АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 37 1991 Вып. 1

УДК 53.01+551.510:534.222.1

А. Н. Котюсов, Б. Е. Немцов

АКУСТИЧЕСКИЙ «ЛАЗЕР»

Исследуются звуковые колебания в резонаторе Гельмгольца, заполненном пересыщенным паром. При этом процесс конденсации идет более интенсивно, чем процесс испарения и в системе выделяется энергия, часть которой расходуется на усиление акустических колебаний. Получено нелинейное интегродифференциальное уравнение, учитывающее процессы конденсации и теплопередачи от очагов конденсации в газе. Анализ приближенного решения показывает, что в резонаторе формируются стационарные колебания с амплитудой и частотой, зависящими от параметров резонатора и заполняющей его среды. Обсуждается возможность экспериментальной проверки изучаемого эффекта, приводятся оценки уровня давления в генерируемой волне.

В работах [1, 2] был предложен и обсуждался когерентный механизм генерации звука при конденсации пара. Эффект усиления основан на том, что в пересыщенном паре, когда конденсация идет более интенсивно, чем испарение, происходит выделение тепла. Часть выделяющейся энергии в определенных условиях расходуется на генерацию звука. Был предложен следующий механизм генерации акустических колебаний. В области, где возросла плотность воздуха, увеличивается концентрация капель (очагов конденсации), поскольку в низкочастотном приближении капли «вморожены» в газ. Это означает, что в областях сжатия наряду с адиабатическим нагревом происходит дополнительный нагрев, обусловленный явлением конденсации. Поскольку звуковые волны являются квазиадиабатическими, т. е. $T\sim\rho^{\gamma-1}$ (T — температура газа, ρ — плотность, γ — показатель адиабаты), то дополнительный нагрев вызывает дополнительный рост плотности и т. д. При этом для возникновения неустойчивости необходима «инверсная заселенность», т. е. такие условия, при которых плотность пара ρ_v превышает плотность насыщенных паров ρ^*. В естественных условиях инверсия может возникнуть при перемещении пара с нагретой поверхности океанов в более холодную область. Очевидно, что инверсия может быть создана и в лабораторных условиях аналогичным образом, например, при впрыскивании горячего пара в охлажденную камеру.

Для экспериментальной проверки рассматриваемого в [1, 2] эффекта, а также для создания мощного генератора звуковых волн может быть использован резонатор Гельмгольца (РГ), заполненный пересыщенным паром.

Резонатор Гельмгольца [3, 4] состоит из сосуда, снабженного горлышком — узким отростком, через которое сосуд сообщается с окружающей средой. При перемещении среды, заполняющей горлышко, в одну или другую сторону среда в сосуде испытывает сжатия или разрежения, и давление в ней изменяется. На открытом же конце горлышка давление все время остается неизменным (атмосферным — для РГ в воздухе). Если теперь РГ заполнить пересыщенным паром, то при колебаниях внутри резонатора будет происходить конденсация и усиление акустических колебаний. Очевидно, что увеличение амплитуды волны должно ограничиваться нелинейными механизмами. Различные механизмы нелинейности, возникающие при колебаниях в РГ, подробно изучены в работах [5–9]. Уже обычная гидродинамическая нелинейность (если она достаточно велика) может привести к стабилизации и установлению стационарного режима колебаний в резонаторе, поскольку эта нелинейность обогащает спектр более высокими частотами, которые являются устойчивыми [2].

В работе исследуются звуковые колебания в РГ, заполненном пересыщенным паром. Получено нелинейное интегродифференциальное уравнение, учитывающее процессы конденсации и теплопередачи от очагов конденсации к газу. Найденное методом Ван дер Поля приближенное решение показывает, что нелинейность приводит к формированию в резонаторе стационарных колебаний с амплитудой и частотой, зависящими от параметров резонатора и среды его заполняющей. Обсуждаются также возможности экспериментальной проверки изучаемого эффекта и приводятся оценки уровня давления в генерируемой волне.

Нелинейное уравнение для колебаний среды в РГ было получено в [7, 8]:

$$\rho l\ddot{x} + \frac{\rho}{2\xi^2}|\dot{x}|\dot{x} + p_2 = p_1. \qquad (1)$$

Здесь x – амплитуда колебаний газа в горле резонатора, p_1 – давление в звуковой волне на свободном конце резонатора (здесь $p_1=0$), p_2 – давление в звуковой волне внутри резонатора, l – длина горла резонатора, $\xi \sim 0{,}61$, ρ – плотность среды, заполняющей резонатор. Если резонатор заполнен пересыщенным паром, необходимо рассмотрение трехфазной среды, состоящей из газа (воздуха), пара и капель. В этом случае плотность среды запишется в виде $\rho=\rho_0+\rho_w\alpha_0+\rho_v$, где ρ_0, ρ_w, ρ_v – плотности газа, воды и пара, $\alpha_0={}^4/_3\pi r^3 n$ – удельный объем капель, n, r – концентрация и радиус капель. В обычных условиях $\alpha\rho_w+\rho_v \ll \rho_0$, поэтому $\rho \approx \rho_0$.

Звуковое давление внутри резонатора может быть представлено в виде суммы [3, 7, 8] : $p_2=p_0+p_L$, где

$$p_0=\tilde{\rho}c_s^2+\tilde{\rho}^2\frac{\gamma-1}{2\rho}c_s^2, \quad \tilde{\rho}=\rho_0\frac{S_x}{V}. \qquad (2)$$

Здесь S – площадь сечения горла, c_s – скорость звука в воздухе, V – объем резонатора, $\tilde{\rho}$ – возмущения плотности воздуха, а p_L представляет собой некоторое дополнительное давление, создаваемое паром и процессами испарения и конденсации.

Чтобы получить замкнутое уравнение относительно x, необходимо связать p_L с $\tilde{\rho}$. Будем исходить из уравнений, выражающих законы сохранения энергии в системе газ – пар – капли [1, 2, 10]. При рассмотрении звуковых колебаний достаточно низкой частоты можно считать, что капли полностью увлекаются газовым потоком

$$(\rho_0 c_0+\rho_v c_v)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}+4\pi r n\varkappa(T_d-T)-Q, \qquad (3)$$

$$\rho_w c_w V_0\frac{\partial T_d}{\partial t}=4\pi r\varkappa(T-T_d)+L\frac{dm}{dt}. \qquad (4)$$

Здесь $V_0={}^4/_3\pi r^3$ – объем капли, p – давление в среде, c_0, c_v, c_w – удельные теплоемкости газа, пара и воды при постоянном давлении, $\varkappa$ – теплопроводность газа, L – скрытая теплота конденсации, T, T_d – температуры газа и капель, m – масса капель, Q описывает охлаждение газовой подсистемы из-за взаимодействия с термостатом.

Уравнения (3), (4) следует дополнить законами роста капель, сохранения их числа и уравнениями неразрывности паровой и газовой компонент:

$$dm/dt=4\pi rD(\rho_v-\rho^*(T_d)), \tag{5}$$

$$\partial n/\partial t+n\,\mathrm{div}\,v=0, \tag{6}$$

$$\partial\rho_v/\partial t+\rho_v\partial v/\partial x=-n\,dm/dt+q_0, \tag{7}$$

$$\partial\rho/\partial t+\rho\partial v/\partial x+v\partial\rho/\partial x=0, \tag{8}$$

где D — коэффициент молекулярной диффузии, v — характерная скорость газа в звуковой волне, ρ^* — плотность насыщенных паров. В правой части (7) первое слагаемое описывает исчезновение пара при конденсации, второе есть источник, поддерживающий стационарную плотность пара.

Линеаризуя относительно невозмущенного состояния систему (3) — (8), можно получить (подробнее см. [1]):

$$p_L=(\gamma-1)\left[L\left(\frac{\rho_v}{\rho}\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_v\right)-\rho_w c_w\alpha_0\tilde{T}_d\right]. \tag{9}$$

Считая возмущенные значения зависящими от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, для фурье-образа p_L будем иметь

$$p_L=\frac{\tilde{\rho}}{\rho}(\gamma-1)\Bigg[-i\rho_w c_w\alpha_0\frac{\beta T(\gamma-1)}{\omega+i\beta(1+q)}+$$

$$+iL\frac{(i\omega\rho_v+\sigma(\rho_v-\rho^*))(\omega+i\beta(1+q))-i\sigma\beta T\rho^{*\prime}(\gamma-1)}{(\omega+i\sigma)(\omega+i\beta)+i\omega q\beta}\Bigg]. \tag{10}$$

Здесь

$$\beta=3\varkappa/\rho_w c_w r^2 \tag{11}$$

— частота релаксации температуры капли вследствие конденсации,

$$\sigma=4\pi rDn \tag{12}$$

— частота релаксации пара вследствие конденсации, $\rho^{*\prime}=d\rho^*/dT_d$, $q=DL\rho^{*\prime}/\varkappa$. Совершая в (10) обратное фурье-преобразование в приближении $\sigma\ll\beta$, получаем искомую связь

$$p_L(t)=\theta_1 c_s^2\int\limits_{-\infty}^{t}\tilde{\rho}(t')\exp\left\{-\frac{\sigma(t-t')}{1+q}\right\}dt'-$$

$$-\theta_2 c_s^2\int\limits_{-\infty}^{t}\tilde{\rho}(t')\exp\{-\beta(1+q)(t-t')\}dt', \tag{13}$$

$$\theta_1=\frac{L\sigma(\gamma-1)}{\rho c_s^2}\,\frac{\rho_v+(\rho_v-\rho^*)(1+q)-T\rho^{*\prime}(\gamma-1)}{1+q}, \tag{14}$$

$$\theta_2=\frac{4\pi r\varkappa nT(\gamma-1)^2}{\rho c_s^2(1+q)}. \tag{15}$$

Подстановка (15), (2) в (1) дает

$$\ddot{x}+\frac{1}{2\xi^2 l}|\dot{x}|\dot{x}+\omega_0^2x+\omega_0^2\frac{S(\gamma-1)}{2V}x^2+$$

$$+\omega_0^2\left\{\theta_1\int\limits_{-\infty}^{t}x(t')\exp\left[-\frac{\sigma(t-t')}{1+q}\right]dt'-\right.$$

$$-\theta_2 \int\limits_{-\infty}^{t} x(t')\exp[-\beta(1+q)(t-t')]dt' \Bigg\} = 0, \tag{16}$$

где $\omega_0^2 = c_s^2 S/(lV)$ — собственная частота резонатора. Уравнение (16) является основным при исследовании акустических колебаний в РГ, содержащем пересыщенный пар.

Переходя к безразмерной амплитуде $U = x/l$ и безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, а также вводя новые обозначения

$$\begin{gathered} A_0 = 1/2\xi^2, \quad c = \theta_1/\omega_0, \quad d = \theta_2/\omega_0, \\ a = \frac{\sigma}{\omega_0(1+q)}, \quad b = \frac{\beta(1+q)}{\omega_0}, \quad \lambda = \frac{Sl}{2V}(\gamma-1), \end{gathered} \tag{17}$$

уравнение (16) запишем в виде

$$\frac{d^2U}{d\tau^2} + U = -A_0 \left|\frac{dU}{d\tau}\right| \frac{dU}{d\tau} - \lambda U^2 - c\int\limits_{-\infty}^{\tau} U(\tau')\exp\{-a(\tau-\tau')\}d\tau' +$$

$$+ d\int\limits_{-\infty}^{\tau} U(\tau')\exp\{-b(\tau-\tau')\}d\tau'. \tag{18}$$

Уравнение (18) имеет интегродифференциальный вид и найти аналитическое решение в общем случае невозможно. Однако оно может быть решено приближенно с помощью известного в теории колебаний метода Ван дер Поля [11].

Решение (18) ищем в виде $U = A(\tau)\cos[\tau + \varphi(\tau)]$. Полагая, что члены, стоящие в правой части, малы по сравнению с членами левой части уравнения (18), находим амплитуду $A(\tau)$ и дополнительную фазу $\varphi(\tau)$ из дифференциальных уравнений первого порядка [11]:

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(A\cos\vartheta, -A\sin\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta, \tag{19}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{2\pi A}\int\limits_0^{2\pi} f(A\cos\vartheta, -A\sin\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta, \tag{20}$$

где

$$f(A\cos\vartheta, -A\sin\vartheta) = -A_0A^2|\sin\vartheta|\sin\vartheta + \lambda A^2\cos^2\vartheta +$$

$$+ c\int\limits_{-\infty}^{\vartheta} A\cos\vartheta' \exp\{-a(\vartheta-\vartheta')\}d\vartheta' - d\int\limits_{-\infty}^{\vartheta} A\cos\vartheta' \exp\{-b(\vartheta-\vartheta')\}d\vartheta'. \tag{21}$$

Используя тот факт, что A, φ — медленные функции τ, можно провести интегрирование в (19)—(21) и тогда для амплитуды колебаний получаем следующее уравнение:

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{A}{2\pi}\left(-\frac{8}{3}A_0A + \frac{\pi c}{1+a^2} - \frac{\pi d}{1+b^2}\right). \tag{22}$$

В случае $\dfrac{c}{1+a^2} - \dfrac{d}{1+b^2} < 0$ уравнение (22) имеет единственное состояние равновесия $A=0$, которое является устойчивым. Это означает, что возникшие в РГ колебания затухают. Если же

$$c/1+a^2-d/1+b^2>0, \tag{23}$$

т. е. два состояния равновесия: $A_1=0$ и $A_2=3\pi/8A_0(c/1+a^2-d/1+b^2)$. Исследуя эти состояния равновесия на устойчивость, получим, что состояние с амплитудой A_1 — неустойчиво, а с амплитудой A_2 — устойчиво. Это означает, что уравнение (18) имеет периодическое решение типа предельного цикла. Таким образом, становится ясно, что для возбуждения в резонаторе незатухающих колебаний необходимо выполнение соотношения (23), которое в точности совпадает с полученным в [2] критерием появления стационарных волн. При детальном рассмотрении (23) представляет собой требование пересыщенности пара [1, 2]. Общий вид решения (18) записывается в итоге следующим образом:

$$U=\frac{3\pi}{8A_0}\left(\frac{c}{1+a^2}-\frac{d}{1+b^2}\right)\cos\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{1+a^2}-\frac{bd}{1+b^2}\right)\right]\tau. \tag{24}$$

Условия применимости метода Ван дер Поля в данной задаче

$$c/1+a^2-d/1+b^2\ll 1, \quad ac/1+a^2-bd/1+b^2\ll 1, \tag{25}$$

как будет видно ниже, хорошо реализуются в эксперименте.

Переходя в (24) к размерным величинам, с учетом равенства (2) для давления в звуковой волне получим

$$\tilde{p}=\rho c_s^2\frac{lS}{V}\frac{3\pi}{8}\left[\frac{\theta_1\omega_0}{\omega_0^2+\sigma^2(1+q)^{-2}}-\frac{\theta_2\omega_0}{\omega_0^2+\beta^2(1+q)^2}\right]\times$$
$$\times\cos\omega_0\left\{1+\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma\theta_1(1+q)^{-1}}{\omega_0^2+\sigma^2(1+q)^{-2}}-\frac{\beta\theta_2(1+q)}{\omega_0^2+\beta^2(1+q)^2}\right]\right\}\tau. \tag{26}$$

Из полученного решения видно, что при создании в РГ неравновесной среды возможна генерация периодических колебаний с амплитудой и частотой, зависящими как от геометрии резонатора, так и от параметров заполняющей его среды. Уравнение (18) было также исследовано методами численного счета. Полученное при этом решение с большой точностью совпадает с найденным приближенным аналитическим решением.

Можно предложить несколько способов экспериментальной проверки рассматриваемого эффекта. Один из них, например, постоянное впрыскивание в охлажденную камеру (РГ) горячего водяного пара. Однако этот способ неудобен тем, что требует дополнительного отверстия для впрыскивания пара, что существенно отражается на параметрах генерируемой волны.

Другой способ, более приемлемый на наш взгляд, может быть реализован следующим образом. На дно широкого и плоского резонатора наливается вода, температура которой с помощью дополнительного подогрева поддерживается сравнительно высокой ($T_1\sim 80°$ С). Рабочая же часть резонатора при этом охлаждается до низких температур ($T_2\sim 0°$ С). Нагрев жидкости и охлаждение рабочей камеры производится постоянно и поэтому состояние термодинамического равновесия не достигается. Горячий пар, поднимаясь с поверхности жидкости, попадает в холодную область, становится пересыщенным и начинает конденсироваться. В этом случае оказывается возможной генерация звуковых колебаний.

Оценим численное значение давления в звуковой волне, возбуждаемой резонатором. При концентрации и радиусе капель $n=2\cdot 10^2$ см$^{-3}$, $r=5\cdot 10^{-4}$ см, температуре газа в резонаторе $T_2=0°$ С, плотности пара $\rho_v=2\cdot 10^{-4}$ г/см^3 (плотность пара при $T_1=80°$ С) находим: $\theta_1\approx 0{,}3$ с$^{-1}$, $\theta_2\approx 0{,}1$ с$^{-}$, $\sigma\approx 0{,}3$ с$^{-1}$, $\beta\approx 1100$ с$^{-1}$. Тогда для резонатора с размерами $V=2\cdot 10^5$ см^3, $l=10$ см,

$S=20$ см давление в звуковой волне с частотой $\omega_0=100$ Гц будет равно $p\sim 0{,}3$ Па, что представляет собой достаточно малую величину. Из приведенных здесь вычислений видно, что на практике выполняются соотношения $\beta\gg\omega_0, \theta_2$ и в этом случае выражение для уровня давления в волне может быть упрощено: $|p|\approx \rho c_s^2 \frac{lS}{V}\frac{\theta_1\omega_0}{\omega_0^2+\sigma^2(1+q)^{-2}}$, откуда видно, что максимальный уровень давления в волне достигается на частотах $\omega_0\sim\sigma$. Однако столь низкие частоты возможны либо в резонаторах с очень длинным горлом, либо с очень большим объемом камеры, что технически весьма громоздко. Поэтому для уменьшения ω_0 можно воспользоваться другим способом. Так, если в горле резонатора движется не воздух, а среда с другой плотностью $\rho_в$, то выражение для собственной частоты резонатора запишется (как это видно из (1), (2)) в виде $\omega_0^2=\frac{\rho_0}{\rho_в}\frac{c_s^2S}{lV}$. Если в горле совершает колебания вода, то собственная частота уменьшается в $\sqrt{\rho_в/\rho}\sim 30$ раз. В этом случае для резонатора с параметрами $V=2\cdot 10^5$ см^3, $l=50$ см, $S=40$ см^2, $\theta_1=0{,}2$ с$^{-1}$, $\omega_0=2$ Гц получим давление в звуковой волне $p\sim 100$ Па. Вообще говоря, для уменьшения резонансной частоты можно в горло резонатора помещать любое вещество с плотностью, превышающей ρ_0 (например, металлический поршень, свободно перемещающийся под действием перепадов давления).

Для успешной реализации эксперимента необходимо, чтобы пар, поднимающийся с поверхности жидкости, не конденсировался в узком слое над жидкостью, а занимал весь объем резонатора. Характерный масштаб исчезновения пара за счет конденсации Δz можно легко получить из стационарного уравнения непрерывности для паровой компоненты [12]

$$v\frac{\partial\rho_v}{\partial z}=-\sigma(\rho_v-\rho^*), \qquad (27)$$

откуда $\Delta z\sim v/\sigma$. При скорости восходящих потоков пара $v\sim 10$ см/с и $\sigma\sim 0{,}2$ с$^{-1}$ получим $\Delta z\sim 50$ см, что является вполне удовлетворительной величиной для экспериментальных исследований в резонаторах с приведенными выше размерами. Время развития неустойчивости, определяющее время стабилизации колебаний в резонаторе, $\theta_1\sim 5$ с.

Приведенные оценки показывают, что предложенный механизм генерации звуковых волн может быть весьма эффективен в лабораторных условиях и может использоваться для генерации мощных звуковых колебаний.

В заключение авторы выражают благодарность Кузнецовой Е. Ю. за выполненный ею численный счет, а также полезные советы в ходе выполнения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Немцов Б. Е.* Когерентный механизм генерации звука при конденсации пара // Препринт № 283. Горький: НИРФИ, 1989. 15 с.
2. *Немцов Б. Е.* Звук в пересыщенном паре // Препринт № 296. Горький: НИРФИ, 1990. 14 с.
3. *Исакович М. А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 495 с.
4. *Ingard U.* On the theory and design of acoustic resonators // J. Acoust. Soc. Amer. 1953. V. 25. № 6. P. 1037–1061.
5. *Thurston G. B., Hargrove L. E., Cook B. D.* Nonlinear properties of circular orifices // J. Acoust. Soc. Amer. 1957. V. 29. № 9. P. 992–1000.
6. *Ingard U.* Acoustic nonlinearity of an orifice // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 42. № 1. P. 6–18.
7. *Cummings A., Eversman W.* High-amplitude acoustic transmission through duct terminations. Theory // J. Sound. Vibr. 1983. V. 91. P. 503–518.

8. *Cummings A.* Transient and multiple frequency sound transmission through perforated plates at high amplitude // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 79. № 4. P. 942–951.
9. *Davidson G. A.* Propagation of audible sound through air-water foqs // J. Acoust. Soc. Amer. 1977. V. 62. № 3. P. 497–502.
10. *Rong-Jue-Wei. Jun-ru-Wu.* Absorption of sound in water fog // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70. № 5. P. 1213–1220.
11. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
12. *Хргиан А. Х.* Физика атмосферы. Т. 2. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 319 с.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 03.05.90

A. N. Kotyusov, S. E. Nemtsov

ACOUSTIC «LASER»

Sound vibrations in a Helmholtz resonator filled by supersaturated vapour are investigated. The condensation process is more intensive then the vaporation one and so in the system an energy liberates, part of which expenses on the sound vibrations amplification. The nonlinear integro – differential equation, which takes into account the condensation processes and the heat transfer from points of the condensation to a gas, is obained. On the basis of the approximate solution it is shown, that the stationary vibrations form in the resonator and the amplitude and frequency of these vibrations depend on the parameters of the resonator and medium filled it. The possibility of the experimental verification of the effect mentioned above is discussed and the estimations of the pressure level in the generated wave are cited.