COMBINATOIRE ET MÉTAPHYSIQUE: IBN SĪNĀ, AL-TŪSĪ ET AL-HALABĪ[♦]

Roshdi RASHED[❋]

Cet article a été publié dans le livre "*L'histoire des sciences arabes–Interaction scientifique des cultures*". La Commission Nationale de l'Unesco, la Société Libanaise d'Histoire des Sciences Arabes, et l'ALESCO, Beyrouth (Une version arabe est disponible); (en français, pp. 147-164, en arabe, pp. 151-172) (Actes du colloque arabo-européen: « Histoire *des Sciences Arabes : Interaction Scientifique des Cultures* » organisé par « L'Équipe d'Étude et de Recherche sur la Tradition Scientifique Arabe » (CNRS - Liban et Univ. Libanaise), en coopération avec le « Centre d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Médiévales » (CNRS - France et Univ. Paris VII), Tripoli-Liban, 30 oct. – 1 nov. -2002.

[♦] Cet article est une version révisée de «Combinatoire et métaphysique: Ibn Sīnā, al-Tūsī et al-Halabī», dans R. Rashed et J. Biard (éds), *Les Doctrines de la science de l'antiquité à l'âge classique*, Leuven, éd. Peeters, 1999, pp. 61 - 86.

[❋]Ex-directeur du *Centre d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Médiévales* (CNRS-Raris et Université Paris VII).

COMBINATOIRE ET MÉTAPHYSIQUE: IBN SĪNĀ, AL-TŪSĪ ET AL-HALABĪ[♦]

Roshdi RASHED[❋]

I

Sept siècles durant, une recherche mathématique avancée se faisait en arabe, et dans les centres urbains de l'Islam. Nous sommes en droit de nous demander si les philosophes y ont puisé des thèmes de réflexion, s'ils ont été incités à chercher dans les mathématiques des modèles pour l'élaboration de leurs systèmes, ou si au contraire ils se sont repliés sur ce que les historiens se plaisent à nommer *falsafa*, c'est-à-dire une doctrine de l'Être et de l'Âme indifférente aux autres savoirs et indépendante de toute détermination, si ce n'est celle de la religion: en bref, un héritage de l'antiquité tardive aux couleurs de l'Islam. Cette question intéresserait aussi bien l'historien de la philosophie que l'historien des sciences. À dire vrai, comment imaginer que, face à un foisonnement sans précédent de disciplines et de résultats mathématiques -algèbre, géométrie algébrique, analyse diophantienne, théorie des parallèles, méthodes projectives ... - les philosophes aient pu demeurer indifférents? On a encore plus de peine à croire qu'ils aient pu rester sans réaction, alors que sous leurs yeux surgissaient des questions épistémologiques inédites posées par la nouvelle *mathesis*. Entre autres, celle de l'applicabilité des mathématiques: jamais auparavant on n'avait autant appliqué les disciplines mathématiques les unes aux autres; jamais non plus on n'avait conçu la nécessité d'appliquer les mathématiques en physique, comme condition d'apodicticité de cette dernière (Ibn al-Haytham); jamais enfin on n'avait pensé à inventer une discipline apte à exprimer les résultats tant en géométrie de position qu'en géométrie métrique, à savoir une topologie avant la lettre. Ces évènements épistémiques sont loin d'être les seuls. Il serait bien étonnant que tous aient échappé au regard des philosophes, dont certains étaient eux-mêmes mathématiciens, et la plupart au fait des mathématiques. Rien n'impose, certes, qu'une discipline ou une activité scientifique ait la philosophie qu'elle mérite, ni que le philosophe joue un rôle quelconque dans le

---

[♦] Cet article est une version révisée de «Combinatoire et métaphysique: Ibn Sīnā, al-Tūsī et al-Halabī», dans R. Rashed et J. Biard (éds), *Les Doctrines de la science de l'antiquité à l'âge classique*, Leuven, éd. Peeters, 1999, pp. 61 - 86.

[❋] Ex-directeur du *Centre d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Médiévales* (CNRS-Raris et Université Paris VII).

développement des mathématiques et des sciences. C'est dire qu'il n'y a aucune détermination *a priori* des rapports entre mathématique et philosophie théorique, mais c'est une raison de plus pour soulever la question et revenir aux écrits des uns et des autres -philosophes et mathématiciens- pour tenter d'élucider ces rapports. Un résultat me semble déjà acquis: en m'attelant à plusieurs reprises à cette tâche, je crois avoir montré la richesse jusqu'ici insoupçonnée de la philosophie des mathématiques dans l'Islam classique, celle des mathématiciens comme al-Sijzī, Ibn Sinān, Ibn al-Haytham, etc., et celle des philosophes comme al-Kindī, al-Fārābī, Ibn Sīnā...

Cette fois, c'est à d'autres rapports entre mathématiques et philosophie dans l'Islam classique que l'on entend s'arrêter: les liens qui se nouent lorsque le philosophe emprunte aux mathématiques un instrument pour la solution d'une question logico-métaphysique. Or la situation qui précisément nous intéresse ici a un trait spécifique: cet emprunt, par un effet de retour, s'avère fécond pour le progrès du domaine mathématique qui a fourni l'instrument. L'échange entre combinatoire et métaphysique est une excellente illustration de ce double mouvement: Ibn Sīnā avait donné, à partir de ses conceptions ontologiques et cosmogoniques, une formulation de la doctrine de l'émanation à partir de l'Un. Nasīr al-Dīn al-Tūsī, pour pouvoir dériver la multiplicité à partir de l'Un, a entrevu dans la doctrine même d'Ibn Sīnā la possibilité de la doter d'une armature combinatoire, empruntée alors aux algébristes. Mais, pour que l'acte d'al-Tūsī fût possible, il fallait interpréter les règles des combinaisons des algébristes de façon combinatoire: or c'est cette interprétation combinatoire qui signa, en quelque sorte, l'acte de naissance de cette discipline, l'analyse combinatoire, que les successeurs mathématiciens d'al-Tūsī, comme al-Fārisī et Ibn al-Bannā’, entre autres, exploiteront. Un philosophe tardif, al-Halabī, tentera, à partir de cette contribution, d'organiser les éléments de la nouvelle discipline, en la désignant d'un nom pour marquer son autonomie.

Mais, avant d'examiner ce mouvement, il nous faut d'abord le distinguer d'un cheminement comme celui de Raymond Lulle. Ce dernier a combiné des notions selon des règles mécaniques, dont les résultats se sont avérés plus tard des arrangements ou des combinaisons. Mais Lulle n'a rien emprunté aux mathématiques, et n'a jamais reconnu dans sa propre démarche quoi que ce soit de mathématique. Le cheminement d'al-Tūsī est en revanche plus proche de la démarche leibnizienne, en dépit de ce qui sépare les deux projets, le premier, nous l'avons dit, entend résoudre mathématiquement ce problème de l'émanation de la multiplicité à partir de l'Un, ce qui l'a conduit à fournir à la doctrine avicennienne de la création une armature combinatoire, tandis que le second voulait bâtir sur la combinatoire une *Ars inveniendi*.

II

L'émanation des Intelligences et des orbes célestes ainsi que des autres mondes -celui de la nature et celui des choses corporelles- à partir de l'Un, est l'une des doctrines centrales de la métaphysique d'Ibn Sīnā. Cette doctrine soulève une question à la fois ontologique et noétique: comment à partir d'un être unique et simple peut émaner une multiplicité, qui est aussi une complexité, laquelle, à la fin, comprend aussi bien la matière des choses que les formes des corps et les âmes humaines? Cette dualité ontologique et noétique érige la question en obstacle, comme une difficulté à la fois logique et métaphysique qu'il faut dénouer. On comprend dès lors, du moins en partie, pourquoi dans ses différents écrits Ibn Sīnā revient inlassablement à cette doctrine, et, implicitement, à cette question.

L'étude de l'évolution historique de la pensée d'Ibn Sīnā sur ce problème, dans ses différents écrits, nous montrerait comment il a pu amender une formulation initiale en fonction d'une telle difficulté. Pour nous en tenir à *al-Shifā*' et à *al-Ishārāt wa-al-Tanbīhāt*, Ibn Sīnā expose les principes de cette doctrine ainsi que les règles de l'émanation des multiples à partir d'une unité simple. Son explication a l'allure d'une exposition articulée et ordonnée, mais n'a pas la valeur d'une preuve rigoureuse: Ibn Sīnā n'y donne pas, en effet, les règles syntactiques aptes à épouser la sémantique de l'émanation. Or c'est précisément ici que réside la difficulté de la question de la dérivation de la multiplicité à partir de l'Un. Mais il y a bien longtemps que cette dérivation a été perçue comme problème, et examinée comme telle. Le mathématicien, philosophe et commentateur d'Ibn Sīnā, Nasīr al-Dīn al-Tūsī [1201/1273], non seulement a saisi la difficulté, mais a voulu fournir les règles syntactiques qui faisaient défaut.

Al-Tūsī en effet, dans son commentaire d'*al-Ishārāt wa-al-Tanbīhāt*, introduit le langage et les procédés des combinaisons pour poursuivre l'émanation jusqu'au troisième rang des êtres. Il cesse là l'application de ces procédés, pour conclure: «si nous dépassons ensuite ces rangs [les trois premiers], il peut exister une multiplicité dénombrable (*lā yuhsā ʿadaduhā*) dans un seul rang, et à l'infini»[1]. L'intention

---

[1] Éd. S. Dunyā, Le Caire, 1971, vol. III, pp. 217 - 218.

d'al-Tūsī est donc claire, et le procédé appliqué pour les trois premiers rangs n'autorise aucun doute: il faut fournir la preuve et les moyens qui manquaient à Ibn Sīnā. Mais à ce stade al-Tūsī est encore loin du but. C'est une chose en effet de procéder par combinaisons pour un nombre d'objets, c'en est une autre d'introduire un langage avec sa syntaxe. Ici, ce langage serait celui des combinaisons. Or, c'est précisément à l'introduction de ce langage que s'emploie al-Tūsī dans un mémoire indépendant[(2)], et dont le titre ne laisse planer aucune ambiguïté: *Sur la démonstration du mode de l'émanation des choses <en nombre> infini à partir du Principe Premier Unique.* Cette fois, on va le voir, al-Tūsī procède d'une manière générale à l'aide de l'analyse combinatoire. Le texte d'al-Tūsī et les résultats qu'il renferme ne disparaîtront pas avec leur auteur; on les retrouve dans un traité tardif entièrement consacré à l'analyse combinatoire. Ainsi la solution d'al-Tūsī non seulement distingue un style de recherche en philosophie, mais représente une contribution intéressante à l'histoire des mathématiques elles-mêmes.

Pour comprendre cette contribution, il nous faut revenir à Ibn Sīnā, pour rappeler les éléments de sa doctrine nécessaires à notre exposé, mais aussi pour saisir, si peu soit-il, dans son exposition synthétique et systématique, le principe formel dont la présence a rendu possible l'introduction des règles de l'analyse combinatoire. En fait, c'est ce principe qui permet à Ibn Sīnā de développer son exposé de manière déductive. Il lui fallait en effet assurer d'une part l'unité de l'Être, qui se dit alors de tout selon le même sens, et une différence irréductible entre le Principe Premier et ses créations. Il élabore alors une conception générale, en quelque sorte «formelle», de l'Être: considéré en tant qu'être, il n'est objet d'aucune détermination, pas même celle des modalités; il n'est qu'être. Il n'est pas un genre, mais un «état» de tout ce qui est, et se laisse saisir seulement dans son opposition au non-être, sans pour autant que celui-ci le précède dans le temps - cette opposition est selon l'ordre de la raison uniquement. D'autre part, seul le Principe Premier reçoit son existence de lui-même[(3)]. C'est donc la seule existence nécessaire, et c'est

---

[(2)] Ce mémoire a d'abord été établi par Mohammad Danesh Pajouh et a été publié dans *Intishārāt Dānishkā Tehrān* 296, pp. 13-20; il a ensuite été établi par ʿAbd Allāh Nūrānī et publié à la suite de son édition du *Talkhīs al-muhassal* avec d'autres mémoires d'al-Tūsī, Téhéran, 1980, pp. 509 - 515. Ces deux publications ont suivi le manuscrit Dānishkā 1079/12. Nous avons établi ce texte dans *"Combinatoire et métaphysique"*, pp. 77 - 86.

[(3)] Ibn Sīnā distingue existence et essence pour tous les autres êtres. Sur ce point, voir A. M. Goichon, *La Distinction entre existence et essence,* Paris, 1957 et M. E. Marmura, donc seulement dans ce cas que l'existence coïncide avec l'essence. Tous les autres êtres reçoivent leur existence du Principe Premier, par émanation. Cette ontologie et la cosmogonie qui l'accompagne fournissent les trois points de vue sous lesquels on envisage un être: en tant qu'être, en tant qu'émanation[4] du Principe Premier, et en tant qu'être de sa quiddité (sous l'angle des deux premiers regards, c'est la nécessité de cet être qui s'impose, alors que c'est sa contingence que révèle le troisième). Ce sont là, schématiquement évoquées, les notions sur lesquelles Ibn Sīnā va établir ses postulats, qui sont:

l˚ Il existe un Principe Premier, Être nécessaire par essence, un, indivisible d'aucune manière, qui n'est ni un corps, ni dans un corps.

2˚ La totalité de l'être émane du Principe Premier.

3˚ L'émanation ne se fait ni «selon une intention (*ʿalā sabīl qasd*)» ni pour parvenir à une fin, mais par une nécessité de l'être du Principe Premier, c'est-à-dire son auto-intellection.

4˚ De l'Un n'émane que l'Un.

5˚ Il y a une hiérarchie dans l'émanation, de ceux dont l'être est le plus parfait (*al-akmalu wujūdan*) à ceux dont l'être est le moins parfait (*al-akhassu wujūdan*).

On pourrait voir quelque contradiction entre certains de ces postulats, par exemple 2 et 4, ou soupçonner que d'aucuns entraînent des conséquences contradictoires. C'est pour éviter cette première impression qu'Ibn Sīnā introduit des déterminations supplémentaires au cours de sa déduction. Ainsi, de 1, 2, 4 et 5 il s'ensuit que la totalité de l'être, en plus du Principe Premier, est un ensemble ordonné par la relation à la fois logique et axiologique prédécesseur-successeur, eu égard aussi bien à la priorité de l'être qu'à son excellence. Si en effet on excepte le Principe

---

"*Quiddity and Universilaty in Avicenna*", dans P. Morewedge (éd.), *Neoplatonism and Islamic Thought*, State University of New York Press, Albany, 1992, pp. 77 - 87. Voir aussi Djémil Saliba, *Sur la Métaphysique d'Avicenne*, Pau, 1926; G. Verbeke, "*Le statut de la métaphysique*"; introduction à *Avicenna Latinus, Liber de Philosophia Prima*, de S. Van Riet, Louvain – Leiden, 1977.

[4] Sur sa doctrine de l'émanation, cf. L. Gardet *"En l'honneur du millénaire d'Avicenne*", *Revue Thomiste*, LIXe année, t. LI, nº 2 (1951), pp. 333 - 345; N. Heer, "*Al-Rāzī and al-Tūsī on Ibn Sīnā's Theory of Emanation*", dans pp. Morewedge (éd.), *Neoplatonism and Islamic Thought*, pp. 111 - 125; et notamment l'article de A. Hasnawi, «Fayd», dans *Philosophie occidentale*, pp. 966 - 972. On peut lire aussi les contributions de Th.-A. Druart, "*Al-Fārābī, Emanation, and Metaphysics*", pp. 127 - 148; P. Morewedge, *"The Neoplatonic Structure of Some Islamic Mystical Doctrines*», pp. 51 - 75; J. Owens, "*The Relevance of Avicennian Neoplatonism*", pp. 41 - 50, dans l'ouvrage *Neoplatonism and Islamic Thought*, cité ci-dessus.

Premier, chaque être ne peut avoir qu'un seul prédécesseur (ainsi que le prédécesseur de son prédécesseur, et ainsi de suite). D'autre part chaque être, y compris le Principe Premier, ne peut avoir qu'un seul successeur (respectivement le successeur, son successeur ...). Mais le philosophe, et son commentateur, savaient que, pris à la lettre, cet ordre interdit l'existence des êtres multiples, c'est-à-dire leur coexistence indépendante, sans que les uns soient logiquement prioritaires aux autres ni plus parfaits qu'eux; ce qui rend cet ordre manifestement faux, comme le dit al-Tūsī [(5)]. Il est donc nécessaire d'introduire des précisions supplémentaires, ainsi que des êtres intermédiaires.

Or 1 et 2 interdisent à leur tour que la multiplicité procède des «élans» (*nuzūʿāt*), et des «perspectives» (*jihāt*), du Principe Premier, car, supposer en Lui élans et perspectives, c'est nier son unicité et sa simplicité. Enfin, 3, 4 et 5 impliquent que l'émanation comme acte du Principe Premier ne soit pas à l'image d'un acte humain, puisque son Auteur ne connaît ni intention ni fin. Tout indique donc qu'il faut introduire des êtres intermédiaires (*mutawassita*), hiérarchisés sans aucun doute, mais qui permettent de rendre compte de la multiplicité-complexité.

Commençons comme il se doit par le Principe Premier, et désignons-le comme le fait Ibn Sīnā dans son opuscule *al-Nayrūziyya* par la première lettre de l'alphabet - *a*. Le Principe Premier s'«intellige» lui-même par essence. Dans son auto-intellection, il «intellige» la totalité de l'être dont il est le propre principe[(6)], sans qu'il y ait en lui obstacle à l'émanation de cette totalité, ni refus d'elle. C'est en ce sens seulement que l'on dit du Principe Premier qu'il est «agent» (*fāʿil*) de la totalité de l'être.

Mais, ceci étant admis, il reste à expliquer comment s'effectue cette émanation nécessaire de la totalité de l'être, sans qu'il faille ajouter quoi que ce soit qui puisse contredire l'Unicité du Principe Premier. Selon 1, 4 et 5, un seul être émane du Principe Premier, qui est nécessairement du second rang d'existence et de perfection. Mais, comme il émane d'un être unique, pur et simple, à la fois vérité pure, puissance pure, bonté pure ..., sans qu'aucun de ces attributs existe en lui indépendamment afin que soit garantie l'unité du Principe Premier, cet être dérivé ne peut être qu'un Intellect pur. Cette implication respecte 4, car, si cet intellect n'était pas pur, on devrait conclure que de l'Un émane plus qu'un. Il s'agit ici du

[(5)] *Op. cit.*, p. 216.

[(6)] Ibn Sīnā, *al-Shifā'*, *al-Ilāhiyāt,* éd. M. Y. Mūsā, S. Dunyā et S. Zāyed, revue et introduite par I. Madkour, Le Caire, 1960, vol. Il, pp. 402, 1. 16.

premier Intellect séparé, le premier effet (*maʿlūl*) du Principe Premier. Comme Ibn Sīnā, désignons-le par *b*.

Tout est maintenant en place pour expliquer la multiplicité-complexité. Par essence, cet Intellect pur est un effet: il est donc contingent. Mais, comme émanation du Principe Premier, il est nécessaire, puisqu'il a été «intelligé» par ce dernier. À cette dualité ontologique se superpose une multiplicité noétique: cet Intellect pur se connaît et connaît son propre être comme être contingent, c'est-à-dire que son essence est différente de celle du Principe Premier, qui est nécessaire; mais d'autre part il connaît le Principe Premier comme Être nécessaire; et enfin il connaît la nécessité de son propre être comme émanation du Principe Premier. Je viens ici de paraphraser ce qu'écrit Ibn Sīnā lui-même dans *al-Shifā*'[7]. Il répond d'avance à un éventuel détracteur, en remarquant que cette multiplicité-complexité n'est pas, si l'on peut dire, une propriété héréditaire: ce n'est pas du Principe Premier que l'Intellect pur la reçoit, et ceci pour deux raisons. D'abord, la contingence de son être appartient à sa propre essence, et non pas au Principe Premier, qui lui a donné la nécessité de son être. D'autre part, la connaissance qu'il a de lui-même, aussi bien que la connaissance qu'il a du Principe Premier, est une multiplicité, qui résulte de la nécessité de son être à partir du Principe Premier. Dans de telles conditions, Ibn Sīnā peut rejeter l'accusation d'attribuer cette multiplicité au Principe Premier.

Ibn Sīnā décrit ensuite comment, à partir de cet Intellect Pur, émanent les autres Intellects séparés, les Orbes célestes, et des Âmes qui permettent aux Intellects d'agir. Ainsi, de l'Intellect pur *b* émane, par son intellection de *a*, un deuxième Intellect; soit *c*; et par son intellection de son essence, l'Âme du neuvième Orbe céleste; et par son intellection de son être comme être contingent le corps de ce neuvième Orbe. Désignons l'Âme de cet Orbe et son corps par *d*.

Ibn Sīnā poursuit ainsi la description de l'émanation des Intellects, des Orbes célestes avec Âmes et leurs corps. De tout Intellect émanent désormais la matière des choses sublunaires, les formes des corps et les âmes humaines. Or, cette explication d'Ibn Sīnā, même si elle a l'avantage de ne pas séparer la question de la multiplicité à partir de l'un de celle de la complexité, c'est-à-dire du contenu ontologique de la multiplicité, ne permet cependant pas une connaissance rigoureuse de celle-ci, dans la mesure où aucune règle générale n'est donnée. Ibn Sīnā ne fait que conduire les éléments jusqu'à l'Intellect Agent.

---

[7] *Ibid*., pp. 405 - 406.

C'est précisément ici qu'intervient al-Tūsī. Il va démontrer qu'effectivement, à partir du Principe Premier, émane, selon les règles d'Ibn Sīnā et à l'aide d'un nombre réduit d'intermédiaires, une multiplicité, de sorte que chaque effet n'aura qu'une seule cause qui existe indépendamment. On verra que ce progrès certain dans la connaissance de la multiplicité a pour prix l'appauvrissement du contenu ontologique: de la multiplicité- complexité ne restera en fait que la multiplicité.

L'idée d'al-Tūsī est de soumettre ce problème à une étude combinatoire. Mais, pour que l'intervention d'une combinatoire soit possible, il faut s'assurer que la variable *temps* est neutralisée, ce qui se traduit dans le cas de la doctrine de l'émanation ou bien par la mise à l'écart du devenir, ou, tout au moins, par son interprétation purement logique. Or cette condition, on l'a vu, Ibn Sīnā lui-même l'offrait. On a pu noter à juste titre que l'émanation ne se déroule pas dans le temps[(8)], et qu'antériorité et postériorité doivent être entendues comme essentielles, et non pas en un sens temporel. Cette interprétation, capitale, à nos yeux, dans le système avicennien, renvoie à sa propre conception du nécessaire, du possible et de l'impossible. Rappelons en effet, pour le dire en un mot, que dans *al-Shifā*'[(9)], Ibn Sīnā reprend cet ancien problème, pour rejeter d'entrée de jeu toutes les doctrines anciennes, lesquelles, selon lui, sont circulaires: elles ont recours, pour définir l'un des trois termes, à l'un ou l'autre des deux restants. Pour rompre ce cercle, Ibn Sīnā pense donc restreindre la définition de chaque terme en le ramenant à la notion d'existence. Il distingue alors ce qui est considéré en lui-même d'existence nécessaire, de ce qui, également considéré en lui-même, peut exister, et peut aussi ne pas exister. Nécessité et contingence sont pour lui inhérentes aux êtres mêmes. Quant à l'être possible, son existence, ainsi que sa non-existence, dépendent d'une cause extérieure à lui. La contingence n'apparaît donc pas comme une nécessité déchue, mais comme un autre

[(8)] Voir Hasnawi, «*Fayd*», et Gardet, qui écrit: "Le processus décrit par Ibn Sīnā ne se déroule pas dans le temps. L'antériorité du Principe Premier par rapport aux Intelligences, et plus généralement au Tout, est une antériorité *essentielle* et non temporelle". *Al-Shifā*', VI, 2, p. 266. Sur ces questions, voir aussi H. A. Davidson, *Proofs for Eternity Creation and the Existence of God in Medieval Islamic and Jewish Philosophy*, New York / Oxford, 1987; Th.-A. Druart, "*Al-Farabi and Emanationism*", dans J.F. Wippell (éd.), *Studies in Medieval Philosophy*, Washington, The Catholic University of America Press, 1987, pp. 23 - 43 et P. Morewedge, "*The Logic of Emanationism and Sūfism in the Philosophy of Ibn Sīnā (Avicenna), Part Il*", *Journal of the American Oriental Society* 92 (1972), pp. 1- 18.

[(9)] Cf. notamment livre 3, chapitre 4 du *Syllogisme*, vol. IV, éd. Saʿīd Zāyed, introduction et révision I. Madkour, Le Caire, 1964.

mode d'existence. Il se peut même que l'être possible, tout en le restant en lui-même, soit d'une existence nécessaire sous l'action d'un autre être. Sans vouloir suivre ici les subtilités du développement d'Ibn Sīnā, notons seulement que, de cette définition particulière du nécessaire et du possible, Ibn Sīnā fonde les termes de l'émanation dans la nature des êtres, neutralisant d'emblée, comme on l'a souligné plus haut, la variable *temps*. De ces définitions, il déduit en effet des propositions, dont la majorité est établie par réduction à l'absurde. Il montre que le nécessaire ne peut pas ne pas exister, qu'il ne peut pas, par essence, avoir une cause, que sa nécessité englobe tous ses aspects, qu'il est un et ne peut, d'aucune manière, admettre la multiplicité, qu'il est simple, sans aucune composition ... Sur tous ces points, il s'oppose au possible. C'est donc dans la définition même du nécessaire et du possible, et dans la dialectique engagée entre eux, que se trouvent à jamais fixés l'antériorité du Principe Premier, ainsi que ses rapports avec les Intelligences.

Si donc on peut décrire l'émanation sans recourir au temps, c'est dans la mesure où ses propres termes sont donnés dans une logique du nécessaire et du possible. Que cette doctrine n'aille pas sans difficultés, ce n'est pas la question ici: nous savons, en revanche, que les conditions de l'introduction d'une combinatoire étaient déjà bien assurées par Ibn Sīnā lui-même.

Nous avons dit que de *a* émane *b*; ce dernier est donc au premier rang des effets. De *a* et *b* ensemble émane *c* -soit le second intellect; de *b* tout seul émane *d*- soit l'orbe céleste. On a donc dans le second rang deux éléments *c* et *d* dont aucun n'est cause de l'autre. Mais on a en tout jusqu'ici quatre éléments: la cause première, *a*, et trois effets, *b, c* et *d*. Al-Tūsī appelle ces quatre éléments les *principes*. Combinons à présent ces quatre éléments deux à deux, puis trois à trois, et enfin quatre à quatre. On obtient successivement six combinaisons -*ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*-, quatre combinaisons - *abc, abd*, *acd, bcd* -, et une combinaison à quatre éléments - *abcd*. Si l'on tient des combinaisons de ces quatre éléments 1 à 1, on a comme somme 15 éléments dont 12 appartiennent au troisième rang des effets, sans que les uns soient des êtres intermédiaires pour dériver des autres. C'est cela qu'al-Tūsī expose dans le commentaire d'*al-Ishārāt wa-al-Tanbīhāt*, ainsi que dans son traité que nous avons évoqué. Mais, dès que l'on dépasse le troisième rang, les choses ne tardent pas à se compliquer, et al-Tūsī doit introduire dans son traité le lemme suivant: *Le nombre des combinaisons de n éléments est égal à* $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$.

Pour calculer ce nombre, al-Tūsī utilise l'égalité

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Ainsi, pour n = 12, il obtient 4095 éléments. Notons que pour déduire ces nombres, il montre ici les expressions de la somme en combinant les lettres de l'alphabet.

Al- Tūsī revient ensuite au calcul du nombre des éléments du quatrième rang. Il considère alors les quatre principes avec les douze êtres du troisième rang; il obtient 16 éléments, à partir desquels il obtient 65520 effets. Pour parvenir à ce nombre, al-Tūsī procède à l'aide d'une expression équivalente à

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{p-k},$$

pour $1 \leq p \leq 16$, $m = 4$, $n = 12$, dont la valeur est le coefficient binomial

$$\binom{m+n}{p}.$$

Aucun de ces éléments -à l'exception de *a*, *b* et *ab*- n'est un intermédiaire pour les autres. Aussi la réponse d'al-Tūsī est-elle générale, et (*) donne une règle permettant de connaître la multiplicité dans chaque rang.

Après avoir établi ces règles et donné l'exemple du quatrième rang, avec ses 65520 éléments, al- Tūsī est en mesure d'affirmer qu'il a répondu à la question «de la possibilité de l'émanation de la multiplicité dénombrable à partir du Principe Premier sous la condition que de l'Un n'émane qu'un et sans que les effets soient successifs (en chaîne). Ce qu'il fallait démontrer».

Ce succès d'al-Tūsī: faire parler à l'ontologie d'Ibn Sīnā la langue de l'analyse combinatoire, a été le moteur de deux évolutions importantes: à la fois de la doctrine d'Ibn Sīnā et de la combinatoire. Il est clair que cette fois la question de la multiplicité est maintenue à certaine distance de celle de la complexité de l'être. AI-Tūsī ne se soucie guère du statut ontologique de chacun de ces milliers d'êtres qui composent, par exemple, le quatrième rang. Mais il y a plus: le discours métaphysique nous permet à présent de parler d'un être sans nous rendre aptes à nous le représenter exactement. Cette évolution en quelque sorte «formelle» de l'ontologie, flagrante ici, ne fait qu'amplifier une tendance déjà présente chez Ibn Sīnā, et que nous avons soulignée ailleurs, dans ses considérations sur «la chose» (*al-shay'*)[10]. Ce mouvement «formel» est accentué par la possibilité de désigner les êtres par les lettres de l'alphabet. Pas même le Principe Premier n'échappe à la règle, puisqu'il est désigné par la lettre *a*. Là encore al-Tūsī amplifie une pratique avicennienne, mais il en fléchit le sens. Dans l'épître *al-Nayrūziyya*, Ibn Sīnā avait eu recours à ce symbolisme, mais à deux différences près cependant: d'une part, il a attribué à la succession des lettres de l'alphabet arabe selon l'ordre *abjad hawad* la valeur d'un ordre de priorité, d'une antériorité logique; d'autre part, il a utilisé les valeurs numériques des lettres (a = 1, b = 2, etc.). Al-Tūsī, s'il garde implicitement l'ordre de priorité en désignant, comme Ibn Sīnā, le Principe Premier par *a*, l'Intellect par *b*, a abandonné cette hiérarchie au profit de la valeur conventionnelle du symbole. Quant à la valeur numérique, elle a disparu. Il fallait d'ailleurs cela pour que ces lettres fussent objet d'une combinatoire. Mathématicien et philosophe, al-Tūsī a pensé la doctrine avicennienne de l'émanation dans un sens formel, favorisant ainsi une tendance déjà présente dans l'ontologie d'Ibn Sīnā.

L'historien des mathématiques, cette fois, ne peut demeurer insensible à la seconde évolution, celle de l'analyse combinatoire elle-même. Pour en mesurer l'importance, rappelons brièvement deux faits d'histoire. Le premier remonte à la fin du X^e siècle, lorsqu'al-Karajī conçoit le triangle arithmétique, sa loi de formation et la formule du développement binomial. Al-Karajī établit ces expressions à l'aide d'une récurrence archaïque. Ce sont là des formules *algébriques* qui comportaient sans aucun doute, mais implicitement seulement, un sens combinatoire. Les successeurs d'al-Karajī recoururent eux-aussi à ce sens combinatoire, mais sans davantage l'exhiber. Al-Tūsī lui-même, dans son livre d'arithmétique *Jawāmiʿ al-hisāb*, donne ces règles obtenues par al-Karajī, sans s'arrêter à cette signification implicite. On sait d'autre part que, depuis le VIII^e siècle, c'est-à-dire depuis al-Khalil ibn Ahmad, les lexicographes et les linguistes usaient des procédés combinatoires, qu'ils ne se souciaient pas de démontrer. Mais, ce qui n'était pas le cas chez les mathématiciens, ils insistaient sur la nature combinatoire de ces procédés. Ces deux courants confluent dans le texte d'al-Tūsī, fondant ainsi l'analyse combinatoire en lui conférant le statut d'un chapitre des mathématiques à part entière. Les formules algébriques sont explicitement cette fois dotées d'un sens combinatoire et sont illustrées par un calcul sur les lettres. Tout

---

(10) *Études sur Avicenne*, dirigées par Jean Jolivet et Roshdi Rashed, "*Collection sciences et philosophie arabes. Études et reprises"*, Paris, Les Belles Lettres, 1984.

se passe donc comme si l'application de ce calcul à des domaines tels que celui qui nous intéresse avait servi de révélateur, en incitant le mathématicien à exhiber le sens combinatoire sous-jacent et à fondre deux courants jusqu'ici indépendants. Que cet acte unificateur soit le fait d' al-Tūsī, ou qu'il lui ait été suggéré par un prédécesseur lui aussi mathématicien et philosophe, de nous inconnu, c'est un fait d'histoire qui ne nous importe guère ici. Mais cet acte a permis à la langue des combinaisons d'épouser celle de la doctrine d'Ibn Sīnā, en l'armant des règles syntactiques qui lui manquaient initialement. La doctrine, on l'a vu, n'en sortira pas intacte, puisque ce gain est aux dépens de la richesse intuitive.

III

Un retour à l'histoire des mathématiques nous permettra de vérifier la validité de nos analyses, si nous suivons, partiellement tout au moins, la destinée du texte d'al-Tūsī. Cette fois encore la bonne fortune nous a présenté un mathématicien-philosophe jamais étudié, et a mis entre nos mains un traité par lui composé, jusqu'ici inconnu. C'est un mathématicien-philosophe tardif et de second rang, Ibrāhīm al-Halabī(11), et son traité est le premier de nous connu qui soit entièrement consacré à l'analyse combinatoire. Les règles de cette analyse, en effet, n'y apparaissent plus simplement lors de leur application algébrique, linguistique ou philosophique, mais pour elles-mêmes, dans un chapitre principal, doté d'un titre: «les éventualités combinables». Ce titre est une désignation générique, qui renvoie aussi bien aux permutations, qu'aux arrangements, combinaisons, etc., c'est-à-dire à toutes les combinaisons alors étudiées. Or, dans ce traité, le texte d'al-Tūsī, repris et amplifié, occupe une place de choix: il tient lieu de méthode pour déterminer et établir les combinaisons.

Venons-en rapidement à ce traité d'al-Halabī; nous comprendrons quelle place est réservée à la solution d'un problème métaphysique dans un traité d'analyse combinatoire. Al-Halabī commence par s'interroger sur les différentes méthodes possibles pour étudier les «éventualités combinables» (*al-ihtimālāt al-tarkībiyya*). Le but d'al-Halabī est clair: «déterminer le nombre des éventualités combinables pour un nombre quelconque d'objets»(12). Il écarte la méthode empirique d'énumération,

---

(11) *Risālat fī istikhrāj ʿiddat al-ihtimālāt al-tarkībiyya min ayy ʿadad kāna*, ms. Istanbul, Süleymaniye, Hamidiye 873, f° 69v - 86r.
(12) *Ibid*., f° 69v.

qui n'offre aucune règle générale, malgré son efficacité dans les cas simples. Cette méthode consiste à énumérer, pour un ensemble de trois éléments (a, b, c) par exemple, les sept «éventualités combinables» {a, b, c, ab, ac, bc, abc}. La difficulté est manifeste pour un ensemble à n éléments[13]. La seconde méthode[14] en revanche, fournit une règle générale, dont al-Halabī est fier. Il s'agit d'une expression équivalente à $u_n = 2u_{n-1} + 1$, avec u_n l'ensemble des «éventualités combinables» à n éléments. Dans notre langage:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{avec} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

pour $1 \leq k \leq n$.

Cette méthode est sans doute établie à partir de la règle connue depuis la fin du X[e] siècle:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Par sommation, il vient

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} = 2u_{n-1} + 1.$$

AI-Halabī s'écarte également de cette méthode, qui exige un calcul compliqué, celui de tous les u_i, pour $1 \leq i \leq n-1$. Pour définir une meilleure méthode, al-Halabī part d'abord de l'expression

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

avec

$$\binom{n}{n+r} = 0 \quad ; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

Il définit ensuite plusieurs «éventualités combinables», avec les règles de calcul correspondantes. C'est ainsi qu'on a

---

(13) *Ibid.*, f° 70[r].

(14) *Ibid.*, f° 7o[r] - 71[v].

1° La matière (*al-mādda*)(15) des éventualités de la $k^{\text{ième}}$ espèce, c'est-à-dire les combinaisons sans répétition données par la formule précédente

$$\binom{n}{k}.$$

2° La matière et la forme (*majmūʿ al-mādda wa-al-sūra*)(16) des éventualités de la $k^{\text{ième}}$ espèce, c'est-à-dire les arrangements sans répétition

$$A_n^k = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3° La forme (*al-sūra*)(17) des éventualités de la $k^{\text{ième}}$ espèce: il suffit de soustraire de la matière et la forme (2°) la matière.

$$k!\binom{n}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k}(k!-1).$$

4° La forme des éventualités, indépendamment de l'espèce, c'est-à-dire les permutations de n objets, soit

$$n! = n\,(n-1)\,...\,1.$$

5° La matière, la forme et la répétition des éventualités de la $k^{\text{ième}}$ espèce(18), c'est-à-dire les arrangements avec répétition de n objets pris k à k, soit n^k.

Notons que le lexique technique de la langue de l'analyse combinatoire qu'emploie al-Halabī dans ce traité est un composé de termes déjà employés par al-Tūsī (*tarkība*), de termes qui lui sont propres, comme *ihtimālāt* (éventualité), *tikrār* (répétition), mais aussi d'emprunts à la langue aristotélicienne, comme *mādda* (matière) et *sūra* (forme). Ces deux termes lui imposent du reste d'introduire des problèmes étrangers à son sujet, voire superflus dans ce contexte, et en tout cas préjudiciables à la clarté de l'exposé: il se demande par exemple si l'on peut séparer matière et forme.

Une fois ces règles posées, al-Halabī écrit: «Pour déterminer les éventualités matérielles (*al-ihtimālāt al-māddiyya*) (c'est-à-dire les combinaisons sans répétition), il y a une autre méthode qui a été mentionnée pour déterminer les Intellects Accidentels (*al-ʿuqū1 al-ʿaradiyya*)». C'est alors qu'il intègre le texte d'al-Tūsī, tantôt *in verbis*, tantôt en développant le calcul. Ainsi il trace le triangle arithmétique

(15) *Ibid.*, f° 71v.
(16) *Ibid.*, f° 72r.
(17) *Ibid.*, f° 72v - 73r.
(18) *Ibid.*, f° 73v - 74r.

jusqu'à 12, et somme les éléments de la diagonale, qu'il nomme «combinaisons simples» (*al-ihtimālāt al-basīta*), pour obtenir le nombre 4095 mentionné par al-Tūsī. Il nomme combinaisons composées (*al-ihtimālāt al-murakkaba*)[19]

$$(**)\qquad \left(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\right)$$

pour m = 4, n = 12, et montre que l'expression (*) est la somme des combinaisons simples et des combinaisons composées. C'est-à-dire, on a

$$(***)\quad \begin{cases} \sum_{p=1}^{m+n}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}+\left(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\right) \\ =\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}+\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\right). \end{cases}$$

Quand on retranche 1 des deux côtés, on obtient

$$\sum_{p=1}^{m+n}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}\right)=\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\right),$$

d'où, à partir de l'équivalence avec la formule (*)

$$2^{m+n} = 2^m.2^n.$$

AI-Halabī procède encore à d'autres calculs sur les données fournies par al-Tūsī, et se livre à des réflexions sur le texte de son prédécesseur. Celles-ci portent toutes sur les propriétés combinatoires. On est bien loin du problème de l'émanation de la multiplicité à partir de l'Un, dont il ne reste qu'un pâle souvenir: déjà estompé chez al-Tūsī, le contenu ontologique s'évanouit complètement dans ce traité d'analyse combinatoire, pour ne plus laisser que les méthodes et les résultats nécessaires ou utiles au corps de ce dernier. Si donc l'allure «axiomatique» de la doctrine d'Ibn Sīnā, et un penchant vers une ontologie formelle, ont rendu concevable à al-Tūsī l'espoir d'une solution mathématique de ce problème métaphysique, cette solution s'est trouvée elle-même intégrée ensuite aux travaux mathématiques, indépendamment du problème métaphysique qu'elle a pu susciter. Ceci était possible dans la mesure où les êtres de la combinatoire peuvent être des Intellects ou des objets quelconques, à condition seulement qu'ils soient séparés et d'un nombre aussi grand que l'on veut, mais toujours fini.

D'Ibn Sīnā à al-Halabī, on vient d'assister à l'évanouissement du contenu ontologique d'une doctrine, au profit des méthodes combinatoires,

---

(19) *Ibid.*, f° 81ʳ.

dont pourtant l'intervention était initialement au service de cette ontologie.

Unificateur de deux courants, séparés, de la recherche -celui des linguistes et celui des mathématiciens- l'acte d'al-Tūsī est fondateur de ce mouvement, et, de ce fait, de l'analyse combinatoire. Bien que mathématicien de second ordre, al-Halabī a assuré au chapitre une existence autonome, en lui consacrant un traité et en lui attribuant un nom de baptême. Mais, entre al- Tūsī et al-Halabi, il y en a bien d'autres, qui semblent avoir été eux aussi dans la mouvance d'al-Tūsī; je pense en particulier à al-Fārisī et à Ibn al-Bannā'[20].

Cet exemple, comme quelques autres d'ailleurs, témoigne de la part qui revient à la philosophie des mathématiques dans l'Islam classique. Il montre aussi que les mathématiques jouaient un rôle effectif en philosophie -ce qui ne surprend guère- mais, d'autre part, que le rôle de la philosophie dans le progrès de cette branche des mathématiques n'est pas moins effectif.

Historiens des sciences, nous ne pouvons tourner le dos à l'histoire de la philosophie; mais, historiens de la philosophie islamique, il nous serait fatal d'ignorer le rôle des nouveaux savoirs.

---

[20] R. Rashed, "Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés", dans *Entre arithmétique et algèbre*. *Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris, Les Belles Lettres, 1984, pp. 259 - 299.