Didaktik der Zahlbereiche (13)

Reelle Zahlen

Universität Augsburg Prof. Dr. C. Bescherer

Übersicht

- Wesentliche Ziffern – unwesentliche Nullen
- Darstellung von Zahlen
- Runden
- Näherungen
- Fehlerbetrachtungen
- Typische Fehler
- Tipps für den Unterricht

Wesentliche Ziffern, unwesentliche Nullen

Bericht von einer Leichathletikveranstaltung:

Vor 40000 Zuschauern wurde beim 100m-Lauf die Bestzeit von 10,0 Sekunden erreicht.

- 40000 ist ein Schätzwert
  - „4“ ist die wesentliche Aussage
  - Nullen nur zur Angabe der Größenordnung (Sie sind unwesentlich.)
- Unterscheidung in wesentliche und unwesentliche Nullen möglich, z.B. 4oooo schreiben.

Wesentliche Ziffern, unwesentliche Nullen

- 100 m enthält nur wesentliche Nullen
  - Es sind weder 101 m noch 99 m.
  - Wahrscheinlich ist die Angabe der 100m auf Zentimeter genau, besser: 100,00m
  - 4 wesentliche Nullen - auch die vor dem Komma sind wesentlich

Wesentliche Ziffern, unwesentliche Nullen

- 10,0 Sekunden enthält nach dem Dezimalkomma noch eine wesentliche Null
  - d.h. es wurde auf Zehntelsekunden genau (z.B. mit einer Stoppuhr) gemessen.
  - Der Fehler ist kleiner als 0,05 Sekunden.
- Bem.: Auch nach dem Dezimalkomma gibt es unwesentliche Nullen
  - lediglich zur Angabe der Größenordnung
  - Bsp.: 0,0000203 (wesentlich sind nur die Ziffern 203)

Darstellungen von Zahlen

Festkommadarstellung / Festpunktdarstellung :

- Anzahl der (Nach-)Kommastellen ist fest vorgegeben
- $n = n_1 + n_2$
- mit n_1 Vorkomma- und n_2 Nachkommastellenstellen
- *Beispiel* ($n = 8$, $n_1 = 6$, $n_2 = 2$, kaufmännisches Rechnen bzw. Tabellensysteme)
- 230 432,86
- 000 345,30

Darstellungen von Zahlen

Gleitpunktdarstellung (Gleitkommazahl / Fließkommazahl / floating point number):

- Trennung der wesentlichen Ziffern von der Angabe der Größenordnung
- Die Mantisse m nimmt die wesentlichen Ziffern auf, der (Zehner-) Exponent die Größenordnung.
- $a = m \cdot 10^q$

- Normaldarstellungen:
  - in der Wissenschaft $0{,}1 \leq m < 1$
  - in der Schule $1 \leq m < 10$
- Beispiele: $40000 = 0{,}4 \cdot 10^5 = 0{,}4E5 = 4 \cdot 10^4 = 4E4$
  $0{,}0000203 = 0{,}203 \cdot 10^{-4} = 2{,}03 \cdot 10^{-5} = 2{,}03E-5$

Darstellungen von Zahlen

- Darstellung mit „usw.-Pünktchen“
  $\pi = 3{,}141592653\ldots$ (vgl. letzte Woche)
  - nach der 3 kann jede Ziffer zwischen 0 und 9 folgen
  - werden die „Pünktchen“ ignoriert, so macht man einen Fehler in der Größenordnung von $|\pi - 3.14159\,2653| < 10^{-9}$

- Entweder “richtig” runden oder die Bezeichnung π beibehalten.

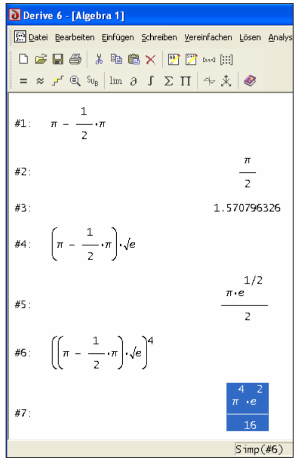
Runden

- Darstellung als endliche – möglichst genaue – Dezimalzahl
- Zum Rechnen mit reellen Zahlen notwendig (außer bei Verwendung von CAS)
- Verschiedene Rundungsverfahren
  - kaufmännisches Runden
  - symmetrisches Runden
  - Aufrunden/Abrunden/Ganzzahl (vgl. Tabellensysteme)

Vorsicht: Rundungsfehler können sich fortpflanzen!

Exkurs: CAS

Computeralgebra-systeme
- können bis auf Maschinengenauig-keit (z.B. Maple mehr als 500000 Stellen) rechnen
- rechnen algebraisch, d.h. verwenden die Definition von $\sqrt{a}$ als pos. Lösung der Gleichung $x^2=a$



Kaufmännisches Runden

Kaufmännisches Runden auf die k-te Stelle nach dem Komma bedeutet, dass man nur die (k+1)-te Stelle prüft. Ist diese
- 0, 1, 2, 3, 4 dann wird abgerundet (abgeschnitten nach der k-ten Stelle)
- 5, 6, 7, 8, 9 dann wird aufgerundet (k-te Stelle um 1 erhöht).

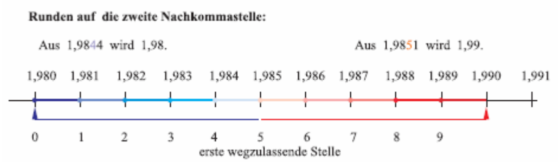
- Der Rundungsfehler ist kleiner oder gleich der Hälfte des Werts der (k+1)-ten Stelle.

Wissenschaftliches oder Symmetrisches Runden

- Regeln wie beim kaufmännischen Runden
- Ausnahme: Folgen auf eine 5 nur Nullen, dann wird immer so gerundet, dass die letzte Ziffer nach dem Runden gerade ist.
  - Bsp: 1/8 € = 0,125 € ergibt auf zwei Stellen gerundet
    0,12 € bei symmetrischer Rundung
    0,13 € bei kaufmännischer Rundung
- 0,135 € ergibt nach beiden Rundungsverfahren: 0,14 €

Grund: Bei einer großen Anzahl von Daten wird in der Hälfte der Fälle ab- und in der andern Hälfte aufgerundet wurde.

Darstellung am Zahlenstrahl



Quelle: Lind, D. Skript „Didaktik der Zahlbereiche" online unter http://www.math.uni-wuppertal.de/~lind/didzb.pdf S. 48

Näherungswerte

- weisen Messfehler auf aufgrund …
  - von Messungenauigkeiten
  - Darstellung als Dezimalzahl von irrationalen oder periodischen Zahlen
  - Runden auf eine vorgegebene (kleinere) Anzahl von Dezimalen
- werden durch Rechnen nicht genauer!

Begriffe – 1

- a wahrer Wert (der reellen Zahl,…)
- $\underline{a}$ ein Näherungswert dafür
- $e = \underline{a} - a$ der *absolute Fehler*
- ϵ eine *Schranke für den absoluten Fehler e.*

Es gilt dann $|\underline{a} - a| \leq \epsilon$ oder $\underline{a} - \epsilon \leq a \leq \underline{a} + \epsilon$ oder
$a = \underline{a} \pm \epsilon$

- Bsp. π =3,14 ±0,002, d.h. 3,138 $\leq \pi \leq$ 3,142
- Absolute Fehler(schranken) zweier Zahlen können nur verglichen werden, wenn die Zahlen gleiche Größenordnung haben.

Begriffe – 2

- a wahrer Wert (der reellen Zahl oder …)
- $\underline{a}$ ein Näherungswert dafür
- $r = \frac{e}{a} = \frac{\underline{a} - a}{a}$ der *relative Fehler*
- ρ eine *Schranke für den relativen Fehler r.*

Es gilt dann $\underline{a}\,(1 - \rho) \leq a \leq \underline{a}\,(1 + \rho)$

- Angabe von r bzw. ρ üblicherweise in %.
- Relative Fehler(schranken) sind zum Vergleich von Genauigkeiten geeignet.

Begriffe – 3

- *Signifikante bzw. wesentliche Ziffern* einer Zahl, sind diejenigen Dezimalstellen (von links gezählt), die irgendeine Aussagekraft haben.
- Genauer: Gilt $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-n}$
  - dann heißen die Ziffern in und vor der n-ten Dezimalstelle, die keine führenden Nullen sind, *wesentliche (geltende) Ziffern.*
  - dann ist <u>a</u> auf mindestens n Dezimalstellen genau oder <u>a</u> hat n *gültige Stellen.*

Begriffe – 4

Beispiele:

- Folgende Zahlen haben jeweils 3 wesentliche Ziffern:

$0{,}123 \pm 0{,}0005$	hat 3 gültige Dezimalen
$0{,}0123 \pm 0{,}00005$	hat 4 gültige Dezimalen
$1{,}23 \pm 0{,}005$	hat 2 gültige Dezimalen

$0{,}00147 = 0{,}147 \times 10^{-2}$	3 wesentliche Ziffern, 5 gültige Dezimalen
$12{,}30 = 0{,}1230 \times 10^{2}$	4 wesentliche Ziffern, 2 gültige Dezimalen
$1230 = 0{,}1230 \times 10^{4}$	4 wesentliche Ziffern, 0 gültige Dezimalen

Genauigkeit

- Die Anzahl der *gültigen Dezimalen* einer Näherung liefert eine *Schätzung für die Schranke des absoluten Fehlers* (nämlich die Hälfte der n-ten Stelle).
- Die Anzahl der *wesentlichen (geltenden) Ziffern* einer Zahl liefert eine *grobe Schätzung für die Schranke des relativen Fehlers*.

Fehlerfortpflanzung – 1

Grundsätze:

- Eine Summe oder Differenz von Näherungswerten wird mit höchstens soviel Dezimalstellen angegeben, wie der ungenaueste Summand aufweist.
- Ein Produkt oder Quotient von Näherungswerten wird mit höchstens soviel wesentlichen Ziffern angegeben, wie der ungenaueste Faktor aufweist.

Ist die Regel „Wir runden immer alles auf zwei Dezimalen!“ in der Schule sinnvoll?

Fehlerfortpflanzung – 2

- Berechnen Sie sinnvoll:
  - 132000 + 7320
  - 31,12 + 0,00123
  - 345 1,236 – 3451,217
- Behandlung in der Schule - Fragezeichenkalkül

Häufige Fehler von Schülern

- Mehrmaliges Runden
  - 0,648 ≈ 0,65 (auf die 2. Nachkommastelle gerundet)
  - 0,65 ≈ 0,7 (auf die 1. Nachkommastelle gerundet)
  - aber 0,648 ≈ 0,6 (auf die 1. Nachkommastelle gerundet)
- Unreflektiertes Übernehmen von Taschenrechner-ausgaben
  - *Der Durchmesser einer Tischplatte beträgt 89,6 cm.* Schülerergebnis: *Der Umfang beträgt 281,4867017 cm.*

Häufige Fehler von Büchern/Lehrern

- Unreflektiertes Verwenden mit Näherungswerten
  - vorgetäuschte Genauigkeit (s. oben: Wie lässt sich ein Tischdurchmesser auf mm genau bestimmen?)
  - Schulbuchaufgaben, die „glatt“ aufgehen, aber auf Näherungswerten basieren: *Zylindervolumen beträgt 28338,500cm³, die Höhe h=25 cm. Berechne den Durchmesser.* (Mit π=3,14 kommt 38 cm heraus.)
  - Unsinnige Berechnungen: *Der Hotelturm in Augsburg ist (mit Antenne) 158 Meter hoch. Wie hoch wäre der um ein Streichholz (l=4,5cm) verlängerte Turm?*

Tipps für den Unterricht

- „Zahlengefühl“ (number sense) der Schüler entwickeln durch Schätzen, Überschlagen, Validieren
- Kontext-abhängige Genauigkeit immer verlangen (auch in den Schulaufgaben!)
- Vorstellungen entwickeln, z.B. mit Längenvergleichen (1500 m ± 5mm entspricht einem Straßenstück ± einer Streichholzbreite)

Weltbevölkerungsuhr

Zuwachs der Weltbevölkerung:	
pro Jahr:	80.614.726 Menschen
pro Monat:	6.717.894 Menschen
pro Woche:	1.550.283 Menschen
pro Tag:	220.862 Menschen
pro Stunde:	9.203 Menschen
pro Minute:	153 Menschen
pro Sekunde:	2,6 Menschen

Quelle: http://www.weltbevoelkerung.de/info-service/weltbevoelkerungsuhr.php?navid=3

Sinnhaftigkeit von Zahlen in Zeitungen usw. diskutieren!

Lehrplanübersicht

	Runden
Realschule	
Kl. 5	Aufbau des Dezimalsystems
	Runden auf Vielfache von 10, 100, 1000
	Rechnen mit Größen aus dem Alltag
Kl. 6	Rechentechniken (einschließlich Schätzen, Runden und Überschlagsrechnen)
	Dezimalbrüche; Rechnen mit Dezimalbrüchen
Gymnasium G 8	
Kl. 5	Sie veranschaulichen Anzahlen, runden,… natürliche Zahlen
	Mathematik im Alltag: Größen

Lehrplanübersicht

	Näherung(sverfahren)
Realschule Kl. 9	Reelle Zahlen: Iterationsverfahren mithilfe eines Rechners (z. B. Heron-Verfahren) zur näherungsweisen Ermittlung von x für x^2 = a
	Kreiszahl π und ihre näherungsweise Bestimmung; (MathelI/III erst in Kl. 10)
	aber auch: Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck, Raumgeometrie
Gymnasium G 8 Kl. 9	Weiterentwicklung der Zahlvorstellung: iterative Berechnung von Näherungswerten für Quadratwurzeln,
	aber auch: Das rechtwinklige Dreieck, Trigonometrie, Fortführung der Raumgeometrie
Kl. 10	mit Hilfe eines numerischen Verfahrens Näherungswerte für π ermitteln
	Exponentielles Wachstum und Logarithmen

Literaturempfehlungen zur gesamten Vorlesung

- Padberg, F. Didaktik der Bruchrechung, Spektrum Verlag
- Reiss, K. und Schmieder, G. Basiswissen Zahlentheorie, Springer Verlag
- Strehl, R. Zahlbereiche, div Verlag Franzbecker
- Vollrath, H.-J., Algebra in der Sekundarstufe, Spektrum Verlag (Kapitel II „Zahlen")
- Lind, D. Skript „Didaktik der Zahlbereiche" online unter http://www.math.uni-wuppertal.de/~lind/didzb.pdf
- Diverse Artikel in didaktischen Zeitschriften: mathematik lehren, Der Mathematikunterricht,…