SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES: LES ESPACES ANALYTIQUES

Par HENRI CARTAN

Je voudrais résumer ici quelques résultats obtenus depuis trois ou quatre ans dans la théorie des espaces analytiques.

1. Notions préliminaires

Les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes n'ont été étudiées, pendant longtemps, que dans les ouverts des espaces numériques $\mathbf{C}^n$ ($\mathbf{C}^n$ désigne l'espace dont les points ont pour coordonnées n nombres complexes). A une époque relativement récente on a abordé l'étude systématique des *variétés analytiques* (complexes); la notion de variété analytique est aujourd'hui familière à tous les mathématiciens. En gros, une variété analytique de dimension (complexe) n est un espace topologique séparé, au voisinage de chaque point duquel on s'est donné un ou plusieurs systèmes de 'coordonnées locales' (complexes), en nombre égal à n, le passage d'un système de coordonnées locales à un autre s'effectuant par des transformations holomorphes. Pour tout ouvert U d'une variété analytique X, on a la notion de *fonction holomorphe* dans U (f est holomorphe dans U si, au voisinage de chaque point de U, f peut s'exprimer comme fonction holomorphe des coordonnées locales); les fonctions holomorphes dans U forment un anneau $\mathscr{H}(U)$. Notons que la notion de fonction holomorphe a un caractère local: pour qu'une f continue dans U soit holomorphe dans U, il faut et il suffit que la restriction f_i de f à chacun des ouverts U_i d'un recouvrement ouvert de U soit holomorphe dans U_i. Ceci conduit à considérer, en chaque point $x \in X$, l'anneau $\mathscr{H}_x$ des 'germes' de fonctions holomorphes au point x (anneau qui est la limite inductive des anneaux $\mathscr{H}(U)$ relatifs aux ouverts U contenant x). La connaissance, pour chaque point $x \in X$, de l'anneau $\mathscr{H}_x$, détermine entièrement la structure de variété analytique de X. D'une façon précise, supposons donné, pour chaque point x d'un espace topologique séparé X, un sous-anneau $\mathscr{H}_x$ de l'anneau des germes de fonctions continues (à valeurs complexes) au point x (nous dirons alors que X est un espace *annelé*); pour qu'il existe sur X une structure de variété analytique de dimension n telle que, pour chaque x, $\mathscr{H}_x$ soit précisément l'anneau des germes de fonctions holomorphes au point x, il faut et il suffit que X puisse être recouvert par des ouverts U_i jouissant de la propriété suivante: il existe un homéomorphisme ϕ_i de U_i sur un ouvert A_i de $\mathbf{C}^n$, de manière que, pour chaque point $x \in U_i$, l'homéomorphisme ϕ_i transporte l'anneau $\mathscr{H}_x$ sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes au point $\phi_i(x)$ de l'espace $\mathbf{C}^n$. Cette condition exprime, en somme, que ϕ_i définit un *isomorphisme* de U_i, comme espace annelé, sur l'ouvert A_i muni de sa structure naturelle d'espace annelé. Ainsi les ouverts de $\mathbf{C}^n$, munis de leur structure naturelle d'espace annelé, constituent des *modèles locaux* pour les variétés analytiques de dimension n.

Mais la notion de variété analytique n'est pas suffisamment générale. Prenons un exemple: une variété algébrique, plongée sans singularité dans un espace projectif complexe, peut bien être considérée comme une variété analytique; mais une variété algébrique plongée avec singularités dans un espace projectif ne peut pas rentrer dans le cadre trop étroit des variétés analytiques. Cet exemple suggère la nécessité d'élargir la notion de variété analytique, et explique pourquoi la notion plus générale d'‘espace analytique’ a récemment acquis droit de cité en Mathématiques. Les espaces analytiques sont, en quelque sorte, des variétés analytiques pouvant admettre certaines singularités internes. Etant donné l'importance qu'a prise récemment la notion d'espace analytique, nous allons entrer dans quelques détails.

2. Sous-ensembles analytiques

On va utiliser une catégorie de ‘modèles’ plus étendue que la catégorie des ouverts de $\mathbf{C}^n$. Avant de la définir avec précision, il nous faut rappeler une définition et quelques résultats classiques. Soit A un ouvert de $\mathbf{C}^n$; on dit qu'une partie M de A est un *sous-ensemble analytique* de A si M est *fermé* dans A et si, pour chaque point $x \in M$, il existe un ouvert U contenant x et contenu dans A, et un système fini de fonctions f_i holomorphes dans U, de telle manière que $M \cap U$ soit exactement l'ensemble des points de U où s'annulent simultanément les fonctions f_i; en bref, un sous-ensemble analytique de A est un sous-ensemble fermé qui, au voisinage de chacun de ses points, peut se définir par des équations holomorphes. La structure locale des ensembles analytiques est bien connue depuis Weierstrass;† si x est un point d'un ensemble analytique M, M est, au voisinage de x, réunion d'un nombre fini d'ensembles analytiques M_i dont chacun est ‘irréductible’ au point x, et les M_i sont

† Voir par exemple [27], et [7], Exposé 14.

entièrement déterminés au point de vue local: si l'on a deux décompositions de M en composantes irréductibles au point x, ces deux décompositions coïncident, à l'ordre près, dans un voisinage assez petit de x. De plus, on peut donner une description locale d'un ensemble analytique M *irréductible* au point x: il est possible de choisir, au voisinage de x, des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ dans l'espace ambiant, nulles au point x, et un entier $p \leqslant n$, de manière que soient vérifiées les conditions suivantes. L'application f de M dans $\mathbf{C}^p$ définie par

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_p)$$

est ce qu'on appelle un 'revêtement ramifié' de degré k au voisinage de x: cela veut dire que f applique tout voisinage assez petit de x dans M *sur* un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^p$, et que l'image réciproque d'un point de $\mathbf{C}^p$ assez voisin de 0 se compose 'en général' de k points distincts de M (voisins de x), et possède en tout cas au plus k points; l'entier p s'appelle la dimension (complexe) de M au point x (et en fait, la dimension topologique de M, au voisinage de x, est égale à $2p$). D'une façon plus précise, il est possible d'exclure de $\mathbf{C}^p$, au voisinage de 0, un sous-ensemble analytique R dont toutes les composantes irréductibles en 0 sont de dimension $< p$, de manière que la restriction de f à $M - f^{-1}(R)$ fasse de $M - f^{-1}(R)$ un revêtement (véritable) à k feuillets de $\mathbf{C}^p - R$, du moins dans des voisinages assez petits de $x \in M$ et de $0 \in \mathbf{C}^p$. Les coordonnées de chacun des k points de $M - f^{-1}(R)$ que f transforme en un point donné $(x_1, \ldots, x_p)$ sont des fonctions *holomorphes* de $x_1, \ldots, x_p$. On voit que $M - f^{-1}(R)$ est, au voisinage de chacun de ses points, une sous-variété analytique (sans singularités) de dimension p dans l'espace ambiant $\mathbf{C}^n$; de plus cette variété est *connexe*: d'une façon précise, il existe un système fondamental de voisinages ouverts de x, dans l'espace ambiant, qui coupent $M - f^{-1}(R)$ suivant un ensemble connexe.

Soit M un sous-ensemble analytique au voisinage d'un point $x \in \mathbf{C}^n$; nous avons dit que M est réunion, au voisinage de x, de ses composantes irréductibles au point x. On dit que M est de dimension $\leqslant p$ au point x si toutes les composantes irréductibles de M au point x ont une dimension $\leqslant p$; et l'on dit que M est purement p-dimensionnel au point x si toutes les composantes de M au point x ont la dimension p.

Soit à nouveau M un sous-ensemble analytique d'un ouvert $A \subset \mathbf{C}^n$. On dit que M est de dimension $\leqslant p$ si M est de dimension $\leqslant p$ en chacun de ses points; et que M est purement p-dimensionnel si M est purement p-dimensionnel en chacun de ses points. Un point $x \in M$ est dit *régulier* si M est, au voisinage de ce point, une sous-variété de l'espace ambiant;

l'ensemble des points réguliers de M est ouvert dans M et dense dans M, et l'ensemble des points non-réguliers, ou *singuliers*, de M, est un sous-ensemble analytique.† Si M est purement p-dimensionnel, l'ensemble des points réguliers de M est une sous-variété de dimension p en chacun de ses points, et l'ensemble des points singuliers de M est un sous-ensemble analytique de dimension $\leqslant p-1$.

Tout cela est bien classique. Mais un résultat récent de Lelong[22], dont de Rham[33] vient de donner une autre démonstration, concerne l'intégration des formes différentielles sur les sous-ensembles analytiques et fournit une information précieuse sur la nature des singularités d'un tel ensemble. Soit M un sous-ensemble analytique purement p-dimensionnel d'un ouvert $A \subset \mathbf{C}^n$; soit M' l'ouvert de M formé des points réguliers de M; il est bien connu que, au voisinage de chaque point de $M-M'$, M' est de volume $(2p)$-dimensionnel fini, et par suite toute forme différentielle ω de degré $2p$, définie dans A et à support compact, possède une intégrale $\int \omega$ étendue à M'. Ainsi M définit un *courant* de dimension $2p$ dans l'ouvert A. Lelong et de Rham montrent que *ce courant est fermé*; cela revient à dire que, pour toute forme différentielle ϖ de degré $2p-1$, à support compact, l'intégrale $\int d\varpi$ étendue à M' est nulle (ce résultat vaut si la forme ϖ est de classe C^1). Ce théorème exprime, en somme, que l'ensemble $M-M'$ des points singuliers de M est négligeable comme courant de dimension (réelle) $2p-1$; on savait seulement que sa dimension comme espace topologique est $\leqslant 2p-2$.

3. Espaces analytiques

Etant maintenant un peu familiarisés avec les sous-ensembles analytiques, nous pouvons aborder la définition générale d'un *espace analytique*.‡ Soit M un sous-ensemble analytique d'un ouvert $A \subset \mathbf{C}^n$; M possède une structure annelée naturelle: on attache à chaque point $x \in M$ l'anneau $\mathscr{H}_x$ des germes de fonctions induits sur M par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant $\mathbf{C}^n$. Les espaces annelés ainsi attachés aux divers sous-ensembles analytiques (pour tous les ouverts $A \subset \mathbf{C}^n$, et pour toutes les valeurs de n) sont nos 'modèles'. Par définition, un 'espace analytique' est un espace annelé X, dont la topologie est séparée, et qui satisfait à la condition suivante: chaque

† Voir [8], Exposé 9.

‡ Il y a essentiellement deux définitions possibles d'un espace analytique: celle dite de Behnke–Stein (voir [4]), et celle dite de Cartan–Serre (voir [7], Exposé 13; [8], Exposé 6; et [35]). L'équivalence des deux définitions n'a été démontrée que tout récemment par Grauert et Remmert (*C.R. Acad. Sci., Paris*, 245, 918–921 (1957)). Nous donnons ici la définition 'de Cartan–Serre'.

point de X possède un voisinage ouvert U qui est *isomorphe* (comme espace annelé) à l'un des modèles qu'on vient de définir. Etant donnés deux espaces analytiques X et X', une application $\phi: X \to X'$ sera dite analytique (ou holomorphe) si c'est un 'morphisme d'espaces annelés', ce qui signifie ceci: ϕ est une application continue telle que, pour tout point $x \in X$ et tout germe $f \in \mathscr{H}_{\phi(x)}$, le germe composé $f \circ \phi$ appartienne à $\mathscr{H}_x$. En particulier, les fonctions holomorphes (scalaires) sur X ne sont autres que les fonctions continues qui, en chaque point $x \in X$, appartiennent à l'anneau $\mathscr{H}_x$. L'anneau $\mathscr{H}_x$ est ainsi l'anneau des germes de fonctions holomorphes au point x.

On voit que les espaces analytiques forment une 'catégorie' avec morphismes, au sens technique de ce terme; et les variétés analytiques forment une sous-catégorie de la catégorie des espaces analytiques (c'est d'ailleurs une sous-catégorie 'pleine', dans le jargon des spécialistes; autrement dit, les applications analytiques d'une variété analytique X dans une autre X' sont les mêmes, que l'on considère X et X' comme des variétés analytiques ou comme des espaces analytiques).

On a une notion évidente de *sous-espace analytique* d'un espace analytique X; c'est un sous-ensemble fermé Y de X, tel que Y puisse être défini, au voisinage de chacun de ses points y, en annulant un nombre fini de fonctions de l'anneau $\mathscr{H}_y$ de l'espace ambiant X. On munit Y d'une structure annelée en associant à chaque point $y \in Y$ l'anneau des germes induits sur Y par les éléments de $\mathscr{H}_y$; et on voit facilement que cet espace annelé Y est un espace analytique.

Toutes les notions qui ont été définies sur les modèles et qui ont un caractère local, invariant par isomorphisme, se transportent aux espaces analytiques. Par exemple, un espace analytique X peut, en un de ses points x, être *irréductible* ou non; en tout cas, x possède un voisinage dans lequel X est réunion d'un nombre fini de sous-espaces analytiques irréductibles au point x. On a la notion d'espace purement n-dimensionnel, et celle d'espace de dimension $\leqslant n$. Un espace analytique X, purement n-dimensionnel, est de dimension topologique $2n$; si X est de dimension $\leqslant n$, il est de dimension topologique $\leqslant 2n$. Un point $x \in X$ est *uniformisable* s'il possède un voisinage ouvert isomorphe à une variété analytique; l'ensemble des points uniformisables est un ouvert partout dense, et son complémentaire est un sous-espace analytique. Si X est purement 1-dimensionnel, tous les points de X sont uniformisables. Tous ces faits sont bien connus.

On a aussi la notion *globale* d'irréductibilité: X est globalement irréductible si X n'est pas la réunion de deux sous-espaces analytiques

X' et X'' tous deux distincts de X. Si X n'est pas irréductible, on appelle *composante irréductible* de X (au sens global) tout sous-espace analytique Y tel que X soit réunion de Y et d'un sous-espace analytique $Y' \neq X$. On démontre que X est la réunion de ses composantes irréductibles, et que celles-ci forment une famille *localement finie* (i.e. chaque point de x possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de composantes irréductibles). Les composantes irréductibles de X ne sont pas autre chose que les adhérences des composantes connexes de l'ensemble des points uniformisables de X. Tout espace irréductible est purement dimensionnel.

On a une catégorie intermédiaire entre celle des variétés analytiques et celle des espaces analytiques: c'est celle des espaces analytiques *normaux*. Ce sont les espaces annelés dont les modèles sont les sous-ensembles analytiques normaux des ouverts d'un espace $\mathbf{C}^n$. Pour qu'un espace analytique X soit normal, il faut et il suffit que, pour chaque point $x \in X$, l'anneau $\mathscr{H}_x$ soit intègre et intégralement clos; en particulier, X est irréductible en chaque point x (car ceci équivaut à dire que l'anneau $\mathscr{H}_x$ est intègre). Toute variété analytique est un espace normal. Si X est un espace analytique quelconque, l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathscr{H}_x$ soit intègre et intégralement clos est un ouvert partout dense, et son complémentaire est un sous-espace analytique (Oka).† De plus, on peut attacher canoniquement à l'espace X un espace analytique normal $\tilde{X}$ (dit 'normalisé' de X), dont les points sont en correspondance biunivoque avec les composantes irréductibles de X en chacun de ses points, de telle manière que l'application naturelle $\tilde{X} \to X$ soit holomorphe et 'propre' (i.e. l'image réciproque de tout compact de X est un compact de $\tilde{X}$). L'espace normalisé $\tilde{X}$ jouit de la propriété universelle suivante: toute application holomorphe surjective $Y \to X$, où Y est un espace analytique normal, se factorise d'une seule manière en $Y \to \tilde{X} \to X$, où l'application $Y \to \tilde{X}$ est holomorphe.

Signalons deux propriétés importantes des espaces analytiques normaux: les composantes irréductibles (au sens global) d'un espace normal ne sont autres que ses composantes connexes; les points non-uniformisables d'un espace normal de dimension n forment un sous-espace analytique de dimension $\leqslant n-2$.‡

4. Etude géométrique d'une application analytique $X \to Y$

Soit f une application analytique d'un espace analytique X dans un espace analytique Y. Il est évident que l'image réciproque $f^{-1}(Y')$ d'un

† Voir [25], et [8], Exposé 10. ‡ Voir [8], Exposé 11, théorème 2.

sous-espace analytique Y' de Y est un sous-espace analytique de X. En revanche, on sait bien que l'image directe d'un sous-espace analytique de X n'est pas, en général, un sous-espace analytique de Y. Déjà $f(X)$ n'est pas nécessairement fermé dans Y; et il n'est même pas vrai, en général, que chaque point de $f(X)$ possède dans Y un voisinage ouvert U tel que $f(X) \cap U$ soit un sous-ensemble analytique de U. Un contre-exemple classique est le suivant: X est l'espace $\mathbf{C}^2$ (coordonnées x_1, x_2), Y est l'espace $\mathbf{C}^2$ (coordonnées y_1, y_2), et f est l'application

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_1 x_2);$$

l'image $f(X)$ se compose de tous les points de Y, sauf ceux pour lesquels $y_1 = 0$, $y_2 \neq 0$; quel que soit l'ouvert U contenant l'origine, $U \cap f(X)$ n'est pas fermé dans U.

Une analyse subtile du comportement d'une application holomorphe $f\colon X \rightarrow Y$ a conduit Stein et Remmert à d'importants résultats,† dont je voudrais mentionner quelques-uns. Considérons, pour chaque point $x \in X$, la 'fibre' $f^{-1}(f(x))$, qui est un sous-espace analytique contenant x; soit $d(x)$ la plus grande des dimensions de ses composantes irréductibles au point x; pour chaque entier k, soit X_k l'ensemble des points de X où $d(x) \geqslant k$. On a $X = X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_k \supset \ldots$, et l'on montre que les X_k sont des *sous-espaces analytiques*; de plus, chaque fibre de l'application $X_k \rightarrow Y$ induite par f est de dimension $\geqslant k$ en chacun de ses points. Si X est de dimension finie, on définit une suite de sous-ensembles analytiques

$$\emptyset = X(-1) \subset X(0) \subset \ldots \subset X(r) \subset \ldots,$$

avec $X(r) = X$ pour r grand. Les $X(r)$ se définissent par récurrence descendante sur r: à chaque composante irréductible A de $X(r+1)$, on associe le sous-espace A_k (avec $k = \dim(A) - r$), et $X(r)$ est réunion des A_k. On démontre alors ceci: tout point $x \in X(r) - X(r-1)$ possède dans $X(r)$ un voisinage dont l'image par f est un sous-ensemble analytique purement r-dimensionnel au point $f(x)$. A partir de là, on démontre le résultat fondamental de Remmert: *si l'application analytique $f\colon X \rightarrow Y$ est propre* (c'est-à-dire, répétons-le, si l'image réciproque de tout compact de Y est un compact de X), *alors l'image $f(X)$ est un sous-espace analytique de Y, et la dimension de $f(X)$ est égale au plus petit des entiers r tels que $X(r) = X$*; de plus, si X est (globalement) irréductible, il en est de même de $f(X)$.

Dans les démonstrations des résultats précédents, l'on fait un usage essentiel d'un théorème de Remmert et Stein,‡ qui sert dans maintes

† Voir [29], [32], [38]. ‡ Voir [28], ainsi que [8], Exposés 13 et 14 de Stein.

circonstances, et se formule ainsi: *soit Z un sous-ensemble analytique, de dimension $< n$, d'un espace analytique Y; et soit A un sous-ensemble analytique purement n-dimensionnel de l'ouvert $Y-Z$; alors l'adhérence de A dans Y est un sous-ensemble analytique purement n-dimensionnel de Y.*

Le théorème de Remmert s'applique notamment lorsque X est un espace analytique *compact*, car f est alors automatiquement propre: l'image $f(X)$ est alors toujours un sous-ensemble analytique de Y. En particulier, supposons que Y soit l'espace projectif (complexe) P_n; pour toute application analytique $f: X \to P_n$, l'image $f(X)$ est un sous-ensemble *algébrique* de P_n, d'après le célèbre théorème de Chow (lequel est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème de Remmert–Stein, comme je l'avais signalé dans la conférence que j'ai faite au Congrès de Harvard en 1950). A titre d'application,† considérons k fonctions méromorphes f_i sur un espace analytique *compact* X; elles définissent une application analytique $f: X \to (P_1)^k$. A vrai dire, ceci n'est pas tout à fait correct, à cause des points d'indétermination des f_i; mais on voit facilement qu'on peut 'modifier' l'espace X de façon que l'application f soit partout définie: d'une façon précise, il existe un espace analytique compact X' et une application analytique $\pi: X' \to X$ qui définit un isomorphisme des corps de fonctions méromorphes $K(X)$ et $K(X')$, et qui jouit de la propriété que les $f_i \circ \pi = g_i$ n'ont pas points d'indétermination sur X'. Les g_i définissent donc une application analytique $g: X' \to (P_1)^k$, dont l'image est un sous-espace algébrique. Si les f_i sont analytiquement dépendantes (c'est-à-dire si les différentielles df_i sont linéairement dépendantes), il en est de même des g_i, donc le rang de l'application g est $< k$, et l'image $g(X')$ est distincte de $(P_1)^k$; il existe donc un polynôme non identiquement nul qui s'annule sur l'image de g, autrement dit les f_i sont *algébriquement dépendantes* (théorème de Thimm, démontré ainsi par Remmert). De la même manière, on montre que si n désigne la dimension de l'espace analytique compact X, le corps $K(X)$ des fonctions méromorphes est une extension algébrique simple d'un corps de fractions rationnelles à k variables, avec $k \leqslant n$ (théorème annoncé tout d'abord par Chow).

5. Quotients d'espaces analytiques

Les questions précédentes sont en rapport étroit avec le problème, étudié par Stein[39], des espaces quotients d'espaces analytiques. Soit X un espace analytique, que nous supposerons *normal*; soit R une relation

† Voir [30].

d'équivalence *propre* sur X (ceci signifie que R satisfait à l'une des trois conditions suivantes, équivalentes:

(i) le R-saturé de tout compact de X est compact;

(ii) l'espace quotient X/R est localement compact et l'application $p: X \to X/R$ est propre;

(iii) R désignant le graphe de la relation d'équivalence, l'application de projection $R \to X$ est propre).

Sur l'espace quotient X/R on a une structure annelée évidente: à tout ouvert $U \subset X/R$ on associe l'anneau $\mathscr{H}(U)$ des fonctions continues f sur U, telles que $p \circ f$ soit holomorphe dans $p^{-1}(U)$; cet anneau s'identifie à celui des fonctions holomorphes dans $p^{-1}(U)$ et constantes sur les classes d'équivalence. Le problème se pose de savoir si X/R, muni de cette structure annelée, est un espace analytique normal. Il faut, bien entendu, faire des hypothèses convenables sur la relation R. Nous ferons désormais l'hypothèse suivante:

(H) chaque point $z \in X/R$ possède un voisinage ouvert U tel que, pour tout couple de fibres distinctes de $p^{-1}(U)$, il existe une application holomorphe de $p^{-1}(U)$ dans un espace analytique, constante sur les fibres, et prenant des valeurs distinctes sur les deux fibres en question. (Par exemple, il en est bien ainsi lorsque les fonctions de l'anneau $\mathscr{H}(U)$ séparent les points de U.)

Avec l'hypothèse (H), il n'est pas encore certain que X/R soit un espace analytique normal, mais c'est presque vrai. D'une façon précise, l'application propre $p: X \to X/R$ admet une factorisation $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X/R$, où Y est un espace analytique normal, f une surjection holomorphe (et propre), et g un morphisme d'espaces annelés jouissant de la propriété suivante: les fibres de g sont des ensembles finis, et il existe un sous-ensemble fermé 'mince' A de X/R tel que $g^{-1}(z)$ soit réduit à un seul point lorsque $z \notin A$ (on dit qu'une partie fermée A de X/R est 'mince' si tout point de A possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe une fonction de $\mathscr{H}(U)$ nulle sur $A \cap U$ et non identiquement nulle). De plus, une telle factorisation est *unique* 'à un isomorphisme près', et g induit un isomorphisme des espaces annelés $Y - g^{-1}(A)$ et $(X/R) - A$.

L'espace Y est ainsi déterminé à un isomorphisme près par la relation d'équivalence R (supposée satisfaire à (H)); on peut l'appeler le *quotient analytique* de X relativement à R.

Le théorème précédent, qui résulte des travaux de Stein, possède d'intéressantes applications, comme on le verra tout à l'heure.

6. Classification des espaces analytiques

Proposons-nous d'abord de voir comment un espace analytique X se comporte vis-à-vis des fonctions holomorphes. Soit $\mathscr{H}(X)$ l'anneau des fonctions holomorphes dans X (tout entier); cet anneau peut se réduire aux constantes, par exemple si X est *compact* et connexe. Considérons, pour un espace analytique X, les propriétés suivantes:

(a) Les éléments de $\mathscr{H}(X)$ séparent les points de X (autrement dit, pour tout couple de points distincts x, x', il existe une f holomorphe dans X et telle que $f(x) \neq f(x')$).

(b) Pour chaque point $x \in X$, il existe un système fini de $f_i \in \mathscr{H}(X)$ qui est 'séparant' au point x (on entend par là que, pour l'application $f\colon X \to \mathbf{C}^n$ définie par les n fonctions f_i, x est un point isolé de la fibre $f^{-1}[f(x)]$).

(c) Tout sous-ensemble analytique compact de X est fini.

Il est facile de voir que (a) entraîne (b). D'autre part, il est presque immédiat que (b) entraîne (c).

Grauert[14] a démontré le résultat surprenant que voici: si X est irréductible, la condition (b) entraîne que X est *réunion dénombrable de compacts* (on sait que Calabi et Rosenlicht[6] avaient donné l'exemple d'une variété analytique, connexe, qui n'est pas réunion dénombrable de compacts). Grauert a aussi montré que si X, irréductible et de dimension n, satisfait à (b), il existe un système de n fonctions $f_i \in \mathscr{H}(X)$ qui est 'séparant' en tout point $x \in X$.

A côté des propriétés (a), (b), (c), il est une propriété d'une nature différente: on dit que X est *holomorphiquement convexe* si, pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $\hat{K}$ des $x \in X$ tels que l'on ait

$$|f(x)| \leqslant \sup_K |f| \quad \text{pour toute} \quad f \in \mathscr{H}(X)$$

est compact. Il revient au même de dire que, pour tout sous-ensemble infini et discret de X, il existe une $f \in \mathscr{H}(X)$ qui n'est pas bornée sur cet ensemble. Il est trivial que tout espace analytique compact est holomorphiquement convexe; en revanche, un espace compact ne satisfait à (a), (b) ou (c) que s'il est fini.

Rappelons le théorème connu: pour qu'un domaine étalé sans ramification dans $\mathbf{C}^n$ soit un domaine d'holomorphie, il faut et il suffit qu'il soit holomorphiquement convexe (Oka[26] pour le cas général des domaines à une infinité de feuillets).

Pour un espace X holomorphiquement convexe, les conditions (b) et (c) sont équivalentes, comme on le voit facilement. De plus Grauert a prouvé (ce qui est beaucoup plus difficile) que (b) et (a) sont équivalentes pour un X holomorphiquement convexe[14]. Une *variété analytique* X qui est holomorphiquement convexe et satisfait à l'une des conditions équivalentes (a), (b), (c) est une *variété de Stein*, et réciproquement. Dans le cas général, un espace analytique X qui est holomorphiquement convexe et satisfait à (a), (b), (c) est appelé par Grauert un espace *holomorphiquement complet*. Il est immédiat que tout sous-espace analytique d'un espace holomorphiquement complet est holomorphiquement complet. C'est pour les espaces holomorphiquement complets que les théorèmes fondamentaux de la théorie des faisceaux analytiques cohérents, établis antérieurement pour les variétés de Stein, sont valables; mais ceci est un autre sujet, qui nous entraînerait trop loin.

Soit X un espace holomorphiquement convexe, que nous supposerons normal; nous ne faisons sur X aucune des hypothèses (a), (b), ou (c). Considérons, dans X, la relation d'équivalence R que voici: x et x' sont R-équivalents si $g(x) = g(x')$ pour toute $g \in \mathscr{H}(X)$. Il est clair que la condition (H) du no. 5 est remplie; on peut donc appliquer ici le théorème de ce numéro. Soit alors Y le 'quotient analytique' de X relativement à la relation R; on voit tout de suite que la surjection holomorphe $f: X \to Y$ définit un isomorphisme des anneaux de fonctions holomorphes $\mathscr{H}(X)$ et $\mathscr{H}(Y)$; puisque l'application f est propre, l'espace Y est, comme X, holomorphiquement convexe. De plus il est évident que Y satisfait à la condition (b), donc Y est holomorphiquement complet, et en particulier Y satisfait à (a); il en résulte que l'application $Y \to X/R$ est un isomorphisme d'espaces annelés. Ainsi *l'espace quotient X/R, muni de sa structure annelée, est un espace normal, holomorphiquement complet.* On le notera X^*; il est naturellement attaché à X (Remmert[31] le nomme le 'noyau' de X). On en déduit notamment: tout espace analytique irréductible et holomorphiquement convexe est réunion dénombrable de compacts (cf.[31]): si X est normal, cela tient au fait que X^* est réunion dénombrable de compacts d'après Grauert, et que l'application $X \to X^*$ est propre; si X n'est pas normal, on considère le normalisé $\tilde{X}$.

On peut considérer d'autres classes d'espaces analytiques. Nous dirons que X est *projectivement complet* ('analytiquement complet' dans la terminologie de Grauert et Remmert) si X est holomorphiquement convexe et si, pour tout $x \in X$, il existe une application holomorphe de X dans un espace projectif P_k qui est 'séparante' au point x. On peut démontrer que tout espace analytique normal X, holomorphiquement convexe, possède un plus grand quotient qui est projectivement complet: c'est un espace normal Y, projectivement complet, muni d'une surjection holomorphe et propre $f: X \to Y$, qui jouit de la propriété universelle suivante: toute application holomorphe de X dans un espace projectivement complet Z se factorise (nécessairement d'une seule manière) en $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, où g est holomorphe.

Nous dirons qu'un espace analytique X est *algébriquement complet* s'il est holomorphiquement convexe et si, pour tout $x \in X$, il existe une application holomorphe de X dans un espace algébrique (non nécessairement projectif) qui est séparante au point x. Tout espace analytique normal X, holomorphiquement convexe, possède un plus grand quotient algébriquement complet, qui jouit d'une propriété universelle vis-à-vis des applications holomorphes de X dans les espaces algébriquement complets.

De là résulte en particulier ceci: tout espace analytique normal et compact X possède un plus grand quotient qui soit une variété algébrique projective (normale); tout espace analytique normal et compact possède un plus grand quotient qui soit une variété algébrique (non nécessairement projective).

Les résultats précédents, dont la démonstration sera publiée ailleurs, constituent une généralisation d'une situation bien connue: tout tore complexe possède un plus grand quotient qui est une variété abélienne (c'est-à-dire un tore complexe satisfaisant aux conditions de Riemann).

7. Problèmes de plongement

Il s'agit de 'réaliser' certains espaces analytiques comme sous-espaces d'espaces particulièrement simples, tels que les espaces numériques $\mathbf{C}^n$ et les espaces projectifs P_n. Dans chaque cas, le sens du mot 'réaliser' a besoin d'être précisé.

Si l'on veut réaliser un espace analytique X dans un espace $\mathbf{C}^n$, le moins que l'on puisse exiger est de trouver une application holomorphe et injective $f: X \to \mathbf{C}^n$. Or ceci n'est possible que si les fonctions holomorphes sur X séparent les points de X (condition (a) du no. 6). Remmert[31] a montré que cette condition nécessaire (a) est aussi suffisante, du moins si l'on suppose que X est réunion dénombrable de compacts (ce qui est automatiquement le cas lorsque X est irréductible). D'une façon précise, si X est purement k-dimensionnel, satisfait à (a) et est réunion dénombrable de compacts, il existe une application holomorphe et injective de X dans $\mathbf{C}^{2k+1}$.

On peut être plus exigeant, en demandant une application $f: X \to \mathbf{C}^n$ qui soit non seulement holomorphe et injective, mais *propre*. Ceci impose à X de satisfaire à (a) et d'être holomorphiquement convexe; autrement dit, X doit être holomorphiquement complet. Remmert[31] montre que, réciproquement, tout X holomorphiquement complet qui est réunion dénombrable de compacts peut être plongé dans un $\mathbf{C}^n$ par une application f holomorphe, injective et propre; alors l'image $f(X)$ est un sous-espace analytique Y de $\mathbf{C}^n$; mais il faut prendre garde que cette 'réalisation' Y de X ne respecte pas nécessairement les structures annelées. Cependant, lorsque X est une véritable variété analytique (variété de Stein), on peut réaliser X comme sous-variété analytique d'un espace $\mathbf{C}^n$ (avec un n qui ne dépend que de la dimension de X).

Je voudrais maintenant dire quelques mots des plongements dans l'espace projectif (l'image étant alors un sous-ensemble algébrique). On a établi ces dernières années une série de théorèmes qui garantissent l'existence de tels plongements. Sans entrer dans le détail (ce qui nécessiterait toute une conférence), rappelons seulement le théorème fondamental de Kodaira[20]: une variété analytique compacte sur laquelle existe une forme de Kähler à périodes rationnelles est isomorphe à une variété algébrique plongée sans singularités dans un espace projectif.

Soit X une variété analytique dans laquelle un groupe discret d'automorphismes G *opère proprement* (ce qui signifie que, pour tout compact $K \subset X$, les $s \in G$ tels que sK rencontre K sont en nombre fini). Considérons l'espace quotient X/G muni de sa structure annelée (cf. no. 5); on montre[10] que c'est un espace analytique normal (mais ce n'est pas, en général, une variété analytique, à cause de l'existence de points fixes pour les transformations de G); plus généralement, si X est un espace analytique normal et si G est un groupe discret opérant proprement dans X, X/G est un espace analytique normal. Cela étant, si X/G est *compact*, il est naturel de se demander si X/G peut être réalisé comme sous-espace analytique (donc algébrique) d'un espace projectif. Effectivement, il en est toujours ainsi lorsque X est un *domaine borné* d'un espace numérique $\mathbf{C}^n$; le plongement projectif de X/G peut alors être obtenu au moyen d'un système fini de formes automorphes (séries de Poincaré) d'un même poids;† la variété algébrique, image du plongement, est 'projectivement normale'.

Mais les cas les plus intéressants, dans la théorie des fonctions automorphes, sont ceux où l'espace X/G *n'est pas compact*; alors il ne peut être question de réaliser X/G comme variété algébrique dans un espace projectif. On peut néanmoins se proposer de chercher une application analytique $f\colon X/G \to P_n$ qui soit injective et définisse un isomorphisme

† Voir [10] et [2].

de l'espace analytique X/G sur un 'ouvert de Zariski' d'une variété algébrique projective V (c'est-à-dire sur le complémentaire, dans V, d'un sous-ensemble algébrique W). On sait maintenant que ceci est possible dans la théorie des fonctions modulaires de Siegel[36, 37]. D'une façon précise, soit X l'espace de Siegel, formé des (n, n)-matrices symétriques complexes $z = x + iy$ telles que y soit définie-positive; le groupe symplectique réel $Sp(n, R)$, formé des $(2n, 2n)$-matrices réelles

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d sont des (n, n)-matrices telles que ${}^tMJM = J$, avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix},$$

opère dans X par $z \to (az+b)(cz+d)^{-1}$; dans ce groupe de transformations de X, on considère le sous-groupe discret G défini par les matrices à coefficients entiers. Le quotient $X/G = V_n$ est un espace analytique normal, non compact. Satake[34] a montré comment on peut compactifier V_n en définissant une topologie convenable sur la réunion de $V_n, V_{n-1}, \ldots, V_1, V_0$, et il a de plus défini une structure annelée sur ce compactifié V_n^*, structure qui induit, bien entendu, les structures d'espace analytique des sous-espaces V_n (ouvert dans V_n^*), V_{n-1}, etc. Puis Baily[3] a prouvé que l'espace annelé V_n^* est effectivement un espace analytique normal, ainsi que l'avait conjecturé Satake, et a de plus montré que V_n^* peut se réaliser comme variété algébrique dans un espace projectif,

$$V_{n-1}^* = V_n^* - V_n$$

s'identifiant à une sous-variété algébrique de V_n^*. Le plongement projectif peut être obtenu par des formes automorphes d'un même poids convenable (il s'agit de formes automorphes pour les puissances du facteur d'automorphie $\det(cz+d)^2$). L'existence d'un tel plongement permet de prouver que toute fonction méromorphe dans X et invariante par G s'exprime comme quotient de deux formes automorphes de même poids (du moins si $n \geqslant 2$). On peut compléter ces résultats, et montrer que l'algèbre graduée des formes automorphes des divers poids est engendrée par un nombre fini d'éléments (comme algèbre sur le corps complexe).†
D'autre part, tous ces résultats s'étendent au cas de n'importe quel sous-groupe du groupe symplectique qui est 'commensurable' au groupe modulaire; les variétés algébriques projectives qui sont ainsi attachées à ces groupes sont des 'revêtements ramifiés' les unes des autres.

† Voir [12], Exposé 17.

8. Application à la théorie des variétés analytiques réelles

Il est superflu de rappeler la définition d'une variété analytique réelle (abstraite); les modèles sont ici les ouverts de l'espace numérique réel $\mathbf{R}^n$, et les changements de coordonnées locales sont analytiques-réels. Nous ne considérerons que les variétés analytiques-réelles qui peuvent être recouvertes au moyen d'une famille dénombrable de compacts, ce qui revient à supposer l'existence d'une base dénombrable d'ouverts pour la topologie.

Soit V une variété analytique-réelle de dimension n; les résultats de Whitney[41] permettent d'affirmer l'existence d'une application injective et propre f: $V \to \mathbf{R}^{2n+1}$, indéfiniment différentiable et de rang n en tout point, dont l'image est une sous-variété de $\mathbf{R}^{2n+1}$ qu'on peut même supposer analytique. La question était restée ouverte de savoir si l'on peut exiger en outre que le plongement f soit *analytique*; en d'autres termes, toute variété analytique-réelle (abstraite) peut-elle être réalisée, au sens de la structure analytique, comme sous-variété analytique d'un espace numérique réel? Il y a un an à peine, une réponse positive a été donnée par Morrey[24] dans le cas où V est compacte; auparavant, Malgrange[23] avait donné une réponse affirmative pour toute variété analytique V, compacte ou non, mais sous la restriction de l'existence d'un ds^2 analytique sur V (la méthode de Malgrange reposait sur la théorie des équations elliptiques). Grauert[18] vient de prouver enfin que toute variété analytique-réelle (sans aucune autre restriction que l'hypothèse d'une base dénombrable d'ouverts) peut se réaliser comme sous-variété analytique d'un espace numérique; ce résultat est obtenu par des méthodes analytiques-complexes, et c'est à ce titre qu'il en est question ici. Voici quelques détails au sujet de cet important théorème.

On sait que toute variété analytique-réelle V peut être plongée comme sous-espace fermé d'une variété analytique complexe X, de manière que X soit une 'complexification' de V: ceci signifie que chaque point $x \in V$ possède un voisinage ouvert U (dans X) dans lequel on a un système de coordonnées locales complexes tel que les points de $V \cap U$ soient précisément les points à coordonées réelles, celles-ci servant de coordonnées locales pour V. Si n est la dimension réelle de V, n est donc la dimension complexe de X. Grauert montre qu'ainsi plongée dans X, V possède un système fondamental de voisinages ouverts qui sont des variétés de Stein; il est impossible de donner ici une idée de la démonstration, fort délicate, et qui met en œuvre la théorie des faisceaux analytiques cohérents et celle des fonctions plurisousharmoniques (introduites par Lelong il y a plus de dix ans). A ce propos, il est bon de noter qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété analytique-complexe X, connexe et holomorphiquement convexe, soit une variété de Stein, est qu'il existe sur X une fonction 'strictement plurisousharmonique'.

Revenons à la variété analytique-réelle V, plongée dans une variété de Stein X qui en est une complexification. Appliquons à X le théorème de plongement de Remmert (no. 7); ceci donne un plongement analytique-réel de V dans un espace numérique réel. On pourrait aussi, sans utiliser le théorème de Remmert, procéder comme suit: le fait que V possède un système fondamental de voisinages ouverts qui sont des variétés de Stein entraîne que les théorèmes fondamentaux de la théorie des faisceaux analytiques cohérents sont applicables à la variété analytique-réelle V[11]; on sait alors que l'anneau des fonctions analytiques-réelles, sur V, est assez riche pour fournir une application analytique de V dans un espace $\mathbf{R}^k$, dont le rang soit égal en tout point de V à la dimension de V; d'où l'existence d'un ds^2 analytique sur V, et l'on peut appliquer le théorème de Malgrange.

L'existence d'un plongement analytique propre de V dans un $\mathbf{R}^k$ permet d'appliquer à V le théorème d'approximation de Whitney[40]: toute fonction p fois continûment différentiable sur V peut être arbitrairement approchée par des fonctions *analytiques* sur V, l'approximation s'entendant au sens de la convergence uniforme de la fonction et de chacune de ses dérivées d'ordre $\leqslant p$; et l'on peut même exiger une convergence de plus en plus rapide à l'infini. De là résulte évidemment que si une variété analytique-réelle est réalisable différentiablement dans un espace $\mathbf{R}^k$, elle est aussi réalisable analytiquement dans le même $\mathbf{R}^k$. Toute variété analytique-réelle V de dimension n peut donc être analytiquement réalisée dans $\mathbf{R}^{2n+1}$.

D'autre part, le fait que la théorie des faisceaux analytiques cohérents s'applique à toute variété analytique-réelle V a des conséquences agréables, telles que celles-ci: toute sous-variété analytique W de V peut être définie globalement par des équations analytiques $f_i = 0$, en nombre fini (les f_i étant analytiques dans V tout entière); de plus, toute fonction analytique sur W est induite par une fonction analytique dans V; la cohomologie réelle de V peut se calculer au moyen des formes différentielles analytiques, etc....[11]

Notons que tous ces résultats nécessitent l'usage des méthodes analytiques-complexes, qui semblent ainsi commander toute étude approfondie de l'analytique-réel. Ceci est confirmé par le fait que la seule notion de *sous-ensemble analytique-réel* (d'une variété analytique-réelle V) qui ne conduise pas à des propriétés pathologiques doit se référer à l'espace complexe ambiant: il faut considérer les sous-ensembles fermés E de V tels qu'il existe une complexification X de V et un sous-ensemble analytique-complexe E' de X, de manière que $E = E' \cap V$. On démontre[11] que ce sont aussi les sous-ensembles de V qui peuvent être définis globalement par un nombre fini d'équations analytiques. La notion de sous-ensemble analytique-réel a ainsi un caractère essentiellement *global*, contrairement à ce qui avait lieu pour les sous-ensembles analytiques-complexes.

Bruhat et Whitney[5] viennent d'étudier ces sous-ensembles analytiques-réels d'une variété analytique-réelle V. Ils prouvent notamment que si E est un sous-ensemble analytique de V, il existe une famille localement finie de sous-ensembles analytiques irréductibles (globalement) E_i telle que $E_i \not\subset E_j$ pour $i \neq j$, et que E soit la réunion des E_i; cette famille est uniquement déterminée à l'ordre près. De plus, si E est irréductible et de dimension p, tout sous-ensemble analytique de E, distinct de E, a toutes ses composantes irréductibles de dimension $\leqslant p-1$ (c'est là un résultat qui semble naturel; néanmoins il serait faux si l'on avait adopté, pour la notion de sous-ensemble analytique, la définition de caractère local à laquelle on songe naturellement).

9. Espaces fibrés analytiques†

Nous nous bornerons, pour simplifier l'exposition, au cas des *fibrés principaux*. Considérons d'abord le cas analytique-complexe: on a un espace analytique X, un groupe de Lie complexe G, et l'on considère les fibrés analytiques principaux (localement triviaux au sens analytique-complexe) ayant pour base X et pour groupe structural G; deux tels fibrés P et P' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de l'espace analytique P sur l'espace analytique P', qui soit compatible avec les opérations du groupe G et qui induise l'application identique de la base X. On sait que les classes de fibrés isomorphes sont en correspondance biunivoque avec l'ensemble de cohomologie $H^1(X, \mathbf{G}^a)$, $\mathbf{G}^a$ désignant le faisceau des germes d'applications *holomorphes* de X dans G. On pourrait aussi considérer les classes de fibrés *topologiques* principaux, qui sont en correspondance biunivoque avec les éléments de $H^1(X, \mathbf{G}^c)$, $\mathbf{G}^c$ désignant le faisceau des germes d'applications *continues* de X dans G. On a une application naturelle

$$* \quad H^1(X, \mathbf{G}^a) \to H^1(X, \mathbf{G}^c)$$

† Voir les travaux de Grauert[15, 16, 17], ainsi que l'exposition qui en est faite dans [9].

définie par l'injection $\mathbf{G}^a \to \mathbf{G}^c$; elle n'est, en général, ni injective ni surjective. Cependant Grauert a démontré que si X est un espace *holomorphiquement complet* (cf. no. 6), l'application * est *bijective*; autrement dit, si deux fibrés analytiques principaux de base X et de groupe structural G sont topologiquement isomorphes, ils sont analytiquement isomorphes; et tout fibré topologique principal, de base X et de groupe G, peut être muni d'une structure de fibré analytique principal, compatible avec sa structure de fibré topologique. Ce résultat important est établi par des méthodes fort difficiles, et qu'il ne semble pas possible de simplifier substantiellement dans l'état actuel des Mathématiques. Les démonstrations font d'ailleurs intervenir simultanément d'autres problèmes. En voici quelques-uns, que nous formulons seulement dans un cas particulier pour simplifier l'exposé: toute application continue $X \to G$ est-elle homotope à une application holomorphe? Si deux applications holomorphes $X \to G$ sont homotopes dans l'espace des applications continues, le sont-elles dans l'espace des applications holomorphes? Si une application holomorphe $Y \to G$ (où Y désigne un sous-espace analytique de X) est prolongeable en une application continue $X \to G$, est-elle prolongeable en une application holomorphe $X \to G$? Toutes ces questions reçoivent une réponse affirmative lorsque l'espace X est holomorphiquement complet. Si l'on ne fait pas cette hypothèse, on a des réponses partielles lorsque le groupe G est résoluble (Frenkel[13]).

D'une manière générale, lorsque X n'est pas holomorphiquement complet, la classification des fibrés analytiques de base X est un problème fort intéressant mais sur lequel on ne sait encore que peu de choses. La classification des fibrés vectoriels a été faite par Grothendieck[19] dans le cas où X est la droite projective complexe, et par Atiyah[1] lorsque X est une courbe algébrique de genre 1.

Je voudrais encore dire quelques mots des fibrés analytiques-réels. On peut vérifier que les méthodes de Grauert sont susceptibles, moyennant des modifications adéquates, d'être appliquées aux fibrés analytiques-réels, compte tenu du fait que la théorie des faisceaux analytiques cohérents s'applique maintenant aux variétés analytiques-réelles sans aucune restriction (grâce au théorème de plongement de Grauert). On peut alors montrer que tous les résultats énoncés plus haut pour le cas où X est un espace analytique holomorphiquement complet et G un groupe de Lie complexe, sont valables lorsque X est une variété analytique-réelle et G un groupe de Lie réel. En particulier, *la classification analytique des fibrés principaux coïncide avec leur classification topologique.*

10. Conclusion

Cet aperçu de résultats récents dans la théorie des espaces analytiques est forcément incomplet. Je regrette notamment de n'avoir même pas mentionné la toute nouvelle théorie des 'déformations de structures complexes'; mais c'est un sujet qui apparaît déjà assez vaste pour nécessiter une conférence à lui seul.† J'ai dû aussi laisser de côté le problème du prolongement des sous-ensembles analytiques (complexes), auquel Rothstein a apporté de si intéressantes contributions, ainsi que le problème analogue du prolongement des faisceaux analytiques cohérents. Je signale enfin un problème qui mérite de retenir l'attention: sur un espace analytique général, on n'a pas encore de théorie satisfaisante des formes différentielles; si on considère un point non-uniformisable et que l'on réalise un voisinage de ce point par un sous-ensemble analytique d'un ouvert d'un espace $\mathbf{C}^n$, il y a certainement lieu de considérer d'autres 'formes différentielles' que celles qui sont induites par les formes différentielles de l'espace ambiant $\mathbf{C}^n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Atiyah, M. F. Vector bundles over an elliptic curve. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 7, 414–452 (1957).
[2] Baily, W. L. On the quotient of an analytic manifold by a group of analytic homeomorphisms. *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, 40, 804–808 (1954).
[3] Baily, W. L. Satake's compactification of V_n. *Amer. J. Math.* 80, 348–364 (1958).
[4] Behnke, H. und Stein, K. Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. *Math. Ann.* 124, 1–16 (1951).
[5] Bruhat, F. et Whitney, H. Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels. *Comment Math. Helv.* 33, 132–160 (1959).
[6] Calabi, E. and Rosenlicht, M. Complex analytic manifolds without countable base. *Proc. Amer. Math. Soc.* 4, 335–340 (1953).
[7] Cartan, H. Séminaire 1951–52, École Normale Supérieure, Paris.
[8] Cartan, H. Séminaire 1953–54, École Normale Supérieure, Paris.
[9] Cartan, H. Espaces fibrés analytiques. *Symposium de Topologie, Mexico*, 1956, 97–121.
[10] Cartan, H. Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. Algebraic Geometry and Algebraic Topology. *A Symposium in Honor of S. Lefschetz*, 90–102. Princeton, 1957.
[11] Cartan, H. Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes. *Bull. Soc. Math. Fr.* 85, 77–99 (1957).
[12] Cartan, H. Séminaire 1957–58, École Normale Supérieure, Paris.
[13] Frenkel, J. Cohomologie non abélienne et espaces fibrés. *Bull. Soc. Math. Fr.* 85, 135–220 (1957).
[14] Grauert, H. Charakterisierung der holomorph-vollständiger komplexen Räume. *Math. Ann.* 129, 233–259 (1955).

† Voir surtout [21], où l'on trouvera une bibliographie de la question.

[15] Grauert, H. Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen. *Math. Ann.* 133, 139–159 (1957).

[16] Grauert, H. Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. *Math. Ann.* 133, 450–472 (1957).

[17] Grauert, H. Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. *Math. Ann.* 135, 263–273 (1958).

[18] Grauert, H. On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Ann. Math.* (2), 68, 460–472 (1958).

[19] Grothendieck, A. Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. *Amer. J. Math.* 79, 121–138 (1957).

[20] Kodaira, K. On Kähler varieties of restricted type. *Ann. Math.* (2), 60, 28–48 (1954).

[21] Kodaira, K. and Spencer, D. C. On deformations of complex analytic structures. *Ann. Math.* (2), 67, 328–466 (1958).

[22] Lelong, P. Intégration sur un ensemble analytique complexe. *Bull. Soc. Math. Fr.* 85, 239–261 (1957).

[23] Malgrange, B. Plongement des variétés analytiques-réelles. *Bull. Soc. Math. Fr.* 85, 101–112 (1957).

[24] Morrey, Ch. B. The analytic imbedding of abstract real-analytic manifolds. *Ann. Math.* (2), 68, 159–201 (1958).

[25] Oka, K. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII. *J. Math. Soc. Japan*, 3, 204–214, 259–278 (1951).

[26] Oka, K. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX. Domaines finis sans point intérieur. *Jap. J. Math.* 23, 97–155 (1953).

[27] Osgood, W. F. *Lehrbuch der Funktionentheorie.* (Leipzig, 1928–32.)

[28] Remmert, R. und Stein, K. Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. *Math. Ann.* 126, 263–306 (1953).

[29] Remmert, R. Projektionen analytischer Mengen. *Math. Ann.* 130, 410–441 (1956).

[30] Remmert, R. Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen. *Math. Ann.* 132, 277–288 (1956).

[31] Remmert, R. Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes. *C.R. Acad. Sci., Paris*, 243, 118–121 (1956).

[32] Remmert, R. Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. *Math. Ann.* 133, 328–370 (1957).

[33] de Rham, G. Seminar on several complex variables. *Inst. Adv. Study*, mimeographed Notes, 1957–58.

[34] Satake, I. On the compactification of the Siegel space. *J. Indian Math. Soc.* 20, 259–281 (1956).

[35] Serre, J. P. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier*, 6, 1–42 (1955–6).

[36] Siegel, C. L. Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. *Math. Ann.* 116, 617–657 (1939).

[37] Siegel, C. L. Symplectic geometry. *Amer. J. Math.* 65, 1–86 (1943).

[38] Stein, K. Analytische Abbildungen allgemeiner analytischer Räume. *Colloque de Topologie, Strasbourg*, avril 1954.

[39] Stein, K. Analytische Zerlegungen komplexer Räume. *Math. Ann.* 132, 63–93 (1956).

[40] Whitney, H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* 36, 63–89 (1934).

[41] Whitney, H. The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space. *Ann. Math.* (2), 44, 220–246 (1945).