

# LA Recherche

L'actualité des sciences

MATHÉMATIQUES

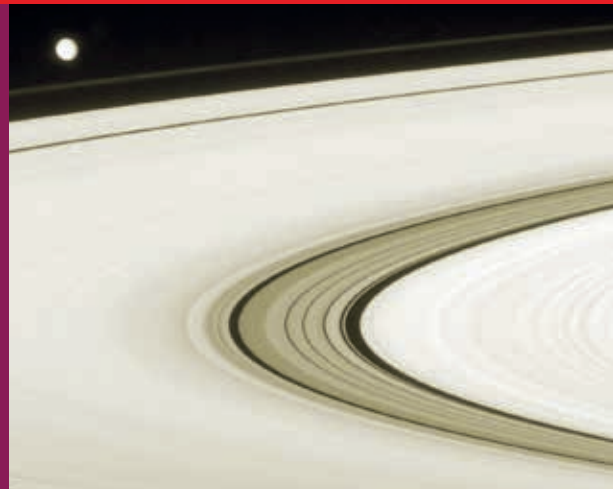
# LE GÉNIE D'ALEXANDRE GROTHENDIECK



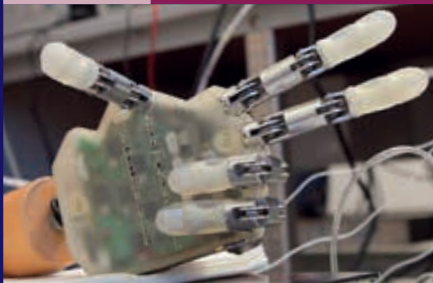
*Pourquoi il inspire les mathématiciens du XXI<sup>e</sup> siècle*

ASTRONOMIE

# Saturne, ses satellites et ses anneaux



# Une prothèse qui redonne le sens du toucher





# 1 • Une vie que l'on n'efface pas

Le mathématicien le plus génial de la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle, en grande partie autodidacte, était aussi le plus fantasque. Récit d'un parcours hors norme.

PAR Philippe Douroux, journaliste.

Pour respecter sa volonté d'effacement, il faudrait ne pas publier cet article. Ou l'imprimer avec de l'encre sympathique, pour raconter son histoire sans qu'elle soit lisible. Alexandre Grothendieck a réussi la performance d'être à la fois l'un des plus grands mathématiciens et le plus effacé de tous. Enfant, ballotté dans le monde incertain des années 1930, mathématicien génial, écologiste radical au début des années 1970, ermite retiré du monde depuis bientôt vingt-trois ans, il a eu trois ou quatre vies successives depuis sa naissance le 28 mars 1928, à Berlin. Aujourd'hui, il vit reclus, au pied des Pyrénées, dans un village dont le nom doit rester secret pour respecter sa volonté.

Le petit Alexandre vient d'avoir 11 ans quand il retrouve ses parents à Nîmes après six ans de séparation. Son père, Alexandre Shapiro-Tanaroff, anarchiste russe, et Hanka Grothendieck, sa compagne allemande, viennent de repasser les Pyrénées avec ce qui reste de l'armée républicaine espagnole. Alors qu'il n'avait que 5 ans, ils l'avaient confié à un couple près de Hambourg, les Heydorn. C'était en 1933, et quand on était Juif, Russe et anarchiste

il ne faisait pas bon rester à Berlin. Alexandre et Hanka s'en étaient allés, sans s'embarasser de leur fils et de sa demi-sœur, pour travailler à l'avènement d'une société plus juste.

L'histoire ne devient certaine qu'à partir de 1939. Le 29 octobre, le commissariat central de Nîmes dresse une liste de quatorze Espagnols et d'un « réfugié russe », « anarchiste », « désignés pour être internés au camp de concentration du Vernet Ariège ». Alexandre, le père, sera ensuite transféré à Noé, en Haute-Garonne, avant d'être embarqué, le 14 août 1942, à bord du convoi 19 pour Auschwitz. La mère et son fils prennent, eux, la route du Rieucros, en Lozère, camp réservé aux femmes et à leurs enfants. Les gardiens du camp laissent passer le petit Grothendieck qui se rend chaque matin au lycée de Mende. Mais, les cours et les professeurs ne l'inspirent pas.

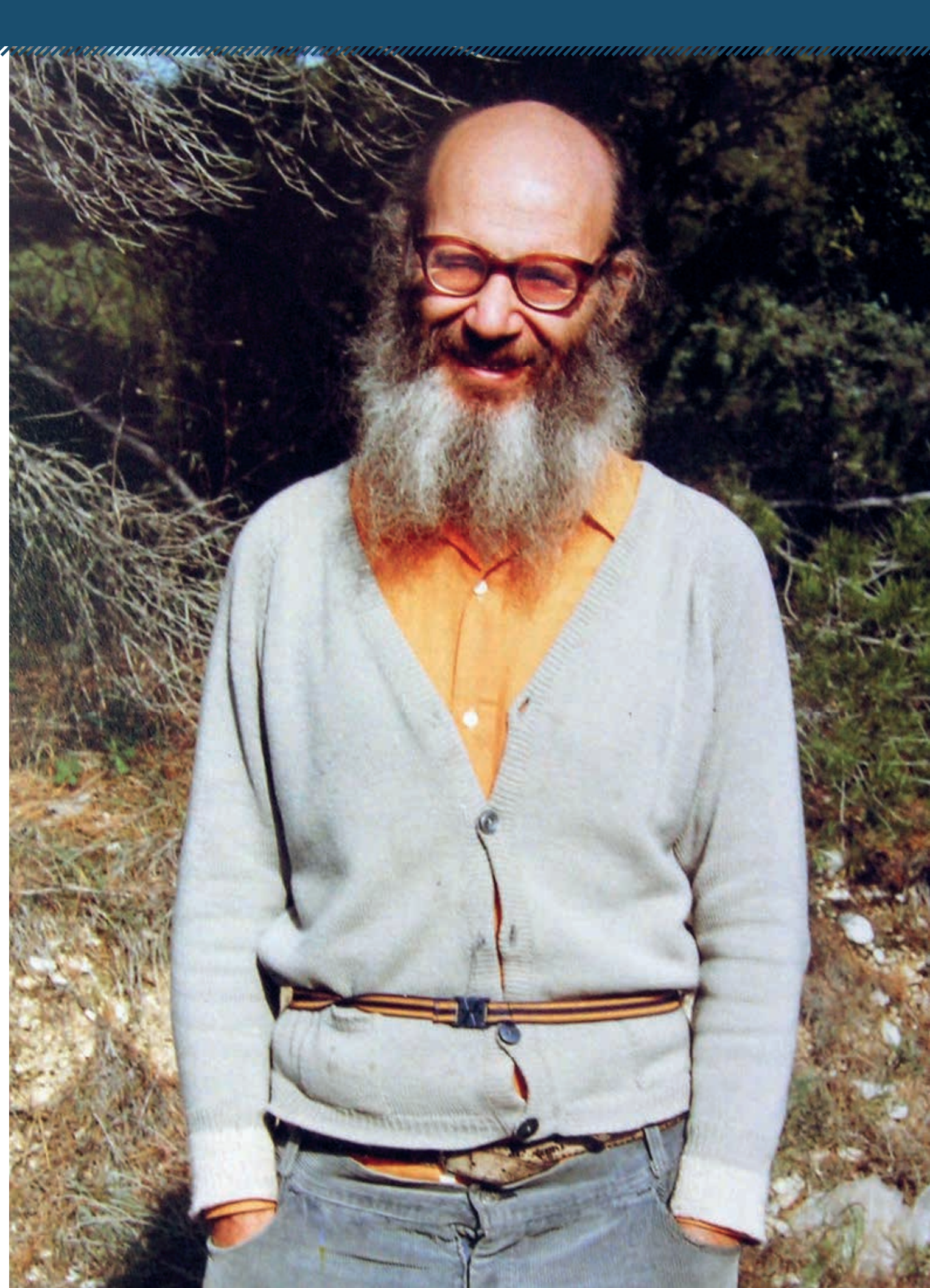
## Un énergumène plein de confiance.

L'intuition et le travail personnel se trouvent pour lui à l'origine de tout. Ainsi, quand il découvre qu'un lien stable existe entre le rayon d'un cercle et sa circonférence, il pense réaliser une découverte fondamentale. Un raisonnement erroné l'amène à déclarer que multiplier le rayon par  $2 \times 3$  donne la circonférence. En découvrant dans un livre que c'est un poil plus compliqué, que  $3$  s'appelle  $\pi$  et vaut  $3,14116$ , il met en doute la règle admise par tous.

Maria, une détenue l'amènera à réviser son jugement, mais il gardera une certitude : la confiance en soi, voilà la clé. « Cette confiance qu'un enfant peut avoir en ses propres lumières, en se fiant à ses facultés plutôt que de prendre pour argent comptant les choses apprises à l'école ou lues dans les livres, est une chose précieuse », écrit-il dans *Récoltes et Semailles*, long texte inédit rédigé dans les années 1980 [1].

Il passe ensuite trois années au collège Cévenol du Chambon-sur-Lignon, en Haute-Loire, où il obtient son baccalauréat, sans se faire remarquer. Puis, il atterrit à l'université de Montpellier, désert mathématique à l'époque. Là encore les cours l'inspirent peu. L'essentiel se joue ailleurs. Pendant trois ans il met au point une méthode pour calculer des volumes complexes, tels les nuages. >>>

© ERIKA IFANG



## L'essentiel

> ALEXANDRE GROTHENDIECK est considéré comme l'un des mathématiciens les plus importants de l'histoire.

> DE 1950 À 1970, il n'a fait que des mathématiques, produisant une œuvre considérable.

> PUIS, IL S'EST TOURNÉ vers l'écologie radicale, et peu à peu coupé du monde, jusqu'à interdire la publication et l'étude de ses travaux.



## Les dates clés

## 1928

Alexandre Raddatz naît le 28 mars à Berlin. Il est le fils d'Alexandre Shapiro-Tanaroff et de Henka Grothendieck. Sa mère divorce de Johannes Raddatz pour vivre avec le père de l'enfant.



© D.R.

## 1940

Le jeune Alexandre, devenu Grothendieck, et sa mère sont internés au camp de Rieucros, en Lozère. Son père est emprisonné au camp du Vernet, en Ariège, puis à Auschwitz où il meurt en 1942.

## 1948

À 20 ans, il obtient sa licence à Montpellier. À Paris, il rencontre le mathématicien Henri Cartan, qui l'oriente vers Laurent Schwartz et Jean Dieudonné, qui enseignent à Nancy.

## 1958

Il intègre l'Institut des hautes études scientifiques, fondé par le mathématicien et industriel Léon Motchane et basé à Bures-sur-Yvette.

## 1966

Lauréat de la médaille Fields, il proteste contre l'internement de deux écrivains russes en refusant de se rendre à Moscou pour recevoir son prix.

## 1970

Son engagement se radicalise. Il fonde le collectif «Survivre et vivre», qui milite pour la fin de la recherche scientifique, dont il pense que les bienfaits sont épuisés. À partir de 1973, il est professeur à l'université de Montpellier.

## 1988

Alexandre Grothendieck reçoit le prix Crafoord, gratifié de 1,4 million de francs. Il le refuse et prend sa retraite.

## 1991

Le mathématicien se retire dans un village pyrénéen. Il y vit en ermite, n'accordant aucun entretien et cessant de publier.

## 2010

Dans un mot daté du 3 janvier, il exprime son refus d'être publié après sa mort. Ses productions sont conservées par des amis qui ont pour mot d'ordre de ne pas les divulguer.

## Une vie que l'on n'efface pas

>>> Il parle d'intégration généralisée. Le Français Lebesgue l'avait déjà fait en 1902, mais Alexandre Grothendieck n'est pas allé chercher ces travaux dans la bibliothèque : il ne croit qu'en lui-même.

Un professeur se dit que le jeune homme vaut peut-être qu'on s'intéresse à lui. Sur sa recommandation, Alexandre Grothendieck rejoint le séminaire d'Henri Cartan à l'École normale supérieure, à Paris. Celui-ci l'accueille, mais confie rapidement à Laurent Schwartz et à Jean Dieudonné, alors à Nancy, l'énergumène qui l'apostrophe du fond de l'amphithéâtre comme s'il était son égal.

C'est là, en 1949, qu'Alexandre Grothendieck révèle sa nature. Première étape, une engueulade servie par Dieudonné qui découvre avec stupeur ses travaux : refaire ce qui a été fait, reconstruire Lebesgue, n'a aucun sens, « ce n'est pas comme cela que l'on travaille ! » Maintenant, s'il veut se pencher sur des questions laissées de côté par le tandem Schwartz-Dieudonné, il peut choisir celles qui l'inspirent et revenir quand il aura avancé.

**La leçon de l'élève.** Dans ses mémoires, Laurent Schwartz évoque « quatorze problèmes que nous n'avions pas su résoudre. Dieudonné lui proposa de réfléchir à certains d'entre eux qu'il choisirait. Nous ne le revîmes plus de quelques semaines. Lorsqu'il réapparut, il avait trouvé la solution de la moitié d'entre eux. [2] » Jean Dieudonné complète : « En moins d'un an, il avait résolu tous nos problèmes. [3] » L'élève fait la leçon à ses professeurs.

Quand, en 1953, il est temps de lui attribuer le titre de docteur, il faut choisir entre six travaux rédigés en l'espace de quatre années ! Le monde des mathématiciens le découvre au congrès mondial d'Édimbourg, en 1958. Sa mère vient de mourir d'une tuberculose jamais soignée, et lui refonde la géométrie algébrique. Pas moins. Tracez un cercle avec un compas vous faites de la géométrie, écri-

vez  $x^2 + y^2 = 1$ , vous devenez un algébriste. La géométrie montre, l'algèbre démontre.

Parce que chacun sent qu'il faut construire quelque chose autour de ce mathématicien aussi pur que ses maths, l'Institut des hautes études scientifiques (IHES) voit le jour. Les chercheurs n'ont aucune obligation de publier, pas de cours à donner. Seules contraintes : déjeuner à la cantine et prendre le thé ensemble. S'ils veulent tenir un séminaire, libre à eux.

À partir de 1958, le domaine du Bois-Marie, à Bures-sur-Yvette, dans l'Essonne, devient ainsi son domaine. Mais il n'y travaille pas seul. Les *Éléments de géométrie algébriques*, formidable cathédrale conceptuelle, doivent tout autant à Dieudonné qui, mettant sa propre carrière entre parenthèses, le rejoint à l'IHES. Premier décrypteur de l'écriture minuscule, il travaille le matin : après avoir dérouillé ses doigts au piano, il débrouille la pensée d'Alexandre Grothendieck.

Les élèves chargés de rédiger les *Séminaires de géométrie algébrique*, qui viennent compléter les *Éléments*, Michel Demazure, Luc Illusie, Michel Raynaud, Jean-Louis Verdier, ou Pierre Deligne, pour ne citer que les plus prestigieux, passent, eux, des après-midi à rédiger sous l'œil de celui que les uns ou les autres appellent encore affectueusement « mon maître ». Le thé, un dîner rapide et frugal et ils se remettent au travail jusqu'à ce que l'imminence du dernier train les ramenant à Paris sonne l'heure du retour et du repos. Alexandre Grothendieck prépare alors, seul, ses prochains séminaires du mardi après-midi.

Luc Illusie ne veut pas laisser vivre l'image de brouillons aussi profonds qu'impublishables. « Grothendieck était à la fois extrêmement pointilleux et non perfectionniste. Une fois qu'il était convaincu d'avoir "le bon point de vue", il laissait à d'autres le soin de vérifier certains "détails", consi-

dérant qu'il s'agissait de questions de routine », explique-t-il. Il faut imaginer le maître queux au milieu de sa brigade. Il signe les plats, mais laisse aux chefs de parties le soin de les réaliser.

Parallèlement, Alexandre Grothendieck correspond avec Jean-Pierre Serre, médaille Fields en 1954 et professeur au Collège de France deux ans plus tard. Formidable partie de ping-pong où l'on trouve les premières traces, en 1964, des « Motifs », que les géomètres algébristes considèrent comme le « cœur du cœur » d'une représentation de l'Univers, écrit-il dans *Récoltes et Semailles*.

**Des maths à la politique.** De 1950 à 1970, Alexandre Grothendieck fait des mathématiques, seulement des mathématiques. Pierre Cartier, son ami, mathématicien engagé comme il y avait à l'époque des écrivains engagés, se souvient : « Jusque-là, il me reprochait de faire autre chose, après il me reprochera de faire encore des maths. »

Alexandre Grothendieck découvre la politique au milieu des années 1960. En 1966, il refuse d'aller chercher sa médaille Fields à Moscou, où Andreï Siniaevski et Youli Daniel viennent d'être condamnés à cinq et sept ans de camp pour avoir publié des textes en Occident sans autorisation. L'année suivante, il passe trois semaines au Vietnam pour protester contre la guerre à outrance lancée par les États-Unis. Encore une année et il va à la rencontre des « Enragés » de mai 1968.

Il se rend à Orsay avec son ami Valentin Poenaru, pour défendre la recherche fondamentale et revient en se posant la question : faut-il arrêter la recherche ? Cela s'appelle une volte-face. En quelques mois, il change de vie. Il quitte l'IHES, qui a accepté qu'une part infime de son budget vienne du ministère de la Défense. Jean-Pierre Serre l'accueille au Collège de France, en 1970, comme invité, puisqu'il n'a pas encore la nationalité française (il reste apatride jusqu'en 1972), renouvelle la Chaire une fois comme la règle l'y autorise. Mais les deux hommes se fâchent, et Alexandre Grothendieck doit trouver un autre point de chute.

Quelques contorsions administratives, et il devient professeur à l'université de Montpellier, celle de ses débuts. Il y donne des cours et continue à faire des mathématiques, qui donneront lieu à des publications sporadiques prises en charge par d'autres, sur les « dérivateurs », ou sur les « dessins d'enfant ». Mais, il consacre l'essentiel de son temps à l'écologie radicale à travers le groupe Survivre et Vivre, dont le mode opératoire préfigure celui de Greenpeace pour les actions illégales, ou des Verts quand il s'agit de s'engueuler pour savoir comment changer la vie.

En août 1991, probablement déçu de ne pas être suivi, arrivé à l'âge de la retraite, Alexandre Grothendieck appelle son ancien élève Jean Malgoire. Il lui confie 20 000 pages de notes et de courriers et lui annonce qu'il quitte sa maison de Villecun, dans l'Hérault, pour un lieu qu'il souhaite tenir secret. Aujourd'hui, fâché avec ses voisins, il se fait livrer de quoi vivre ou survivre, mais a accepté l'électricité d'EDF pour s'éclairer. Les pompiers, les derniers à avoir pénétré dans son antre à l'occasion d'un départ de feu, lui ont expliqué que les kilogrammes de papiers – preuve qu'il continue d'écrire – et l'alambic avec lequel il s'est livré à la distillation faisaient mauvais ménage.

Que reste-t-il d'Alexandre Grothendieck ? Un héritage mathématique considérable et ces 20 000 pages de notes que personne n'a lues attentivement. Lui ne veut plus que ce travail soit publié ou même mis à la disposition de la communauté scientifique. Il l'a écrit dans un mot manuscrit daté du 3 janvier 2010, envoyé à Luc Illusie : « Si mes intentions d'auteur, clairement exprimées ici, devaient rester lettre morte, que la honte de ce mépris retombe sur les responsables des éditions illicites et sur les responsables des bibliothèques concernées. »

Un écriteau, posé dans la réglette où les mathématiciens déposent leurs craies au pied du tableau noir, précise, à l'attention des hommes ou des femmes de ménage, « Ne pas effacer ». Alexandre Grothendieck, nous ne voulons pas vous effacer, ni vous ni vos travaux. ■

[1] <http://tinyurl.com/recoltes-semailles-pdf>

[2] Laurent Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, 1997.

[3] Jean Dieudonné, in *The Grothendieck Festschrift*, vol. 1, Pierre Cartier et al. (dir.), Birkhäuser, 2006.

# 2 • La galaxie Grothendieck

Alexandre Grothendieck était le contraire d'un mathématicien isolé. Pendant sa période d'activité, il a échangé et collaboré avec un grand nombre de confrères. Aujourd'hui, ses élèves et ses héritiers poursuivent son œuvre.



## Prédécesseurs

Bien qu'il soit largement autodidacte, Alexandre Grothendieck n'a pas tout réinventé lui-même. En analyse fonctionnelle, les travaux de ses débuts se sont appuyés sur des idées de ses directeurs de thèse, Laurent Schwartz et Jean Dieudonné. En géométrie algébrique, sa topologie raffine celle qu'avait élaborée l'Américain Oscar Zariski dans les années 1950. Quant à son programme de refondation de la géométrie algébrique, il a pour schéma directeur des conjectures énoncées par André Weil en 1942.



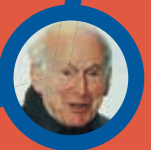
**OSCAR ZARISKI**  
1899 - 1986  
Prix Wolf 1981



**ANDRÉ WEIL**  
1906 - 1998  
Fondateur du groupe Bourbaki  
Prix Wolf 1979



**JEAN DIEUDONNÉ**  
1906 - 1992  
Fondateur du groupe Bourbaki



**LAURENT SCHWARTZ**  
1915 - 2002  
Membre du groupe Bourbaki  
Médaille Fields 1950



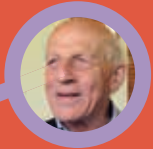
**CLAUDE CHEVALLEY**  
1909 - 1984  
Fondateur du groupe Bourbaki  
Fondateur de «Survivre et vivre»

## Contemporains

Jean-Pierre Serre, autre grande figure de la géométrie algébrique, a tant interagi avec Alexandre Grothendieck, notamment par une abondante correspondance, que l'on pourrait les mettre sur le même niveau. Claude Chevalley, de vingt ans son aîné, a été son seul véritable ami dans le milieu mathématique. Avec Pierre Samuel, ils ont fondé «Survivre et Vivre», groupe écologiste radical. Tous, ainsi que Pierre Cartier et d'autres, faisaient partie du groupe Bourbaki.



**JEAN-PIERRE SERRE**  
Né en 1926  
Membre du groupe Bourbaki  
Médaille Fields 1954  
Prix Wolf 2000  
Prix Abel 2003



**PIERRE CARTIER**  
Né en 1932  
Membre du groupe Bourbaki



**PIERRE SAMUEL**  
1921 - 2009  
Membre du groupe Bourbaki  
Fondateur de «Survivre et vivre»



**PIERRE DELIGNE**  
Né en 1944  
Médaille Fields 1978  
Prix Wolf 2008  
Prix Abel 2013



**MICHEL RAYNAUD**  
Né en 1938  
Membre du groupe Bourbaki



**MICHEL DEMAZURE**  
Né en 1937  
Membre du groupe Bourbaki



**DAVID MUMFORD**  
Né en 1937  
Médaille Fields 1974  
Prix Wolf 2008



**HEISUKE HIRONAKA**  
Né en 1931  
Médaille Fields 1970



**JOHN TATE**  
Né en 1925  
Membre du groupe Bourbaki  
Prix Wolf 2002  
Prix Abel 2010



**MICHAEL ARTIN**  
Né en 1934  
Prix Wolf 2013



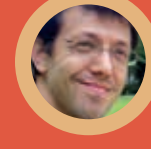
**VLADIMIR VOEVODSKY**  
Né en 1966  
Médaille Fields 2002



**LAURENT LAFFORGUE**  
Né en 1966  
Médaille Fields 2002



**ANDREW WILES**  
Né en 1953  
Prix Wolf 1995



**ASSAF NAOR**  
Né en 1975

## Mathématiciens d'ailleurs

Oscar Zariski, de l'université Harvard, aux États-Unis, a envoyé en séjour à l'IHES ses meilleurs élèves, tels David Mumford, Heisuke Hironaka ou Michaël Artin. Ce dernier a notamment contribué aux séminaires de géométrie algébrique. De nombreux mathématiciens étrangers ont également collaboré avec Alexandre Grothendieck. Le plus connu est sans doute John Tate, grand spécialiste de théorie algébrique des nombres, avec lequel il a entretenu une importante correspondance.

## Élèves

La société américaine de mathématique, qui dresse les généalogies intellectuelles des mathématiciens, recense 19 doctorats dirigés par Alexandre Grothendieck. Beaucoup de ces étudiants ont participé à la rédaction des *Séminaires de géométrie analytique*, issus des séances de l'IHES. En 1974, Pierre Deligne a démontré les conjectures de Weil, objectif que s'était fixé Alexandre Grothendieck dans son programme de refondation de la géométrie algébrique.

## Héritiers

En analyse fonctionnelle, les résultats d'Alexandre Grothendieck s'étendent en informatique théorique, grâce notamment aux travaux d'Assaf Naor, de l'institut Courant, aux États-Unis. La démonstration du théorème de Fermat par Andrew Wiles, de l'université de Princeton, aux États-Unis, est le fruit des méthodes qu'il a élaborées en géométrie algébrique. Laurent Lafforgue, de l'IHES, et Vladimir Voevodsky, de l'institut des études avancées de Princeton, poursuivent aussi le rêve d'une compréhension unifiée des mathématiques.

TEXTES : PHILIPPE PAJOT - PHOTOS : PRÉDÉCESSEURS DE HAUT EN BAS : © D.R.; IHES; CENTRE DE MATHÉMATIQUES 2000/ÉCOLE POLYTECHNIQUE; D.R. AU CENTRE ALEXANDRE GROTHENDIECK; © PROVIDED BY KONRAD JACOBS/MFO. CONTEMPORAINS DE GAUCHE À DROITE : © MFO; PATRICK IMBERT/COLLEGE DE FRANCE; D.R.; IHES. MATHÉMATIENS D'AILLEURS DE GAUCHE À DROITE : © D.R.; D.R.; EIRIK FURU BAARDSEN/NORWEGIAN ACADEMY OF SCIENCES AND LETTERS; MFO. ÉLÈVES DE HAUT EN BAS : © D.R.; KNUT FALCH/NORWEGIAN ACADEMY OF SCIENCES AND LETTERS; IHES; FREDÉRIC WOIRGARD/LOOKATSCIENCES. HÉRITIERS DE HAUT EN BAS : © VLADIMIR VOEVODSKY; IHES; PRINCETON UNIV.; ANNEMARIE PERL



# 3 • À la recherche de la généralité maximale

La période de pleine productivité mathématique d'Alexandre Grothendieck a duré à peine plus de vingt ans. Cela ne l'a pas empêché de laisser une trace indélébile. Il a en particulier révolutionné la géométrie algébrique.

PAR Philippe Pajot, journaliste.

**A**lexandre Grothendieck s'est retiré brusquement de la communauté mathématique en 1971. Aujourd'hui reclus dans un village des Pyrénées, c'est un vieil homme qui sort rarement de chez lui. Difficile d'imaginer que ce quasi-ermite vivant dans une maisonnette a révolutionné les mathématiques dans la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle.

Comment rendre justice à la manière dont ce génie a bouleversé les mathématiques ? « *Quand on voit, dans un rayonnage de bibliothèque, l'épaisseur des publications auxquelles il a contribué, on a du mal à croire qu'un seul homme a produit cette somme de travaux* », confie Jean-Pierre Serre, professeur honoraire au Collège de France, qui

a été son interlocuteur des années durant (lire « Jean-Pierre Serre : "Quand il s'est intéressé à la géométrie algébrique, j'ai été son interlocuteur naturel" », p. 37). C'est l'une des caractéristiques de l'homme : lorsqu'il était au cœur de la production mathématique, travailleur infatigable, quasi monomaniac, il était entièrement dévoué à celles-ci.

**Capacité d'abstraction.** Il a fait aussi preuve d'une capacité de généralisation et d'abstraction hors du commun, une aptitude d'aller d'emblée au plus général. « *Cette recherche de généralité maximale et le refus des exemples font sa force. Non pas qu'il méprisait les exemples, mais c'est qu'il n'avait pas de goût pour eux* », analyse Pierre Cartier, de l'Institut des hautes études scientifiques (IHES) (lire « Il voulait reprendre à la base le travail du groupe Bourbaki », ci-dessous).

Lorsqu'Alexandre Grothendieck cite ses contributions majeures aux mathématiques, dans *Récoltes et Semailles*, son autobiographie fleuve non publiée mais disponible en ligne, il en distingue douze, des « produits tensoriels topologiques » à la « théorie de Galois-Teichmüller », en passant par la « cohomologie cristalline ». Des termes évidemment sans signification pour ceux qui ne sont pas spécialistes de ces sujets. Pour commencer à comprendre ce qu'ils recouvrent, il faut accepter de consacrer plusieurs années à l'étude des mathématiques, et de ces théories en particulier. On peut toutefois en éclairer quelques morceaux choisis et présenter certaines de leurs connexions avec les mathématiques d'aujourd'hui.

## 1. L'analyse fonctionnelle

**A**u début des années 1950, quand Alexandre Grothendieck arrive à Nancy pour faire sa thèse avec Laurent Schwartz et Jean Dieudonné, il aborde l'analyse fonctionnelle. Ce domaine est une extension du calcul différentiel et intégral, qui s'intéresse aux dérivées\* et aux primitives\* des fonctions. Au lieu



Le séminaire de géométrie algébrique animé par Alexandre Grothendieck (debout au tableau) rassemblait (ici vers 1962) des étudiants brillants dont plusieurs reçurent par la suite la Médaille Fields. Jean Dieudonné (au premier rang près de la fenêtre), qui avait dirigé sa thèse, coordonnait les publications.

© ÉMILE BOUBAT/IHES

de considérer une fonction particulière (l'exponentielle par exemple), on étudie les opérations et les transformations que l'on peut faire subir à toutes les fonctions d'un certain type.

À cette époque, faire de l'analyse fonctionnelle revient à étudier des espaces où évoluent ces fonctions, les « espaces localement convexes ». Il s'agit d'espaces sur lesquels on peut définir une ou plusieurs normes (une manière de calculer une distance). Alexandre Grothendieck applique à ces espaces des constructions issues de la théorie des catégories, sorte de généralisation de la théorie des ensembles, qui a été inventée peu avant par les Américains Samuel Eilenberg et Saunders MacLane. Il est ainsi le premier à comprendre que

les méthodes algébriques issues des catégories pouvaient être utilisées dans cette branche, où l'on travaille habituellement de manière analytique.

**Produits tensoriels.** Après une thèse remarquée, étant apatride, il peine à trouver un poste permanent en France. Grâce à l'influence de Schwartz, il est invité à São Paulo, au Brésil, durant les années 1953 et 1954. La communauté mathématique brésilienne s'exprimant alors en français comme seconde langue, Alexandre Grothendieck n'a pas de difficulté à donner des cours et à échanger avec ses collègues. C'est là qu'il écrit le « Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques ». >>>

\***LA DÉRIVÉE**  
d'une fonction simple est la fonction qui indique la pente de sa courbe en tout point.

\***LA PRIMITIVE**  
d'une fonction simple est une fonction reliée à l'aire située sous la courbe.

## « Il voulait reprendre à la base le travail du groupe Bourbaki »



Pierre Cartier est professeur à l'IHES.

« Un jour, en 1953, Alexandre Grothendieck m'a dit qu'il lui semblait évident que nous serions intégrés un jour au groupe Bourbaki. Fondé en 1935 et baptisé du nom d'un personnage imaginaire, celui-ci rassemblait

les mathématiciens français les plus influents, dans le but de donner une description cohérente des mathématiques. Et, effectivement, nous y sommes entrés, à peu près au même moment, en 1955.

Pendant six années, il a été très actif. D'autant que ses nouveaux intérêts de géométrie algébrique entraient bien dans les préoccupations de Bourbaki. Nous étions un groupe avec des règles de

fonctionnement stricte – bien que non écrites –, mais nous respections les personnalités. Qu'Alexandre Grothendieck ne se plie pas à la discipline, nous y étions habitués.

Il a envoyé des rapports copieux que nous avons lus attentivement. Tous allaient dans le sens de la théorie des catégories, qui avait été inventée peu avant. Bien que nous soyons tous persuadés de l'importance des catégo-

ries, les réintroduire comme fondements des mathématiques aurait obligé à reprendre complètement de nombreux tomes déjà publiés par le groupe Bourbaki.

Alexandre Grothendieck était prêt à se lancer. Pas nous. En 1961, après une dispute prétexte avec André Weil, il a quitté le groupe et s'est exclusivement consacré à son équipe de l'IHES. ■ **Propos recueillis par Philippe Pajot**

### L'essentiel

> LES PREMIERS TRAVAUX d'Alexandre Grothendieck bouleversent le domaine de l'analyse fonctionnelle.

> À 27 ANS, il entame une nouvelle carrière en géométrie algébrique, domaine qu'il renouvelle grâce à un travail acharné.

> EN 1971, il cesse son activité de recherche, mais continue à écrire. Des milliers de pages restent à étudier.

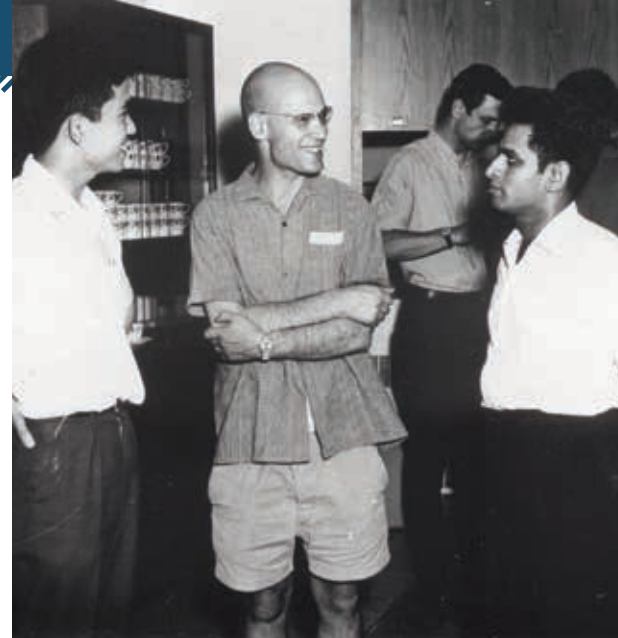


## À la recherche de la généralité maximale

» Ce « résumé » de 79 pages contient rien de moins que la construction de la théorie des espaces de Banach en dimension infinie. Dans la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle, une école polonaise autour de

Stephan Banach, mort en 1945, a étudié le cas particulier des espaces sur lesquels on peut définir une seule norme, baptisés depuis espaces de Banach. Alors que ces espaces étaient passés de mode, les mathématiciens s'intéressant plutôt au cas plus général des espaces topologiques dont les espaces de distribution sont un exemple central, Alexandre Grothendieck montre le rôle de brique de base que jouent les espaces de Banach. Ce faisant, il nage contre le courant dominant de l'époque.

Il donne son travail en 1953 à ses collègues brésiliens, qui ne le publient qu'en 1956. La diffusion de cet article, écrit en français dans une revue brésilienne, est faible. Il s'agit pourtant d'un article dense et profond, sur les inégalités dans les espaces métriques, qui alimente les recherches de toute une école depuis sa redécouverte à la fin des années 1960 (lire « Son premier travail a des débouchés inattendus en informatique théorique », p. 38). Cet oubli relatif résulte aussi du fait qu'Alexandre Grothendieck, considérant qu'il avait résolu la plupart des questions qui se posaient dans le domaine, se détourne de l'analyse fonctionnelle.



## 2. Premiers pas en géométrie algébrique

**A**près le Brésil, parenthèse américaine à l'université du Kansas en 1955. Il se tourne vers la géométrie algébrique. Pour cela il a un catalyseur, Jean-Pierre Serre, avec lequel il entreprend une correspondance qui durera plus de trente ans. Ce dernier vient d'étonner la communauté des mathématiciens par un article publié en 1954. Il est le premier à utiliser en géométrie algébrique la théorie des faisceaux inventée par Jean Leray dans le cadre différent de la topologie et de la géométrie différentielle. Les faisceaux sont une manière universelle de définir une structure locale sur un espace et d'en extraire des conséquences globales.

De retour à Paris en 1956, Alexandre Grothendieck obtient un poste au CNRS. Ses premiers pas en géométrie algébrique se traduisent par plusieurs articles, mais surtout par un coup d'éclat : une généralisation du théorème de Riemann-Roch. Sous sa forme classique, ce théorème du XIX<sup>e</sup> siècle portant sur les surfaces donne une relation entre les zéros et les pôles (les points où la fonction s'annule et ceux où elle est singulière) d'une fonction d'une variable complexe définie sur cette surface.

En 1954, le mathématicien allemand Friedrich Hirzebruch parvient à généraliser ce résultat en dimension supérieure. Il démontre un théorème de Riemann-Roch en dimension arbitraire pour des variétés algébriques (des espaces définis par des équations polynomiales) sur le corps des nombres complexes. La démonstration, qui occupe tout un livre, utilise des techniques sophistiquées et difficiles. Ce travail, qui répondait à une question posée depuis des décennies, semblait mettre un point final au problème. Tous les mathé-

En 1970, Alexandre Grothendieck participe à un séminaire de mathématiques à Montréal. C'est là qu'il lance, notamment avec son confrère Claude Chevalley, le groupe écologiste radical « Survivre », qui prend par la suite le nom de « Survivre et vivre ».

© PROVIDED BY KONRAD JACOBS/MFO

maticiens s'en seraient contentés. Pas Alexandre Grothendieck. Comme souvent lorsqu'il voulait comprendre une question, il ne lisait pas d'articles ou de livres, mais cherchait par lui-même.

**Relativité, souplesse et dévissage.** Il remplace l'énoncé de Hirzebruch par un énoncé plus général : alors qu'Hirzebruch considère une seule variété dans sa démonstration, considéré comme un objet unique et absolu, Alexandre Grothendieck considère d'emblée une famille de variétés, paramétrées par des paramètres continus. Cette idée de s'intéresser non pas à un objet absolu en lui-même, mais à ses variations, est une idée puissante qui sera baptisée relativité. Cela deviendra l'une de ses marques de fabrique.

« L'énoncé relatif étant plus souple, il se prête à une technique dite de « dévissage », consistant en une division du problème en plusieurs étapes, dont chacune devient facile, explique Laurent Lafforgue, de l'IHES. Quand j'ai lu cette démonstration, des années après sa publication, cela a été un éblouissement : à la fois par la manière dont elle se déroule, par le rôle que jouent les concepts simples, par le changement de perspective qui a consisté à regarder une situation relative plutôt qu'absolue, cela reste pour moi l'une des plus belles démonstrations de l'histoire des mathématiques. »

Le concept de K-théorie, introduit par Alexandre Grothendieck à cette occasion, et la démonstration en elle-même, très formelle, inspirent des mathématiciens qui l'appliquent à d'autres domaines. Le théorème de l'indice en géométrie différentielle notamment, obtenu par Michaël Atiyah en 1963 (ce qui lui vaut la médaille Fields), hérite de ce travail. Ce résultat et les développements ultérieurs sont permis par le travail d'Alexandre Grothendieck, présenté dans un article rédigé par Jean-Pierre Serre et Armand Borel, car lui-même est déjà occupé à autre chose.

## 3. Vers une géométrie nouvelle

**C**ette autre chose qui l'occupe, c'est la vision d'une géométrie nouvelle. Son obsession majeure tourne autour de la notion d'espace. Invité à donner une conférence plénière >>>

## « Quand il s'est intéressé à la géométrie algébrique, j'ai été son interlocuteur naturel »



Jean-Pierre Serre est professeur honoraire au Collège de France. Il a reçu la médaille

Fields en 1954, et le prix Abel en 2003.

**Quand avez-vous commencé à correspondre avec Alexandre Grothendieck ?**

**J.-P.S.** C'était en 1955, alors qu'il était parti au Kansas, ne trouvant pas de poste en France. Il commençait à s'immerger dans la géométrie algébrique et souhaitait apprendre l'algèbre homologique qu'il ne connaissait pas. Comme il n'aimait pas lire de livres et qu'il préférait discuter avec les gens, j'ai été en quelque sorte son interlocuteur naturel et privilégié sur ce sujet. Quand nous étions dans des endroits différents nous nous écrivions, et quand nous étions au même endroit, nous nous voyions, ou nous téléphonions. Nous avons beaucoup échangé jusqu'en 1966, et la dernière lettre date de 1987.

**Pourquoi se téléphoner, si vous étiez au même endroit ?**

**J.-P.S.** Lui était à Bures-sur-Yvette, à l'IHES, et moi à Paris, au Collège de France. Le téléphone était donc bien adapté. On peut faire beaucoup de mathématiques par téléphone. Pendant la guerre d'Algérie, nous entendions des cliquetis qui nous laissaient penser que nous étions sur écoute (à cause de Roger Godement et de Laurent Schwartz, mathématiciens engagés). Un jour, au milieu d'une conversation, nous avons remarqué qu'il n'y avait plus de clics : nous avons pensé que celui qui nous écoutait avait été découragé après deux heures de conversation sur la théorie des schémas.

**Quel est l'intérêt des lettres ?**

**J.-P.S.** Les échanges épistolaires entre mathématiciens sont une pratique ancienne. Des lettres de mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle ont parfois été publiées dans les comptes rendus de l'Académie des sciences. L'intérêt d'écrire c'est que vous avez un texte précis. Nos lettres contiennent au minimum les énoncés, et en général l'idée de la démonstration. L'avantage, quand vous écrivez à quelqu'un comme Alexandre Grothendieck, c'est que vous n'avez pas à mettre beaucoup de résultats intermédiaires : votre correspondant comble les trous [1]. **Avez-vous traité beaucoup de sujets ?**

**J.-P.S.** Non, car il ne s'intéressait pas à tellement de choses en mathématiques hors de la géométrie algébrique. La théorie des nombres, que je trouve irrésistible, ne l'emballait pas. J'ai essayé de le pousser dans cette direction, mais sans succès. Sa manière de faire c'était de mettre au point des cadres théoriques très généraux. La théorie des nombres ne se prête pas bien à cela.

**Combien d'articles en commun sont ressortis de cette correspondance ?**

**J.-P.S.** Cela va peut-être vous surprendre, mais aucun. Ce n'était pas un travail en commun, mais plutôt une discussion : il me posait des questions, je répondais. Il disait « j'ai démontré tel résultat » et je commentais. Excepté une fois, où cela n'a pas abouti, il n'a jamais été question que nous écrivions un travail en commun. En plus nos styles n'étaient pas compatibles. Il avait son système qui est assez rigide, et je n'avais pas envie d'entrer là-dedans. ■ **Propos recueillis par P. P.**

[1] Grothendieck-Serre Correspondence, AMS, 2003.

Déclaration d'intention de non-publication.  
par Alexandre Grothendieck

Je n'ai pas l'intention de publier, ou de republier, aucune œuvre ou texte dont je suis l'auteur, sous quelque forme que ce soit, imprimée ou électronique, que ce soit sous forme intégrale ou par extraits, textes de nature scientifique, personnelle ou autres, ou lettres adressées à quiconque — ainsi que toute traduction de textes dont je suis l'auteur. Toute édition ou diffusion de tels textes qui aurait été faite par le passé sans mon accord, ou qui serait faite à l'avenir et de mon vivant, à l'un contre de ma volonté expresse présente (ici) est illégitime à mes yeux. Dans la mesure où j'en aurai connaissance, je demanderai aux responsables de telles éditions — pirates, ou de toute autre publication contenant sans mon accord des textes de mon œuvre (sous forme de citations ou d'extraits, de quelques lignes ou d'un paragraphe), de réviser

Par cette lettre manuscrite envoyée en 2010 à son ancien élève Luc Illusie, le mathématicien retiré du monde interdit toute publication ou republication de son travail. © D.R.



## À la recherche de la généralité maximale

» au Congrès international des mathématiciens, à Édimbourg, en 1958, Alexandre Grothendieck ébauche son plan de travail pour les quinze années suivantes : la fondation d'une géométrie nouvelle à travers les deux « maîtres-outils » de cette géométrie, les schémas et les topos. Pour lui, les schémas sont une « métamorphose de l'ancienne notion de variété algébrique », tandis que les topos sont une métamorphose de la notion d'espace.

« Les algébristes savaient pratiquement traduire les notions de géométrie en termes d'algèbre depuis les années 1930. Nous étions plusieurs à savoir que c'était possible de le faire proprement, mais nous savions aussi que c'était un travail terrible. Et puis il l'a fait remarquablement bien. L'esprit d'Alexandre Grothendieck consistait à éliminer au maximum toutes les hypothèses parasites, et l'expérience a montré que c'était la bonne approche », explique Jean-Pierre Serre.

La réussite de cette tâche colossale résulte de synergies inespérées. D'abord la création en 1958, autour d'Alexandre Grothendieck, de l'IHES (lire « Une vie que l'on n'efface pas », p. 28). Ensuite l'abnégation et le pouvoir de synthèse de Dieudonné, qui se met au service de son ancien élève pour rédiger les *Éléments de géométrie algébrique*. Avec l'énergie et l'enthousiasme dont il est coutumier, Alexandre Grothendieck prévoit treize chapitres, mais seuls les quatre premiers sont publiés entre 1960 et 1967.

Les interactions avec Jean-Pierre Serre continuent dans toute cette période. Et une kyrielle

d'étudiants enthousiastes est attirée par l'aura du maître. Plusieurs d'entre eux sont envoyés par Oscar Zariski, de l'université Harvard, aux États-Unis, qui déclare à ses meilleurs éléments : « Nous avons des problèmes et pas de méthodes, et lui a des méthodes mais pas de problèmes. » Ils viennent grossir les rangs des séminaires. Entre les *Éléments* et les *Séminaires de géométrie algébrique*, 7500 pages environ de mathématiques sont publiées durant cette période. Elles resteront longtemps des références en géométrie algébrique.

**Conjectures standards.** Dans la ligne de mire du travail de refondation de la géométrie, il y a les conjectures de Weil, qui concernent des fonctions liées aux nombres de points des variétés algébriques sur des corps finis. Le programme a beaucoup avancé mais est resté inachevé du point de vue d'Alexandre Grothendieck, qui s'était fixé comme objectif ultime des conjectures plus générales encore, les « conjectures standards », inspirées notamment par une lettre de Jean-Pierre Serre à André Weil. Les conjectures de Weil devaient tomber « comme un fruit mûr » une fois les conjectures standards démontrées.

Mais ces conjectures résistent toujours. Et certains mathématiciens pensent qu'elles sont peut-être trop optimistes. En 1974, Pierre Deligne, l'un de ses plus brillants élèves, démontre les conjectures de Weil, mais par une voie détournée, différente de celle tracée par le maître. C'est au cours de ces travaux qu'Alexandre Grothendieck introduit la notion de « motif », objet abstrait et conjectural qu'il place au centre de son œuvre.

## « Son premier travail a des débouchés inattendus en informatique théorique »



**Gilles Pisier est professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie.**

« En 1956, Alexandre Grothendieck a publié un théorème d'analyse fonctionnelle sur les espaces de Banach (un espace sur lequel on peut définir une distance), en français, dans une revue brésilienne [1]. Le résultat est passé relativement inaperçu

et n'a été popularisé qu'en 1968, notamment grâce à l'Israélien Joram Lindenstrauss et au Polonais Aleksander Pelczynski. Cela a relancé l'étude de la géométrie des espaces de Banach. Le regard sur ce sujet, considéré alors comme « mineur » a commencé à changer. J'ai moi-même commencé à travailler sur ces espaces à partir de 1972, à Paris, sous la direction de Laurent Schwartz. Récemment,

Assaf Naor, un élève de Joram Lindenstrauss, a transféré en informatique théorique les résultats de ce théorème de Grothendieck. Il a mis en évidence que celui-ci peut s'exprimer comme une inégalité, à une constante multiplicative près (la « constante de Grothendieck », qui vaut autour de 1,7) entre des expressions que l'on ne peut pas calculer en temps polynomial (ce que l'on nomme un problème NP

difficile) et des expressions que l'on peut calculer en temps polynomial (un problème de la classe P). Cela aboutit à cette situation extraordinaire que la constante de Grothendieck, qui vient de ce résultat sur les espaces de Banach, devient une constante critique sur un problème de calculabilité en informatique théorique. » ■

**Propos recueillis par P. P.**

[1] A. Grothendieck, *Bol. Soc. Math., São Paulo*, 8, 1, 1956.



Professeur à l'université de Montpellier en 1973, Alexandre Grothendieck (au centre) vit alors dans un village de l'Hérault et adopte un style de vie proche de celui des hippies. © D.R.

## 4. Le yoga des motifs

Les motifs apparaissent pour la première fois dans une lettre écrite à Jean-Pierre Serre en 1964. Ils sont liés aux variétés algébriques, objet de base que la géométrie algébrique cherche à appréhender. De manière informelle, une variété algébrique représente l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales. Par exemple, un cercle ( $x^2 + y^2 = 1$ ) ou une courbe elliptique (comme  $y^2 = x^3 - x - 1$ ) définissent des variétés algébriques simples. Mais de manière générale, une variété algébrique est un objet complexe, qui peut avoir des trous (comme un tore), des singularités (par exemple la courbe elliptique  $y^2 = x^3$  qui présente un point de rebroussement à l'origine).

Pour classer et comprendre les variétés, les mathématiciens utilisent une théorie baptisée « cohomologie ». Cette théorie fournit des méthodes qui permettent de trouver des invariants de la variété algébrique, par exemple de distinguer si elle a un trou (même topologie que le tore) ou aucun trou (même topologie que la sphère). La difficulté est de choisir la bonne théorie cohomologique, celle qui donnera les bons renseignements sur la variété.

L'une des premières théories cohomologique, élaborée au tournant du XX<sup>e</sup> siècle, est la cohomologie de Betti. Elle consiste simplement à regarder les points à coordonnées complexes de la variété. Mais cette cohomologie est grossière, car elle ne capte pas l'essence arithmétique de

la variété, ce qui se passe par exemple si l'on n'étudie que les points à coordonnées entières, ou rationnelles, de la variété. Dans les années 1930 est arrivée la cohomologie de de Rham qui s'applique aux variétés différentielles (celles sur lesquelles on peut faire du calcul différentiel ou intégral). >>>

## Ses principales publications

**1952. Thèse : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.** *Memoirs, AMS*, 16, 1955.

**1953. Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques.** *Bol. Soc. Math. Sao Paulo*, 8, 1, 1956.

**1957. Le théorème de Riemann-Roch.** A. Borel et J.-P. Serre, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 86, 97, 1958.

**1960-1967. Éléments de géométrie algébrique (I à IV), avec Jean Dieudonné.** Publications mathématiques de l'IHES.

**1960-1969. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie.** *Lectures Notes in Mathematics Series*, Springer-Verlag.

**1984. Esquisse d'un programme. Publié pour postuler au CNRS, ce texte a inspiré tout un programme de recherche lié aux motifs.**

**1985-1986. Récoltes et Semailles. Témoignage de plus de 1000 pages dans lequel Alexandre Grothendieck passe en revue son œuvre mathématique et analyse son passé en tant que mathématicien.** <http://tinyurl.com/recoltes-semailles-pdf>



## À la recherche de la généralité maximale

➤➤➤ Mais ces deux théories ne suffisent pas, et Weil a postulé que s'il existait une autre théorie cohomologique avec de bonnes propriétés, qui capture bien les propriétés arithmétiques de la variété, alors on pourrait démontrer ses conjectures. C'est pour cette raison qu'Alexandre Grothendieck introduit la cohomologie étale (ou  $l$ -adique) et, plus tard, la cohomologie cristalline (ou  $p$ -adique). Sa grande idée c'est que ces théories cohomologiques (Betti, de Rahm,  $l$ -adique,  $p$ -adique) sont diverses incarnations de la même chose, qu'il appelle motif.

**Motifs purs et mixtes.** Autrement dit, le motif, c'est l'objet intrinsèque qu'il y a derrière les théories cohomologiques. Par la suite, il s'aperçoit que beaucoup de variétés très différentes peuvent avoir un même motif. Dans cette vision, les cohomologies des variétés seraient des sortes de molécules construites avec des atomes de base : les motifs.

Introduite de manière conjecturale, la théorie des motifs s'est considérablement développée

jusqu'à aujourd'hui. Deux approches sont poursuivies : celle classique « à la Grothendieck » des motifs purs, qui consiste à étudier les motifs irréductibles (on regarde les atomes) ; l'autre approche initiée par Pierre Deligne, est celle des motifs mixtes où l'on cherche à comprendre comment se combinent les différents motifs. « Cette dernière est beaucoup plus compliquée, car à partir d'une seule brique, on peut fabriquer des cathédrales », précise Francis Brown, de l'IHES, qui a démontré plusieurs conjectures liées aux motifs. Une des applications majeure de la théorie des motifs mixtes est la résolution de la conjecture de Milnor, par le russe Vladimir Voedvosky, à l'aide de sa théorie « homotopique motivique », travail pour lequel il a reçu la médaille Fields en 2002.

## 5. L'héritage

**C**e survol de quelques aspects du travail d'Alexandre Grothendieck ne donne qu'un faible aperçu de l'importance de son œuvre.

## Un trésor caché

Où se trouvent les cinq cartons qui contiennent les derniers travaux connus d'Alexandre Grothendieck ? Longtemps, ils sont restés dans un cagibi au premier étage d'un bâtiment désaffecté de l'université de Montpellier. Ils sont aujourd'hui conservés « dans un lieu sûr, gérés par des professionnels », affirme une source digne de confiance. L'injonction transmise en janvier 2010 à son ancien élève, Luc Illusie, de ne rien publier et de ne rien mettre à la disposition de la communauté scientifique, paralyse tout et tout le monde. Peu de gens ont eu l'occasion de parcourir ces 20 000 pages de notes et de courriers, écrits sur des papiers de récupération, parfois sur des morceaux de carton (ci-contre, examinés par

Michel Demazure). Pour ceux qui ont pu le faire, il y a la matière d'un travail formidable. Mathias Künzer, de l'université technique de Rhénanie-Westphalie à Aix-la-Chapelle, en Allemagne, Jean Malgoire, de l'université Montpellier-II et Georges Maltsiniotis, de l'université Paris-Descartes, en ont tiré 2 000 pages sur la notion de « dérivateurs » développée par Alexandre Grothendieck entre octobre 1990 et juin 1991 [1]. Leila Schneps, du CNRS, en a extirpé les « dessins d'enfants » [2]. Un jour, passant outre l'interdiction de l'auteur, le contenu sera-t-il mis à la disposition de la communauté scientifique ?

■ Philippe Douroux

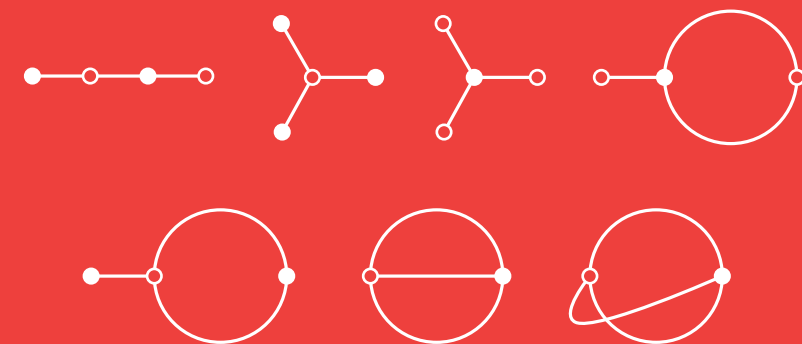
[1] [http://bit.ly/Grothendieck\\_derivateurs](http://bit.ly/Grothendieck_derivateurs)

[2] [http://bit.ly/Dessins\\_Schneps](http://bit.ly/Dessins_Schneps)

© FRÉDÉRIC WOIRGARD/LOOKATSCIENCES



© ERIKA IFANG - BRUNO BOURGEOIS



Cette photographie d'Alexandre Grothendieck est l'une des plus récentes. Elle a été prise entre 1984 et 1988, peu après qu'il a rendu publique son *Esquisse d'un programme* qui contient la notion de « dessins d'enfants » : des graphes dont les arêtes ont des sommets colorés alternativement et un ordre cyclique (ici, l'ensemble des dessins d'enfants à trois arêtes).

Tout comme on ne peut pas décrire facilement celle-ci, on aurait du mal à mesurer précisément l'influence qu'il a eue et qu'il continue à avoir sur les mathématiques d'aujourd'hui. Nous avons déjà rencontré quelques-uns des résultats majeurs de mathématiciens qui se sont appuyés sur ses constructions. La démonstration du théorème de Fermat\* par Andrew Wiles, en 1994, à la suite notamment des travaux de Jean-Pierre Serre, en est une autre illustration éclatante.

**Programme de Langlands.** Le programme de Langlands, vaste programme conjectural cherchant à relier la théorie des nombres aux représentations de certains groupes, dû à Robert Langlands, de l'Institut des études avancées de Princeton, aux États-Unis, est également lié aux motifs. Ce programme très général prévoit que les motifs purs, atomes de la géométrie algébrique, et les représentations automorphes, objets de l'analyse harmonique, se correspondent. « Ce qui apparaît c'est qu'Alexandre Grothendieck d'un

côté et Robert Langlands de l'autre ont vu la même montagne, mais par deux versants différents », explique Laurent Lafforgue.

Début 2014, à un déjeuner à l'IHES, comme cela arrive souvent, les chercheurs présents se sont mis à parler d'Alexandre Grothendieck. Misha Gromov, géomètre, prix Abel 2009, pourtant éloigné de celui-ci sur le plan des mathématiques, le considère comme un maître absolu : « Alexandre Grothendieck a vraiment introduit une nouvelle manière de penser importante non seulement pour les mathématiciens ou les scientifiques, mais pour toute la pensée humaine. C'est une manière de penser où l'on commence par rassembler les choses simples, les choses absolument évidentes. En quelque sorte, le plus important est toujours quelque chose que l'on a sous les yeux. Son génie consiste en partie à saisir le potentiel créatif de ces choses absolument évidentes, que n'importe qui d'autre négligerait. Alors que lui s'arrête à cela, le formalise, et en fait quelque chose d'extraordinaire. » ■

\*LE THÉORÈME DE FERMAT indique qu'il n'existe pas de triplet d'entiers  $(a, b, c)$  non nuls tel que  $a^n + b^n = c^n$  pour  $n$  supérieur ou égal à 3.

## Pour en savoir plus

### Livres

> Alexandre Grothendieck, *Recoltes et Semailles*, <http://tinyurl.com/recoltes-semailles-pdf>

> Winfried Scharlau, *Who is Alexander Grothendieck?* Part 1 : Anarchy, Books on Demand, 2011.

### Sur le Web

> [www.grothendieckcircle.org](http://www.grothendieckcircle.org) Site du cercle Grothendieck, maintenu par Leila Schneps et Pierre Lochak. Contient à la section « Biographical Texts » quantité de liens

vers des articles en français et en anglais.

> <http://tinyurl.com/colloque-hommage> Articles et vidéos du colloque organisé en 2009 à l'IHES en l'honneur de Grothendieck.

> <http://tinyurl.com/galois-grothendieck> Séminaire sur les connexions entre l'œuvre d'Alexandre Grothendieck et celle d'Évariste Galois, par l'historien des mathématiques Jean-Jacques Szczeciniarz.

> <http://tinyurl.com/maieutique-mathematique> La maïeutique mathématique selon Poincaré et selon Grothendieck, par Yves André, du CNRS.