150. 220. 585.
- Subnormale reziprok zu Abszisse: S. 323.
- Subnormale reziprok zu Differenz von Subtangente und Abszisse: S. 363–365.
- Subnormale reziprok zu Ordinate: N. 15*. S. 321–323.
- Subnormale verhält sich zu Abszisse wie sinus rectus zu sinus versus: S. 203.
- Subtangente gleicht Ordinate einer höheren Parabel: N. 60*.
- Subtangente proportional zu Abszisse: S. 509. 537.
- Summe von Abszisse und Subnormale reziprok zu Abszisse: S. 327.
- Summe von Abszisse und Subnormale reziprok zu Ordinate: S. 323–325.
- Zuwächse reziprok zu Ordinaten: S. 143.
- Zuwächse reziprok zu Quadraten der Ordinaten: S. 130.
- unter Verwendung von Evolventen und Rollkurven: N. 15*. 16*. S. 140. 153–158. 179.
- s. a. Differentialgleichung. Differentialrechnung. Integralrechnung. Quadratur.
- Tangentenmethoden, Tangentenrechnung: N. 48*. 67*. 84*. S. 65. 76. 98. 105. 109–111. 177. 199. 289. 518. 583 f. 594.
- (Descartes): S. 15. 21. 85. 97. 97. 103. 149. 342 f. 357 f. 357. 559 f. 598.
- Anwendung auf transzendente Kurven: N. 93*.
- (Fermat): S. 84. 84. 220. 449. 463–465. 463. 598. Beweis: S. 463. 465.
- (Hudde): S. 59–62. 84 f. 214. 216. 218. 228. 234. 235. 343. 357 f. 357. 445. 583 f. 586–588. 620. Beweis: S. 84 f.
- (Sluse): S. 4. 37. 62. 62. 109. 109. 175. 197 f. 204 bis 206. 225. 228. 237. 249. 258. 288. 323. 342 f. 348. 437. 447 f. 463 f. 540. 581. 584. 586. 594. 614. 620.
- Anwendung: S. 437.
- Anwendung auf transzendente Kurven: S. 607.
- Beweis: S. 463.
- Herleitung: S. 614.
- (Tschirnhaus): S. 347. 445. 445.
- s. a. *catalogus curvarum tangentiumque*. Differentialrechnung.
- tangentes artificiales*: S. 334.
- Tangentialebene: S. 104. 614.
- Technik s. Brennspiegel. Instrument. Maschine. Zahnräder.
- tetragonismus*: S. 88. 101. 589.
- tetragonistica*: N. 50*. 51₂*. 59*. S. 296. 422.
- theoremata*
- admirabile*: S. 292.
- determinatorium*: S. 411 f.
- fundamentale*: S. 411.
- generale*: S. 249. 267. 531. 533.
- generalissime*: S. 527.
- memorable*: S. 251.
- mirabile*: S. 186. 322 f. 365. 368.
- mirum et foecundum*: S. 253.
- notabile*: S. 508.

- novum*: S. 257.
tetragonisticum: N. 34*. 35*. 61*. S. 351.
verum: S. 293. 351.
- Torus: S. 90. 438.
- Transmutationssatz: S. 236. 236. 249. 249. 314. 362 f. 380.
 s. a. Integralrechnung, Integraltransformation.
- Trapez: S. 547.
- Treppenfigur: S. 547 f.
- triangulum* s. Dreieck.
- trigonometria indivisibilium*: S. 351. 361. 367. 368.
- trilineum* s. Dreiseit.
- Trisektrix, Maclaurinsche: S. 345.
- trochoeides* s. Rollkurven.
- unendlich
 (Anzahl): S. 3 f. 11. 155. 262. 264. 289. 291. 332. 346. 351. 354. 392. 538. 541. 543. 564. 590. 592. 608. 614.
 (Größe): S. 4. 12. 110. 198 f. 313. 353 f. 496. 498. 581.
 (klein): S. 4. 12. 24. 29. 98. 109. 136. 159. 187. 197. 199. 212. 221. 223–225. 251. 256. 262. 291. 292. 293. 311. 313. 326. 351. 351. 352–354. 355. 362. 370. 392. 496. 498. 533. 536. 546 f. 581. 597.
- Ungleichungen
 Notation: S. 411. 411.
 Sätze mit: S. 411 f. 526.
- ungula*: S. 26. 244. 296 f. 354. 375. 417.
- unitas*: S. 3. 50.
- utilitas*: S. 31. 316.
- varietas varietatum*: S. 4.
- Verhältnisrechnung
 Addition u. Subtraktion: S. 422.
 Gleichung: S. 231. 233.
 Teilung: S. 272. 296. 547.
 s. a. *analogia*.
- Versiera (Zykloissoide) s. Kreis, *figura segmentorum*.
- via*
analytica: S. 416. 547.
calculandi: S. 380.
describendi: S. 416.
- maxime naturalis*: S. 547.
- metiendi*: S. 511.
- notabilis*: S. 451.
- nova ad quadraturas investigandas*: S. 415.
- nova analyseos quadraturarum*: S. 538.
- synthetica*: S. 100.
- Viereck s. Parallelogramm. Quadrat. Rechteck. Trapez.
- Vierseit (*quadrilineum*): S. 249 f.
 Moment: N. 55*.
- vinculum*
differentiae: S. 505.
summae: S. 505.
tetragonisticum: S. 366. 505.
- vis*
ictus: S. 417.
machinae: S. 199.
- Vorzeichen: S. 22. 58. 180. 224. 231. 475. 478.
 Doppel- und Mehrfachvorzeichen: S. 114. 162 bis 164. 180. 191. 229. 233. 274. 294. 503.
- Winkel: S. 42. 90. 124. 124. 265. 548. 555 f. 617.
 Teilung: S. 272. 296. 547.
- Wurzeln: S. 28. 33. 71. 79–81. 83. 85. 87. 105. 289. 290. 372 f. 547. 581. 592. 607. 616.
 imaginäre: S. 233. 607.
 kubische: S. 431. 567.
 quadratische: S. 429. 567.
 s. a. Gleichung mit Doppelwurzeln.
- Wurzelziehen: S. 119. 198.
- Zahl, Zahlen
 figurierte
 Dreieckszahlen: S. 588.
 Kombinationszahlen: S. 590.
 imaginäre: S. 71. 229. 372 f.
 geometrische Interpretation: S. 372 f.
 irrationale: S. 457. 472 f. 596.
 Potenzen
 Quadratzahlen: S. 588.
 rationale: S. 457. 472.
 reelle: S. 28. 372. 494. 589.
 s. a. Kontrollgrößen und -zahlen. *numerus*.
- Zahnräder: S. 420.
- Zeichentheorie: N. 63*.
- Zeit: S. 11 f. 302. 501. 535.

- Fallzeit: S. 13.
Zuwächse: S. 12.
Zykloide: S. 112. 116. 129. 153. 155. 159. 202. 501.
561. 570–574.
Isochronismus: S. 535.
Näherung durch algebraische Kurve: S. 116.
Normale: S. 571.
primaria: S. 164.
Quadratur: N. 74*. S. 236. 574. 576.
 Abhängigkeit von Kreisquadratur: S. 236. 575.
 Moment der Fläche: S. 572.
 Segment: N. 74*. S. 112. 236. 299. 573 f. 576.
Rektifikation: S. 534 f.
 Moment des Bogens: S. 535.
 Schwerpunkt des Bogens: S. 535.
retorta: S. 574.
Transmutation: S. 236.
s. a. Rollkurven.
Zylinder: S. 26. 92. 111. 241. 534.
 des Halbkreises: S. 95.
Huf bzw. Stumpf: S. 26. 244. 296 f. 354. 375. 378.
417. 423. 423.
 Bestimmung der Basiskurve aus der Schnitt-
 kurve: N. 58*.
 Oberfläche: S. 340. 378.
 hyperbolischer: S. 241.
 Oberfläche: S. 257. 267. 513.
 Gleichung: S. 90 f.

HANDSCHRIFTENVERZEICHNIS

FUNDSTELLEN

Verzeichnet sind hier die im vorliegenden Band edierten Hand- und Druckschriften, geordnet nach Fundorten und Signaturen.

HANNOVER, *Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Bibliothek*

LH 35	II 1	Bl. 233–234	N. 2	LH 35	VIII 18	Bl. 3	N. 44
		Bl. 275	N. 95		VIII 20	Bl. 1	N. 22
		Bl. 282–283	N. 26		VIII 30	Bl. 1	N. 3
		Bl. 318	N. 65			Bl. 12	N. 45
	V 1	Bl. 1–7	N. 7			Bl. 99	N. 37
	V 2	Bl. 1	N. 15			Bl. 123	N. 34
		Bl. 2	N. 16			Bl. 153–154	N. 49
	V 3	Bl. 1–4	N. 17			Bl. 153–154	N. 50
		Bl. 6	N. 21			Bl. 162–163	N. 8
		Bl. 7	N. 14			Bl. 166	N. 20
		Bl. 9–10	N. 4		X 8	Bl. 1	N. 57
		Bl. 11–12	N. 23		XII 1	Bl. 4	N. 35
		Bl. 13–14	N. 18			Bl. 253	N. 67 ₁
		Bl. 15	N. 19			Bl. 284	N. 58
	V 5	Bl. 1–2	N. 6			Bl. 317	N. 80
	V 6	Bl. 1–2	N. 53			Bl. 323	N. 1
		Bl. 6	N. 78		XII 2	Bl. 2	N. 11
		Bl. 8	N. 92			Bl. 62	N. 9
		Bl. 10–11	N. 82			Bl. 93	N. 66
	V 8	Bl. 1	N. 48			Bl. 94	N. 28
		Bl. 2–3	N. 51		XIII 1	Bl. 122–123	N. 10
	V 9	Bl. 1–2	N. 46			Bl. 132	N. 72
	V 10	Bl. 1	N. 84			Bl. 133	N. 71
		Bl. 2	N. 93			Bl. 134	N. 81
		Bl. 3	N. 90			Bl. 136	N. 61
	V 11	Bl. 3	N. 77			Bl. 170	N. 83
		Bl. 4	N. 76			Bl. 226	N. 91
	V 12	Bl. 3–4	N. 96			Bl. 227	N. 98
	V 17	Bl. 1–6	N. 68			Bl. 229	N. 94
	V 17	Bl. 7–8	N. 69			Bl. 231–232	N. 52
	VIII 2	Bl. 1–4	N. 27			Bl. 233	N. 70
	VIII 11	Bl. 4	N. 41			Bl. 234–235	N. 86
	VIII 18	Bl. 1	N. 38			Bl. 324	N. 60
		Bl. 2	N. 40			Bl. 355	N. 25

LH 35	XIII 1	Bl. 356	N. 59	LH 35	XIII 3	Bl. 51	N. 32
		Bl. 357	N. 31			Bl. 79	N. 12
		Bl. 391	N. 67 ₂			Bl. 144–145	N. 39
		Bl. 407	N. 29			Bl. 147	N. 36
		Bl. 408–409	N. 33			Bl. 148	N. 24
		Bl. 412	N. 73			Bl. 149	N. 30
		Bl. 433	N. 85			Bl. 150–151	N. 55
		Bl. 439	N. 74			Bl. 150–151	N. 56
		Bl. 439	N. 75			Bl. 223	N. 54 ₁
		Bl. 442–443	N. 79			Bl. 224	N. 54 ₂
		Bl. 445+447	N. 88		XIV 1	Bl. 47–48	N. 42
		Bl. 448	N. 89			Bl. 304	N. 97
	XIII 2 b	Bl. 108–109	N. 62	LH 37	V	Bl. 50	N. 87
		Bl. 108–109	N. 63	Leibn. Marg. 0			N. 43
		Bl. 108–109	N. 64	Ms IV 377			N. 47
		Bl. 136–137	N. 5				
	XIII 2 c	Bl. 151	N. 13				

Cc-2-KONKORDANZ

Verzeichnet sind hier die Nummern der im *Catalogue critique 2* erfassten Stücke mit Angabe der ihnen entsprechenden Stücke des vorliegenden Bandes. Neun der ersten dreizehn hier aufgeführten Schriften wurden im *Catalogue critique 2* nicht erfasst, vier nur teilweise (N. 49, 50, 67, 86). Steht hinter einer Cc-2-Nr.: tlw., so heißt dies, dass das bezeichnete Stück in diesem Band nicht vollständig abgedruckt ist.

Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.
—	1	773	6	891	22	1097 tlw.	41
—	29	788	28	901	30	1101	2
—	42	791	7	902	23	1106 ₁	44
—	43	801	12	903	27 _{1–3}	1110	45
—	47	823	15	904	27 ₄	1114 A	64
—	49	824	16	906	26	1118	63
—	50	828	18	1063	32	1120	46
—	62	829	19	1068	33	1125	48
—	67	830	20	1074	13	1126	50
—	86	832	17	1076	34	1127	49
—	96	833	14	1085	36	1128 A	49
—	97	839	8	1086	35	1128 B	50
—	98	840	21	1087	37	1131	51 ₂
543 tlw.	9	841	10	1089	38	1132	51 ₁
701	72	844	3	1090	38	1144	52
702	71	845	4	1091	39	1157	53
726	11	860	95	1092	40	1164 A–B	54

Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.
1165	55	1280 A-C	5	1427	79	1474	87
1166	56	1284	65	1428 A	80	1482	89
1167	24	1285	66	1432	81	1483 A	90
1195	31	1286	61	1449	85	1483 B	93
1196	25	1288	83	1452	84	1484	91
1208	73	1290	60	1464 A-B	86	1487	69
1247	92	1334 tlw.	67	1465	74	1488 tlw.	68
1250	58	1386	70	1466	75	1550	94
1251	59	1419	77	1470	88	1555	57
1252	58	1420	76	1471	82		
1277	6	1426	78	1473	82		

Die Entsprechung von Stücknummer und Cc-2-Nummer ist in der Überlieferung des jeweiligen Stücks vermerkt.



ERWÄHNTE LEIBNIZ-HANDSCHRIFTEN

Dieses Verzeichnis erfasst die in den Überlieferungen und Erläuterungen erwähnten nicht edierten Handschriften. Es ist nach Cc-2-Nummern und Handschriftensignaturen geordnet und verweist auf die Seiten des vorliegenden Bandes.

Cc 2, Nr.	LH, Nr.		S.	Cc 2, Nr.	LH, Nr.		S.
344	4 VIII 22	Bl. 72–73	<i>301.</i>	1233 C	35 II 1	Bl. 144–159	<i>449.</i>
543	35 XII 2	Bl. 62	<i>107.</i>	1428 B	35 XII 1	Bl. 317	<i>549.</i>
822	35 V 2	Bl. 5–6	<i>120. 120.</i>	1429	35 II 1	Bl. 127	<i>609.</i>
827	35 I 17	Bl. 11–15, 17	<i>132.</i>	1434	35 XII 1	Bl. 344–345	<i>534.</i>
831	35 XII 1	Bl. 226–227	<i>158. 158.</i>	1450	35 XIV 1	Bl. 70	<i>127. 195.</i>
842	35 XIII 1	Bl. 122–123	<i>109.</i>				<i>200. 207.</i>
843	35 XIII 1	Bl. 122–123	<i>109.</i>	1456	35 XII 1	Bl. 311	<i>536.</i>
847	35 VIII 30	Bl. 121	<i>310.</i>	1460	35 II 1	Bl. 116–117	<i>609.</i>
895	35 II 1	Bl. 269–270	<i>366.</i>	1469	35 XIII 3	Bl. 182–183	<i>345.</i>
896	35 II 1	Bl. 271–272	<i>366.</i>	1472	35 V 6	Bl. 10–11	<i>553.</i>
897	35 II 1	Bl. 273	<i>366.</i>	1488	35 V 17	Bl. 1–6	<i>449.</i>
1069	35 XIII 1	Bl. 408–409	<i>243.</i>	1547	35 VIII 30	Bl. 13	<i>609.</i>
1070	35 XIII 1	Bl. 408–409	<i>243.</i>	—	35 II 1	Bl. 178	<i>611.</i>
1097	35 VIII 11	Bl. 4	<i>296.</i>	—	35 V 12	Bl. 3–4	<i>612.</i>
1117	35 XIII 2b	Bl. 108–109	<i>434. 439.</i>	—	35 VIII 30	Bl. 161	<i>66.</i>
			<i>441.</i>	—	35 XII 1	Bl. 343	<i>509.</i>
1119	35 XIII 2b	Bl. 108–109	<i>434. 439.</i>	—	35 XIII 1	Bl. 236–239	<i>301. 303.</i>
			<i>441.</i>				<i>332. 339.</i>
1187	37 V	Bl. 216	<i>420.</i>	—	35 XIV 1	Bl. 304	<i>619.</i>
1192 C	38	Bl. 25	<i>199.</i>				

SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN, BERICHTIGUNGEN

1. SIGLEN UND EDITORISCHE ZEICHEN

E, E^1	Erstdruck
$E^2 \dots$	weitere handschriftengestützte Drucke
L	Leibniz, eigenhändig
LiH	Leibniz' eigenhändige Bemerkungen in einem Handexemplar
LuT	Leibniz gemeinsam mit Tschirnhaus, eigenhändig
LuX	Leibniz gemeinsam mit Unbekanntem, eigenhändig
T	Tschirnhaus, eigenhändig
X	Unbekannter, eigenhändig
[]	in der Datierung: erschlossenes Datum, im Text: Ergänzungen des Herausgebers
[]	Ergänzungen von Satzzeichen durch den Herausgeber. Vereinzelt gebraucht Leibniz selbst eckige Klammern (Hinweise darauf im Erläuterungsapparat).
< >	Konjektur schwer lesbarer oder durch Beschädigung des Textzeugen ausgefallener Wörter bzw. Wortteile.
(-)	nicht entziffertes bzw. durch Beschädigung ausgefallenes Wort; die Anzahl der Striche entspricht der Anzahl der vermuteten Wörter.
<i>Kursivierung</i>	Zitate, Buchtitel, Text in anderer als der Grundsprache des betreffenden Stückes.
<i>S p e r r u n g</i>	Hervorhebungen durch Leibniz
	Umrahmungen durch Leibniz zur Hervorhebung eines Terms oder zur Ausgliederung eines Textabschnittes aus dem Textzusammenhang
	Umrahmungen durch Leibniz zur Kennzeichnung wegfallender Terme

2. ABKÜRZUNGEN (allgemein)

a.	auch	Fig., fig.	Figur, figura
a. a. O.	am angegebenen Ort	f.	folgend
aeq., aequ.	aequalis, aequatio	gedr.	gedruckt
Anm.	Anmerkung	gestr.	gestrichen
Aufl.	Auflage	Gln.	Gleichung
Bd(e)	Band (Bände)	Hrsg. (hrsg.)	Herausgeber (herausgegeben)
Bl.	Blatt	i. Allg.	im Allgemeinen
Bog.	Bogen	Jh.	Jahrhundert
bzw.	beziehungsweise	LBr.	HANNOVER, <i>Leibniz-Bibl.</i> Leibniz-Briefwechsel
ca	circa	LH	HANNOVER, <i>Leibniz-Bibl.</i> Leibniz-Handschriften
cap.	capitulum	lib.	liber
dat.	datiert	Marg.	Marginalie(n)
ebd.	ebenda	Ms.	Manuskript
erg.	ergänzt		
Erl.	Erläuterung		
ersch.	erschienen		

N., Nr.	Nummer	TI(e)	Teil(e)
Nachdr.	Nachdruck	tlw.	teilweise
NB.	nota bene	u. a.	und andere, unter anderem
p., pag.	pagina	u. d. T.	unter dem Titel
probl.	problema	Übers. (übers.)	Übersetzung (übersetzt)
prop.	propositio	u. ö.	und öfter
r ^o	recto	v.	van, von, vor
S.	Seite	Var.	Variante
s.	siehe	vgl.	vergleiche
s. a.	siehe auch	v ^o	verso
s. o.	siehe oben	Z.	Zeile
Sp.	Spalte	ℒ	destilletur, distilletur
s. u.	siehe unten		(noch zu bedenken)
SV.	Schriftenverzeichnis		

3. ABKÜRZUNGEN (Schriften)

- Cc 2 = *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz. Fascicule II (Mars 1672 – Novembre 1676)*. Hrsg. A. Rivaud u. a. Poitiers 1914–1924.
- CHILD, *Early mathematical manuscripts* = CHILD, J. M., *The early mathematical Manuscripts of Leibniz*. Chicago [u. a.] 1920. Nachdr. Mineola 2005.
- COUTURAT, *Opusc. et fragm.* = *Opusculs et fragments inédits de Leibniz*. Hrsg. L. Couturat. Paris 1903; Nachdr.: Hildesheim 1961 u. 1966.
- DGS = *Geometria, a Renato Descartes anno 1637 gallice edita . . . in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten*. 2. Aufl. 2 Tle. Amsterdam 1659–1661 (= SV. N. 14,2).
- DO = DESCARTES, R., *Oeuvres*. Hrsg. Ch. Adam u. P. Tannery. 12 Bde. Paris 1879–1910; 2. Aufl. ebd. 1964–1972.
- GERHARDT, *Analysis* = GERHARDT, C. I., *Die Entdeckung der höheren Analysis*. Halle 1855.
- GERHARDT, *Brief* = GERHARDT, C. I., *Brief vom 3. Januar 1851*. In: *Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. Aus dem Jahre 1851. Berlin 1852, S. 341–358.
- GERHARDT, *Differentialrechnung* = GERHARDT, C. I., *Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz*. Halle 1848.
- GERHARDT, *Leibniz in London* = GERHARDT, C. I., *Leibniz in London*. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften LI. LII*. Berlin 1891, S. 157–176.
- GT = *James Gregory tercentenary memorial volume*. Hrsg. H. W. Turnbull, London 1939.
- HESS, *Vorgeschichte der Nova Methodus* = HESS, H.-J., *Zur Vorgeschichte der ‚Nova Methodus‘ (1676 bis 1684)*. In: *300 Jahre ‚Nova Methodus‘ von G. W. Leibniz (1684–1984)*: Symposion in Nordwijkerhout, 28.–30. August 1984, S. 64–102 = *Studia Leibnitiana Sonderheft*. Nr. 14. Stuttgart 1986.
- HOFMANN, *Über frühe mathematische Studien* = HOFMANN, J. E., *Über frühe mathematische Studien von G. W. Leibniz*. In: *Studia Leibnitiana* 2 (1970), S. 81–114.

- HO = HUYGENS, Chr., *Oeuvres complètes*. Hrsg. D. Bierens de Haan, J. Bosscha u. a. 22 Bde. Den Haag 1888–1950.
- LBG = *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*. Hrsg. C. I. Gerhardt. Berlin 1899.
- LQK = LEIBNIZ, G. W., *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Hrsg. E. Knobloch. Göttingen 1993.
- MAHNKE, *Neue Einblicke* = MAHNKE, D., *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*. In: *Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Jahrgang 1925. Phys.-math. Klasse. Nr. 1. Berlin 1926.
- MERSENNE, *Correspondance* = MERSENNE, M., *Correspondance*. Hrsg. C. de Waard u. a. 16 Bde. Paris 1931–1986.
- OC = OLDENBURG, H., *The Correspondence*. Hrsg. A. R. Hall u. M. Boas Hall. 13 Bde. Madison [usw.] 1965–1986.
- Ouvrages* = *Divers ouvrages de mathématique et de physique. Par messieurs de l'Academie Royale des Sciences*. Paris 1693 (= SV. N. 11).
- PO = PASCAL, Bl., *Oeuvres*. Hrsg. P. Boutroux u. a. 14 Bde. Paris 1904–1914; Nachdr.: Vaduz 1965.
- TORRICELLI, *Opere* = TORRICELLI, E., *Opere*. Hrsg. G. Loria u. G. Vassura. Faenza 1919–1944.
- TSCHIRNHAUS, *Briefe* = *Briefe von Ehrenfried Walther von Tschirnhaus an Henry Oldenburg und Pieter van Gent aus den Jahren 1675–1676*. Amsterdam 1990.
- VO = VIÈTE, Fr., *Opera mathematica, opera atque studio Fr. a Schooten*. Leiden 1646; Nachdr.: Hildesheim 1970.
- WALLIS, *Correspondence* = *The correspondence of John Wallis*. Hrsg. C. J. Scriba u. P. Beeley. Oxford 2003 ff. — Im Erscheinen.
- WO = WALLIS, J., *Opera mathematica*, 3 Bde, Oxford 1693–1699; Nachdr.: Hildesheim 1972.

4. MATHEMATISCHE ZEICHEN

Im Folgenden werden die heute ungebräuchlichen Bezeichnungen erklärt, soweit sie nicht unmittelbar aus dem Kontext folgen bzw. im Einzelnen erklärt sind. Für weitere Einzelheiten vgl. die Einleitung S. XXXII–XXXVIII.

Zahlreiche Beispiele und eine tabellarische Übersicht von Leibniz' mathematischen Bezeichnungsweisen gibt F. CAJORI, *Leibniz the master builder of mathematical notation* (in: *Isis* 7 (1925) S. 420–429) bzw. F. CAJORI, *A history of mathematical notation*, Bd. 2 S. 189–196 (La Salle, Ill. 1929 u. ö.).

\wedge	Multiplikation	\sqcap	kleiner als
\times	Überkreuzmultiplikation	$a : b :: c : d$	Proportion
\div	Division		Kürzung eines Bruchs
$\square, \boxed{2}$	Quadrat	\frown	facit
cub., $\boxed{3}$	Kubus	Platzhalter:	
aeq., aequ.	gleich	*	ausfallende Terme
\sqcap	gleich	...	Terme
\sqsupset	größer als	:	Terme

Wiederholung:		q	Quadrat
..	Faktoren	$a . b :: c . d$	Proportion
\div	Brüche	Tschirnhaus:	
Barrow:		ρ	gleich
\times	Multiplikation	$a \text{ --- } b \text{ --- } c \text{ --- } d$	Proportion

5. BERICHTIGUNGEN

Zu Band VII, 2:

- S. 34 Z. 2: *Statt* 1974 *lies* 1674
 S. 75 Z. 7: *Statt* = *lies* π
 S. 295 Z. 5: *Statt* desselbenaszikels *lies* desselben Faszikels
 S. 337 Z. 2: *Statt* = *lies* π
 S. 361 Erl. zu Z. 4-6: *Statt* eckige *lies* eckigen
 S. 801 Z. 18: *Statt* phaseologie *lies* phraseologie
 S. 861 Z. 4: *Statt* Z. 1-8 *lies* Z. 7-13
 S. 869 Z. 9: *Statt* Teil *lies* Titel
 S. 873 SV. N. 32: *Statt* N. 18, 53-55 *lies* N. 18, 58-60

Zu Band VII, 3:

- S. IX *bei* N. 42 *lies* [Juli 1676] *statt* [Oktober 1674 – Januar 1675]
 S. 242 Z. 7: *Statt* 4 Z. 12 f. *lies* 246 Z. 4
 S. 346 Z. 9: *Statt* 21 *lies* 34
 S. 425 Z. 5: *Statt* $\frac{\beta\alpha}{\gamma\beta}$ *lies* $\frac{\beta\alpha}{\gamma\beta}$
 S. 606 Z. 2: *Statt* [Oktober ... 1675] *lies* [Juli 1676]
 S. 606 Z. 5: *Statt* Spuren ... Schnittkante. *lies* Bl. 228 hing ursprünglich zusammen mit VII, 5 N. 90-93.
 S. 606 Z. 8-12: *Statt* Die ... sein *lies* Das vorliegende Stück dürfte zur gleichen Zeit entstanden sein wie das auf Juli 1676 datierte VII, 5 N. 90.
 S. 757 Z. 3 u. 5: *Statt* 4° *lies* 2°
 S. 842 SV. Nr. 8,5: *Hinter* 1657-67 *ergänze* [Marg.]
 S. 845 SV. Nr. 24: *Statt* 723 *lies* 726
 S. 845 SV. Nr. 27: *Statt* 1-2. Lyon 1655 *lies* 1-3. Lyon 1665
 S. 846 SV. Nr. 39,2: *Statt* 5143-45 *lies* 5143-47
 S. 846 SV. Nr. 40: *Statt* 723 *lies* 726
 S. 875, 2. Spalte: *Statt* 920 *lies* jeweils 915