BAGIAN PERTAMA

Bilangan Real, Barisan, Deret

0. BILANGAN REAL

0.1 Bilangan Real sebagai Bentuk Desimal

Dalam buku ini pembaca diasumsikan telah mengenal dengan cukup baik bilangan asli, bilangan bulat, dan bilangan rasional. Himpunan semua *bilangan asli* dilambangkan dengan $\mathbb{N}$, yakni

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Himpunan semua *bilangan bulat* dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$, yakni

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

(Tanda '...' di sini menyatakan 'dan seterusnya', yang seringkali mengasumsikan bahwa pembaca telah mengetahui pola yang ada.) Sementara itu, himpunan semua *bilangan rasional* dilambangkan dengan $\mathbb{Q}$, yakni

$$\mathbb{Q} := \Big\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \text{dan FPB}(p, q) = 1\Big\}.$$

(Di sini FPB(p, q) menyatakan faktor persekutuan terbesar dari p dan q. Sebagai contoh, $FPB(6, 10) = 2$.) Bilangan rasional juga dikenal sebagai *pecahan*.

Selain itu, pembaca juga diasumsikan telah mengenal notasi bilangan dalam bentuk *desimal*. Sebagai contoh,

$$\begin{aligned}
1 &= 1.00000\dots \\
\frac{1}{2} &= 0.50000\dots \\
\frac{1}{3} &= 0.33333\dots \\
\sqrt{2} &= 1.41421\dots \\
e &= 2.71828\dots \\
\pi &= 3.14159\dots
\end{aligned}$$

(Untuk alasan tertentu, di sini digunakan $\cdot$ sebagai tanda pemisah desimal.)

Sebagian bilangan mempunyai bentuk desimal yang 'berhenti', seperti $\frac{1}{2} = 0.5$, dan sebagian bilangan mempunyai bentuk desimal yang 'berulang', seperti $\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$. Bilangan rasional senantiasa dapat dinyatakan dalam bentuk desimal yang berhenti atau berulang. Bilangan yang mempunyai bentuk desimal tak berhenti ataupun berulang merupakan bilangan *irasional*. Sebagai contoh, bilangan

$$0.1010010001\ldots$$

merupakan bilangan irasional.

Himpunan semua bilangan rasional dan bilangan irasional disebut sebagai himpunan bilangan *real*, yang dilambangkan dengan $\mathbb{R}$. Dalam hal ini, kita mempunyai

$$\mathbb{N} \subset Z \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Pada pembahasan selanjutnya, kita akan mempelajari sifat-sifat bilangan real secara lebih mendalam.

Soal Latihan

1. Nyatakan $\frac{1}{12}$ dalam bentuk desimal. Apakah bentuk desimalnya berhenti atau berulang?

2. Nyatakan $0.123123123\ldots$ sebagai bentuk pecahan.

0.2 Sifat Aljabar

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ diasumsikan memenuhi *Sifat Aljabar* yang terkait dengan operasi penjumlahan dan perkalian padanya. Persisnya, $\mathbb{R}$ terhadap penjumlahan bersifat *komutatif*, *asosiatif*, mempunyai *unsur identitas* 0, dan mencakup *unsur lawan*. Demikian pula $\mathbb{R}$ terhadap perkalian bersifat komutatif, asosiatif, mempunyai unsur identitas $1 \neq 0$, dan mencakup *unsur kebalikan*. (Catat bahwa sumsi bahwa $1 \neq 0$ termasuk bagian yang penting di sini.) Selain itu, di $\mathbb{R}$ berlaku pula sifat distributif, yakni $x(y + z) = xy + xz$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$. Kesembilan sifat ini dikenal pula sebagai *Sifat Lapangan* $\mathbb{R}$.

Pada $\mathbb{R}$ dapat didefinisikan pula operasi pengurangan dan pembagian sebagai berikut:

$$a - b := a + (-b)$$

dengan $-b$ menyatakan lawan dari b (terhadap penjumlahan); dan untuk $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b},$$

dengan $\frac{1}{b}$ menyatakan kebalikan dari b (terhadap perkalian).

Catat bahwa 0 tidak mempunyai unsur kebalikan, dan pembagian dengan 0 tidak didefinisikan. Sehubungan dengan itu tidak benar bahwa $\frac{1}{0} = \infty$. Walaupun kelak lambang ∞ (baca: *tak hingga* atau *tak terhingga*) akan sering digunakan, ia tidak menyatakan sebuah bilangan real.

Teorema 1 (Hukum Pencoretan). *Misalkan x, y, dan z adalah bilangan real.*
(i) *Jika $x + z = y + z$, maka $x = y$.*
(ii) *Jika $xz = yz$ dan $z \neq 0$, maka $x = y$.*

Bukti. (i) Misalkan $x + z = y + z$. Tambahkan kedua ruas dengan $-z$, sehingga kita dapatkan

$$(x + z) + (-z) = (y + z) + (-z).$$

Dengan menggunakan sifat asosiatif dan sifat unsur lawan, kita peroleh

$$x + 0 = y + 0,$$

dan berdasarkan sifat unsur identitas pada penjumlahan, kita sampai pada kesimpulan bahwa $x = y$. Jadi pernyataan terbukti.

(ii) Serupa dengan bukti bagian (i); dapat dicoba sebagai latihan. $\square$

Dengan menggunakan Sifat Aljabar, kita dapat menyelesaikan *persamaan* seperti $2x + 3 = 5$ atau $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Soal Latihan

1. Buktikan Teorema 1 bagian (ii).

2. Diketahui bilangan real a sembarang. Buktikan bahwa

(a) $a.0 = 0$.

(b) $(-1)a = -a$.

(c) $-(-a) = a$.

(d) $(-1)(-1) = 1$.

3. Diketahui bilangan real a dan b. Buktikan jika $ab = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$.

4. Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional x yang memenuhi persamaan $x^2 = 2$. (*Petunjuk.* Gunakan metode pembuktian tak langsung.)

0.3 Sifat Urutan

Selain memenuhi Sifat Lapangan, $\mathbb{R}$ juga diasumsikan memenuhi *Sifat Urutan*, yang berkaitan dengan ketaksamaan di antara dua bilangan real. Khususnya, diberikan dua buah bilangan real a dan b sembarang, terdapat tiga kemungkinan dan hanya satu di antara tiga kemungkinan tersebut yang benar — yaitu:

$$\text{atau } a > b, \text{ atau } a = b, \text{ atau } a < b.$$

Sifat ini dikenal sebagai *Hukum Trikotomi*.

Catat bahwa $a < b$ setara dengan $b > a$. Jika a, b, dan c adalah bilangan real, maka $a < b < c$ berarti $a < b$ **dan** $b < c$. Sebagai contoh, kita mempunyai

$$0 < \frac{1}{2} < 1.$$

Selanjutnya, $a \leq b$ berarti $a < b$ **atau** $a = b$; sementara $a \geq b$ berarti $a > b$ atau $a = b$. Sebagai contoh,

$$1 \geq 0 \text{ dan } -1 \leq 1$$

merupakan dua pernyataan yang benar.

Sifat Urutan lainnya yang dipenuhi oleh bilangan real adalah:

(i) Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$.

(ii) Jika $a > b$ dan $c \in \mathbb{R}$, maka $a + c > b + c$.

(iii) Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ac > bc$; Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ac < bc$.

Bilangan x dikatakan bernilai *positif* [*negatif*] jika dan hanya jika $x > 0$ [$x < 0$]. Teorema berikut menyatakan ketertutupan bilangan positif terhadap penjumlahan dan perkalian.

Teorema 2. *Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $a + b > 0$ dan $ab > 0$.*

Bukti. Misalkan $a, b > 0$. Maka $a + b > 0 + b = b$ dan $ab > 0.b = 0$. $\square$

Contoh 3. Fakta bahwa $1 > 0$ dapat dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan sifat-sifat di atas. Ingat bahwa $1 \neq 0$. Karena itu tinggal ada dua kemungkinan: atau $1 < 0$ atau $1 > 0$. Andaikan $1 < 0$. Tambahkan kedua ruas dengan -1, kita peroleh $0 < -1$ atau $-1 > 0$. Akibatnya [lihat Soal Latihan 0.2 No. 2(d)], kita peroleh $1 = (-1)(-1) > 0$, bertentangan dengan pengandaian semula. Dengan demikian tidak mungkin $1 < 0$, dan karena itu mestilah $1 > 0$.

Contoh 4. Misalkan diketahui $a < b + \epsilon$ untuk setiap $\epsilon > 0$. Maka dapat disimpulkan bahwa $a \leq b$. (Andaikan $a > b$. Maka, untuk $\epsilon = a - b$, berlaku $a < b + (a - b) = a$, sesuatu yang mustahil.)

Dengan menggunakan Sifat Urutan, kita dapat menyelesaikan *pertaksamaan* seperti $2x + 3 < 5$ atau $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

Soal Latihan

1. Buktikan jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$.
2. Buktikan jika $a > b$ dan $c > d$, maka $a + c > b + d$.
3. Buktikan jika $A, B > 0$ dan $\frac{a}{A} < \frac{b}{B}$, maka $\frac{a}{A} < \frac{a+b}{A+B} < \frac{b}{B}$.
4. Diketahui $x, y > 0$. Buktikan $x < y$ jika dan hanya jika $x^2 < y^2$.
5. Buktikan jika $b - \epsilon < a < b + \epsilon$ untuk setiap $\epsilon > 0$, maka $a = b$.

0.4 Akar dan Persamaan Kuadrat

Untuk $n \in \mathbb{N}$, kita tuliskan $x^n := x\,x \cdots x$ (n kali). Asumsi berikutnya tentang sistem bilangan real adalah eksistensi akar ke-n. Persisnya, diberikan $y \geq 0$, terdapat sebuah bilangan $x \geq 0$ (tunggal) sedemikian sehingga $y = x^n$.

Untuk $y \geq 0$, nilai $x \geq 0$ yang memenuhi persamaan $y = x^n$ disebut sebagai *akar ke-n* dari y dan dilambangkan dengan

$$x = y^{1/n}.$$

Khususnya, untuk $n = 2$, kita gunakan notasi $\sqrt{y} = y^{1/2}$. Catat bahwa dalam hal ini senantiasa berlaku $\sqrt{y} \geq 0$. Jika $y > 0$, maka tentu saja terdapat dua buah bilangan yang kuadratnya sama dengan y, yaitu $\sqrt{y}$ yang bernilai positif dan $-\sqrt{y}$ yang bernilai negatif. Notasi $\pm\sqrt{y}$ berarti '$\sqrt{y}$ **atau** $-\sqrt{y}$'.

Jika $r = \frac{m}{n}$ adalah suatu bilangan rasional positif dan $y \geq 0$, kita definisikan

$$y^r = y^{m/n} := (y^m)^{1/n}.$$

Catat bahwa $y^{m/n}$ dalam hal ini merupakan akar ke-n dari y^m, yang memenuhi $[y^{m/n}]^n = y^m$.

Selanjutnya, jika r adalah suatu bilangan rasional negatif, maka $-r$ merupakan bilangan rasional positif dan karenanya y^{-r} terdefinisi. Khususnya, jika $y > 0$, maka kita dapat mendefinisikan y^r sebagai

$$y^r := \frac{1}{y^{-r}}.$$

Kita juga mendefinisikan $y^0 = 1$. Dengan demikian, jika $y > 0$, maka y^r terdefinisi untuk semua bilangan rasional. (Definisi y^x untuk bilangan irasional x harus menunggu hingga pembahasan topik lainnya yang lebih mendalam.)

Seperti telah disinggung di atas, untuk $y > 0$, persamaan $x^2 = y$ mempunyai dua buah solusi, yaitu $x = \pm\sqrt{y}$. Persamaan $x^2 = y$ di sini merupakan suatu *persamaan kuadrat*. Bentuk umum persamaan kuadrat (dalam x) adalah

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dengan $a \neq 0$. Sebagaimana telah dipelajari di sekolah menengah, persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ tidak mempunyai solusi atau *akar* real jika $b^2 - 4ac < 0$, mempunyai sebuah akar real (tunggal) jika $b^2 - 4ac = 0$, dan mempunyai dua buah akar real berbeda jika $b^2 - 4ac > 0$. Dalam hal $b^2 - 4ac \geq 0$, akar persamaan kuadrat di atas diberikan oleh rumus

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Akar persamaan kuadrat merupakan titik potong grafik persamaan $y = ax^2 + bx + c$ (yang berbentuk *parabola*) dengan sumbu-x pada *sistem koordinat Cartesius*. (Pembaca diasumsikan telah mengenal sistem koordinat Cartesius dan grafik persamaan padanya.) Ingat bahwa grafik persamaan kuadrat *terbuka ke atas* jika $a > 0$, atau *terbuka ke bawah* jika $a < 0$.

Proposisi 5. *Tidak ada bilangan rasional x yang memenuhi persamaan $x^2 = 2$.*

Bukti. Andaikan terdapat bilangan rasional $x = \frac{p}{q}$ dengan FPB(p, q)=1 sedemikian sehingga $x^2 = 2$. Maka, $p^2 = 2q^2$. Ini berarti bahwa p^2 genap, dan sebagai akibatnya p juga genap. Tulis $p = 2m$. Maka, $q^2 = 2m^2$. Ini berarti bahwa q^2 genap, dan karenanya q juga genap. Ini bertentangan dengan asumsi bahwa FPB(p, q)=1. $\square$

Soal Latihan

1. Buktikan bahwa bilangan x yang memenuhi $2^x = 5$ bukan bilangan rasional.

2. Misalkan koefisien a, b dan c pada persamaan kuadrat $ax^2+bx+c = 0$ merupakan bilangan rasional (dengan, tentu saja, $a \neq 0$). Buktikan jika $\alpha = r + s\sqrt{2}$ merupakan akar persamaan ini, dengan r dan s rasional, maka $\beta = r - s\sqrt{2}$ juga merupakan akar.

3. Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan $a_1, \dots, a_n$ dan $b_1, \dots, b_n$ adalah bilangan real. Buktikan ketaksamaan

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2).$$

(`Catatan`. Ketaksamaan ini dikenal sebagai *Ketaksamaan Cauchy-Schwarz*.)

0.5 Nilai Mutlak

Jika x adalah bilangan real, maka *nilai mutlak* x, ditulis $|x|$, didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0, \\ -x, & \text{jika } x < 0. \end{cases}$$

Sebagai contoh, $|2| = 2$, $|0| = 0$, dan $|-5| = -(-5) = 5$. Perhatikan bahwa $|x| \geq 0$ dan $|x|^2 = x^2$, sehingga $|x| = \sqrt{x^2}$ untuk setiap x.

Teorema 6. *Untuk setiap bilangan real x berlaku*

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Teorema 7. *Untuk setiap bilangan real a dan b berlaku*

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

Teorema 8 (Ketaksamaan Segitiga). *Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Bukti. Perhatikan bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2. \end{aligned}$$

Karena itu (lihat Soal Latihan 0.3 No. 4), kita peroleh

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

sebagaimana kita harapkan. □

Soal Latihan

1. Buktikan Teorema 5.
2. Buktikan Teorema 6.
3. Buktikan bahwa $|a| < b$ jika dan hanya jika $-b < a < b$.
4. Buktikan bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku $|a - b| \geq |a| - |b|$ dan juga $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$.
5. Buktikan jika $a < x < b$ dan $a < y < b$, maka $|x - y| < b - a$. Berikan interpretasi geometrisnya.

1. SIFAT KELENGKAPAN BILANGAN REAL

1.1 Paradoks Zeno

Zeno (490-435 SM), seorang filsuf dan matematikawan Yunani Kuno, mengemukakan sebuah paradoks tentang suatu perlombaan lari antara Achilles dan seekor kura-kura. Karena Achilles berlari lebih cepat daripada sang kura-kura, maka sang kura-kura memulai perlombaan x_0 meter di depan Achilles. Menurut Zeno, sekalipun Achilles berlari lebih cepat dan akan semakin mendekati sang kura-kura, namun ia takkan pernah dapat menyalip sang kura-kura. Ketika Achilles mencapai titik di mana sang kura-kura mulai berlari, sang kura-kura telah menempuh x_1 meter; dan ketika Achilles mencapai posisi tersebut beberapa saat kemudian, sang kura-kura telah menempuh x_2 meter lebih jauh; dan seterusnya.

Apa yang salah dengan paradoks Zeno ini? Dengan pengetahuan tentang bilangan real yang kita kenal sekarang, Achilles akan menyalip sang kura-kura ketika ia telah menempuh x meter, dengan x sama dengan 'bilangan real terkecil yang lebih besar dari semua bilangan $x_0,\ x_0+x_1,\ x_0+x_1+x_2,\ \dots$' Sebagai contoh, bila Achilles berlari dengan kecepatan 6 m/detik sementara sang kura-kura berlari dengan kecepatan 3 m/detik (ditarik roda), maka Achilles akan menyalip sang kura-kura setelah

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 1 \text{ detik}.$$

Hal serupa dijumpai pada metode *exhaustion* Eudoxus (405-355 SM), yang digunakan oleh Archimedes (287-212 SM) untuk menghampiri luas daerah lingkaran dengan luas daerah segi-n beraturan di dalam lingkaran, yaitu dengan barisan bilangan $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \dots$. Luas daerah lingkaran kelak didefinisikan sebagai 'bilangan real terkecil yang lebih besar dari setiap bilangan $A_i,\ i = 1, 2, 3, \dots$. Argumen ini bergantung pada sebuah sifat bilangan real yang belum terpikirkan oleh Eudoxus dan Archimedes, serta matematikawan lainnya pada zaman itu.

Sifat bilangan real yang diperlukan untuk membantah paradoks Zeno atau mendukung argumen Eudoxus dan Archimedes adalah *Sifat Kelengkapan*, yang menjamin eksistensi bilangan real x yang lebih besar dari $x_0,\ x_0 + x_1,\ x_0 + x_1 + x_2,\ \dots$ (pada paradoks Zeno) dan juga bilangan real A yang lebih besar dari $A_i,\ i = 1, 2, 3, \dots$ (pada perhitungan Archimedes).

Sifat Kelengkapan bilangan real biasanya tidak diungkapkan secara eksplisit di sekolah menengah, namun sesungguhnya merupakan sifat yang sangat penting. (Tanpa Sifat Kelengkapan, Achilles takkan memenangkan perlombaan dan luas daerah lingkaran tak dapat dinyatakan sebagai sebuah bilangan.)

Soal Latihan

1. Sederhanakan bentuk penjumlahan $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

1.2 Himpunan Terbatas

Sebelum membahas Sifat Kelengkapan, kita perlu memperkenalkan sejumlah istilah terlebih dahulu. Misalkan H himpunan bagian dari $\mathbb{R}$. Himpunan H dikatakan *terbatas di atas* apabila terdapat suatu bilangan real M sedemikian sehingga

$$x \leq M$$

untuk setiap $x \in H$. Bilangan M yang memenuhi sifat ini (bila ada) disebut sebagai *batas atas* himpunan H. Jika M merupakan batas atas H, maka semua bilangan yang lebih besar daripada M juga merupakan batas atas H.

Serupa dengan itu, himpunan H dikatakan *terbatas di bawah* apabila terdapat suatu bilangan real m sedemikian sehingga

$$m \leq x$$

untuk setiap $x \in H$. Bilangan m yang memenuhi sifat ini (bila ada) disebut sebagai *batas bawah* H. Jika m merupakan batas bawah H, maka semua bilangan yang lebih kecil daripada m juga merupakan batas bawah dari H.

Himpunan H dikatakan *terbatas* apabila ia terbatas di atas **dan** terbatas di bawah.

Contoh 1. (i) Himpunan $A := \{1, 2, 3\}$ terbatas di atas. Sebagai contoh, $100,\ 10,\ 5,$ dan 3 merupakan batas atas himpunan A. Himpunan A juga terbatas di bawah. Sebagai contoh, $-5,\ -1,\ 0,$ dan 1 merupakan batas bawah A.

(ii) Himpunan $I := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ terbatas di atas. Sebagai contoh, $100,\ 10,$ dan 1 merupakan batas atas I. Himpunan I juga terbatas di bawah. Sebagai contoh, $-10,\ -1,$ dan 0 merupakan batas bawah I.

(iii) Himpunan semua bilangan real positif $P := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ terbatas di bawah namun tidak terbatas di atas. Jika M merupakan batas atas himpunan P, maka $x \leq M$ untuk setiap $x \in P$. Dalam hal ini M mesti merupakan bilangan positif. Sebagai akibatnya $M + 1$ juga positif dan $M + 1 \leq M$, sesuatu yang mustahil.

Proposisi 2. *Himpunan $H \subseteq \mathbb{R}$ terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan real K sedemikian sehingga*

$$|x| \leq K$$

untuk setiap $x \in H$.

Misalkan himpunan H terbatas dan M adalah suatu batas atas H. Bila untuk setiap $\epsilon > 0$ bilangan $M - \epsilon$ bukan merupakan batas atas H, maka M disebut sebagai *batas atas terkecil* H. Serupa dengan itu, misalkan m adalah suatu batas bawah H. Bila untuk setiap $\epsilon > 0$ bilangan $m + \epsilon$ bukan merupakan batas bawah H, maka m disebut sebagai *batas bawah terbesar* H. Sebagai contoh, himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ mempunyai batas atas terkecil 3 dan batas bawah terbesar 1.

Soal Latihan

1. Buktikan bahwa batas atas terkecil himpunan I pada Contoh 1 (ii) adalah 1.
2. Buktikan bahwa batas bawah terbesar himpunan P pada Contoh 1 (iii) adalah 0.
3. Buktikan Proposisi 2.

1.3 Sifat Kelengkapan

Sekarang kita sampai pada perumusan Sifat Kelengkapan bilangan real, yang akan sering kita gunakan pada pembahasan selanjutnya.

Sifat Kelengkapan. Setiap himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di atas mempunyai batas atas terkecil. Setiap himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$ yang terbatas di bawah mempunyai batas bawah terbesar.

Misalkan $H \neq \emptyset$. Jika H terbatas di atas, maka batas atas terkecil H disebut sebagai *supremum* H, ditulis $\sup H$. Serupa dengan itu, jika H terbatas di bawah, maka batas bawah terbesar H disebut sebagai *infimum* H, ditulis $\inf H$. Jika H terbatas, maka jelas bahwa

$$\inf H \leq \sup H.$$

Secara umum perlu dicatat bahwa supremum maupun infimum suatu himpunan tidak harus merupakan anggota himpunan tersebut.

Jika H tidak terbatas di atas, kadang kita menuliskan $\sup H = +\infty$; dan jika H tidak terbatas di bawah, kita dapat menuliskan $\inf H = -\infty$.

Contoh 3. (i) Himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ mempunyai batas atas terkecil 3 dan batas bawah terbesar 1; yakni, $\sup A = 3$ dan $\inf A = 1$.
(ii) Misalkan $I = \{x : 0 \leq x < 1\}$. Maka, $\sup I = 1$ dan $\inf I = 0$.
(iii) Misalkan $P = \{x : x > 0\}$. Maka, $\sup P = +\infty$ (yakni, P tak terbatas di atas) dan $\inf P = 0$.

Dengan Sifat Kelengkapan, himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dapat dinyatakan sebagai sebuah garis, yang kita kenal sebagai *garis bilangan real*. Sifat Kelengkapan menjamin bahwa setiap titik pada garis tersebut menyatakan sebuah bilangan real, dan sebaliknya setiap bilangan real menempati sebuah titik pada garis tersebut.

Sebagai perbandingan, himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ tidak memenuhi Sifat Kelengkapan, dan apabila kita memaksakan diri untuk menyatakannya sebagai sebuah garis, maka garis tersebut akan berlubang-lubang (sebagai contoh, pada Sub-bab 0.4 telah dibuktikan bahwa bilangan x di antara 1 dan 2 yang memenuhi $x^2 = 2$ bukan merupakan bilangan rasional, sehingga terdapat lubang di antara 1 dan 2).

Sifat Kelengkapan menjamin bahwa 1 merupakan bilangan real terkecil yang lebih besar dari $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$, dan terdapat bilangan real π yang menyatakan luas daerah lingkaran berjari-jari 1 dan nilainya lebih besar dari luas daerah segi-n beraturan di dalam lingkaran tersebut, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sifat Kelengkapan pula lah yang menjamin bahwa bilangan yang mempunyai bentuk desimal tak berhenti ataupun berulang (yang dibahas pada Sub-bab 0.2) merupakan bilangan real.

Soal Latihan

1. Verifikasi nilai supremum dan infimum pada Contoh 3(ii) dan (iii).
2. Diketahui $H = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Buktikan bahwa $\sup H = 1$ dan $\inf H \geq 0$. (Kelak anda akan diminta membuktikan bahwa $\inf H = 0$.)
3. Diketahui himpunan $H \neq \emptyset$ terbatas di atas dan M adalah suatu batas atas H. Buktikan bahwa $M = \sup H$ jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $x \in H$ sedemikian sehingga $x > M - \epsilon$.

1.4 Manipulasi dengan Supremum dan Infimum

Misalkan $H \subseteq \mathbb{R}$ dan $c \in \mathbb{R}$. Kita definisikan

$$cH := \{cx : x \in H\} \quad \text{dan} \quad H + c := \{x + c : x \in H\}.$$

Sebagai contoh, jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $c = 2$, maka

$$2A = \{2, 4, 6\} \quad \text{dan } A + 2 = \{3, 4, 5\}.$$

Proposisi 4. *Misalkan $H \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan terbatas di atas, dan $c > 0$. Maka cH terbatas di atas dan*

$$\sup(cH) = c \sup H.$$

Bukti. Misalkan $v = \sup H$. Ambil sembarang $y \in cH$. Maka, $y = cx$ untuk suatu $x \in H$. Karena $x \leq v$ dan $c > 0$, kita peroleh

$$y \leq cv.$$

Jadi cv merupakan batas atas cH. Selanjutnya, untuk sembarang $\epsilon > 0$, $v - \frac{\epsilon}{c}$ bukan batas atas H. Karena itu, terdapat $x \in H$ sedemikian sehingga

$$v - \frac{\epsilon}{c} < x.$$

Kalikan kedua ruas dengan c, kita dapatkan

$$cv - \epsilon < cx,$$

yang menunjukkan bahwa $cv - \epsilon$ bukan batas atas cH. Jadi cv merupakan batas atas terkecil cH, yakni $cv = \sup(cH)$. $\square$

Proposisi 5. *Misalkan $H \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan terbatas di atas, dan $c < 0$. Maka cH terbatas di bawah dan*

$$\inf(cH) = c \sup H.$$

Proposisi 6. *Misalkan $H \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan terbatas di atas, dan $c \in \mathbb{R}$. Maka $H + c$ terbatas di atas dan*

$$\sup(H + c) = c + \sup H.$$

Soal Latihan

1. Buktikan Proposisi 5.
2. Buktikan Proposisi 6.
3. Misalkan $H \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan terbatas di atas, dan $G \subseteq H$ juga tak kosong. Buktikan bahwa G terbatas di atas dan $\sup G \le \sup H$.
4. Misalkan $G, H \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan terbatas. Definisikan $H + G := \{x + y : x \in H,\ y \in G\}$. Buktikan bahwa $H + G$ terbatas dengan

$$\sup(H + G) = \sup H + \sup G \quad \text{dan} \quad \inf(H + G) = \inf H + \inf G.$$

5. Diketahui $\emptyset \ne H \subseteq P = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Definisikan himpunan $G = \left\{\frac{1}{x} : x \in H\right\}$. Buktikan jika H terbatas di atas, maka G terbatas di bawah dan

$$\inf G = \frac{1}{\sup H}.$$

2. LEBIH JAUH TENTANG BILANGAN REAL

2.1 Maksimum dan Minimum; Interval

Kita telah mencatat sebelumnya bahwa supremum dan infimum suatu himpunan tidak harus merupakan anggota himpunan tersebut. Jika H mempunyai supremum dan $\sup H =: M \in H$, maka M merupakan anggota terbesar dan disebut *maksimum* H, ditulis $M := \text{maks } H$. Serupa dengan itu, jika H mempunyai infimum dan $\inf H =: m \in H$, maka m merupakan anggota terkecil dan disebut *minimum* H, ditulis $m := \min H$.

Contoh 1. (i) Himpunan $A := \{1, 2, 3\}$ mempunyai maksimum 3 dan minimum 1.
(ii) Himpunan $I := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ mempunyai minimum 0 tetapi tidak mempunyai maksimum. Di sini $1 = \sup I$ tetapi $1 \notin I$, jadi ia bukan maksimum I.
(iii) Himpunan $P := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ tak mempunyai maksimum maupun minimum.

Himpunan I pada Contoh 1(ii) merupakan sebuah *interval*. Secara umum, sebuah *interval* di $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang bersifat: jika $u, v \in I$ dan $u \leq x \leq v$, maka $x \in I$. Sebuah interval mungkin terbatas dan mungkin pula tak terbatas.

Berikut adalah notasi untuk interval terbatas di $\mathbb{R}$:

$$(a, b) := \{x : a < x < b\}.$$
$$[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}.$$
$$[a, b) := \{x : a \leq x < b\}.$$
$$(a, b] := \{x : a < x \leq b\}.$$

Berikut adalah notasi untuk interval tak terbatas di $\mathbb{R}$ (selain $\mathbb{R}$ sendiri):

$$(a,\infty) := \{x : x > a\}.$$
$$[a,\infty) := \{x : x \geq a\}.$$
$$(-\infty,b) := \{x : x < b\}.$$
$$(-\infty,b] := \{x : x \leq b\}.$$

Catat bahwa lambang ∞ dan $-\infty$ di sini bukan menyatakan bilangan real.

Interval (a,b), (a,∞), dan $(-\infty,b)$ merupakan interval *terbuka*, sedangkan interval $[a,b]$, $[a,\infty)$, dan $(-\infty,b]$ merupakan interval *tertutup*. Sementara itu, interval $[a,b)$ dan $(a,b]$ sering disebut sebagai interval *setengah terbuka*. Interval $[a,b]$ yang bersifat tertutup dan terbatas merupakan contoh himpunan *kompak* di $\mathbb{R}$. Pada $[a,b]$, a merupakan minimum dan b merupakan maksimum.

Soal Latihan

1. Tentukan maksimum dan minimum himpunan berikut (bila ada).
   (a) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (b) $\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (c) Himpunan semua bilangan rasional r dengan $0 \leq r \leq 1$.
2. Misalkan $c \in \mathbb{R}$ dan $\delta > 0$. Buktikan bahwa
$$\{x : |x-c| < \delta\} = (c-\delta, c+\delta).$$
3. Beri dua buah contoh himpunan yang mempunyai supremum 1 tetapi tidak mempunyai satu pun anggota $x \in (0,1)$.

2.2 $\mathbb{N}$ dan $\mathbb{Q}$ sebagai Himpunan Bagian dari $\mathbb{R}$

Dengan Sifat Kelengkapan, kita dapat pula membuktikan bahwa $\mathbb{N}$ tak terbatas di atas. Fakta ini dikenal sebagai *Sifat Archimedes*, yang lazim dinyatakan sebagai sebuah teorema.

Teorema 2 (Sifat Archimedes). *Untuk setiap* $x \in \mathbb{R}$ *terdapat* $n_x \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga* $x < n_x$.

Bukti. Andaikan sebaliknya berlaku, yakni terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $n \leq x$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ini berarti bahwa $\mathbb{N}$ terbatas di atas. Karena $\mathbb{N} \neq \emptyset$ dan $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, maka menurut Sifat Kelengkapan, $\mathbb{N}$ mempunyai supremum, sebutlah $v = \sup \mathbb{N}$. Karena v merupakan batas atas terkecil $\mathbb{N}$, $v - 1$ bukan batas atas $\mathbb{N}$, sehingga terdapat $m \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $v - 1 < m$ atau $v < m + 1$. Ini mustahil mengingat $m + 1 \in \mathbb{N}$ dan v merupakan batas atas $\mathbb{N}$. Jadi pengandaian di atas mestilah salah. $\square$

Dengan asumsi bahwa jarak antara dua bilangan asli sekurang-kurangnya sama dengan 1, kita dapat membuktikan Sifat Terurut Rapi $\mathbb{N}$, yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3 (Sifat Terurut Rapi $\mathbb{N}$). *Setiap himpunan bagian tak kosong dari* $\mathbb{N}$ *mempunyai minimum.*

Bukti. Misalkan $A \subseteq \mathbb{N}$ tak kosong. Jelas bahwa sebagai himpunan bagian dari $\mathbb{N}$, himpunan A terbatas di bawah. Menurut Sifat Kelengkapan, A mempunyai infimum, sebutlah $a = \inf A$. Sekarang $a + 1$ bukan batas bawah A, dan karenanya terdapat $n \in A$ sehingga

$$n < a + 1.$$

Jika n bukan minimum A, maka terdapat $m \in A$ sehingga $m < n$. Dalam hal ini, kita mempunyai

$$a \leq m < n < a + 1,$$

sehingga jarak antara m dan n lebih kecil dari 1. Ini bertentangan dengan sifat bilangan asli. Jadi n mestilah minimum A, dan bukti selesai. $\square$

Dengan menggunakan Sifat Archimedes dan Sifat Terurut Rapi $\mathbb{N}$, kita dapat membuktikan sifat kepadatan bilangan rasional di $\mathbb{R}$, yang dinyatakan sebagai teorema berikut.

Teorema 4 (Kepadatan Bilangan Rasional). *Misalkan* $x, y \in \mathbb{R}$ *dengan* $x < y$. *Maka terdapat* $r \in \mathbb{Q}$ *sedemikian sehingga* $x < r < y$.

Bukti. Tanpa mengurangi keumuman, kita asumsikan bahwa $0 < x < y$. Menurut Sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n > \frac{1}{y-x}$. Untuk n tersebut, kita mempunyai

$$ny - nx > 1.$$

Sekarang tinjau himpunan $A := \{k : k \in \mathbb{N},\ nx < k\}$. Menurut Sifat Terurut Rapi $\mathbb{N}$, A mempunyai minimum, sebutlah m. Dalam hal ini m merupakan bilangan asli m terkecil yang memenuhi

$$m - 1 \leq nx < m.$$

Akibatnya, kita peroleh

$$m \leq nx + 1 < ny.$$

Karena itu, $nx < m < ny$, atau

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

Jadi terdapat bilangan rasional $r := \frac{m}{n}$ sedemikian sehingga $x < r < y$. □

`Catatan`. Bukti Teorema 4 memberi tahu kita bagaimana caranya mendapatkan sebuah bilangan rasional di antara x dan y dengan $0 < x < y$. Pertama, kita *zoom out* interval (x, y) dengan faktor dilasi $n > \frac{1}{y-x}$, sehingga kita peroleh interval (nx, ny) yang lebarnya lebih besar daripada 1. Dalam interval tersebut kita pilih bilangan asli m, kemudian kita *zoom in* untuk mendapatkan bilangan rasional $\frac{m}{n}$ di dalam interval (x, y). Untuk $x, y \in \mathbb{R}$ lainnya, bilangan rasional dapat diperoleh dengan memanfaatkan hasil ini. Sebagai contoh, untuk $x < y < 0$, jika r adalah bilangan rasional di dalam interval $(-y, -x)$, maka $-r$ adalah bilangan rasional di dalam interval (x, y).

Soal Latihan

1. Diketahui $H = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Buktikan bahwa $\inf H = 0$.

2. Misalkan $A = \left\{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Buktikan bahwa $\sup A = 1$.

3. Buktikan bahwa terdapat bilangan real positif x sedemikian sehingga $x^2 = 2$. (*Petunjuk*. Tinjau himpunan $A := \{a \in \mathbb{R} : a > 0,\ a^2 < 2\}$.)

4. Diketahui $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x < y$. Buktikan bahwa terdapat bilangan irasional s sedemikian sehingga $x < s < y$.

5. Buktikan bahwa himpunan semua bilangan irasional s dengan $0 \leq s \leq 1$ tidak mempunyai maksimum maupun minimum.

2.3 Prinsip Induksi Matematika

Salah satu metode pembuktikan klasik untuk pernyataan yang berkaitan dengan bilangan asli berpijak pada Prinsip Induksi Matematika.

Teorema 5 (Prinsip Induksi Matematika). *Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan mengenai $n \in \mathbb{N}$. Misalkan pula*

(i) $P(1)$ *benar, dan*

(ii) *untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ berlaku: jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar.*

Maka, $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Misalkan $S := \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ salah}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $S = \emptyset$. Andaikan $S \neq \emptyset$. Maka, menurut Sifat Terurut Rapi, S mempunyai minimum, sebutlah m. Karena $P(1)$ benar, $1 \notin S$. Jadi $m \neq 1$. Akibatnya $m > 1$ dan $m - 1 \in \mathbb{N}$. Karena m adalah minimum S, $m-1 \notin S$ atau $P(m-1)$ benar. Berdasarkan hipotesis (ii), kita peroleh $P(m)$ benar atau $m \notin S$, yang bertentangan dengan $m \in S$. □

Contoh 6. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, kita mempunyai

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Untuk membuktikan kebenaran pernyataan ini, misalkan $S_n := 1+2+\cdots+n$, $n \in \mathbb{N}$, dan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Perhatikan bahwa $P(1)$ benar, karena $S_1 = 1 = \frac{1}{2}.1.(1+1)$. Selanjutnya misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k)$ benar atau $S_k = \frac{1}{2}k(k+1)$. Untuk mengetahui apakah $P(k+1)$ benar, kita periksa

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) \\
&= S_k + (k+1) \\
&= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \\
&= \frac{1}{2}(k+1)(k+2).
\end{aligned}$$

Jadi ternyata $P(k+1)$ benar. Berdasarkan Prinsip Induksi Matematika, kita simpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 7. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $n < 2^n$. Di sini $P(n)$ adalah ketaksamaan $n < 2^n$. Jelas bahwa $P(1)$ benar karena $1 < 2$. Selanjutnya misalkan $k \in \mathbb{N}$ dan $P(k)$

benar, yakni $k < 2^k$. Maka, $1 \leq k < 2^k$ dan

$$k + 1 < 2^k + 1 < 2^k + 2^k = 2^{k+1},$$

yakni $P(k + 1)$ benar. Berdasarkan Prinsip Induksi Matematika, $P(n)$ benar atau $n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 8 (Prinsip Induksi Kuat). *Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan mengenai $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga*

(i) *$P(1)$ benar, dan*

(ii) *untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, jika $P(1), \ldots, P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.*

Maka, $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Soal Latihan

1. Buktikan bahwa $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
2. Buktikan bahwa $2^{n-1} \leq n!$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. (`Catatan`. $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.)
3. Buktikan Teorema 8.
4. Misalkan $n_0 \in \mathbb{N}$ dan $P(n)$ adalah suatu pernyataan mengenai $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $P(n_0)$ benar dan jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar. Buktikan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$.
5. Buktikan bahwa $n^2 < 2^n$ untuk $n \geq 5$.
6. Diketahui $r_1 = 1$ dan $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$ untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$. Buktikan bahwa $1 < r_n < 2$ untuk setiap $n \geq 3$.

3. BARISAN

3.1 Definisi Barisan

Dalam kisah Zeno tentang perlombaan lari antara Achilles dan seekor kura-kura, ketika Achilles mencapai posisi x_0 tempat sang kura-kura mulai berlari, sang kura-kura telah menempuh x_1 meter; dan ketika Achilles mencapai posisi tersebut beberapa saat kemudian, sang kura-kura telah menempuh x_2 meter lebih jauh; dan seterusnya. Sebagai contoh, bila Achilles berlari dengan kecepatan 6 m/detik sementara sang kura-kura berlari dengan kecepatan 3 m/detik (ditarik roda), maka Achilles akan mencapai posisi-posisi tertentu yang pernah dicapai oleh sang kura-kura pada saat

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \text{ detik}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Bentuk penjumlahan di atas membentuk sebuah deret geometri, yang jumlahnya sama dengan $1 - \frac{1}{2^n}$. Jadi, dalam cerita di atas, kita mempunyai sebuah 'barisan' bilangan $\langle 1 - \frac{1}{2^n} \rangle$. Bila n 'menuju tak terhingga', maka $\frac{1}{2^n}$ 'menuju 0'. Jadi barisan bilangan di atas 'konvergen ke 1'. Dengan pengetahuan ini, pada akhirnya kita dapat menyimpulkan bahwa Achilles akan menyalip sang kura-kura setelah berlari selama 1 detik.

Barisan bilangan dapat pula muncul ketika kita hendak menaksir suatu bilangan, misalnya menaksir $\sqrt{2}$. Salah satu cara yang mudah adalah dengan *Metode Bagi Dua*. Mengetahui bahwa $\sqrt{2}$ terletak di antara 1 dan 2, kita taksir $\sqrt{2}$ dengan $x_1 := \frac{1}{2}(1+2) = 1.5$. Setelah kita periksa bahwa $1.5^2 = 2.25 > 2$, maka kita tahu bahwa $\sqrt{2}$ berada di antara 1 dan 1.5. Selanjutnya kita taksir dengan $x_2 := \frac{1}{2}(1 + 1.5) = 1.25$, dan seterusnya sehinga kita peroleh barisan bilangan $x_1, x_2, x_3, \ldots$ yang merupakan hampiran untuk $\sqrt{2}$.

Secara informal, sebuah *barisan* bilangan real dapat diartikan sebagai suatu daftar bilangan real $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Persisnya, sebuah barisan bilangan real adalah suatu aturan yang mengaitkan **setiap** bilangan asli n dengan sebuah bilangan real **tunggal** x_n. Di sini x_n disebut sebagai *suku ke-n* barisan tersebut. Notasi $\langle x_n \rangle$ menyatakan barisan dengan suku ke-n x_n. Himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ disebut sebagai *daerah nilai* barisan $\langle x_n \rangle$. Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan *terbatas* (*terbatas di atas* atau *terbatas di bawah*) apabila daerah nilainya terbatas (terbatas di atas atau terbatas di bawah). Jadi, menurut Proposisi 2 pada Bab 1, $\langle x_n \rangle$ terbatas jika dan hanya jika terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \le K$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 1. (i) Barisan $\langle \frac{1}{n} \rangle$ adalah barisan bilangan $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots$.
(ii) Barisan $\langle (-1)^n \rangle$ adalah barisan bilangan $-1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots$. Jika n ganjil, maka suku ke-n bernilai -1; dan jika n genap, maka suku ke-n bernilai 1. Jadi daerah nilai barisan ini adalah $\{-1, 1\}$.
(iii) Barisan yang didefinisikan secara induktif dengan $x_1 = x_2 = 1$ dan

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

adalah barisan $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Barisan ini dikenal sebagai *barisan Fibonacci* (yang dipublikasikan oleh Leonardo Fibonacci dalam *Liber abaci* pada 1202).
(iv) Barisan $\langle r_n \rangle$ yang didefinisikan secara induktif dengan $r_1 = 1$ dan

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}, \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \ldots$$

adalah barisan $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots$.

Soal Latihan

1. Buktikan bahwa ketiga barisan pada Contoh 1 merupakan barisan terbatas.
2. Buktikan bahwa barisan Fibonacci tak terbatas.
3. Misalkan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Fibonacci. Definisikan $r_n := \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa barisan $\langle r_n \rangle$ terbatas.

3.2 Kekonvergenan Barisan

Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan *konvergen ke L* ($L \in \mathbb{R}$) apabila untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga

$$\text{jika } n \geq N, \text{ maka } |x_n - L| < \epsilon.$$

Bilangan L dalam hal ini disebut sebagai *limit* barisan $\langle x_n \rangle$, dan kita tuliskan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L,$$

atau

$$x_n \to L, \text{ bila } n \to \infty.$$

Secara informal, kita dapat mengatakan bahwa x_n 'menuju L' bila n 'menuju tak terhingga'.

Untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, bilangan x_n dapat dianggap sebagai *hampiran* untuk L (dan sebaliknya, L merupakan hampiran untuk x_n). Jarak $|x_n - L|$ antara x_n dan L menyatakan *kesalahan* pada penghampiran tersebut (dengan ϵ sebagai *taksiran kesalahan maksimum*-nya). Definisi di atas menyatakan bahwa kesalahan tersebut dapat dibuat sekecil-kecilnya dengan memilih n cukup besar.

Contoh 2. Barisan $\langle \frac{1}{n} \rangle$ konvergen ke 0, yakni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, kita dapat memilih bilangan asli $N > \frac{1}{\epsilon}$ sedemikian sehingga jika $n \geq N$, maka

$$\Big|\frac{1}{n} - 0\Big| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

`Catatan`. Eksistensi bilangan asli N yang lebih besar dari bilangan real $\frac{1}{\epsilon}$ tentu saja dijamin oleh Sifat Archimedes.)

Teorema 3. *Sebuah barisan tidak mungkin konvergen ke dua buah limit yang berbeda.*

Bukti. Misalkan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L dan juga ke M. Untuk $\epsilon > 0$ sembarang, kita dapat memilih $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_1$ berlaku $|x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Pada saat yang sama, kita dapat memilih $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_2$ berlaku $|x_n - M| < \frac{\epsilon}{2}$. Jadi, untuk $N :=$ maks $\{N_1, N_2\}$, kita mempunyai

$$|L - M| \leq |L - x_n| + |x_n - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Karena ini berlaku untuk $\epsilon > 0$ sembarang, kita simpulkan bahwa $|L - M| = 0$ atau $L = M$. $\square$

Teorema 4. *Jika $\langle x_n \rangle$ konvergen, maka $\langle x_n \rangle$ terbatas.*

`Catatan`. Kebalikan dari Teorema 4 tidak berlaku. Sebagai contoh, $\langle (-1)^n \rangle$ terbatas, tetapi tidak konvergen. Di sini keterbatasan merupakan 'syarat perlu' tetapi bukan merupakan 'syarat cukup' untuk kekonvergenan.

Bukti. Misalkan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L. Pilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n - L| < 1$ untuk $n \geq N$. Akibatnya, untuk $n \geq N$, kita mempunyai

$$|x_n| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L|.$$

Sebut $K := \text{maks}\{|x_1|, \ldots, |x_N|, 1 + |L|\}$. Maka jelas bahwa

$$|x_n| \leq K,$$

untuk tiap $n \in \mathbb{N}$. Ini menunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ terbatas. □

Barisan yang tidak konvergen disebut barisan *divergen*. Dari Teorema 4, kita mengetahui bahwa barisan tak terbatas tidak mungkin konvergen, dan karenanya ia merupakan barisan divergen. Sebagai contoh, barisan Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

merupakan barisan divergen karena ia tak terbatas.

Selanjutnya perlu diingat bahwa barisan terbatas pun mungkin saja divergen. Sebagai contoh, barisan $\langle (-1)^n \rangle$ merupakan barisan divergen. Dengan mudah kita dapat menunjukkan bahwa $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n \neq \pm 1$. Namun ini belum menunjukkan bahwa $\langle (-1)^n \rangle$ divergen. Untuk menunjukkan kedivergenan $\langle (-1)^n \rangle$, kita harus meyakinkan bahwa $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n \neq L$ untuk sembarang $L \in \mathbb{R}$.

Soal Latihan

1. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan rasional $r > 0$, barisan $\langle \frac{1}{n^r} \rangle$ konvergen ke 0.

2. Buktikan bahwa $\left\langle \frac{n-1}{n+1} \right\rangle$ konvergen ke 1.

3. Tuliskan arti dari $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \neq L$. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n \neq L$ untuk sembarang $L \in \mathbb{R}$.

4. Buktikan jika $c \in \mathbb{R}$ dan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L, maka $\langle cx_n \rangle$ konvergen ke cL.
5. Buktikan jika $\langle x_n \rangle$ konvergen ke $L > 0$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x_n > \frac{L}{2}$ untuk tiap $n \geq N$.
6. Berikan alasan sederhana mengapa barisan Fibonacci tidak mungkin konvergen.

3.3 Teorema Limit

Dalam contoh dan soal-soal latihan pada subbab sebelumnya, ketika $\epsilon > 0$ diberikan, cukup mudah bagi kita untuk mencari bilangan asli N yang memenuhi definisi barisan konvergen. Namun secara umum tidaklah selalu demikian situasinya. Dalam hal ini kita perlu mempunyai cara lain untuk memeriksa kekonvergenan suatu barisan (dan menentukan limitnya) tanpa harus menggunakan definisinya.

Proposisi 5. *Misalkan $x_n \to L$ dan $y_n \to M$ bila $n \to \infty$, dan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Maka*
(i) $\lambda x_n + \mu y_n \to \lambda L + \mu M$ *bila* $n \to \infty$.
(ii) $x_n y_n \to LM$ *bila* $n \to \infty$.
(iii) $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{L}{M}$ *bila* $n \to \infty$, *asalkan* $M \neq 0$.

Bukti. (i) Berdasarkan Soal Latihan 3.2 No. 4, cukup dibuktikan bahwa, jika $x_n \to L$ dan $y_n \to M$ untuk $n \to \infty$, maka $x_n + y_n \to L + M$ untuk $n \to \infty$. Diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_1$ berlaku

$$|x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pada saat yang sama, terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N_2$ berlaku

$$|y_n - M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sekarang pilih $N := \text{maks}\{N_1, N_2\}$. Maka, untuk $n \geq N$, kita peroleh (dengan menggunakan Ketaksamaan Segitiga)

$$|(x_n + y_n) - (L + M)| \leq |x_n - L| + |y_n - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ini menunjukkan bahwa $x_n + y_n \to L + M$ untuk $n \to \infty$.

Bukti bagian (ii) dan (iii) diserahkan sebagai latihan. $\square$

Contoh 6. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-5n}{3n^2-7n+4} = \dfrac{2}{3}$.

`Penjelasan`. Berdasarkan Proposisi 5 (serta contoh dan soal latihan pada §3.2),

$$\frac{2n^2-5n}{3n^2-7n+4} = \frac{2-(5/n)}{3-(7/n)+(4/n^2)} \to \frac{2-0}{3-0+0} = \frac{2}{3}$$

bila $n \to \infty$.

Teorema 7 (Teorema Apit). *Misalkan $x_n \leq y_n \leq z_n$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $x_n \to L$ dan $z_n \to L$ untuk $n \to \infty$, maka $y_n \to L$ untuk $n \to \infty$.*

`Catatan`. Hipotesis bahwa $x_n \leq y_n \leq z_n$ berlaku untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ dapat 'diperlunak' menjadi hanya berlaku untuk tiap $n \geq n_0$ (untuk suatu $n_0 \in \mathbb{N}$). Dalam menyelidiki kekonvergenan suatu barisan, yang penting untuk kita tangani adalah 'ekor'-nya, yakni suku-suku x_n dengan $n \geq n_0$.

Bukti. Diberikan $\epsilon > 0$, pilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq N$ berlaku

$$|x_n - L| < \epsilon \quad \text{dan} \quad |z_n - L| < \epsilon$$

atau

$$L - \epsilon < x_n < L + \epsilon \quad \text{dan} \quad L - \epsilon < z_n < L + \epsilon.$$

Akibatnya, untuk $n \geq N$, kita peroleh

$$L - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L + \epsilon,$$

sehingga $|y_n - L| < \epsilon$. Ini menunjukkan bahwa $y_n \to L$ untuk $n \to \infty$. $\square$

Contoh 8. Misalkan $\langle x_n \rangle$ terbatas. Maka $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = 0$.

`Penjelasan`. Terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$-K \leq x_n \leq K.$$

Akibatnya

$$-\frac{K}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{K}{n}.$$

Karena $\lim_{n\to\infty} \dfrac{K}{n} = 0$, maka menurut Teorema Apit $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = 0$.

Teorema 9. (i) *Jika* $x_n \to L$ *untuk* $n \to \infty$*, maka* $|x_n| \to |L|$ *untuk* $n \to \infty$*.*
(ii) *Jika* $x_n \geq 0$ *untuk tiap* $n \in \mathbb{N}$ *dan* $x_n \to L$ *untuk* $n \to \infty$*, maka* $L \geq 0$ *dan* $\sqrt{x_n} \to \sqrt{L}$ *untuk* $n \to \infty$*.*

Bukti. (i) Berdasarkan Ketaksamaan Segitiga, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, kita mempunyai

$$\big||x_n| - |L|\big| \leq |x_n - L|.$$

Karena itu jelas jika $x_n \to L$ untuk $n \to \infty$, maka $|x_n| \to |L|$ untuk $n \to \infty$.

(ii) Andaikan $L < 0$, kita dapat memilih $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x_n < \frac{L}{2} < 0$, bertentangan dengan hipotesis. Jadi mestilah $L \geq 0$.

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa $\langle \sqrt{x_n} \rangle$ konvergen ke $\sqrt{L}$, kita tinjau kasus $L = 0$ dan kasus $L > 0$ secara terpisah. Untuk kasus $L = 0$, kita perhatikan bahwa $\sqrt{x_n} < \sqrt{\epsilon}$ bila $x_n < \epsilon$. Karena itu, $\sqrt{x_n} \to 0$ untuk $n \to \infty$ karena $x_n \to 0$ untuk $n \to \infty$. Sekarang misalkan $L > 0$. Untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, kita mempunyai

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{L}| = \frac{|x_n - L|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{L}} \leq \frac{1}{\sqrt{L}}|x_n - L|.$$

Jadi, diberikan $\epsilon > 0$, kita tinggal memilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $|x_n - L| < \epsilon\sqrt{L}$. Ini menunjukkan bahwa $\sqrt{x_n} \to \sqrt{L}$ untuk $n \to \infty$.

Soal Latihan

1. Buktikan Proposisi 5 bagian (ii) dan (iii).

2. Buktikan jika $|x_n - L| \leq y_n$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ dan $y_n \to 0$ untuk $n \to \infty$, maka $x_n \to L$ untuk $n \to \infty$.

3. Diketahui $x_n \leq y_n$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to L$ dan $y_n \to M$ untuk $n \to \infty$. Buktikan bahwa $L \leq M$.

4. Buktikan bahwa $\left\langle \frac{1}{2^n} \right\rangle$ konvergen ke 0, dengan menggunakan fakta bahwa $n < 2^n$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$.

5. Buktikan bahwa $\langle \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rangle$ konvergen ke 0.

6. Diketahui $|x| < 1$. Buktikan bahwa $\langle x^n \rangle$ konvegen ke 0. (*Petunjuk.* Tuliskan $|x| = \frac{1}{1+a}$, maka $|x^n| < \frac{1}{an}$.)

7. Misalkan $x_n \le y_n$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$. Buktikan jika $x_n \to L$ dan $y_n \to M$ untuk $n \to \infty$, maka $L \le M$.

3.4 Barisan Monoton

Salah satu jenis barisan yang mudah dipelajari kekonvergenannya adalah barisan monoton. Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan *naik* apabila $x_n \le x_{n+1}$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$. Serupa dengan itu, $\langle x_n \rangle$ dikatakan *turun* apabila $x_n \ge x_{n+1}$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan naik dan barisan turun disebut barisan *monoton*. Bila $x_n < x_{n+1}$ atau $x_n > x_{n+1}$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\langle x_n \rangle$ dikatakan *naik murni* atau *turun murni*.

Contoh 10. (i) Barisan $\langle \frac{1}{n} \rangle$ merupakan barisan monoton turun.
(ii) Barisan Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ merupakan barisan monoton naik.
(iii) Barisan konstan $\langle c \rangle$ merupakan barisan monoton naik dan sekaligus turun.
(iv) Barisan $\langle (-1)^n \rangle$ bukan merupakan barisan monoton.

Teorema 11. (i) *Jika $\langle x_n \rangle$ naik dan terbatas (di atas), maka ia konvergen ke* $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
(ii) *Jika $\langle x_n \rangle$ turun dan terbatas (di bawah), maka ia konvergen ke* $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Bukti. (i) Misalkan $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dan $L = \sup A$. Akan ditunjukkan bahwa $x_n \to L$ untuk $n \to \infty$. Untuk setiap $\epsilon > 0$, $L - \epsilon$ bukan batas atas himpunan A, dan karenanya terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $L - \epsilon < x_N \le L$. Karena $\langle x_n \rangle$ naik, untuk setiap $n \ge N$ berlaku $L - \epsilon < x_N \le x_n \le L$, dan sebagai akibatnya

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

Dengan demikian $x_n \to L$ untuk $n \to \infty$.

(ii) Serupa dengan bukti untuk bagian (i).

Contoh 12. Misalkan $x_n := 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}$. Di sini jelas bahwa $\langle x_n \rangle$ naik. Selanjutnya, untuk tiap $n \ge 2$, kita mempunyai

$$\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Akibatnya, untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Jadi $\langle x_n \rangle$ terbatas (di atas). Menurut Teorema 11, $\langle x_n \rangle$ konvergen (ke suatu $L \leq 2$).

Contoh 13. Diberikan $a > 0$ dan $x_0 > 0$, definisikan barisan $\langle x_n \rangle$ sebagai

$$x_n = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dapat ditunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ turun dan terbatas di bawah, sehingga konvergen, dan limitnya adalah $\sqrt{a}$. Lihat tabel di bawah yang berisi nilai suku-suku barisan ini untuk $a = 2$ dan $x_0 = 1$. (Cara menghampiri $\sqrt{a}$ dengan barisan ini telah dikenal di Mesopotamia sebelum 1500 SM.)

Contoh 14. Misalkan $x_n := \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dapat diperiksa bahwa $\langle x_n \rangle$ naik dan terbatas (di atas), sehingga konvergen. (Lihat [1] atau [2].)

Contoh 13 (x_0 = 1)		
n	x(n)	x(n+1)
0	1	1.5
1	1.5	1.416666667
2	1.416666667	1.414215686
3	1.414215686	1.414213562
4	1.414213562	1.414213562
5	1.414213562	1.414213562
6	1.414213562	1.414213562
7	1.414213562	1.414213562
8	1.414213562	1.414213562
9	1.414213562	1.414213562

Contoh 14	
n	(1+1/n)^n
10	2.59374246
20	2.653297705
30	2.674318776
40	2.685063838
50	2.691588029
60	2.695970139
70	2.699116371
80	2.701484941
90	2.703332461
100	2.704813829

Soal Latihan

1. Buktikan Teorema 11 bagian (ii).
2. Diketahui $0 < x < 1$. Buktikan bahwa $\langle x^n \rangle$ turun dan terbatas di bawah, sehingga ia konvergen.
3. Misalkan $x_n := 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa $\langle x_n \rangle$ naik dan terbatas (di atas). (*Petunjuk*. $2^{n-1} \leq n!$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$.)
4. Misalkan $x_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa $\langle x_n \rangle$ naik. Apakah $\langle x_n \rangle$ terbatas (di atas)?

4. SUB-BARISAN DAN BARISAN CAUCHY

4.1 Sub-barisan

Misalkan $\langle x_n \rangle$ barisan dan $\langle n_k \rangle$ barisan naik murni dengan $n_k \in \mathbb{N}$ untuk tiap $k \in \mathbb{N}$. Maka, barisan

$$\langle x_{n_k} \rangle$$

disebut sebagai *sub-barisan* dari $\langle x_n \rangle$. Sebagai contoh,

$$x_2, x_3, x_4, x_5, \dots$$

dan

$$x_2, x_4, x_8, x_{16}, \dots$$

merupakan sub-barisan dari $\langle x_n \rangle$. Pada sub-barisan pertama, $n_k = k + 1$; sementara pada sub-barisan kedua, $n_k = 2^k$.

Contoh 1. (i) Diketahui barisan $\langle (-1)^n \rangle$. Maka,

$$\langle (-1)^{2k-1} \rangle = \langle -1 \rangle$$

dan

$$\langle (-1)^{2k} \rangle = \langle 1 \rangle$$

merupakan sub-barisan dari $\langle (-1)^n \rangle$.

(ii) Misalkan $\langle r_n \rangle$ adalah barisan $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$. Maka

$$1, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \dots$$

dan

$$2, \frac{5}{3}, \frac{13}{8}, \dots$$

merupakan sub-barisan dari $\langle r_n \rangle$.

Hipotesis $\langle n_k \rangle$ naik murni merupakan bagian penting dalam definisi sub-barisan. Sebagai salah satu akibat dari hipotesis ini, kita mempunyai $n_k \geq k$ untuk tiap $k \in \mathbb{N}$. Fakta ini dapat dibuktikan dengan Prinsip Induksi Matematika. (Jelas bahwa $n_1 \geq 1$. Selanjutnya, jika $n_k \geq k$, maka $n_{k+1} > n_k \geq k$ dan karenanya $n_{k+1} \geq k + 1$.)

Catat bahwa setiap sub-barisan dari barisan terbatas juga bersifat terbatas. Selanjutnya, kita mempunyai teorema berikut.

Teorema 2. *Jika $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L, maka setiap sub-barisan dari $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L.*

Bukti. Misalkan $\langle x_{n_k} \rangle$ adalah sub-barisan dari $\langle x_n \rangle$. Diberikan $\epsilon > 0$, pilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

Maka, untuk setiap $k \geq N$, kita mempunyai $n_k \geq k \geq N$, dan karenanya

$$|x_{n_k} - L| < \epsilon.$$

Dengan demikian $\langle x_{n_k} \rangle$ konvergen ke L. $\square$

Contoh 3. Kita telah membahas kedivergenan barisan $\langle (-1)^n \rangle$. Bukti alternatif yang lebih sederhana dapat diberikan dengan menggunakan Teorema 2. Karena terdapat sub-barisan $\langle -1 \rangle$ yang konvergen ke -1 dan sub-barisan $\langle 1 \rangle$ yang konvergen ke 1, maka barisan $\langle (-1)^n \rangle$ tidak mungkin konvergen. (Jika ia konvergen, maka menurut Teorema 2 kedua sub-barisan di atas seharusnya konvergen ke bilangan yang sama.)

Contoh 4. Pada Soal Latihan 3.4 No. 3, anda diminta menunjukkan bahwa $\langle x^n \rangle$ konvergen untuk $0 < x < 1$. Sekarang kita dapat menentukan limitnya dengan menggunakan Teorema 2 sebagai berikut. Misalkan $\langle x^n \rangle$ konvergen ke L. Maka, sub-barisan $\langle x^{2k} \rangle$ akan konvergen ke L juga. Namun,

$$x^{2k} = (x^k)^2 \to L^2 \quad \text{untuk } k \to \infty.$$

Karena itu $L = L^2$, sehingga kita dapatkan $L = 0$ atau $L = 1$. Mengingat $0 < x < 1$ dan $\langle x^n \rangle$ turun, kita simpulkan bahwa $L = 0$. Hasil ini sesuai dengan Soal Latihan 3.3 No. 5.

Contoh 5. Dalam Contoh 13 pada Sub-bab 3.4 kita telah menunjukkan bahwa barisan $\langle x_n \rangle$ yang didefinisikan secara induktif dengan

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big), \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergen. Sekarang misalkan limitnya adalah L. Maka, menurut Teorema 2, $\langle x_{n+1} \rangle$ juga konvergen ke L. Akibatnya

$$L = \frac{1}{2}\big(L + \frac{2}{L}\big),$$

sehingga $L^2 = 2$. Namun $x_1 > 0$ mengakibatkan $x_n > 0$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$. Karena itu mestilah $L = \sqrt{2}$.

Soal Latihan

1. Diketahui barisan $\langle x_n \rangle$. Tunjukkan jika $\langle x_{2k-1} \rangle$ dan $\langle x_{2k} \rangle$ konvergen ke bilangan yang sama, maka $\langle x_n \rangle$ konvergen.

2. Diketahui barisan $\langle x_n \rangle$ didefinisikan secara induktif dengan $x_1 = 1$ dan

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Mungkinkah $\langle x_n \rangle$ konvergen?

3. Diketahui barisan $\langle r_n \rangle$ didefinisikan secara induktif dengan $r_1 = 1$ dan

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Tunjukkan jika $\langle r_n \rangle$ konvergen, maka ia mestilah konvergen ke $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.2 Teorema Bolzano-Weierstrass

Pada bagian ini kita akan membahas sebuah hasil penting tentang barisan terbatas. Sebelum kita sampai ke sana, kita pelajari terlebih dahulu teorema berikut.

Teorema 6. *Setiap barisan mempunyai sub-barisan yang monoton.*

Bukti. Misalkan $\langle x_n \rangle$ barisan sembarang. Untuk tiap $N \in \mathbb{N}$, definisikan $A_N := \{x_n : n \geq N\}$. Kita tinjau dua kasus berikut.

Kasus 1: Untuk tiap $N \in \mathbb{N}$, A_N mempunyai maksimum. Dalam kasus ini, kita dapat memperoleh barisan bilangan asli $\langle n_k \rangle$ sedemikian sehingga

$$
\begin{aligned}
x_{n_1} &= \text{maks } A_1 \\
x_{n_2} &= \text{maks } A_{n_1+1} \\
x_{n_3} &= \text{maks } A_{n_2+1}
\end{aligned}
$$

dan seterusnya. Jelas bahwa $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ dan $\langle x_{n_k} \rangle$ merupakan sub-barisan yang monoton turun.

Kasus 2: Terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga A_{n_1} tidak mempunyai maksimum. Dalam kasus ini, terdapat $n_2 \geq n_1 + 1$ sedemikian sehingga $x_{n_2} > x_{n_1}$ (karena jika tidak, maka x_{n_1} merupakan maksimum A_{n_1}). Selanjutnya, terdapat $n_3 \geq n_2 + 1$ sedemikian sehingga $x_{n_3} > x_{n_2}$ (karena jika tidak, maka maks $\{x_{n_1}, \ldots, x_{n_2}\}$ merupakan maksimum A_{n_1}). Demikian seterusnya, sehingga kita peroleh sub-barisan $\langle x_{n_k} \rangle$ yang monoton naik. □

Teorema 7 (Bolzano-Weierstrass). *Setiap barisan terbatas mempunyai sub-barisan yang konvergen.*

Bukti. Misalkan $\langle x_n \rangle$ terbatas. Menurut Teorema 6, terdapat sub-barisan $\langle x_{n_k} \rangle$ yang monoton. Karena $\langle x_n \rangle$ terbatas, sub-barisan $\langle x_{n_k} \rangle$ juga terbatas. Jadi, menurut Teorema 11 pada Bab 3, $\langle x_{n_k} \rangle$ konvergen. □

Contoh 8. (i) Barisan $\langle (-1)^n \rangle$ mempunyai dua sub-barisan yang konvergen, yakni $\langle -1 \rangle$ dan $\langle 1 \rangle$.

(ii) Barisan $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$ mempunyai banyak sub-barisan yang konvergen, di antaranya

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots; \\
\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots; \\
\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots.
\end{gathered}
$$

Misalkan $\langle x_n \rangle$ terbatas dan $\mathcal{L}$ adalah himpunan semua bilangan real yang merupakan limit sub-barisan dari $\langle x_n \rangle$. Sebagai contoh, jika $x_n = (-1)^n$, maka

$$\mathcal{L} = \{-1, 1\}.$$

Dari Teorema Bolzano-Weierstrass, kita tahu bahwa $\mathcal{L}$ tak kosong. Kita juga tahu bahwa dalam hal $\langle x_n \rangle$ konvergen, himpunan $\mathcal{L}$ merupakan himpunan 'singleton', yakni $\{\lim_{n\to\infty} x_n\}$. Lebih jauh, kita mempunyai proposisi berikut tentang $\mathcal{L}$ — yang buktinya tidak akan kita bahas di sini (lihat [2] bila ingin mempelajarinya).

Proposisi 9. *Himpunan $\mathcal{L}$ mempunyai maksimum dan minimum.*

Misalkan $\overline{L} :=$ maks $\mathcal{L}$ dan $\underline{L} :=$ min $\mathcal{L}$. Kita sebut $\overline{L}$ sebagai *limit superior* dari $\langle x_n \rangle$ dan kita tuliskan

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{L}.$$

Serupa dengan itu, kita sebut $\underline{L}$ sebagai *limit inferior* dari $\langle x_n \rangle$ dan kita tuliskan

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{L}.$$

Sebagai contoh, jika $x_n = (-1)^n$, maka

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 1 \text{ dan } \liminf_{n\to\infty} x_n = -1.$$

Soal Latihan

1. Misalkan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan terbatas sedemikian sehingga untuk setiap $N \in \mathbb{N}$ terdapat $n \geq N$ sedemikian sehingga $x_n \geq a$. Buktikan bahwa $\langle x_n \rangle$ mempunyai sub-barisan yang konvergen ke suatu bilangan $L \geq a$.

2. Diketahui barisan $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$. Tentukan limit superior dan limit inferiornya.

3. Diketahui barisan $\langle (-1)^n (1 + \frac{1}{n}) \rangle$. Tentukan limit superior dan limit inferiornya.

4. Misalkan $\langle x_n \rangle$ terbatas. Untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, definisikan $M_n := \sup_{k \geq n} x_k$. Tunjukkan bahwa $\langle M_n \rangle$ turun dan terbatas (di bawah), dan karenanya konvergen.

4.3 Barisan Cauchy

Teorema 11 pada Bab 3 memberi kita cara untuk menyelidiki kekonvergenan sebuah barisan tanpa harus mengetahui limitnya. Persisnya, jika kita dihadapkan pada sebuah barisan yang monoton dan terbatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa ia konvergen. Namun bagaimana bila barisan tersebut bukan barisan monoton dan limitnya tak dapat diterka? Upaya yang dapat kita lakukan dalam hal ini adalah mengamati jarak antara satu suku dengan suku lainnya.

Barisan $\langle x_n \rangle$ disebut *barisan Cauchy* apabila untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $m, n \geq N$ berlaku

$$|x_m - x_n| < \epsilon.$$

Secara intuitif, suku-suku pada barisan Cauchy mendekat dan semakin mendekat satu sama lain.

Proposisi 10. *Jika $\langle x_n \rangle$ konvergen, maka $\langle x_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy.*

Bukti. Misalkan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L. Diberikan $\epsilon > 0$, pilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk tiap $n \geq N$ berlaku $|x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Maka, untuk $m, n \geq N$, kita peroleh

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - L| + |L - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ini membuktikan bahwa $\langle x_n \rangle$ Cauchy. $\square$

Proposisi 11. *Jika $\langle x_n \rangle$ Cauchy, maka $\langle x_n \rangle$ terbatas.*

Bukti. Diserahkan sebagai latihan.

Teorema 12. *Jika $\langle x_n \rangle$ Cauchy, maka $\langle x_n \rangle$ konvergen.*

Bukti. Misalkan $\langle x_n \rangle$ Cauchy. Menurut Proposisi 11, $\langle x_n \rangle$ terbatas. Menurut Teorema Bolzano-Weierstrass, $\langle x_n \rangle$ mempunyai sub-barisan yang konvergen, sebutlah $\langle x_{n_k} \rangle$ dengan $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = L$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $x_n \to L$ untuk $n \to \infty$.

Diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, pilih $M \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $k \geq M$ berlaku $|x_{n_k} - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Juga pilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $m, n \geq N$ berlaku $|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Sekarang jika $n \geq N$, maka untuk $k \geq M$ dengan $n_k \geq N$ kita mempunyai

$$|x_n - L| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ini menunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L. $\square$

Contoh 13. Diketahui barisan $\langle x_n \rangle$ dengan $x_1 = 1,\ x_2 = 2$, dan

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Maka, dapat diperiksa bahwa untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ kita mempunyai

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{2^n}.$$

Dengan menggunakan Ketaksamaan Segitiga, kita peroleh untuk $m > n$

$$|x_m - x_n| \le |x_m - x_{m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \le \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Diberikan $\epsilon > 0$, kita dapat memilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{2^{N-2}} < \epsilon$. Maka, untuk $m, n \ge N$, kita peroleh $|x_m - x_n| \le \frac{1}{2^{N-2}} < \epsilon$. Ini menunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ Cauchy, dan karenanya konvergen.

Untuk menentukan limitnya, cara seperti pada Contoh 5 akan memberikan persamaan $L = \frac{1}{2}(L + L)$, yang tak berguna. Namun ada cara lain yang dapat kita lakukan. Perhatikan bahwa sub-barisan $x_1, x_3, x_5, \ldots$ monoton naik (dan terbatas). Lebih jauh, untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, kita mempunyai

$$x_{n+2} - x_n = \frac{1}{4}(x_n - x_{n-2}).$$

Karena itu, untuk tiap $k \in \mathbb{N}$, kita peroleh

$$x_{2k+1} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{k-1}}\right) = 1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^k}\right).$$

Dengan demikian $x_{2k+1} \to \frac{5}{3}$ untuk $k \to \infty$. Jadi $\langle x_n \rangle$ mestilah konvergen ke $\frac{5}{3}$.

Salah satu cara mengenali barisan Cauchy adalah dengan melihat selisih antara satu suku dengan suku berikutnya. Barisan $\langle x_n \rangle$ disebut barisan *kontraktif* apabila terdapat suatu konstanta $0 < C < 1$ sedemikian sehingga

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \le C\,|x_{n+1} - x_n|, .$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 14. Barisan $\langle x_n \rangle$ dengan $x_1 = 1,\ x_2 = 2$, dan

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

merupakan barisan kontraktif, karena untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|.$$

Teorema 15. *Jika $\langle x_n \rangle$ kontraktif, maka $\langle x_n \rangle$ Cauchy (dan karenanya ia konvergen).*

Soal Latihan

1. Buktikan Proposisi 11.
2. Tentukan limit barisan $\langle x_n \rangle$ pada Contoh 13.
3. Buktikan Teorema 15.
4. Diketahui barisan $\langle x_n \rangle$ dengan $x_1 = 1,\ x_2 = 2$, dan

   $$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Buktikan bahwa $1 \leq x_n \leq 2$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ dan

   $$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|x_{n+1} - x_n|, \quad n \in \mathbb{N},$$

   sehingga $\langle x_n \rangle$ Cauchy (dan konvergen). Tentukan limitnya.
5. Diketahui barisan $\langle r_n \rangle$ didefinisikan secara induktif dengan $r_1 = 1$ dan

   $$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Buktikan bahwa $\langle r_n \rangle$ kontraktif, sehingga ia Cauchy (dan konvergen).
6. Selidiki apakah barisan $\langle \frac{1}{n} \rangle$ kontraktif.

4.4 Barisan Divergen Sejati

Di antara barisan divergen, terdapat sekelompok barisan divergen yang menarik untuk dipelajari. Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan *divergen ke* $+\infty$ dan kita tuliskan

$$x_n \to +\infty \text{ untuk } n \to \infty$$

apabila untuk setiap $M > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $x_n > M$.

Serupa dengan itu, barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan *divergen ke* $-\infty$ dan kita tuliskan

$$x_n \to -\infty \text{ untuk } n \to \infty$$

apabila untuk setiap $M > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $x_n < -M$.

Dalam [1], barisan divergen ke $\pm\infty$ disebut sebagai *barisan divergen sejati*.

`Catatan`. Walaupun di sini kita menggunakan notasi yang mirip dengan notasi untuk barisan konvergen, Proposisi 5 pada Bab 3 tidak berlaku untuk barisan yang divergen ke $\pm\infty$ mengingat $\pm\infty$ bukan bilangan real.

Contoh 16. (i) Barisan $\langle n \rangle$ divergen ke $+\infty$; sementara barisan $\langle -n \rangle$ divergen ke $-\infty$.
(ii) Barisan $\left\langle 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right\rangle$ (yang ditanyakan pada Soal Latihan 3.4 No. 5) merupakan barisan yang divergen ke $+\infty$.
(iii) Barisan $\langle (-1)^n n \rangle$ divergen, tetapi bukan merupakan barisan yang divergen ke $+\infty$ ataupun divergen ke $-\infty$.

`Catatan`. Barisan $\langle x_n \rangle$ yang divergen tetapi bukan merupakan barisan yang divergen ke $\pm\infty$ dikatakan *berosilasi*.

Teorema 17. (i) *Jika $\langle x_n \rangle$ naik dan tak terbatas (di atas), maka ia divergen ke $+\infty$.*
(ii) *Jika $\langle x_n \rangle$ dan tak terbatas (di bawah), maka ia divergen ke $-\infty$.*

Soal Latihan

1. Buktikan Teorema 17.
2. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan rasional $r > 0$, barisan $\langle n^r \rangle$ divergen ke $+\infty$.
3. Misalkan $x_n > 0$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa $\langle x_n \rangle$ konvergen ke 0 jika dan hanya jika $\left\langle \frac{1}{x_n} \right\rangle$ divergen ke $+\infty$.

5. DERET

5.1 Deret dan Kekonvergenannya

Diberikan sejumlah terhingga bilangan $a_1, \dots, a_N$, kita dapat menghitung jumlah $a_1 + \cdots + a_N$. Namun, diberikan tak terhingga banyaknya bilangan $a_1, a_2, a_3, \dots$, bagaimana kita menghitung atau memaknai $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$? Untuk itu, misalkan $\langle a_n \rangle$ adalah sebuah barisan bilangan real. Definisikan barisan $\langle s_N \rangle$ dengan

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \cdots + a_N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Untuk tiap $N \in \mathbb{N}$, s_N dikenal sebagai *jumlah parsial* dari *deret*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Jika $s_N \to s$ untuk $N \to \infty$, maka deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dikatakan *konvergen* ke s. Dalam hal ini s disebut sebagai *jumlah* deret tersebut dan kita tuliskan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = s.$$

Ini berarti bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N \to \infty} s_N,$$

yang tentu saja bermakna apabila $\langle s_N \rangle$ konvergen.

Contoh 1. *Deret geometri*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

merupakan barisan jumlah parsial

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^N},$$

yang konvergen ke 1. Jadi dalam hal ini kita dapat menuliskan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Secara umum, deret geometri

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

mempunyai jumlah parsial

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Jika $|x| < 1$, maka $x^{N+1} \to 0$ untuk $N \to \infty$; sehingga

$$s_N \to \frac{1}{1 - x}, \quad \text{untuk } N \to \infty.$$

Jadi, untuk $|x| < 1$, deret $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergen ke $\frac{1}{1-x}$. Jika $|x| \geq 1$, maka deret *divergen.*

Contoh 2. Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

mempunyai jumlah parsial

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Big) \\ &= \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \dots + \Big(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

(Deret yang suku-sukunya saling menghapuskan disebut deret *teleskopis.*) Di sini $s_N \to 1$ untuk $N \to \infty$, sehingga deret di atas konvergen dan mempunyai jumlah 1, yakni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

`Catatan`. Kelak kita mungkin pula berhadapan dengan deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, di mana indeks n 'berjalan' mulai dari 0. Secara umum, indeks n dapat pula berjalan mulai dari sembarang bilangan asli n_0.

Soal Latihan

1. Misalkan $\alpha > 0$. Tunjukkan bahwa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha}$.
2. Tunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2-1} = 2$.
3. Tentukan jumlah parsial deret $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Apakah deret ini konvergen?

5.2 Deret dengan Suku-suku Positif

Deret yang suku-sukunya bernilai positif (atau tak negatif) termasuk deret yang mudah dipelajari, karena jumlah parsialnya membentuk barisan naik. Jadi, jika kita ingin menunjukkan bahwa deret tersebut konvergen, kita hanya perlu menunjukkan bahwa barisan jumlah parsialnya terbatas di atas. Jika barisan jumlah parsialnya tak terbatas di atas, maka deret tersebut divergen ke $+\infty$.

Contoh 3. Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

mempunyai suku-suku yang bernilai positif. Jumlah parsialnya, yaitu

$$s_N = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{N^2},$$

membentuk barisan naik dan terbatas di atas (lihat Contoh 12 pada Bab 3). Karena itu deret di atas konvergen (namun di sini kita belum dapat menghitung jumlah deret tersebut).

Contoh 4. Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

mempunyai suku-suku yang bernilai positif. Jumlah parsialnya, yaitu

$$s_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N},$$

membentuk barisan naik yang tak terbatas di atas (Soal Latihan 3.4 No. 5). Jadi deret ini divergen ke $+\infty$.

Teorema 5. *Misalkan $\alpha > 1$, bilangan rasional. Maka deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergen.*

Bukti. Perhatikan bahwa $2^{1-\alpha} < 1$ dan, untuk tiap $N > 1$,

$$\begin{aligned}
s_N \leq s_{2^N-1} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^N-1)^\alpha} \\
&= 1 + \Big(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\Big) + \Big(\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{7^\alpha}\Big) + \\
&\quad \Big(\frac{1}{2^{(N-1)\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(2^N-1)^\alpha}\Big) \\
&\leq 1 + \Big(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\Big) + \Big(\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{4^\alpha}\Big) + \\
&\quad \Big(\frac{1}{2^{(N-1)\alpha}} + \cdots + \frac{1}{2^{(N-1)\alpha}}\Big) \\
&= 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^{(N-1)\alpha}} \\
&= \frac{1 - (2^{1-\alpha})^N}{1 - 2^{1-\alpha}} \leq \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}} < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi $\langle s_N \rangle$ naik dan terbatas di atas. Karena itu kita simpulkan bahwa deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergen. □

Soal Latihan

1. Selidiki kekonvergenan deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

2. Misalkan $\langle r_n \rangle$ adalah barisan bilangan rasional

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots .$$

   Tunjukkan bahwa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n$ divergen ke $+\infty$.

5.3 Sifat-sifat Dasar Deret

Bagian ini membahas sifat-sifat dasar deret. Kita mulai dengan sifat linear deret konvergen.

Teorema 6 *Misalkan* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dan* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergen ke* a *dan* b *berturut-turut. Jika* λ *dan* μ *adalah bilangan real sembarang, maka* $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ *konvergen ke* $\lambda a + \mu b$.

Bukti. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(\lambda a_n + \mu b_n) &= \lambda \sum_{n=1}^{N} a_n + \mu \sum_{n=1}^{N} b_n \\ &\to \lambda a + \mu b\end{aligned}$$

untuk $N \to \infty$, menurut Proposisi 5 pada Bab 3. □

Teorema 7. *Jika deret* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen, maka* $a_n \to 0$ *untuk* $n \to \infty$.

Bukti. Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Maka

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \to s,$$

untuk $N \to \infty$. Akibatnya,

$$a_N = s_N - s_{N-1} \to s - s = 0,$$

untuk $N \to \infty$. □

Teorema 7 menyatakan bahwa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ merupakan syarat perlu untuk kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Sebagai contoh, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergen, karena $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0$ (persisnya, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ tidak ada).

Kebalikan dari Teorema 7 tidak berlaku: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bukan merupakan syarat cukup untuk menjamin bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen. Sebagai contoh, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, tetapi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.

Proposisi 8. *Misalkan deret* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergen. Maka, untuk setiap* $N \in \mathbb{N}$*, deret* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *konvergen dan* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n \to 0$*, untuk* $N \to \infty$*.*

`Catatan`. Bila Teorema 7 menyatakan bahwa suku-suku dari suatu deret konvergen haruslah konvergen ke 0, maka menurut Proposisi 8 'ekor' atau 'residu' dari suatu deret konvergen juga akan konvergen ke 0.

Soal Latihan

1. Apakah deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1}$ konvergen?
2. Buktikan Proposisi 8.
3. Misalkan $\langle a_n \rangle$ turun, $a_n > 0$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen. Buktikan bahwa $na_n \to 0$ untuk $n \to \infty$. [Petunjuk: Tinjau $a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$.]

5.4 Kriteria Cauchy; Uji Kekonvergenan Deret

Pada beberapa sub-bab terdahulu, kita telah mempelajari deret dengan jumlah parsial yang mempunyai rumus sederhana atau yang membentuk barisan naik, sehingga kekonvergenannya relatif mudah diselidiki. Bagaimana bila tidak demikian situasinya? Seperti halnya ketika kita berurusan dengan barisan, kita dapat memeriksa apakah jumlah parsial deret yang kita amati membentuk barisan Cauchy.

Teorema berikut membahas kekonvergenan deret dengan suku-suku yang 'berganti-tanda'.

Teorema 9. *Misalkan* $\langle a_n \rangle$ *turun,* $a_n > 0$ *untuk tiap* $n \in \mathbb{N}$*, dan* $a_n \to 0$ *untuk* $n \to \infty$*. Maka deret*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + - \cdots$$

konvergen.

Bukti. Bila kita dapat menunjukkan bahwa $\langle s_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy, maka bukti selesai. Perhatikan bahwa untuk $m > n$, kita mempunyai

$$0 \leq a_{n+1} - a_{n+2} + - \cdots + - a_m \leq a_{n+1}.$$

Ini terjadi karena $a_k > 0$ dan $a_k - a_{k+1} \geq 0$ untuk tiap k.

Sekarang misalkan $\epsilon > 0$ diberikan. Karena $a_n \to 0$ untuk $n \to \infty$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga $a_n < \epsilon$ untuk $n \geq N$. Akibatnya, untuk $m > n \geq N$, kita peroleh

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + - \cdots + - a_m| \leq a_{n+1} < \epsilon.$$

Ini berarti bahwa $\langle s_n \rangle$ Cauchy, sesuai dengan harapan kita. □

Contoh 10. Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

merupakan deret berganti tanda yang memenuhi hipotesis Teorema 9. Karena itu deret ini konvergen.

Teorema 11 (Uji Banding). *Misalkan $b_n > 0$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen. Jika*

$$|a_n| \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

Bukti. Ambil $\epsilon > 0$ sembarang. Karena $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka menurut Proposisi 8 terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga $\sum_{k=K}^{\infty} b_k < \epsilon$ untuk $K \geq N$. Sekarang misalkan s_n adalah jumlah parsial dari $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Maka, untuk $m > n \geq N$, kita peroleh

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| \\ &\leq b_{n+1} + \cdots + b_m \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k < \epsilon. \end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa $\langle s_n \rangle$ Cauchy. Jadi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen. □

Teorema 12 (Uji Rasio). *Misalkan $a_n \neq 0$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ dan*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L.$$

Jika $L < 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen; jika $L > 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Teorema 13 (Uji Akar). *Misalkan* $\langle |a_n|^{1/n} \rangle$ *terbatas dan* $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = L$. *Jika* $L < 1$, *maka* $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$ *konvergen; jika* $L > 1$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergen.*

Soal Latihan

1. Selidiki benar atau salah pernyataan berikut:
   - Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergen.
   - Jika $b_n > 0$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, dan $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} b_n$, untuk tiap $N \in \mathbb{N}$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.
2. Buktikan Teorema 12.
3. Buktikan Teorema 13. (Ingat bahwa L adalah bilangan terbesar yang merupakan limit dari suatu sub-barisan dari $\langle |a_n|^{1/n} \rangle$.)
4. Selidiki kekonvergenan deret berikut:
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.
5. Diketahui $a_n \geq 0$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen. Buktikan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergen.

5.5 Kekonvergenan Mutlak dan Kekonvergenan Bersyarat

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dikatakan *konvergen mutlak* apabila deret $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergen. Sebagai contoh, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ konvergen mutlak karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen.

Catat bahwa deret yang konvergen berdasarkan Uji Rasio secara otomatis merupakan deret konvergen mutlak.

Hubungan antara deret konvergen mutlak dan deret konvergen dinyatakan oleh teorema berikut dan catatan di bawahnya.

Teorema 14. *Deret yang konvergen mutlak senantiasa konvergen.*

Bukti. Gunakan Uji Banding dengan $b_n = |a_n|$. $\square$

Kebalikan dari Teorema 14 tidak berlaku: deret yang konvergen belum tentu konvergen mutlak. Sebagai contoh, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergen tetapi tidak konvergen mutlak. Deret yang konvergen tetapi tidak konvergen mutlak dikatakan *konvergen bersyarat*.

Soal Latihan

1. Buktikan jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergen mutlak (dan karenanya konvergen).

2. Selidiki apakah deret berikut konvergen mutlak, konvergen bersyarat, atau divergen:
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$.

3. Selidiki kekonvergenan deret berikut:
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.
   - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

4. Buktikan bahwa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergen mutlak untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

5. Buktikan jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen mutlak, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergen.