1. Etwas Logik und Mengenlehre

Bevor wir mit dem eigentlichen Inhalt der Vorlesung beginnen, müssen wir kurz die exakte mathematische Sprache beschreiben, in der wir unsere Ergebnisse formulieren werden: die der Logik und Mengenlehre. Zentral hierbei sind die Begriffe der *Aussage* (in der Logik) und der *Menge* (in der Mengenlehre).

Da wir es hier mit den ersten beiden Begriffen überhaupt zu tun haben, die in der Mathematik vorkommen, können wir sie natürlich nicht durch bereits bekannte Dinge definieren oder mit bereits bekannten Resultaten ihre Eigenschaften herleiten. Wir müssen das daher (wie schon in der Einleitung erwähnt) alles axiomatisch voraussetzen. Wir müssen *voraussetzen*, dass es sinnvoll ist, über logische Aussagen und deren Wahrheit zu reden, dass Mengen überhaupt existieren, dass man Mengen vereinigen und schneiden kann, aus ihnen Elemente auswählen kann, und noch einiges mehr. Wenn ihr euch zum Beispiel auf den Standpunkt stellt, dass ihr nicht an die Existenz von Mengen glaubt, wird euch niemand widerlegen können. Allerdings zweifelt ihr damit dann auch die Existenz der gesamten Mathematik an, wie sie heutzutage betrieben wird — und aus der Tatsache, dass ihr in dieser Vorlesung sitzt, schließe ich einmal, dass das nicht der Fall ist.

Glücklicherweise sind die Dinge, die wir benötigen, jedoch allesamt anschaulich sofort einleuchtend und euch natürlich aus der Schule auch schon hinlänglich bekannt. Ich möchte es euch (und mir) daher ersparen, an dieser Stelle eine vollständige und präzise axiomatische Formulierung der Logik und Mengenlehre hinzuschreiben, zumal das momentan sicher mehr verwirren als helfen würde und außerdem gerade im Bereich der Logik auch zu sehr in die Philosophie abdriften würde. Stattdessen wollen wir uns hier damit begnügen, die für uns wichtigsten Prinzipien und Notationen sowie beliebte Fehlerquellen in verständlicher Sprache zu erklären, auch wenn ein paar Dinge (insbesondere die Begriffsfestlegung — „Definition“ möchte ich es eigentlich gar nicht nennen — einer Aussage und einer Menge) dadurch recht schwammig klingen werden. Außerdem werden wir in Beispielen zur besseren Verdeutlichung bereits hier die reellen Zahlen und ihre einfachsten Eigenschaften (die euch sicherlich bekannt sein werden) benutzen, auch wenn wir diese erst später formalisieren werden. Da es sicher niemanden von euch verwirren wird, werden wir auch die Schreibweise „$x \in \mathbb{R}$“ für „x ist eine reelle Zahl“ schon verwenden, bevor sie in den Notationen 1.13 und 1.15 offiziell eingeführt wird.

Beginnen wir also mit der Logik. Unter einer **Aussage** verstehen wir (grob gesagt) ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist (wobei wir in der Mathematik natürlich letztlich daran interessiert sind, *wahre* Aussagen herzuleiten). Wichtig sind auch solche sprachlichen Gebilde, in denen freie **Variablen**, also Platzhalter, vorkommen, und die erst beim Einsetzen von Werten für diese Variablen Aussagen liefern. Man bezeichnet sie als **Aussageformen**.

Beispiel 1.1.

(a) $1+1=2$ ist eine wahre, $1+1=3$ eine falsche, und $1+1$ überhaupt keine Aussage.

(b) $x+1=2$ ist eine Aussageform, die beim Einsetzen von $x=1$ in eine wahre, beim Einsetzen jeder anderen reellen Zahl in eine falsche Aussage übergeht.

Bemerkung 1.2. Als Variablen in Aussageformen kann man beliebige Symbole benutzen. Üblich sind neben den normalen lateinischen Klein- und Großbuchstaben auch die griechischen Buchstaben, die wir zur Erinnerung hier auflisten:

A α alpha	B β beta	Γ γ gamma	Δ δ delta	E ε epsilon	Z ζ zeta	H η eta	Θ ϑ theta
I ι iota	K κ kappa	Λ λ lambda	M μ my	N ν ny	Ξ ξ xi	O o omikron	Π π pi
P ρ rho	Σ σ sigma	T τ tau	Y υ ypsilon	Φ φ phi	X χ chi	Ψ ψ psi	Ω ω omega

Oft verziert man Buchstaben auch noch mit einem Symbol oder versieht sie mit einem Index, um neue Variablen zu erhalten: so sind z. B. x, x', $\tilde{x}$, $\bar{x}$, x_1, x_2, ... alles Symbole für verschiedene Variablen, die zunächst einmal nichts miteinander zu tun haben (aber tunlichst für irgendwie miteinander zusammenhängende Objekte eingesetzt werden sollten, wenn man den Leser nicht vollends verwirren will).

Notation 1.3 (Zusammengesetzte Aussagen)**.** Sind A und B Aussagen, so lassen sich daraus wie folgt neue bilden:

Symbol	Wahrheitstafel				Bedeutung
A	w	f	w	f	
B	w	w	f	f	
$\neg A$	f	w			nicht A
$A \wedge B$	w	f	f	f	A und B
$A \vee B$	w	w	w	f	A oder B (oder beides): „nicht-ausschließendes Oder“
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w	A und B sind gleichbedeutend / äquivalent, bzw. A genau dann wenn B
$A \Rightarrow B$	w	w	f	w	aus A folgt B, bzw. wenn A dann B

Die sogenannte **Wahrheitstafel** in den mittleren vier Spalten ist dabei die eigentliche Definition der neuen zusammengesetzten Aussagen. Sie gibt in Abhängigkeit der Wahrheit von A und B (in den ersten beiden Zeilen) an, ob die zusammengesetzte Aussage wahr oder falsch ist.

Bemerkenswert ist hierbei wahrscheinlich nur die Folgerungsaussage $A \Rightarrow B$, die keine Aussage über die Richtigkeit von A oder B separat macht, sondern nur sagt, dass B wahr ist, wenn auch A es ist. Ist hingegen A falsch, so ist die Folgerungsaussage $A \Rightarrow B$ stets wahr („aus einer falschen Voraussetzung kann man alles folgern“). So ist z. B. $0 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = 3$ eine wahre Aussage. In der Regel wollen wir uns in der Mathematik aber natürlich mit wahren Aussagen beschäftigen, und neue wahre Aussagen aus alten herleiten. Die übliche Verwendung der Notation $A \Rightarrow B$ ist daher, dass A eine als wahr bekannte oder vorausgesetzte Aussage ist, und wir damit nun schließen, dass auch B wahr ist.

Bemerkung 1.4 (Beweise mit Wahrheitstafeln)**.** Wollen wir kompliziertere zusammengesetzte Aussagen miteinander vergleichen, so können wir dies wieder mit Hilfe von Wahrheitstafeln tun. So ist für zwei Aussagen A und B z. B.

$$A \Rightarrow B \quad \text{äquivalent zu} \quad (\neg A) \vee B,$$

denn wenn wir in der Wahrheitstafel

A	w	f	w	f
B	w	w	f	f
$\neg A$	f	w	f	w
$(\neg A) \vee B$	w	w	f	w

mit Hilfe der Definitionen von $\neg$ und $\vee$ aus Notation 1.3 zunächst $\neg A$ und dann $(\neg A) \vee B$ berechnen, sehen wir, dass das Ergebnis mit $A \Rightarrow B$ übereinstimmt. Nach der Bemerkung aus Notation 1.3 ist dies auch anschaulich klar: die Folgerungsaussage $A \Rightarrow B$ ist ja genau dann wahr, wenn A falsch (also $\neg A$ wahr) ist, oder wenn B wahr ist (oder beides).

Genauso zeigt man die ebenfalls einleuchtende Aussage, dass

$$A \Leftrightarrow B \quad \text{äquivalent zu} \quad A \Rightarrow B \;\wedge\; B \Rightarrow A$$

ist — was auch die übliche Art ist, wie man eine Äquivalenz zeigt: man zeigt separat die beiden Folgerungen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$.

Notation 1.5. Folgerungen („⇒") und Äquivalenzen („⇔") sind natürlich zwei verschiedene Dinge, die man nicht durcheinanderwerfen darf (auch wenn das in der Schule wahrscheinlich manchmal nicht so genau genommen wird). Es hat sich jedoch in der Mathematik eingebürgert, bei *Definitionen* von Begriffen durch eine äquivalente, definierende Eigenschaft die Sprechweise „wenn" anstatt des eigentlich korrekten „genau dann wenn" zu verwenden: so würde man z. B. als Definition des Begriffs einer geraden Zahl hinschreiben

> „Eine ganze Zahl x heißt gerade, wenn $\frac{x}{2}$ eine ganze Zahl ist",

obwohl man genau genommen natürlich meint

> „Eine ganze Zahl x heißt *genau dann* gerade, wenn $\frac{x}{2}$ eine ganze Zahl ist".

Notation 1.6 (Quantoren)**.** Ist A eine Aussageform, in der eine freie Variable x vorkommt — wir schreiben dies dann auch als $A(x)$ — so setzen wir

Symbol	Bedeutung
$\forall x : A(x)$	für alle x gilt $A(x)$
$\exists x : A(x)$	es gibt ein x mit $A(x)$

Die beiden Symbole $\forall$ und $\exists$ bezeichnet man als **Quantoren**. Beachte, dass diese beiden Quantoren *nicht* miteinander vertauschbar sind: so besagt z. B. die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : y > x$$

„zu jeder reellen Zahl x gibt es eine Zahl y, die größer ist" (was offensichtlich wahr ist), während die Umkehrung der beiden Quantoren die Aussage

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : y > x$$

„es gibt eine reelle Zahl y, die größer als jede reelle Zahl x ist" liefern würde (was ebenso offensichtlich falsch ist). Der Unterschied besteht einfach darin, dass im ersten Fall zuerst das x gewählt werden muss und dann ein y dazu existieren muss (das von x abhängen darf), während es im zweiten Fall *dasselbe* y für alle x tun müsste.

Bemerkung 1.7. Jede Aussage lässt sich natürlich auf viele Arten aufschreiben, sowohl als deutscher Satz als auch als mathematische Formel. Die gerade eben betrachtete Aussage könnte man z. B. auf die folgenden (absolut gleichwertigen) Arten aufschreiben:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : y > x$.
(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y > x$.
(c) Zu jeder reellen Zahl gibt es noch eine größere.

Welche Variante man beim Aufschreiben wählt ist weitestgehend Geschmackssache. Die Formulierung einer Aussage als deutscher Satz hat den Vorteil, dass wir sie oft leichter verstehen können, weil wir die deutsche Sprache schon länger kennen als die mathematische. Wenn wir uns jedoch erst einmal an die mathematische Sprache gewöhnt haben, wird auch sie ihre Vorzüge bekommen: sie ist deutlich kürzer und besser logisch strukturiert. Wir werden im folgenden beide Schreibweisen mischen und jeweils diejenige wählen, mit der unsere Aussagen (hoffentlich) am einfachsten verständlich werden.

Übrigens haben wir nicht nur bei der sprachlichen Formulierung unserer Aussagen viele Wahlmöglichkeiten. In der Regel gibt es für Rechnungen und Beweise auch schon inhaltlich mehrere verschiedene Lösungswege, und auch hier ist es natürlich egal, welchen wir wählen, solange die Argumentation nur logisch korrekt ist.

Bemerkung 1.8 (Negationen)**.** Es ist wichtig zu wissen, wie man von einer Aussage das Gegenteil, also die „Verneinung" bildet. Da hierbei oft Fehler gemacht werden, wollen wir die allgemeinen Regeln hierfür kurz auflisten:

(a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$: ist es falsch, dass A falsch ist, so bedeutet dies genau, dass A wahr ist.
(b) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$: das Gegenteil von „$A$ und B sind richtig" ist „A oder B ist falsch".

(c) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$: das Gegenteil von „$A$ oder B ist richtig“ ist „A und B sind falsch“.

(d) $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$: das Gegenteil von „für alle x gilt $A(x)$“ ist „es gibt ein x, für das $A(x)$ falsch ist“.

(e) $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$: das Gegenteil von „es gibt ein x, für das $A(x)$ gilt“ ist „für alle x ist $A(x)$ falsch“.

Man kann also sagen, dass eine Verneinung dazu führt, dass „und“ mit „oder“ sowie „für alle“ mit „es gibt“ vertauscht wird. So ist z. B. das Gegenteil der Aussage

„In Frankfurt haben *alle* Haushalte Strom *und* fließendes Wasser“

die Aussage

„In Frankfurt *gibt es* einen Haushalt, der keinen Strom *oder* kein fließendes Wasser hat“.

Aufgabe 1.9. Wie lautet die Negation der folgenden Aussagen? Formuliere außerdem die Aussage (a) in Worten (also analog zu (b)) sowie die Aussage (b) mit Quantoren und anderen mathematischen Symbolen (also analog zu (a)).

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m$.

(b) Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es noch eine weitere reelle Zahl.

(c) Sind M, N, R Mengen mit $R \subset N \subset M$, so ist $M \backslash N \subset M \backslash R$.

Bemerkung 1.10 (Widerspruchsbeweis)**.** Eine oft vorkommende Anwendung der Regeln für die Verneinung von Aussagen ist der sogenannte **Widerspruchsbeweis** bzw. Beweis durch **Kontraposition**. Wir haben in Bemerkung 1.4 gesehen, dass die Folgerung $A \Rightarrow B$ („aus A folgt B“) gleichbedeutend ist mit $(\neg A) \vee B$. Damit ist diese Aussage nach Bemerkung 1.8 (a) auch äquivalent zu $(\neg(\neg B)) \vee (\neg A)$, also zu $\neg B \Rightarrow \neg A$. Mit anderen Worten: haben wir eine Schlussfolgerung $A \Rightarrow B$ zu beweisen, so können wir genauso gut $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ zeigen, d. h. *wir können annehmen, dass die zu zeigende Aussage B falsch ist und dies dann zu einem Widerspruch führen bzw. zeigen, dass dann auch die Voraussetzung A falsch sein muss.* 01

Beispiel 1.11. Hier sind zwei Beispiele für die Anwendung der Prinzipien aus Bemerkung 1.8 und 1.10 — und auch unsere ersten Beispiele dafür, wie man Beweise von Aussagen exakt aufschreiben kann.

(a) Einen Beweis durch Kontraposition könnte man z. B. so aufschreiben:

Behauptung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2x + 1 > 0$ oder $2x - 1 < 0$.

Beweis: Angenommen, die Behauptung wäre falsch, d. h. (nach Bemerkung 1.8 (c) und (d)) es gäbe ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$2x + 1 \leq 0 \quad (1) \qquad \text{und} \qquad 2x - 1 \geq 0 \quad (2).$$

Für dieses x würde dann folgen, dass

$$0 \overset{(1)}{\geq} 2x + 1 = 2x - 1 + 2 \overset{(2)}{\geq} 0 + 2 = 2.$$

Dies ist aber ein Widerspruch. Also war unsere Annahme falsch und somit die zu beweisende Aussage richtig. □

Das dabei verwendete Symbol „ □ “ ist die übliche Art, das Ende eines Beweises zu kennzeichnen. Zur Verdeutlichung haben wir die beiden Ungleichungen mit (1) und (2) markiert, um später angeben zu können, wo sie verwendet werden.

(b) Manchmal weiß man von einer Aussage aufgrund der Aufgabenstellung zunächst einmal noch nicht, ob sie wahr oder falsch ist. In diesem Fall muss man sich dies natürlich zuerst überlegen — und, falls die Aussage falsch ist, ihre Negation beweisen. Als Beispiel dafür betrachten wir die Aufgabe

Man beweise oder widerlege: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2x + 1 < 0$ oder $2x - 1 > 0$.

In diesem Fall merkt man schnell, dass die Aussage falsch sein muss, weil die Ungleichungen schon für den Fall $x = 0$ nicht stimmen. Man könnte als Lösung der Aufgabe unter Beachtung der Negationsregeln aus Bemerkung 1.8 also aufschreiben:

Behauptung: Die Aussage ist falsch, d. h. es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $2x+1 \geq 0$ und $2x-1 \leq 0$.

Beweis: Für $x = 0$ ist $2x+1 = 1 \geq 0$ und $2x-1 = -1 \leq 0$.

Beachte, dass dies ein vollständiger Beweis ist: *um eine allgemeine Aussage zu widerlegen, genügt es, ein Gegenbeispiel dafür anzugeben.*

Bemerkung 1.12. Bevor wir unsere kurze Auflistung der für uns wichtigen Prinzipien der Logik beenden, wollen wir noch kurz auf ein paar generelle Dinge eingehen, die man beim Aufschreiben mathematischer Beweise oder Rechnungen beachten muss.

Dass wir bei unseren logischen Argumenten sauber und exakt arbeiten — also z. B. nicht Folgerungen, die keine Äquivalenzen sind, in der falschen Richtung verwenden, „für alle" mit „es gibt" verwechseln oder ähnliches — sollte sich von selbst verstehen. Die folgende kleine Geschichte hilft vielleicht zu verstehen, was damit gemeint ist.

> Ein Ingenieur, ein Physiker und ein Mathematiker fahren mit dem Zug nach Frankreich und sehen dort aus dem Fenster des Zuges ein schwarzes Schaf.
>
> Da sagt der Ingenieur: „Oh, in Frankreich sind die Schafe schwarz!"
>
> Darauf der Physiker: „Nein. . . wir wissen jetzt nur, dass es in Frankreich mindestens ein schwarzes Schaf gibt."
>
> Der Mathematiker: „Nein. . . wir wissen nur, dass es in Frankreich mindestens ein Schaf gibt, das auf mindestens einer Seite schwarz ist.

Es gibt aber noch einen weiteren sehr wichtigen Punkt, der selbst von fortgeschritteneren Studenten leider oft nicht beachtet wird: in der Regel werden wir beim Aufschreiben sowohl Aussagen notieren wollen, die wir erst noch zeigen wollen (um schon einmal zu sagen, worauf wir hinaus wollen), als auch solche, von denen wir bereits wissen, dass sie wahr sind (z. B. weil sie für die zu zeigende Behauptung als wahr vorausgesetzt werden oder weil sie sich logisch aus irgendetwas bereits Bekanntem ergeben haben). Es sollte offensichtlich sein, dass wir Aussagen mit derartig verschiedenen Bedeutungen für die Argumentationsstruktur nicht einfach kommentarlos nebeneinander schreiben dürfen, wenn noch jemand in der Lage sein soll, die Argumente nachzuvollziehen. Betrachten wir z. B. noch einmal unseren Beweis aus Beispiel 1.11 (a) oben, so wäre eine Art des Aufschreibens in folgendem Stil (wie man es leider oft sieht)

$$\begin{array}{lll} 2x+1>0 & \text{oder} & 2x-1<0 \\ 2x+1 \leq 0 & & 2x-1 \geq 0 \\ \multicolumn{3}{l}{0 \geq 2x+1 = 2x-1+2 \geq 0+2 = 2} \end{array}$$

völlig inakzeptabel, obwohl hier natürlich letztlich die gleichen Aussagen stehen wie oben. Kurz gesagt:

> Von *jeder* aufgeschriebenen Aussage muss für den Leser *sofort* und *ohne eigenes Nachdenken* ersichtlich sein, welche Rolle sie in der Argumentationsstruktur spielt: ist es z. B. eine noch zu zeigende Behauptung, eine Annahme oder eine Folgerung (und wenn ja, aus was)?

Das bedeutet nicht, dass wir ganze Aufsätze schreiben müssen. Eine (schon recht platzoptimierte) Art, den Beweis aus Beispiel 1.11 (a) aufzuschreiben, wäre z. B.

> Angenommen, es gäbe ein $x \in \mathbb{R}$ mit $2x+1 \leq 0$ und $2x-1 \geq 0$.
>
> Dann wäre $0 \geq 2x+1 = 2x-1+2 \geq 0+2 = 2$, Widerspruch. □

Nachdem wir nun die wichtigsten Regeln der Logik behandelt haben, wenden wir uns jetzt der Mengenlehre zu. Die gesamte moderne Mathematik basiert auf diesem Begriff der Menge, der ja auch schon aus der Schule hinlänglich bekannt ist. Zur Beschreibung, was eine Menge ist, zitiert man üblicherweise die folgende Charakterisierung von Georg Cantor (1845–1918):

> „Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“

Die in einer Menge M zusammengefassten Objekte bezeichnet man als ihre **Elemente**.

Notation 1.13.

(a) Die einfachste Art, eine Menge konkret anzugeben, besteht darin, ihre Elemente in geschweiften Klammern aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge und Mehrfachnennungen nicht ankommt. So sind z. B. $\{1,2,3\}$ und $\{2,3,3,1\}$ zwei Schreibweisen für dieselbe Menge. Man beachte, dass die Elemente einer Menge nicht unbedingt Zahlen sein müssen — wir könnten z. B. auch die Menge aller Studenten in dieser Vorlesung betrachten. In der Tat kommen in der Mathematik sogar oft Mengen vor, deren Elemente selbst wieder Mengen sind; so ist z. B. $\{\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$ eine gültige Menge (mit 2 Elementen).

(b) Man kann die Elemente einer Menge auch durch eine beschreibende Eigenschaft angeben: $\{x : A(x)\}$ bezeichnet die Menge aller Objekte x, für die die Aussage $A(x)$ wahr ist, wie z. B. in $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1,1\}$.

(c) Die Menge $\{\}$ ohne Elemente, die sogenannte **leere Menge**, bezeichnen wir mit $\emptyset$.

(d) Wir schreiben $x \in M$, falls x ein Element der Menge M ist, und $x \notin M$ andernfalls.

(e) Man schreibt $M \subset N$, wenn jedes Element von M auch Element von N ist. In diesem Fall sagt man, dass M eine **Teilmenge** von N bzw. N eine **Obermenge** von M ist. Beachte, dass M und N dabei auch gleich sein können; in der Tat ist offensichtlich

$$M = N \quad \text{genau dann, wenn} \quad M \subset N \text{ und } N \subset M.$$

Oft wird man eine Gleichheit $M = N$ von Mengen auch so beweisen, dass man separat $M \subset N$ und $N \subset M$ zeigt.

Wenn wir ausdrücken wollen, dass M eine Teilmenge von N und nicht gleich N ist, so schreiben wir dies als $M \subsetneq N$ und sagen, dass M eine **echte Teilmenge** von N ist. Es ist wichtig, dies von der Aussage $M \not\subset N$ zu unterscheiden, die bedeutet, dass M keine Teilmenge von N ist.

(f) Hat eine Menge M nur endlich viele Elemente, so nennt man M eine **endliche Menge** und schreibt die Anzahl ihrer Elemente als $|M|$. Andernfalls setzt man formal $|M| = \infty$.

Bemerkung 1.14 (Russellsches Paradoxon)**.** Die oben gegebene Charakterisierung von Mengen von Cantor ist aus mathematischer Sicht natürlich sehr schwammig. In der Tat hat Bertrand Russell kurz darauf bemerkt, dass sie sogar schnell zu Widersprüchen führt: er betrachtet dazu

$$M = \{A\colon A \text{ ist eine Menge mit } A \notin A\}, \tag{$*$}$$

also „die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“. Sicherlich ist es eine merkwürdige Vorstellung, dass eine Menge sich selbst als Element enthalten könnte — im Sinne von Cantors Charakterisierung wäre die Definition $(*)$ aber sicher zulässig. Fragen wir uns nun allerdings, ob sich die so konstruierte Menge M selbst als Element enthält, so erhalten wir sofort einen Widerspruch: wenn $M \in M$ gilt, so würde das nach der Definition $(*)$ ja gerade bedeuten, dass $M \notin M$ ist — und das wiederum, dass doch $M \in M$ ist. Man bezeichnet dies als das *Russellsche Paradoxon*.

Die Ursache für diesen Widerspruch ist, dass die Definition $(*)$ rückbezüglich ist: wir wollen eine neue Menge M konstruieren, verwenden dabei aber auf der rechten Seite der Definition *alle Mengen*, also u. a. auch die Menge M, die wir gerade erst definieren wollen. Das ist in etwa so, als würdet ihr im Beweis eines Satzes die Aussage des Satzes selbst verwenden — und das ist natürlich nicht zulässig.

Man muss bei der Festlegung, was Mengen sind und wie man sie bilden kann, also eigentlich viel genauer vorgehen, als es Cantor getan hat. Heutzutage verwendet man hierzu in der Regel das im Jahre 1930 aufgestellte Axiomensystem von Zermelo und Fraenkel, das genau angibt, wie man aus bekannten Mengen neue konstruieren darf: z. B. indem man sie schneidet oder vereinigt, oder aus bereits bekannten Mengen Elemente mit einer bestimmten Eigenschaft auswählt. Wir wollen dies hier in dieser Vorlesung aber nicht weiter thematisieren und uns mit der naiven Mengencharakterisierung von Cantor begnügen (sowie der Versicherung meinerseits, dass schon alles in Ordnung ist, wenn wir neue Mengen immer nur aus alten konstruieren und keine rückbezüglichen Definitionen hinschreiben). Genaueres zum Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem könnt ihr in z. B. in Kapitel 13 von [E] nachlesen.

Notation 1.15 (Reelle Zahlen)**.** Unser wichtigstes Beispiel für eine Menge ist die Menge der **reellen Zahlen**, die wir mit $\mathbb{R}$ bezeichnen werden. Wir wollen die Existenz der reellen Zahlen in dieser Vorlesung axiomatisch voraussetzen und begnügen uns daher an dieser Stelle damit zu sagen, dass man sie sich als die Menge der Punkte auf einer Geraden (der „Zahlengeraden“) vorstellen kann. Zusätzlich werden wir in den nächsten beiden Kapiteln die mathematischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ exakt angeben (und ebenfalls axiomatisch voraussetzen) — und zwar genügend viele Eigenschaften, um $\mathbb{R}$ dadurch eindeutig zu charakterisieren.

Ich möchte hier noch einmal betonen, dass man die Existenz und die Eigenschaften der reellen Zahlen eigentlich nicht voraussetzen müsste: man kann das auch allein aus den Axiomen der Logik und Mengenlehre herleiten! Dies wäre jedoch relativ aufwändig und würde euch im Moment mehr verwirren als helfen, daher wollen wir hier darauf verzichten. Wer sich trotzdem dafür interessiert, kann die Einzelheiten hierzu in den Kapiteln 1 und 2 von [E] nachlesen.

Außer den reellen Zahlen sind vor allem noch die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ wichtig:

(a) die Menge $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ der **natürlichen Zahlen** (Achtung: es gibt Bücher, in denen die 0 nicht mit zu den natürlichen Zahlen gezählt wird!);

(b) die Menge $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ der **ganzen Zahlen**;

(c) die Menge $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ der **rationalen Zahlen**.

Offensichtlich sind diese Mengen ineinander enthalten: es gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Teilmengen von $\mathbb{R}$, die durch Ungleichungen gegeben sind, schreiben wir in der Regel, indem wir die Ungleichungsbedingung als Index an das Symbol $\mathbb{R}$ schreiben, z. B. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ für die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ aller nicht-negativen Zahlen.

Definition 1.16. Sind M und N Mengen, so bezeichnen wir mit

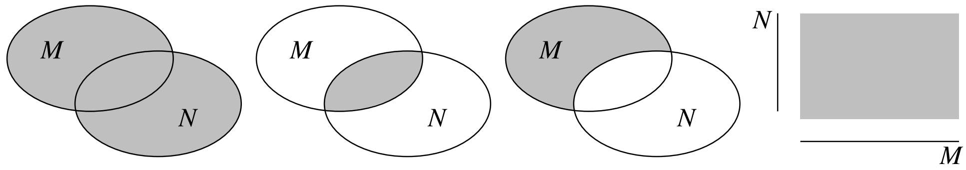
(a) $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$ die **Schnittmenge** von M und N; im Fall $M \cap N = \emptyset$ sagen wir, dass M und N **disjunkt** sind;

(b) $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$ die **Vereinigungsmenge** von M und N;

(c) $M \backslash N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$ die **Differenzmenge** von M und N;

(d) $M \times N := \{(x,y) : x \in M, y \in N\}$ die **Produktmenge** bzw. das Produkt von M und N. Die Schreibweise (x,y) steht hierbei für ein **geordnetes Paar**, d. h. einfach für die Angabe eines Elements aus M und eines aus N (wobei es auch im Fall $M = N$ auf die Reihenfolge ankommt, d. h. (x,y) ist genau dann gleich (x',y') wenn $x = x'$ und $y = y'$). Im Fall $M = N$ schreibt man $M \times N = M \times M$ auch als M^2.

Das Symbol „:=’ bedeutet hierbei, dass der Ausdruck auf der linken Seite durch die rechte Seite definiert wird. Die durch die obigen Konstruktionen beschriebenen Mengen sind in den folgenden symbolischen Bildern grau eingezeichnet:



$M \cup N$ $M \cap N$ $M \backslash N$ $M \times N$

Natürlich sind diese Konstruktionen auch für mehr als zwei Mengen möglich. Aus der Schule kennt ihr zum Beispiel sicher den Fall $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.17. Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige gegebene x und M äquivalent zueinander? Zeige jeweils die Äquivalenz bzw. widerlege sie durch ein Gegenbeispiel.

(a) $x \in M$ (b) $\{x\} \subset M$ (c) $\{x\} \cap M \neq \emptyset$
(d) $\{x\} \in M$ (e) $\{x\} \backslash M = \emptyset$ (f) $M \backslash \{x\} = \emptyset$

Nachdem wir Mengen eingeführt haben, wollen wir nun auch mehrere von ihnen durch Abbildungen miteinander in Beziehung setzen können:

Definition 1.18 (Abbildungen)**.** Es seien M und N zwei Mengen.

(a) Eine **Abbildung** oder **Funktion** f von M nach N, auch geschrieben als $f : M \to N$, ist eine Zuordnung, die jedem Element aus M genau ein Element aus N zuweist. Wird dem Element $x \in M$ das Element $y \in N$ zugewiesen, so schreiben wir dies als $f(x) = y$ oder $x \mapsto y$ und sagen, y ist das **Bild** von x unter f bzw. der **Wert** von f in x.

(b) Die Menge M bezeichnet man als **Definitionsmenge**, **Startmenge** oder **Startraum** der Abbildung. Die Menge N heißt **Wertemenge**, **Zielmenge** oder **Zielraum** von f.

Beispiel 1.19. Um eine Abbildung komplett festzulegen, müssen wir zuerst einmal den Start- und Zielraum angeben, und dann schließlich noch von jedem Element des Startraums sagen, auf welches Element des Zielraums es abgebildet wird. In welcher Form wir die Zuordnung angeben — ob durch eine Formel, durch explizites Auflisten der Funktionswerte aller Elemente des Startraums, oder irgendwie anders — spielt dabei keine Rolle. Dementsprechend sind zwei Abbildungen f und g auch genau dann gleich, wenn sie den gleichen Startraum M und Zielraum N haben, und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$ gilt. Hier sind einige Beispiele von Abbildungen:

(a) Für eine beliebige Menge M gibt es stets die **identische Abbildung**

$$\mathrm{id}_M : M \to M, \ x \mapsto x,$$

die jedes Element auf sich selbst abbildet.

(b) Die beiden Abbildungen

$$f : \{0,1\} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2 \qquad \text{und} \qquad g : \{0,1\} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^3$$

stimmen trotz ihrer unterschiedlichen Definition überein (d. h. es gilt $f = g$), da ihre Werte an jedem Punkt des Startraums übereinstimmen. Trotz gleicher Funktionswerte sind sie jedoch *nicht* gleich der identischen Abbildung $\mathrm{id}_{\{0,1\}}$, da letztere den Zielraum $\{0,1\}$ hat.

(c) Die Zuordnungen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

sind in dieser Form keine zulässigen Funktionsdefinitionen, weil im Fall von f der Zahl 0 kein gültiger Funktionswert zugeordnet wird und im Fall g für die Zahl 0 zwei (sich widersprechende) Festlegungen des Funktionswertes gemacht werden. Dies lässt sich jedoch in beiden Fällen leicht reparieren, z. B. indem man die Festlegungen abändert in

$$f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}.$$

(d) Ist $f : M \to N$ eine Abbildung und $A \subset M$ eine Teilmenge des Startraums, so erhält man durch die Einschränkung der Definitionsmenge von M auf A eine neue Abbildung, die wir mit

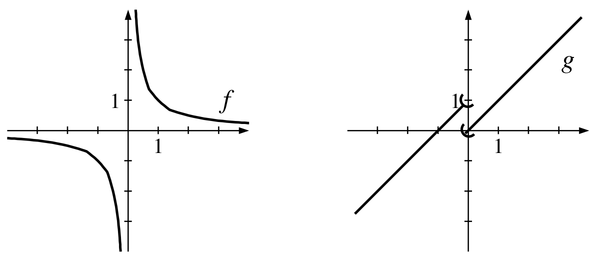
$$f|_A : A \to N, \;\; x \mapsto f(x)$$

bezeichnen und die die **Einschränkung** von f auf A genannt wird. Genauso kann man natürlich auch die Wertemenge N auf eine Teilmenge B einschränken, wenn f nur Werte in B annimmt. Es ist üblich, bei einer derartigen Einschränkung der Wertemenge immer noch den gleichen Namen für die Abbildung zu verwenden, also dann $f : M \to B$ zu schreiben.

Bemerkung 1.20 (Graph einer Abbildung)**.** Zu einer Abbildung $f : M \to N$ heißt die Menge

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \quad \subset M \times N$$

der **Graph** von f. Sind M und N Teilmengen von $\mathbb{R}$, so ist dieser Graph also eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, und man kann ihn leicht zeichnen und dadurch die Abbildung veranschaulichen. Für die Abbildungen aus Beispiel 1.19 (c) sieht dies z. B. so aus:



In der Tat verwendet man diese Idee in der Mengenlehre sogar dazu, Abbildungen zu *definieren*: eine Abbildung von M nach N ist dann einfach eine Teilmenge Γ von $M \times N$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ existiert mit $(x, y) \in \Gamma$. Auf diese Art ist dann eine Abbildung letztlich eine bestimmte Menge — in Übereinstimmung mit dem generellen Prinzip der Mengenlehre, dass alle mathematischen Objekte Mengen sind.

Man beachte, dass in der Definition einer Abbildung $f : M \to N$ nur verlangt wird, dass jedem Element von M genau ein Element von N zugeordnet wird — es wird nicht auch umgekehrt gefordert, dass jedes Element des Zielraums N das Bild von genau einem Element von M ist, oder dass es überhaupt als Bild eines Elements von M auftritt. Abbildungen, die diese Eigenschaften dennoch besitzen, haben spezielle Namen, die wir jetzt einführen wollen.

Definition 1.21 (Eigenschaften von Abbildungen)**.** Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

(a) Ist $y \in N$ und $x \in M$ mit $f(x) = y$, so heißt x ein **Urbild** von y unter f.

(b) Hat jedes $y \in N$ ...

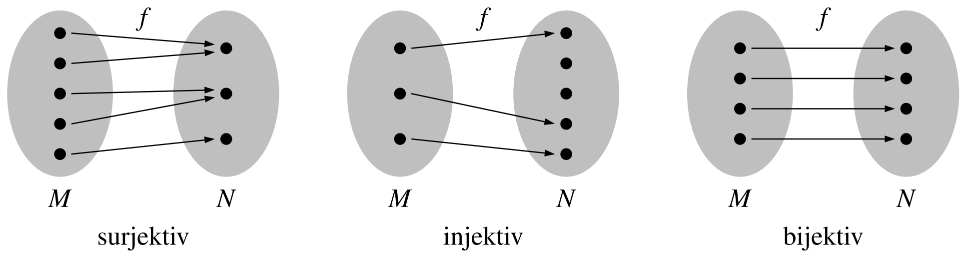
  (i) *mindestens* ein Urbild, so heißt f **surjektiv**.

  In Quantoren bedeutet dies: $\forall y \in N \; \exists x \in M : f(x) = y$.

  (ii) *höchstens* ein Urbild, so heißt f **injektiv**.

  In Quantoren bedeutet dies: $\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (also: haben zwei Elemente des Startraums das gleiche Bild, so müssen sie bereits dasselbe Element sein).

  (iii) *genau* ein Urbild, ist f also surjektiv und injektiv, so heißt f **bijektiv**.



Beispiel 1.22. Betrachten wir noch einmal die Funktionen aus Beispiel 1.19 (c) bzw. Bemerkung 1.20. Die Funktion f ist nicht surjektiv, da das Element 0 des Zielraums kein Urbild hat. Sie ist jedoch injektiv: sind $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, also $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$, so folgt durch Multiplikation mit $x_1 x_2$ sofort $x_1 = x_2$.

Die Funktion g dagegen ist surjektiv: eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ hat als Urbild $x = y$ für $y \geq 0$, und $x = y - 1$ für $y < 0$. Sie ist allerdings nicht injektiv, denn es ist $g(-1) = g(0) = 0$.

Beachte, dass diese Eigenschaften auch von der Wahl der Start- und Zielmenge abhängen: so wird z. B. f bijektiv, wenn man die Zielmenge $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ersetzt.

Aufgabe 1.23. Wie viele Abbildungen gibt es zwischen den Mengen $\{1,2,3,4\}$ und $\{1,2,3,4,5,6\}$? Wie viele von ihnen sind injektiv?

Bilder und Urbilder unter Abbildungen betrachtet man oft auch von ganzen Mengen statt nur von Punkten:

Definition 1.24. Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

(a) Ist $A \subset M$, so heißt die Menge

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \quad \subset N$$

(also alle Bilder von Punkten in A) das **Bild** von A unter f.

(b) Ist $B \subset N$, so heißt die Menge

$$f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\} \quad \subset M$$

(also alle Urbildpunkte von Punkten in B) das **Urbild** von B unter f.

Beispiel 1.25. Für die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ aus Beispiel 1.19 (c) ist $f(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{R}_{>0}$ und $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Aufgabe 1.26. Beweise die folgenden Teilmengenbeziehungen und untersuche jeweils, ob auch die Gleichheit gilt.

(a) Für alle M, A, B gilt $M\backslash(A \cup B) \subset (M\backslash A) \cap (M\backslash B)$.

(b) Ist $f : M \to N$ eine Abbildung und $A \subset N$, so ist $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A$.

(c) Ist $f : M \to N$ eine Abbildung und sind $A, B \subset M$, so ist $f(A)\backslash f(B) \subset f(A\backslash B)$.

Aufgabe 1.27. Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Finde für das Symbol $\square$ jeweils eine der Mengenbeziehungen $\subset, =, \supset$, so dass die folgenden Aussagen wahr werden, und beweise die so entstandenen Aussagen!

(a) $f(A) \cap f(B) \ \square \ f(A \cap B)$ für alle $A, B \subset M$.

(b) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \ \square \ f^{-1}(A \cap B)$ für alle $A, B \subset N$. 02

Als Letztes wollen wir nun in diesem Kapitel die Verkettung von Funktionen einführen. Wenn wir zwei Abbildungen haben, bei denen der Zielraum der ersten gleich dem Startraum der zweiten ist, dann können wir diese beiden Abbildungen natürlich hintereinander ausführen. Da diese Konstruktion oft vorkommt, führen wir dafür eine eigene Notation ein:

Definition 1.28 (Verkettung von Abbildungen)**.** Es seien $f: M \to N$ und $g: N \to R$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$g \circ f : M \to R, \ \ x \mapsto g(f(x))$$

die **Verkettung** von f und g.

Bemerkung 1.29.

(a) Bei der Verkettung zweier Funktionen kommt es natürlich auf die Reihenfolge an, allein schon weil in der Situation von Definition 1.28 in der Regel der Zielraum von g ja nicht mit dem Startraum von f übereinstimmt und die „umgekehrte Verkettung" $f \circ g$ damit gar nicht definierbar wäre. Aber selbst wenn beide Verkettungen sinnvoll definierbar sind, stimmen sie in der Regel nicht überein: so gilt z. B. für die Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto x+1$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto 2x$

$$\begin{aligned} & f(g(x)) = f(2x) = 2x+1, \\ \text{aber} \qquad & g(f(x)) = g(x+1) = 2(x+1) = 2x+2. \end{aligned}$$

(b) Nachdem wir jetzt gesehen haben, dass es auf die Reihenfolge der verketteten Funktionen ankommt, sollten wir noch einmal darauf hinweisen, dass die Notation für die Verkettung $g \circ f$ lautet, obwohl wir *zuerst* f *und dann* g anwenden. Diese vielleicht etwas merkwürdig erscheinende Notation kommt einfach daher, dass die Buchstaben in der gleichen Reihenfolge stehen sollen wie bei der Abbildungsvorschrift $x \mapsto g(f(x))$.

Wir wollen nun unser erstes *Lemma* beweisen — „Lemma" ist griechisch und bedeutet eigentlich „Annahme", aber in der Mathematik wird dieser Begriff für einen *Hilfssatz* verwendet, also für ein kleines Zwischenresultat, das vielleicht für sich genommen nicht übermäßig überraschend oder interessant ist, aber das in späteren Beweisen immer wieder nützlich sein wird. In unserem momentanen Fall geht es einfach darum, dass die Verkettung von Abbildungen *assoziativ* ist (siehe auch Definition 2.1):

Lemma 1.30. *Sind $f: M \to N$, $g: N \to R$ und $h: R \to S$ drei Abbildungen, so gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. (Man schreibt für diese Abbildung daher auch einfach $h \circ g \circ f$.)*

Beweis. Es sei $x \in M$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ gilt. Dies rechnen wir einfach durch wiederholtes Einsetzen von Definition 1.28 aus: es gilt

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

und

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Da diese beiden Ausdrücke übereinstimmen, ist das Lemma bewiesen. □

Schließlich wollen wir nun noch sehen, wie sich die Begriffe der Surjektivität, Injektivität und Bijektivität aus Definition 1.21 (b) äquivalent mit Hilfe von Umkehrfunktionen ausdrücken lassen.

Lemma 1.31 (Umkehrfunktionen)**.** *Es sei $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen nicht-leeren Mengen. Dann gilt:*

(a) *f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ es gibt eine Abbildung $g: N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$.*

(b) *f ist injektiv $\Leftrightarrow$ es gibt eine Abbildung $g: N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$.*

(c) *f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ es gibt eine Abbildung $g: N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$ und $g \circ f = \mathrm{id}_M$.*

*In diesem Fall ist diese Abbildung g eindeutig bestimmt. Wir nennen sie die **Umkehrabbildung** bzw. **Umkehrfunktion** von f und bezeichnen sie mit f^{-1}.*

Beweis. Wir beweisen die Richtungen „$\Rightarrow$" und „$\Leftarrow$" der drei Teile separat.

(a) „$\Rightarrow$“: Es sei f surjektiv. Dann können wir

$$g : N \to M, \quad y \mapsto \text{ein Urbild von } y \text{ unter } f$$

setzen (wobei wir, falls mehrere solche Urbilder existieren, jeweils eines auswählen). Für alle $y \in N$ gilt dann $f(g(y)) = y$, da $g(y)$ ja ein Urbild von y unter f ist. Also ist $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

„$\Leftarrow$“: Es gebe ein $g : N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$. Ist dann $y \in N$ beliebig, so können wir $x = g(y)$ setzen, und es gilt $f(x) = f(g(y)) = \mathrm{id}_N(y) = y$. Also hat jedes solche y ein Urbild unter f, d. h. f ist surjektiv.

(b) „$\Rightarrow$“: Es sei f injektiv. Dann setzen wir

$$g : N \to M, \quad y \mapsto \begin{cases} \text{das eindeutig bestimmte Urbild von } y \text{ unter } f, \text{ falls eines existiert,} \\ \text{ein beliebiger Funktionswert sonst.} \end{cases}$$

Für alle $x \in M$ ist dann $g(f(x))$ nach Konstruktion das eindeutige Urbild von $f(x)$ unter f, also x. Damit folgt $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

„$\Leftarrow$“: Es gebe ein $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Wir müssen zeigen, dass f injektiv ist, also die Bedingung aus Definition 1.21 (b)(ii) überprüfen. Es seien dazu $x_1, x_2 \in M$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Anwenden von g liefert $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, wegen $g \circ f = \mathrm{id}_M$ also $x_1 = x_2$. Damit ist f injektiv.

(c) „$\Rightarrow$“: Ist f bijektiv, so können wir

$$g : N \to M, \quad y \mapsto \text{das eindeutig bestimmte Urbild von } y \text{ unter } f$$

setzen. Da diese Definition zu denen aus (a) und (b) „$\Rightarrow$“ passt, zeigen die obigen Rechnungen also, dass f dann surjektiv und injektiv und damit bijektiv ist.

„$\Leftarrow$“: Dies folgt sofort aus Teil „$\Leftarrow$“ von (a) und (b).

Eindeutigkeit von g: Es seien $g_1, g_2 : N \to M$ zwei Abbildungen mit $f \circ g_1 = f \circ g_2 = \mathrm{id}_N$. Ist dann $y \in N$ beliebig, so ist natürlich $y = f(g_1(y)) = f(g_2(y))$. Weil f injektiv ist, folgt mit dem Kriterium aus Definition 1.21 (b)(ii) daraus $g_1(y) = g_2(y)$. Also ist $g_1 = g_2$, d. h. die Umkehrfunktion ist eindeutig. $\square$

Bemerkung 1.32. Beachte, dass wir das Urbild einer Menge unter einer Abbildung $f : M \to N$ in Definition 1.24 (b) mit dem gleichen Symbol f^{-1} bezeichnet haben wie (im Falle einer bijektiven Abbildung) die Umkehrabbildung aus Lemma 1.31 (c). Das ist vielleicht etwas unglücklich gewählt, weil man dadurch z. B. beim Auftreten der Urbild-Notation f^{-1} verleitet sein könnte zu glauben, dass hier von einer Umkehrabbildung die Rede ist, obwohl eine solche natürlich nicht existieren muss. Die Notation f^{-1} sowohl für die Umkehrabbildung als auch für das Urbild ist jedoch in der Literatur so gebräuchlich, dass wir hier nicht davon abweichen wollen. Bei genauem Hinschauen kann man aber auch immer feststellen, was gemeint ist: ist das Argument von f^{-1} eine *Teilmenge* von N, so handelt es sich um das Urbild dieser Menge; ist es ein *Element* von N, so ist die Umkehrfunktion gemeint. Und letztlich hängen diese beiden Notationen ja auch eng miteinander zusammen: ist f bijektiv (so dass also die Umkehrabbildung existiert) und ist $x \in M$ mit $f(x) = y$, so ist $f^{-1}(y) = x$ (mit f^{-1} im Sinne der Umkehrabbildung) und $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ (mit f^{-1} im Sinne des Urbildes).

Bemerkung 1.33. Ist $f : M \to N$ bijektiv mit Umkehrabbildung f^{-1}, so dass nach Lemma 1.31 (c) „$\Rightarrow$“ also $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ gilt, so besagen exakt dieselben Gleichungen natürlich auch, dass f eine Umkehrabbildung von f^{-1} ist. Insbesondere ist f^{-1} dann nach Lemma 1.31 (c) „$\Leftarrow$“ also auch selbst bijektiv.

Aufgabe 1.34.

(a) Untersuche die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 3x + 2$ auf Injektivität und Surjektivität.

(b) Untersuche die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, x + 1)$ auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Man zeige: Sind $f : M \to N$ und $g : N \to R$ surjektiv, so ist auch $g \circ f : M \to R$ surjektiv.

Aufgabe 1.35. Man beweise oder widerlege:

(a) Sind $f : M \to N$ und $g : N \to R$ zwei Abbildungen und ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

(b) Sind $f : M \to N$ und $g : N \to R$ zwei Abbildungen und ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch g injektiv.

(c) Es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

(d) Es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Wer noch Lust hat und eine etwas schwierigere Frage untersuchen möchte: gibt es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Wir haben nun die wichtigsten Konzepte und Notationen aus der Logik und Mengenlehre zusammengetragen und werden uns jetzt im nächsten Kapitel mit dem letzten Punkt beschäftigen, den wir in dieser Vorlesung axiomatisch voraussetzen werden: den reellen Zahlen und ihren Eigenschaften.