1 WGAM: overzicht definities, eigenschappen en stellingen. (Nuttig voor de WPO's)

1.1 Hoofdstuk 1: Reeksen

Definitie 1.1.1. Gegeven een rij (a_n) van reële getallen, dan noemen we een uitdrukking van de vorm

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

een *reeks*. Het getal a_n wordt de n-de term van de reeks genoemd. De rij (s_n) gedefinieerd door

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

is de *partieelsommenrij* van de reeks en het getal s_n heet de *n-de partieelsom*. Indien de rij der partieelsommen convergeert naar een reëel getal L, dan zeggen we dat de reeks *convergeert (naar L)* en we noemen L de *som* van de reeks. In dat geval schrijven we ook

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Indien de rij der partieelsommen van de reeks niet convergeert naar een reëel getal, zeggen we dat de reeks *divergeert*.

Eigenschap 1.1.1. Een reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

convergeert als en slechts als er een $K \in \mathbb{N}_0$ bestaat zodat de reeks

$$\sum_{n=K}^{\infty} a_n$$

convergeert.

Definitie 1.1.2. Een *meetkundige reeks* of *geometrische reeks* is een reeks van de vorm

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

met a en r vaste reële getallen en $a \neq 0$. Elke term van dergelijke reeks wordt bekomen door de vorige term met het vast getal r te vermenigvuldigen. Het getal r wordt de *ratio* (in het Nederlands ook wel *reden* of *quotiënt*) van de meetkundige reeks genoemd.

Eigenschap 1.1.2. Beschouw een meetkundige reeks $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$. Indien $|r| < 1$ dan convergeert de reeks naar $a/(1-r)$ en indien $|r| \geq 1$ dan divergeert de reeks.

Eigenschap 1.1.3. Indien een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert, dan convergeert de rij der algemene termen naar 0:

$$a_n \to 0$$

Stelling 1.1.1. Indien $\sum a_n = A$ en $\sum b_n = B$ twee convergente reeksen zijn, dan gelden:

1. *Somregel*
$$\sum (a_n + b_n) = A + B$$
2. *Verschilregel*
$$\sum (a_n - b_n) = A - B$$
3. *Veelvoudregel*
$$\sum (k a_n) = kA \quad (k \in \mathbb{R})$$

Eigenschap 1.1.4. Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ met positieve termen convergeert enkel en alleen indien de partieelsommenrij van boven begrensd is.

Eigenschap 1.1.5. De integraaltest
Veronderstel dat $f : D \to \mathbb{R}^+$ een positieve, dalende functie is met $[1, +\infty[\subset D$. Beschouw verder de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ met $a_n = f(n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Dan convergeren

$$\text{de reeks } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ en de oneigenlijke integraal } \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

beide ofwel divergeren ze beide.

Eigenschap 1.1.6. De hyperharmonische reeksen
De *hyperharmonische reeks*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

met p een reële constante convergeert als $p > 1$ en divergeert als $p \leq 1$.

Eigenschap 1.1.7. Vergelijkingstest Zij $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks met positieve termen.

1. de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert indien er een convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ bestaat met $a_n \leq c_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.
2. de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeert indien er een divergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ bestaat met positieve termen en met $a_n \geq d_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Eigenschap 1.1.8. De limiet vergelijkingstest
Veronderstel dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ reeksen met positieve termen zijn en dat $b_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Indien $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ met $c \in \mathbb{R}$ en $c > 0$ dan geldt voor de reeksen $\sum a_n$ en $\sum b_n$ dat ze beide convergeren of beide divergeren.

2. Indien $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ en $\sum b_n$ convergeert, dan convergeert ook $\sum a_n$.

3. Indien $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ en $\sum b_n$ divergeert, dan divergeert ook $\sum a_n$.

Eigenschap 1.1.9. Verhoudingstest
Indien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks is met strikt positieve termen en indien de rij $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ convergeert in $\mathbb{R}$ of convergeert naar $+\infty$, dan geldt met

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

1. de reeks convergeert indien $\rho < 1$,
2. de reeks divergeert indien $\rho > 1$ of indien $\rho = +\infty$.

Eigenschap 1.1.10. De Worteltest
Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks is met positieve termen en als de rij $\sqrt[n]{a_n}$ convergeert in $\mathbb{R}$ of convergeert naar $+\infty$, dan geldt met

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

1. de reeks convergeert indien $\rho < 1$,
2. de reeks divergeert indien $\rho > 1$ of indien $\rho = +\infty$,

Stelling 1.1.2. Test voor Alternerende Reeksen of **Stelling van Leibniz**
De reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

convergeert indien aan elk van de volgende voorwaarden voldaan is:

1. de getallen u_n zijn positief: $u_n \geq 0$ voor alle n,
2. de rij u_n is dalend: $u_{n+1} \leq u_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$,
3. de rij u_n convergeert naar 0: $u_n \to 0$.

Eigenschap 1.1.11. Als de alternerende reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ voldoet aan de drie voorwaarden uit de Stelling van Leibniz en $u_n \neq 0$ voor alle n, dan benadert elke partieelsom

$$s_n = u_1 - u_2 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n$$

de reekssom L met een fout waarvan de absolute waarde strikt kleiner is dan u_{n+1}, de absolute waarde van de *eerste ongebruikte term* van de reeks. Verder heeft de *rest* $L - s_n$ hetzelfde teken als de eerstvolgende ongebruikte term.

Definitie 1.1.3. We zeggen dat een reeks $\sum a_n$ *absoluut convergeert* (of *absoluut convergent* is) indien de corresponderende reeks van absolute waarden $\sum |a_n|$ convergeert.

Eigenschap 1.1.12. Als een reeks $\sum a_n$ absoluut convergent is, dan is ze ook convergent.

Definitie 1.1.4. We noemen een reeks *conditioneel convergent* indien de reeks convergeert maar niet absoluut convergeert.

Eigenschap 1.1.13. Indien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een absoluut convergente reeks is en indien de rij $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ontstaat door de termen van de rij $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ anders te ordenen, dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ook absoluut en deze reeks heeft dezelfde som als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Definitie 1.1.5. Een *machtreeks rond* $x = a$ is een reeks van de vorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \tag{1}$$

met $(c_n)_n$ een rij reële getallen. Bij een machtreeks rond $x = a$ wordt het getal a het *centrum* van de machtreeks genoemd.

Eigenschap 1.1.14. Indien de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$ convergeert voor een waarde $x = q \neq a$, dan convergeert de machtreeks absoluut voor alle x met $|x-a| < |q-a|$. Indien de reeks divergeert voor een waarde $x = d$, dan divergeert de reeks voor alle x met $|x-a| > |d-a|$.

Stelling 1.1.3. Voor de convergentie van een machtreeks $\sum c_n(x-a)^n$ zijn er de volgende drie mogelijkheden:

1. Er is een strikt positief getal R zodat de machtreeks divergeert voor alle x met $|x-a| > R$ en absoluut convergeert voor alle x met $|x-a| < R$. In elk van de randpunten $x = a - R$ en $x = a + R$ is de reeks mogelijk maar niet noodzakelijk convergent.

2. De reeks convergeert absoluut voor alle reële x-waarden.

3. De reeks convergeert in $x = a$ en divergeert voor alle andere reële x-waarden.

Eigenschap 1.1.15. Term per term afleiden van een machtreeks
Indien de machtreeks $\sum c_n(x-a)^n$ een strikt positieve convergentiestraal heeft (eventueel is $R = +\infty$), dan definieert deze machtreeks een functie f op $]a-R, a+R[$ door

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad a-R < x < a+R$$

De functie f is op het interval $]a-R, a+R[$ willekeurig dikwijls afleidbaar en de afgeleiden worden bekomen door de machtreeks term per term af te leiden:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \quad a-R < x < a+R$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} \quad a - R < x < a + R$$

enzovoort. Elk van deze reeksen bekomen door term per term afleiden convergeert absoluut in elk inwendig punt van het convergentie-interval van de oorspronkelijke reeks.

Eigenschap 1.1.16. Term per term integreren van een machtreeks
Indien de machtreeks $\sum c_n(x-a)^n$ een strikt positieve convergentiestraal heeft (eventueel is $R = +\infty$), dan definieert deze machtreeks een functie f op $]a-R, a+R[$ door

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

De machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

convergeert voor $a - R < x < a + R$ en er geldt

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

op $]a-R, a+R[$.

Definitie 1.1.6. Zij f een functie die afgeleiden van elke orde heeft in een punt a, dan noemen we *Taylorreeks van f in a* de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Als $a = 0$, dan wordt de Taylorreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{2}$$

van f in het punt $a = 0$ ook wel de *Maclaurinreeks van f* genoemd.

Definitie 1.1.7. Taylorveeltermen of -polynomen van orde n
Zij f een functie die minstens n keer afleidbaar is in een punt a. We noemen de *Taylorveelterm of Taylorpolynoom van f van orde n ($n \in \mathbb{N}$) in het punt a* de veelterm

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Eigenschap 1.1.17. Zij f een functie die minstens n keer afleidbaar is in een punt a. De enige veelterm $P(x)$ die voldoet aan de voorwaarden

1. $P(x)$ is van graad ten hoogste n,

2. in $x = a$ vallen de functiewaarde en de eerste n afgeleiden samen voor de functie $f(x)$ en de veelterm $P(x)$

is de Taylorveelterm $T_n(x)$ van f in a.

Stelling 1.1.4. De Stelling van Taylor
Veronderstel dat een functie f op een open interval I afgeleide functies f', f'',. . .,$f^{(n)}$ en $f^{(n+1)}$ heeft. Dan bestaat er voor elke twee verschillende punten a en b van I een getal c strikt gelegen tussen a en b zodat

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Stelling 1.1.5. Als een functie f $n+1$ afgeleide functies heeft op een open interval I dat a bevat, dan geldt voor elke $x \in I \setminus \{a\}$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \tag{3}$$

met

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{4}$$

voor een getal c_x strikt gelegen tussen a en x.

Stelling 1.1.6. Veronderstel dat een functie f onbeperkt differentieerbaar is in een open interval I, veronderstel dat $a \in I$ en beschouw de Taylorreeks van f in het punt a. Voor een punt $x \in I \setminus \{a\}$ zijn de volgende uitspraken equivalent:

1. de functiewaarde van f in x valt samen met de som van de Taylorreeks in x,

2. $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

1.2 Hoofdstuk 2: Afgeleiden in meerdere variabelen

Definitie 1.2.1. We noemen een *(reëelwaardige) functie van n reële variabelen* ($n \in \mathbb{N}_0$) een functie

$$f : D \to \mathbb{R}$$

waar D een deelverzameling is van

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R},\ \ldots x_n \in \mathbb{R}\}$$

We noemen het *beeld* van een functie de verzameling die bestaat uit reële getallen die een functiewaarde zijn van een n-tupel uit het domein. Dikwijls wordt een *voorschrift* van de functie gegeven, een formule of uitdrukking die toelaat voor elk n-tupel uit het domein de functiewaarde te bepalen of berekenen. Dikwijls stelt men een voorschrift voor in de vorm

$$w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

of

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

aangevuld met een voorwaarde

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$$

Hierbij stelt het n-tupel $(x_1, x_2, ..., x_n)$ een element van het domein D van de functie voor. In het geval $n = 2$ gebruiken we voor koppels meestal de notatie (x, y) in plaats van (x_1, x_2) en in het geval $n = 3$ gebruiken we voor drietallen meestal de notatie (x, y, z) in plaats van (x_1, x_2, x_3).

Definitie 1.2.2. Een punt (x_0, y_0) van een deelverzameling R van $\mathbb{R}^2$ noemen we een *inwendig punt* van R indien er een open schijf met middelpunt (x_0, y_0) bestaat die volledig binnen R ligt of, in symbolen,

$$\exists r > 0 :\ S((x_0, y_0), r) \subset R$$

We noemen een punt (x_0, y_0) van $\mathbb{R}^2$ een *randpunt* van R indien elke open schijf met (x_0, y_0) als middelpunt zowel punten van R als punten buiten R bevat:

$$\forall r > 0 :\ S((x_0, y_0), r) \cap R \neq \emptyset \text{ en } S((x_0, y_0), r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus R) \neq \emptyset$$

Merk op dat in het algemeen een randpunt van R zowel in R als buiten R kan liggen.
Het *inwendige* van een gebied R in $\mathbb{R}^2$ is de verzameling van alle inwendige punten van R en de *rand* van R is de verzameling van alle randpunten van R. We noemen R *open* indien alle punten van R inwendige punten zijn. We noemen R *gesloten* indien alle randpunten van R tot R behoren.

Definitie 1.2.3. Een gebied in $\mathbb{R}^2$ noemen we *begrensd* als het omvat is in een vaste open schijf. We noemen een gebied *onbegrensd* als het niet begrensd is.

Definitie 1.2.4. De verzameling van punten $(x, y, f(x, y))$ in de ruimte noemen we de *grafiek* van f, dit is de verzameling

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, (x, y) \in D,\, z = f(x, y)\}$$

We noemen deze grafiek ook wel het *oppervlak* $z = f(x, y)$.

Definitie 1.2.5. Als c een reëel getal is, dan noemen we de verzameling van alle punten in het domein waarin de functiewaarde gelijk is aan c een *hoogtelijn* van f: dit is de verzameling

$$\{(x, y) \in D |\, f(x, y) = c\}$$

We noteren deze hoogtelijn ook wel aan door $f(x, y) = c$.
De doorsnede van de grafiek met het vlak $z = c$ evenwijdig met het xy-vlak, noemen we een *niveaukromme* of ook wel een *contourkromme*. De loodrechte projectie van deze contourkromme op het xy-vlak geeft de hoogtelijn $f(x, y) = c$.

Definitie 1.2.6. Als c een reëel getal is, dan noemen we de verzameling van alle punten in het domein waarin de functiewaarde gelijk is aan c een *niveauoppervlak* van f; dit is de verzameling

$$\{(x, y, z) \in D |\, f(x, y, z) = c\}$$

We duiden dit niveauoppervlak ook wel aan door $f(x, y, z) = c$.

Definitie 1.2.7. Een punt (x_0, y_0, z_0) van een deelverzameling R van $\mathbb{R}^3$ noemen we een *inwendig punt* van R indien er een open bol met middelpunt (x_0, y_0, z_0) bestaat die volledig binnen R ligt of, in symbolen,

$$\exists r > 0 : \ B((x_0, y_0, z_0), r) \subset R$$

We noemen een punt (x_0, y_0, z_0) van $\mathbb{R}^3$ een *randpunt* van R indien elke open bol met (x_0, y_0, z_0) als middelpunt zowel punten van R als punten buiten R bevat:

$$\forall r > 0 : \ B((x_0, y_0, z_0), r) \cap R \neq \emptyset \quad \text{en} \quad B((x_0, y_0, z_0), r) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus R) \neq \emptyset$$

Merk op dat in het algemeen een randpunt van R zowel in R als buiten R kan liggen.
Het *inwendige* van een deelverzameling R van $\mathbb{R}^3$ is de verzameling van alle inwendige punten van R en de *rand* van R is de verzameling van alle randpunten van R. We noemen R *open* indien alle punten van R inwendige punten zijn. We noemen R *gesloten* indien alle randpunten van R tot R behoren.

Definitie 1.2.8. We zeggen dat een functie $f : D \to \mathbb{R}$ met domein $D \subset \mathbb{R}^2$ *limiet L heeft als (x, y) nadert naar (x_0, y_0)* indien voor elke $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle punten (x, y) van het domein D geldt

$$0 < \|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

In dat geval schrijven we

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Eigenschap 1.2.1. Veronderstel dat L, M en k reële getallen zijn en dat

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \text{ en } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

Dan gelden:

1. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = L \cdot M$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL$$

4. $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

   indien $M \neq 0$.

Eigenschap 1.2.2. Veronderstel dat

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$$

en dat

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$$

voor alle punten (x,y) (eventueel uitgezonderd voor (x_0,y_0)) uit een zekere open schijf met middelpunt (x_0,y_0). Dan geldt ook

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$$

Eigenschap 1.2.3. Voor een functie van twee variabelen f geldt

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0$$

Eigenschap 1.2.4. Veronderstel dat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie van twee variabelen is en $h : A \to \mathbb{R}$ een functie van één variabele zodat de samenstelling $h \circ f$ gedefinieerd is.

$$D \xrightarrow{\quad f \quad} A \xrightarrow{\quad h \quad} \mathbb{R}$$

Indien $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ en $\lim_{t\to L} h(t) = b$, dan geldt

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(f(x,y)) = b$$

Eigenschap 1.2.5. Veronderstel dat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie van twee variabelen is en $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^2$ een vectoriële functie met parametervoorstelling

$$\begin{cases} x & = x(t) \\ & \qquad\qquad (t \in I) \\ y & = y(t) \end{cases}$$

waarvan het beeld volledig binnen D ligt en het punt (x_0, y_0) niet bevat. Indien $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ en indien $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = (x_0, y_0)$, dan geldt

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t)) = L$$

Definitie 1.2.9. Als $D \subset \mathbb{R}^2$ en (x_0, y_0) is een punt van D, dan noemen we een functie $f : D \to \mathbb{R}$ *continu* in (x_0, y_0) indien $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ bestaat en indien

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

We noemen f *continu* indien f continu is in elk punt (x_0, y_0) van D.

Eigenschap 1.2.6. Als $D \subset \mathbb{R}^2$, als $f : D \to \mathbb{R}$ een functie is die continu is in $(x_0, y_0) \in D$, en als $g : J \to \mathbb{R}$ een functie is met domein $f(D) \subset J \subset \mathbb{R}$ zodat g continu is in $f(x_0, y_0)$, dan is de functie

$$g \circ f : D \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto g(f(x, y))$$

continu in (x_0, y_0).

Eigenschap 1.2.7. Veronderstel dat $f : D \to \mathbb{R}$ continu is in een inwendig punt (x_0, y_0) van $D \subset \mathbb{R}^2$ en dat $f(x_0, y_0) \neq 0$. Dan bestaat er een open schijf met middelpunt (x_0, y_0) binnen D zodat $f(x, y)$ in alle punten (x, y) van de open schijf hetzelfde teken heeft als $f(x_0, y_0)$.

Definitie 1.2.10. Als de limiet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

bestaat in $\mathbb{R}$, zeggen we dat de functie f *partieel afleidbaar is in* (x_0, y_0) *naar* x en noemen we deze limiet de *partiële afgeleide van* f *naar* x *in het punt* (x_0, y_0). We noteren deze limiet in dat geval

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Definitie 1.2.11. Als de limiet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

bestaat in $\mathbb{R}$, zeggen we dat de functie f *partieel afleidbaar is in* (x_0, y_0) *naar* y en noemen we deze limiet de *partiële afgeleide van* f *naar* y *in het punt* (x_0, y_0). We noteren deze limiet in dat geval

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Stelling 1.2.1. De Stelling van Clairaut
Indien een functie f en haar partiële afgeleiden f_x, f_y, f_{xy} en f_{yx} bestaan op een open deel dat een punt (x_0, y_0) bevat en indien deze vijf functies continu zijn in (x_0, y_0), dan geldt

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Definitie 1.2.12. We noemen een functie f *differentieerbaar* in (x_0, y_0) als de volgende voorwaarden vervuld zijn:

- de partiële afgeleiden van f in (x_0, y_0) bestaan,
- er bestaan twee functies ε_1 en ε_2 van twee variabelen die voldoen aan

  $$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0 \text{ en } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$$

  en zodat de verandering Δz bij elke verplaatsing vanuit (x_0, y_0) naar een naburig punt $(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ gegeven wordt door

  $$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y \tag{5}$$

Eigenschap 1.2.8. Indien een functie f differentieerbaar is in (x_0, y_0), dan is f continu in (x_0, y_0).

Eigenschap 1.2.9. Als de eerste orde partiële afgeleiden $\partial f/\partial x$ en $\partial f/\partial y$ van een functie van twee variabelen f beide bestaan en continue functies zijn op een open deel D, dan is f differentieerbaar in alle punten van D.

Definitie 1.2.13. Indien f differentieerbaar is in (x_0, y_0), dan noemen we *linearisatie van f in* (x_0, y_0) of *standaard lineaire benadering van f in* (x_0, y_0) de eerstegraadsfunctie van twee variabelen

$$L_{(x_0,y_0)}(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{6}$$

Eigenschap 1.2.10. Indien f differentieerbaar is in (x_0, y_0), dan geldt

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L_{(x_0,y_0)}(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

Definitie 1.2.14. Als een functie $f(x, y)$ differentieerbaar is in een punt (x_0, y_0), dan noemen we het vlak met cartesische vergelijking

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

het *raakvlak* in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ aan de grafiek van f.

Stelling 1.2.2. De kettingregel voor functies van twee variabelen
Indien $x = x(t)$ en $y = y(t)$ differentieerbaar zijn in $t = t_0$ en indien f een functie is van twee variabelen die differentieerbaar is in het punt $P_0(x(t_0), y(t_0))$, dan is de samengestelde functie $w = f(x(t), y(t))$ differentieerbaar in t_0 en de afgeleide in t_0 van deze samengestelde functie wordt gegeven door

$$\frac{dw}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0)$$

met $x_0 = x(t_0)$ en $y_0 = y(t_0)$.

Eigenschap 1.2.11. Veronderstel dat $F(x, y)$ een functie van twee variabelen is die differentieerbaar is in alle punten van de hoogtelijn

$$H = \{(x, y)|F(x, y) = 0\}$$

van F. Veronderstel dat R een open rechthoek is met een open interval I op de x-as als basis en dat $H \cap R$ de grafiek is van een differentieerbare functie $f : I \to \mathbb{R}$. Beschouw een punt $x_0 \in I$, en stel $y_0 = f(x_0)$. Dan geldt

$$F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)\frac{df}{dx}(x_0) = 0 \tag{7}$$

Definitie 1.2.15. Voor een functie $f : D \to \mathbb{R}$ van twee variabelen, voor een inwendig punt $P_0 = (x_0, y_0)$ van D en voor een eenheidsvector $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2$ noemen we de limiet

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

als hij bestaat in $\mathbb{R}$ de *afgeleide van f in P_0 in de richting van $\vec{u}$*. We noteren

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u}, P_0}$$

of

$$(D_{\vec{u}}f)_{P_0}$$

voor deze limiet en we spreken van een *richtingsafgeleide* in P_0 in de richting van $\vec{u}$.

Definitie 1.2.16. Als de partiële afgeleiden van een functie f bestaan in een punt $P_0 = (x_0, y_0)$, dan noemen we de vector

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_2,$$

waarbij de partiële afgeleiden staan voor de partiële afgeleiden in P_0, de *gradiënt* of de *gradiëntvector* van f in P_0. Deze gradiënt vector wordt genoteerd als $(\nabla f)_{P_0}$. Er geldt dus:

$$(\nabla f)_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

Eigenschap 1.2.12.

1. *Scalair veelvoud regel*
$$\nabla(kf) = k\nabla f \quad (k \in \mathbb{R})$$
2. *Som- en verschilregel*
$$\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$$
3. *Productregel*
$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$
4. *Quotiëntregel*
$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

Eigenschap 1.2.13. Als f differentieerbaar is een punt $P_0 = (x_0, y_0)$ en als $\vec{u}$ een eenheidsvector is, dan is de richtingsafgeleide van f in P_0 in de richting van $\vec{u}$ het inproduct van de gradiënt van f in P_0 met $\vec{u}$:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u}$$

Eigenschap 1.2.14. Veronderstel dat f differentieerbaar is in $P_0 = (x_0, y_0)$ en dat $(\nabla f)_{P_0}$ verschilt van de nulvector. De vector $(\nabla f)_{P_0}$ (resp. $-(\nabla f)_{P_0}$) geeft de richting weer vanuit het punt P_0 waarin de functiewaarden van f het snelste stijgen (resp. dalen). Als $\vec{u}$ een eenheidsvector is die loodrecht staat op $(\nabla f)_{P_0}$, dan geeft $\vec{u}$ een richting met verandering 0 van de functiewaarden van f.

Eigenschap 1.2.15. Veronderstel dat f differentieerbaar is en dat het punt $P_0 = (x_0, y_0)$ op de hoogtelijn $f(x, y) = c$ ligt. Als de hoogtelijn $f(x, y) = c$ een kromme is die een reguliere parametrisatie $\vec{r}$ heeft, dan staat de gradiënt $(\nabla f)_{P_0}$ in P_0 loodrecht op de hoogtelijn.

Eigenschap 1.2.16. Voor een differentieerbare functie $f(x, y, z)$ geldt:

1. in elk punt P_0 geeft de gradiënt ∇f de richting in de ruimte waarin, vanuit P_0, de functiewaarden van f het snelste stijgen,
2. in elk punt P_0 geeft de vector $-\nabla f$ de richting in de ruimte waarin, vanuit P_0, de functiewaarden van f het snelste dalen,
3. in elk punt P_0 staat de gradiënt ∇f loodrecht op het niveauoppervlak waartoe P_0 behoort.

Stelling 1.2.3. De Stelling van Taylor voor functies van twee variabelen
Veronderstel dat een functie f op een open verzameling G partiële afgeleiden tot en met orde 2 heeft en dat deze partiële afgeleiden continue functies op G zijn. Veronderstel ook dat (a, b) een punt van G is. Dan bestaat er voor elk punt $(x, y) \in G \setminus \{(a, b)\}$ een punt (c_1, c_2) op het lijnstuk dat (a, b) met (x, y) verbindt, verschillend van de eindpunten, zodat

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \underbrace{f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)}_{T_1(x,y)} \\ &\quad \underbrace{+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_1, c_2)(x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2)(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_1, c_2)(y - b)^2\right)}_{R_1(x,y)} \end{aligned}$$

Eigenschap 1.2.17. Indien de eerste en tweede orde partiële afgeleiden van een functie f bestaan en continu zijn op een open verzameling G en voldoen aan

$$|f_{xx}| \leq N,\ |f_{yy}| \leq N \text{ en } |f_{xy}| \leq N$$

dan geldt voor de fout

$$E(x, y) = |f(x, y) - T_1(x, y)|$$

in elk punt (x, y) van G

$$E(x, y) \leq \frac{1}{2} N(|x - a| + |y - b|)^2$$

Definitie 1.2.17. Zij $R \subset \mathbb{R}^2$, $f : R \to \mathbb{R}$ een functie en (a, b) een punt van R. We zeggen dat

1. f een *lokaal maximum bereikt in* (a, b) indien $f(a, b) \geq f(x, y)$ voor alle punten van R in een zekere open schijf met middelpunt (a, b),

2. f een *strikt lokaal maximum bereikt in* (a, b) indien $f(a, b) > f(x, y)$ voor alle punten van R in een zekere open schijf met middelpunt (a, b),

3. f een *lokaal minimum bereikt in* (a, b) indien $f(a, b) \leq f(x, y)$ voor alle punten van R in een zekere open schijf met middelpunt (a, b),

4. f een *strikt lokaal minimum bereikt in* (a, b) indien $f(a, b) < f(x, y)$ voor alle punten van R in een zekere open schijf met middelpunt (a, b),

5. f een *lokaal extremum bereikt in* (a, b) indien f in (a, b) een lokaal minimum of een lokaal maximum bereikt,

6. f een *(globaal) maximum op* R *bereikt in* (a, b) indien $f(a, b) \geq f(x, y)$ voor alle punten van R,

7. f een *(globaal) minimum op R bereikt in* (a, b) indien $f(a, b) \leq f(x, y)$ voor alle punten van R.

Eigenschap 1.2.18. Zij $D \subset \mathbb{R}^2$. Indien een functie $f : D \to \mathbb{R}$ een lokaal extremum bereikt in een inwendig punt (a, b) van D waar de beide partiële afgeleiden bestaan, dan geldt $\nabla f(a, b) = \vec{o}$.

Definitie 1.2.18. We noemen een *stationair punt* van een functie $f : D \to \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}^2$ elk inwendig punt van D waar de beide partiële afgeleiden f_x en f_y bestaan en beide nul zijn.

Definitie 1.2.19. Als f differentieerbaar is in een stationair punt (a, b), dan noemen we $(a, b, f(a, b))$ een *zadelpunt* van f als f geen lokaal extremum bereikt in (a, b).

Eigenschap 1.2.19. De tweede partiële afgeleide test voor lokale extrema Veronderstel dat (a, b) behoort tot een open verzameling G en dat de functie f en haar eerste en tweede orde partiële afgeleiden continue functies zijn op G, en veronderstel dat (a, b) een stationair punt is van f, dan gelden:

1. f bereikt een strikt lokaal maximum in (a, b) indien zowel $f_{xx}(a, b) < 0$ als $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$,
2. f bereikt een strikt lokaal minimum in (a, b) indien zowel $f_{xx}(a, b) > 0$ als $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$,
3. f heeft een zadelpunt in $(a, b, f(a, b))$ indien $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) < 0$.

Deze test geeft geen informatie over de aard van het stationair punt (a, b) indien $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) = 0$. In dergelijk geval moeten we het gedrag van f in (a, b) op een andere manier onderzoeken.

Eigenschap 1.2.20. Veronderstel dat een functie f differentieerbaar is op een open deel G en dat een kromme C met reguliere parametrisatie

$$\vec{r}(t) = g(t)\vec{e}_1 + h(t)\vec{e}_2 \quad (a \leq t \leq b)$$

volledig omvat is binnen G. Veronderstel dat de functie f in een punt $P_0 = \vec{r}(t_0)$ op C (met $a < t_0 < b$) een lokaal maximum of een lokaal minimum aanneemt tussen alle waarden van f in punten van C, dan geldt in het punt P_0 dat de gradiënt van f loodrecht staat op de kromme.

Stelling 1.2.4. De methode van de Lagrange multiplicatoren
Veronderstel dat de functies f en φ differentieerbaar zijn op een open deel R en dat de hoogtelijn $\varphi(x, y) = c$ in R van φ een kromme C is met een reguliere parametrisatie. Veronderstel verder dat de gradiënt $\nabla\varphi$ van φ verschillend is van de nulvector in alle punten (x, y) van C. Als de functie f in een punt P_0 van C een lokaal maximum of een lokaal minimum aanneemt tussen alle punten van C, dan bestaat er een reëel getal λ zodat in P_0 geldt

$$\nabla f = \lambda \nabla\varphi$$

1.3 Meervoudige integralen

Definitie 1.3.1. Als f continu is op de rechthoek R en beschouwt men voor elke n het bijhorend rechthoekig grid op R, dan definiëren

$$s_n = \sum_{i,j=1}^{n} f\left(\vec{c}_{ij}\right) \Delta A_n$$

en

$$S_n = \sum_{i,j=1}^{n} f\left(\vec{d}_{ij}\right) \Delta A_n$$

de rijen (s_n) en (S_n) van onder- en bovensommen. Hierbij is $\vec{c}_{ij}$ resp. $\vec{d}_{ij}$ een punt in R_{ij} waarin f haar minimale resp. maximale waarde op R_{ij} aanneemt. De *dubbelintegraal* van f op R wordt gedefinieerd als de gemeenschappelijke limiet van de rijen (s_n) en (S_n) van onder- en bovensommen. Men noteert

$$\iint_R f(x,y)dA \text{ of } \iint_R f(x,y)dxdy$$

voor de dubbelintegraal zodat

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

De rechthoek R noemt men het *integratiegebied*. De dubbelintegraal ligt voor elke n tussen de ondersom s_n en de bovensom S_n

$$s_n \leq \iint_R f(x,y)dxdy \leq S_n$$

en de dubbelintegraal is het enige getal dat voor elke n tussen s_n en S_n ligt. Indien f slechts positieve waarden aanneemt op R, dan definieert de dubbelintegraal het volume V van het driedimensionaal gebied met verticale zijvlakken, met R als grondvlak en met de grafiek van f als bovenvlak.

Eigenschap 1.3.1.

1. *Constant veelvoud:* voor elk reëel getal c geldt

$$\iint_R (cf(x,y))dA = c\iint_R f(x,y)dA$$

2. *Som en verschil:*

$$\iint_R (f(x,y)+g(x,y))dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$$

en

$$\iint_R (f(x,y)-g(x,y))dA = \iint_R f(x,y)dA - \iint_R g(x,y)dA$$

3. *Positiviteit:* als $f(x,y) \geq 0$ op R dan geldt

$$\iint_R f(x,y)dA \geq 0$$

4. *Vergelijking:* als $f(x,y) \geq g(x,y)$ op R dan geldt

$$\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$$

5. *Absolute waarde:*

$$\left|\iint_R f(x,y)dA\right| \leq \iint_R |f(x,y)|\, dA$$

6. *Additiviteit:* als R de unie is van R_1 en R_2 en als R_1 en R_2 elkaar niet overlappen, dan geldt

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

Stelling 1.3.1. Stelling van Fubini
Als f een continue functie is op een rechthoek $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, dan kan de dubbelintegraal

$$\iint_R f(x,y)dA$$

uitgerekend worden als

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

of als

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$$

Beide integratievolgordes geven dus hetzelfde resultaat.

Definitie 1.3.2. Een gebied R in $\mathbb{R}^2$ noemt men *van Type I* indien er een gesloten interval $[a,b]$ bestaat en twee continue functies

$$\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$$

zodat

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, a \leq x \leq b \quad \text{en} \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\right\}$$

Een gebied R in $\mathbb{R}^2$ noemt men *van Type II* indien er een gesloten interval $[c,d]$ bestaat en twee continue functies

$$\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$$

zodat

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, c \leq y \leq d \text{ en } \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\right\}$$

Een gebied R in $\mathbb{R}^2$ noemt men *van Type III* indien het zowel van Type I als van Type II is.

Definitie 1.3.3. Beschouw een continue functie f op een gebied R van Type I of II en een rechthoek R' die het gebied R omvat. Beschouwt men voor elke n het grid op R, geïnduceerd door een grid op R', dan definiëren

$$s_n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ R_{ij} \subset R}}^{n} f\left(\vec{c}_{ij}\right) \Delta A_n$$

en

$$S_n = \sum_{\substack{i,j=1 \\ R_{ij} \subset R}}^{n} f\left(\vec{d}_{ij}\right) \Delta A_n$$

de rijen (s_n) en (S_n) van onder- en bovensommen. Hierbij is $\vec{c}_{ij}$ resp. $\vec{d}_{ij}$ een punt in R_{ij} waarin f haar minimale resp. maximale waarde op R_{ij} aanneemt. De *dubbelintegraal* van f op R wordt gedefinieerd als de gemeenschappelijke limiet van de rijen (s_n) en (S_n) van onder- en bovensommen. Men noteert

$$\iint_R f(x,y)dA \text{ of } \iint_R f(x,y)dxdy$$

voor de dubbelintegraal zodat

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Het gebied R noemt men het *integratiegebied*. Indien f slechts positieve waarden aanneemt op R, dan geeft deze dubbelintegraal het volume V van het driedimensionaal gebied met verticale zijwanden, met R als grondvlak en met de grafiek van f als bovenvlak.

Eigenschap 1.3.2.

1. *Constant veelvoud:* voor elk reëel getal c geldt

$$\iint_R (cf(x,y))dA = c \iint_R f(x,y)dA$$

2. *Som en verschil:*

$$\iint_R (f(x,y)+g(x,y))dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$$

en

$$\iint_R (f(x,y)-g(x,y))dA = \iint_R f(x,y)dA - \iint_R g(x,y)dA$$

3. *Positiviteit:* als $f(x,y) \geq 0$ op R dan geldt

$$\iint_R f(x,y)dA \geq 0$$

4. *Vergelijking:* als $f(x,y) \geq g(x,y)$ op R dan geldt

$$\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$$

5. *Absolute waarde:*

$$\left|\iint_R f(x,y)dA\right| \leq \iint_R |f(x,y)|\, dA$$

6. *Additiviteit:* als R de unie is van R_1 en R_2 en als R_1 en R_2 elkaar niet overlappen behalve op hun randen, dan geldt

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

Definitie 1.3.4. De *oppervlakte* van een gebied R in het vlak is het getal

$$O = \iint_R 1dA = \iint_R dA$$

Definitie 1.3.5. De *gemiddelde waarde* van een continue functie f van twee variabelen op een gebied R is het getal

$$\frac{1}{O}\iint_R f dA$$

met O de oppervlakte van R.

Definitie 1.3.6. Voor een dunne platte plaat met massadichtheidsfunctie δ, gelegen op een gesloten en begrensd gebied R, definiëren we:

1. de *massa* van de plaat:

$$M = \iint_R \delta(x,y)dA$$

2. het *massacentrum* van de plaat is het punt met coördinaten

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} \text{ en } \overline{y} = \frac{M_x}{M}$$

waarbij men de grootheden

$$M_x = \iint_R y\delta(x,y)dA \quad \text{en} \quad M_y = \iint_R x\delta(x,y)dA$$

de *eerste momenten* van de plaat t.o.v. de x-as resp. t.o.v. de y-as noemt.

Definitie 1.3.7. Een transformatie $T : R^* \to \mathbb{R}^2$ met $R^* \subset \mathbb{R}^2$ heet *injectief op* R^* indien voor alle koppels $(u,v),(u',v') \in R^*$ geldt

$$T(u,v) = T(u',v') \Rightarrow u = u' \text{ en } v = v'$$

Eigenschap 1.3.3. Als een transformatie

$$T : R^* \to \mathbb{R}^2$$

met $R^* \subset \mathbb{R}^2$ injectief is, dan is elk punt (x, y) van $T(R^*)$ het beeld van juist één punt (u, v) van R^*.

Eigenschap 1.3.4. Als A een 2×2-matrix is, dan is de lineaire transformatie

$$L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

injectief als en slechts als $\det(A) \neq 0$.

Definitie 1.3.8. Een transformatie

$$T : R^* \to \mathbb{R}^2$$

heet *injectief op het inwendige van* R^* indien geen twee verschillende inwendige punten van R^* door T op eenzelfde punt worden afgebeeld.

Eigenschap 1.3.5. Als het gebied R in het xy-vlak de sector is tussen de cirkels met middelpunt in de oorsprong en stralen ρ_1 en ρ_2 $(0 \leq \rho_1 < \rho_2)$ en tussen de stralen $\theta = \alpha$ en $\theta = \beta$ $(0 \leq \alpha < \beta < 2\pi)$ en als f continu is op R, dan geldt

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta dr \tag{8}$$

Hierbij is R^* de rechthoek

$$R^* = [\alpha, \beta] \times [\rho_1, \rho_2]$$

in het θr-vlak.

Eigenschap 1.3.6. Als het gebied R in het xy-vlak begrensd is door de stralen $\theta = \alpha$ en $\theta = \beta$ $(0 \leq \alpha < \beta < 2\pi)$ en tussen de krommen met poolvergelijkingen $r = g_1(\theta)$ en $r = g_2(\theta)$ $(0 \leq g_1(\theta) < g_2(\theta))$ en als f continu is op R, dan geldt

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta dr \tag{9}$$

Hierbij is R^* het gebied

$$R^* = \{(\theta, r) | \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$$

in het θr-vlak.

Eigenschap 1.3.7.

1. *Constant veelvoud:* voor elk reëel getal k geldt

$$\iiint_D k f dV = k \iiint_D f dV$$

2. *Som en verschil:*
$$\iiint_D (f \pm g)dV = \iiint_D f dV \pm \iiint_D g dV$$

3. *Positiviteit:* als $f(x, y, z) \geq 0$ op D dan geldt
$$\iiint_D f dV \geq 0$$

4. *Vergelijking:* als $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ op D dan geldt
$$\iiint_D f dV \geq \iiint_D g dV$$

5. *Additiviteit:* als D de unie is van D_1 en D_2 en als D_1 en D_2 elkaar niet overlappen behlave in hun randen, dan geldt
$$\iiint_D f dV = \iiint_{D_1} f dV + \iiint_{D_2} f dV$$

Definitie 1.3.9. Een gebied D in $\mathbb{R}^3$ noemen we *van Type i* of *regulier t.o.v. de z-as* indien het van de vorm
$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x, y) \in R, \quad \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) \right\}$$
is met R een gebied van Type I of II in het xy-vlak en φ_1 en φ_2 continue functies op R. Een gebied D in $\mathbb{R}^3$ noemen we *van Type ii* of *regulier t.o.v. de x-as* indien het van de vorm
$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (y, z) \in R, \quad \psi_1(y, z) \leq x \leq \psi_2(y, z) \right\}$$
is met R een gebied van Type I of II in het yz-vlak en ψ_1 en ψ_2 continue functies op R. Een gebied D in $\mathbb{R}^3$ noemen we *van Type iii* of *regulier t.o.v. de y-as* indien het van de vorm
$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x, z) \in R, \quad \eta_1(x, z) \leq y \leq \eta_2(x, z) \right\}$$
is met R een gebied van Type I of II in het xz-vlak en η_1 en η_2 continue functies op R.

Eigenschap 1.3.8. De drievoudige integraal van een continue functie f op een regulier gebied D t.o.v. de z as kan als volgt uitgerekend worden als de geïtereerde integraal:
$$\iiint_D f(x, y, z)dV = \iint_R \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dA$$

De binnenste integraal is een enkelvoudige integraal in de variabele z waarbij (x, y) een vast punt van R voorstelt. De drievoudige integraal van een continue functie f op een regulier gebied D t.o.v. de x as kan als volgt uitgerekend worden als de geïtereerde integraal:
$$\iiint_D f(x, y, z)dV = \iint_R \left(\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x, y, z)dx \right) dA$$

De binnenste integraal is een enkelvoudige integraal in de variabele x waarbij (y, z) een vast punt van R voorstelt. De drievoudige integraal van een continue functie f op een regulier gebied D t.o.v. de y as kan als volgt uitgerekend worden als de geïtereerde integraal:

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iint_R \left(\int_{\eta_1(x,z)}^{\eta_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right) dA$$

De binnenste integraal is een enkelvoudige integraal in de variabele y waarbij (x, z) een vast punt van R voorstelt.

Definitie 1.3.10. De *gemiddelde waarde* van een continue functie f over een gebied D in de ruimte wordt gedefinieerd als

$$\frac{1}{V} \iiint_D f(x,y,z)dV$$

waarbij V het volume van D is.

Eigenschap 1.3.9. Veronderstel dat de functie f van twee variabelen continu is op een gebied R in het xy-vlak en dat een transformatie T gegeven door vergelijkingen

$$\begin{cases} x &= g(u,v) \\ y &= h(u,v) \end{cases}$$

een gebied R^* in het uv-vlak omzet naar het gebied $R = T(R^*)$ en dat de transformatie injectief is op het inwendige van R^*. Indien g en h continue partiële afgeleiden hebben op een open deel dat R^* omvat en indien de zgn. *Jacobiaan* of *Jacobiaanse determinant*

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}$$

verschillend is van 0 in alle inwendige punten (u, v) van R^*, dan geldt

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R^*} f(g(u,v), h(u,v))|J(u,v)|dudv \tag{10}$$

1.4 Lijn- en oppervlakteintegralen

Definitie 1.4.1. Een *kromme* in $\mathbb{R}^3$ is de beeldverzameling

$$K_{\vec{r}} = \{\vec{r}(t) | t \in [a, b]\}$$

van een continu differentieerbare vectoriële functie

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

die injectief is op $[a, b[$. De punten $\vec{r}(a)$ en $\vec{r}(b)$ noemen we het *beginpunt* resp. het *eindpunt* van de kromme en we noemen $K_{\vec{r}}$ een *kromme van* $\vec{r}(a)$ *naar* $\vec{r}(b)$. We noemen *parametrisatie* van de kromme K elke dergelijke functie $\vec{r}$ waarvan K de beeldverzameling is. Indien $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ noemen we de kromme gesloten.

Eigenschap 1.4.1. Twee parametrisaties

$$\vec{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \quad \vec{r}_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^3$$

bepalen dezelfde kromme K indien

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ h$$

met

$$h : [c, d] \to [a, b]$$

een strikt stijgende of strikt dalende bijectie die differentieerbaar is en waarvan de afgeleide functie

$$h' : [c, d] \to [a, b]$$

continu is. De parametrisaties $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ bepalen dezelfde georiënteerde kromme indien h strikt stijgend is en ze bepalen dezelfde kromme maar met tegengestelde oriëntatie indien h strikt dalend is.

Definitie 1.4.2. Een parametrisatie $\vec{r}$ van een kromme K heet *regulier* indien de afgeleide vector nergens de nulvector is:

$$\forall t \in [a, b] : \vec{r}\,'(t) \neq \vec{o}$$

Een kromme K heet *glad* indien ze een reguliere parametrisatie $\vec{r}$ heeft.

Definitie 1.4.3. Een kromme K heet *stuksgewijs glad* indien ze een aaneensluiting

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$$

van gladde krommen K_i is, waarbij het eindpunt van K_i voor $1 \leq i < n$ het beginpunt van K_{i+1} is.

Eigenschap 1.4.2. Voor een kromme K en een continue functie f hangt de integraal

$$\int_a^b f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|dt$$

niet af van de gekozen parametrisatie

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

van K.

Definitie 1.4.4. De *lijnintegraal* van een scalaire functie f langs een kromme K is de integraal

$$\int_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\|\vec{r}\,'(t)\|dt$$

waarbij de parametrisatie

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$$

van K willekeurig mag gekozen worden. Deze integraal wordt ook genoteerd als

$$\int_K f\,ds \quad \text{of} \quad \int_K f(x, y, z)ds$$

Eigenschap 1.4.3. Indien een kromme

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$$

ontstaat door een eindig aantal bij elkaar aansluitende krommen K_1, K_2, ... , K_n samen te voegen, dan is de lijnintegraal van een continue functie f langs K de som van de lijnintegralen over de verschillende krommen:

$$\int_K f(x, y, z)ds = \int_{K_1} f(x, y, z)ds + \int_{K_2} f(x, y, z)ds + \ldots + \int_{K_n} f(x, y, z)ds$$

Eigenschap 1.4.4. Voor een kromme K en een vectorveld $\vec{F}$ hangt de integraal

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

in de volgende zin af van de gekozen parametrisatie $\vec{r}$ van K:

- indien de parametrisaties

  $$\vec{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

  en

  $$\vec{r}_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^3$$

  dezelfde oriëntatie van K bepalen, dan geldt

  $$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1\,'(t)\,dt = \int_c^d \vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \vec{r}_2\,'(t)\,dt,$$

- indien de parametrisaties
$$\vec{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$
en
$$\vec{r}_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^3$$
tegengestelde oriëntaties van K bepalen, dan geldt
$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1{}'(t)\, dt = -\int_c^d \vec{F}(\vec{r}_2(t)) \cdot \vec{r}_2{}'(t)\, dt$$

Definitie 1.4.5. De *lijnintegraal van een vectorveld* $\vec{F}$ langs een georiënteerde kromme K geparametriseerd door
$$\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$
wordt gedefinieerd als de integraal
$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$
Deze integraal wordt ook genoteerd als
$$\int_K \vec{F} \cdot d\,\vec{s},$$
of als
$$\int_K \vec{F}(x, y, z) \cdot d\,\vec{s}$$
of nog, met de componenten F_1, F_2 en F_3 van $\vec{F}$, als
$$\int_K F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$
Als de kromme K gesloten is, noemt men de lijnintegraal van $\vec{F}$ langs K ook wel de *circulatie* van $\vec{F}$ langs K. Men gebruikt de notatie
$$\oint_K \vec{F} \cdot d\,\vec{s}$$
voor de circulatie langs K.

Eigenschap 1.4.5. Voor de lijnintegraal van een vectorveld
$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{e}_1 + F_2(x, y, z)\vec{e}_2 + F_3(x, y, z)\vec{e}_3$$
langs een georiënteerde kromme K met parametrisatie
$$\vec{r} : \quad \begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \qquad\qquad (a \le t \le b) \\ z &= z(t) \end{cases}$$

geldt

$$\int_K \vec{F}(x,y,z)\cdot d\,\vec{s}$$

$$= \int_a^b \left[F_1(x(t),y(t),z(t))x'(t) + F_2(x(t),y(t),z(t))y'(t) + F_3(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]\,dt$$

Eigenschap 1.4.6.

1. Veronderstel dat D een gebied van Type I in het xy-vlak is en dat $P(x,y)$ continue partiële afgeleiden heeft op een open deel dat D omvat. Als ∂D^+ de randkromme van D voorstelt georiënteerd in tegenwijzerzin, dan geldt voor de circulatie van het vectorveld
$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{e}_1$$
langs ∂D^+
$$\int_{\partial D^+} \vec{F}(x,y)\cdot d\,\vec{s} = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \tag{11}$$

2. Veronderstel dat D een gebied van Type II in het xy-vlak is en dat $Q(x,y)$ continue partiële afgeleiden heeft op een open deel dat D omvat. Als ∂D^+ de randkromme van D voorstelt georiënteerd in tegenwijzerzin, dan geldt voor de circulatie van het vectorveld
$$\vec{F}(x,y) = Q(x,y)\vec{e}_2$$
langs ∂D^+
$$\int_{\partial D^+} \vec{F}(x,y)\cdot d\,\vec{s} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA \tag{12}$$

Stelling 1.4.1. De Stelling van Green
Veronderstel dat D een gebied van Type III in het xy-vlak is en dat de componenten $P(x,y)$ en $Q(x,y)$ van het vectorveld

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{e}_1 + Q(x,y)\vec{e}_2$$

continue partiële afgeleiden hebben op een open gebied dat D omvat. Als ∂D^+ de randkromme van D voorstelt, georiënteerd in tegenwijzerzin, dan geldt voor de circulatie van het vectorveld langs ∂D^+

$$\int_{\partial D^+} \vec{F}(x,y)\cdot d\,\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA \tag{13}$$

Stelling 1.4.2. De tweede vorm van de Stelling van Green
Onder dezelfde voorwaarden als in Stelling 1.4.1 kan de flux van $\vec{F}$ door ∂D^+ naar buiten toe als volgt uitgedrukt worden als een dubbelintegraal over D:

$$\text{Flux} = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

Eigenschap 1.4.7. Indien K een georiënteerde kromme is van het punt $A \in \mathbb{R}^3$ naar het punt $B \in \mathbb{R}^3$ en indien de scalaire functie $f : D \to \mathbb{R}$ continue partiële afgeleiden heeft op een open deel $D \subset \mathbb{R}^3$ dat de kromme K omvat, dan geldt voor de lijnintegraal van het vectorveld ∇f langs K:

$$\int_K \nabla f \cdot d\,\vec{s} = f(B) - f(A) \tag{14}$$

Definitie 1.4.6. Als een vectorveld $\vec{F}$, gedefinieerd op een open gebied D in de ruimte, de gradiënt is van een scalaire functie f met continue partiële afgeleiden op D, dan noemt men f een *potentiaalfunctie* van $\vec{F}$.

Definitie 1.4.7. Als $\vec{F}$ een vectorveld is gedefinieerd op een open deel D in de ruimte, dan noemen we $\vec{F}$ *conservatief* indien voor elke keuze van twee punten A en B in D de waarde van de lijnintegraal

$$\int_K \vec{F} \cdot d\,\vec{s}$$

niet afhangt van de keuze van de kromme K van A naar B, zolang de kromme binnen D ligt.

Eigenschap 1.4.8. Als $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een conservatief vectorveld is, dan is $\vec{F}$ de gradiënt van een scalaire functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Eigenschap 1.4.9. Beschouw een vectorveld $\vec{F} = F_1(x,y,z)\vec{e}_1 + F_2(x,y,z)\vec{e}_2 + F_3(x,y,z)\vec{e}_3$ met domein $\mathbb{R}^3$ waarvan de componenten F_1, F_2 en F_3 continue partiële afgeleiden hebben. Dan is $\vec{F}$ conservatief enkel en alleen indien

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \tag{15}$$

Definitie 1.4.8. Een *oppervlak* S is het beeld

$$\vec{r}(D) = \{\vec{r}(u,v) | (u,v) \in D\}$$

van een regulier gebied D van Type I of II in het u,v-vlak door een parametrisatie $\vec{r}$ die injectief is op het inwendige van D. Het gebied D heet het *parametergebied*. We noemen S *simpel* indien $\vec{r}$ injectief is op D. Als S simpel is noemen we de *rand* ∂S van S het beeld $\vec{r}(\partial D)$ van de rand van D.

Definitie 1.4.9. We zeggen dat een parametrisatie $\vec{r}$ van een oppervlak $S = \vec{r}(D)$ *regulier* is in een punt $(u_0, v_0) \in D$ indien de twee raakvectoren $\vec{r}_u$ en $\vec{r}_v$ in (u_0, v_0) lineair onafhankelijk zijn of, equivalent, indien

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0) \neq \vec{o}$$

In dat geval spannen de twee raakvectoren het *raakvlak* aan S in $\vec{r}(u_0, v_0)$ op. De vector

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)}{\|\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)\|}$$

noemen we de *eenheidsnormaalvector* op S in $\vec{r}(u_0, v_0)$: deze heeft lengte 1 en staat loodrecht op het raakvlak. We noemen S *glad* indien S een parametrisatie $\vec{r}$ heeft die regulier is in alle punten van D.

De *oppervlakteintegraal* van een scalaire functie g op S zal toelaten om g te integreren over een oppervlak S. In praktijk kan g bijvoorbeeld de plaatselijke massadichtheid (massa per oppervlakte-eenheid) geven van een gebogen dunne plaat. We veronderstellen dat $S = \vec{r}(D)$ een oppervlak is en dat $g(x, y, z)$ een scalaire functie is die gedefinieerd en continu is in alle punten van S.
De definitie van de oppervlakteintegraal van een scalaire functie steunt op de volgende eigenschap, die we hier zonder bewijs formuleren. De eigenschap leert hoe de dubbelintegraal

$$\iint_D g(\vec{r}(u, v))\,\|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)\|\,du\,dv \tag{16}$$

afhangt van de gekozen parametrisatie $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ van S.

Eigenschap 1.4.10. Veronderstel dat S een oppervlak is en g een scalaire functie is die continu is in alle punten van S. De dubbelintegraal (16) is gelijk voor alle parametrisaties $\vec{r}$ van S, onafhankelijk van de oriëntatie van S.

Definitie 1.4.10. De *oppervlakteintegraal* van een continue scalaire functie g op een oppervlak $S = \vec{r}(D)$ is de dubbelintegraal

$$\iint_D g(\vec{r}(u, v))\,\|\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)\|\,du\,dv$$

We noteren

$$\iint_S g\,dS$$

voor deze oppervlakteintegraal.

De definitie van de oppervlakteintegraal van vectoriële functies steunt op de volgende eigenschap, die we hier zonder bewijs formuleren. De eigenschap leert hoe de dubbelintegraal

$$\iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v))\;dudv \tag{17}$$

afhangt van de gekozen parametrisatie $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ van S. Hierbij is

$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{e}_1 + F_2(x, y, z)\vec{e}_2 + F_3(x, y, z)\vec{e}_3$$

een continu vectorveld met een domein dat het oppervlak S omvat.

Eigenschap 1.4.11. Veronderstel dat S een oppervlak is en $\vec{F}(x, y, z)$ een continu vectorveld is op S. De dubbelintegraal (17) is gelijk voor alle parametrisaties $\vec{r}$ die dezelfde oriëntatie van S bepalen. Wordt $\vec{r}$ vervangen door een parametrisatie van S die de tegengestelde oriëntatie bepaalt, dan verandert de dubbelintegraal (17) van teken.

Definitie 1.4.11. De dubbelintegraal (17) noemen we de *oppervlakteintegraal* van het vectorveld $\vec{F}$ op S. We noteren deze oppervlakteintegraal als

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Definitie 1.4.12. Als $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{e}_1 + Q(x, y, z)\vec{e}_2 + R(x, y, z)\vec{e}_3$ een vectorveld is waarvan de componenten P, Q en R continue partiële afgeleiden hebben, dan noemt men het vectorveld

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{e}_3$$

de *rotatie* of de *rotor* van $\vec{F}$. Men noteert de rotatie van $\vec{F}$ als

$$\text{curl } \vec{F} \quad \text{of} \quad \text{rot } \vec{F}$$

Stelling 1.4.3. Stelling van Stokes voor grafieken van functies
Veronderstel dat D een gebied is van Type III in het xy-vlak en dat het oppervlak

$$S = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$$

de grafiek is van een functie $f(x, y)$ die continue partiële afgeleiden op D heeft. Als S georiënteerd wordt met de naar boven wijzende eenheidsnormaalvector, dan geldt

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

waar ∂S^+ de randkromme is van S doorlopen in tegenwijzerzin van boven bekeken.

Definitie 1.4.13. We noemen *gesloten oppervlak* in $\mathbb{R}^3$ elke rand van een gebied van Type i, ii of iii, waarbij de begrenzende oppervlakken grafieken zijn van functies met continue partiële afgeleiden.

Eigenschap 1.4.12.

1. Als het gesloten oppervlak ∂D de rand is van een gebied D van Type i en als ∂D georiënteerd wordt volgens de hiervoor gemaakte afspraak, dan geldt voor de uitwaartse flux van een vectorveld
$$\vec{F}(x,y,z) = F_3(x,y,z)\vec{e}_3$$
met slechts een niet nulle component in de $\vec{e}_3$-richting
$$\oiint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV \tag{18}$$

2. Als het gesloten oppervlak ∂D de rand is van een gebied D van Type ii en als ∂D georiënteerd wordt volgens de hiervoor gemaakte afspraak, dan geldt voor de uitwaartse flux van een vectorveld
$$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{e}_1$$
met slechts een niet nulle component in de $\vec{e}_1$-richting
$$\oiint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_D \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dV \tag{19}$$

3. Als het gesloten oppervlak ∂D de rand is van een gebied D van Type iii en als ∂D georiënteerd wordt volgens de hiervoor gemaakte afspraak, dan geldt voor de uitwaartse flux van een vectorveld
$$\vec{F}(x,y,z) = F_2(x,y,z)\vec{e}_2$$
met slechts een niet nulle component in de $\vec{e}_2$-richting
$$\oiint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_D \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dV \tag{20}$$

Stelling 1.4.4. De Stelling van Gauss
Als het gesloten oppervlak ∂D de rand is van een gebied D van Type iv en als ∂D georiënteerd wordt volgens de hiervoor gemaakte afspraak, dan geldt voor de uitwaartse flux van een vectorveld
$$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{e}_1 + F_2(x,y,z)\vec{e}_2 + F_3(x,y,z)\vec{e}_3$$
met continue partiële afgeleiden op D
$$\oiint_{\partial D^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dV$$