PROBLÈMES GLOBAUX DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES[1]

HENRI CARTAN

Ayant l'honneur de parler ici de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, je me propose non pas de vous donner un aperçu complet de la théorie dans son état actuel, mais de passer en revue quelques problèmes typiques de son développement récent; il s'agira surtout de problèmes *globaux* ("in the large"). La théorie des fonctions automorphes de plusieurs variables pourrait certes rentrer dans mon sujet; cependant je n'y ferai que quelques allusions, laissant à d'autres, plus qualifiés que moi, le soin de vous en entretenir éventuellement.

1. Variétés à structure analytique complexe. Une variété analytique-complexe, c'est, par définition, une variété de dimension paire $2n$ (c'est-à-dire un espace topologique dont chaque point possède un voisinage ouvert homéomorphe à l'espace euclidien de dimension $2n$), munie en outre de la donnée, en chaque point, d'un ou plusieurs systèmes de "coordonnées complexes locales": un système de coordonnées locales, en un point P, est un système de n fonctions à valeurs complexes $z_1, \cdots, z_n$, définies dans un voisinage ouvert V de P, et qui appliquent biunivoquement et bicontinûment V sur un ensemble ouvert de l'espace C^n de n variables complexes. Au sujet des systèmes de coordonnées locales, on fait les hypothèses suivantes: 1°. Tout système de coordonnées locales pour un point P est aussi un système de coordonnées locales pour tout point P' suffisamment voisin de P; 2°. Etant donnés deux systèmes de coordonnées locales en un point P, on passe de l'un à l'autre par une transformation *analytique-complexe* au voisinage de P. L'entier n se nomme la *dimension* (complexe) de la variété analytique-complexe.

Par exemple, l'espace projectif complexe (de dimension quelconque n) est une variété analytique-complexe. Voici un autre exemple: soit D un sous-ensemble ouvert de l'espace C^n; soit Γ un groupe discontinu d'automorphismes de D (automorphisme = transformation analytique-complexe, biunivoque, de D sur D); l'espace quotient D/Γ est muni d'une structure analytique-complexe, obtenue par passage au quotient à partir de la structure analytique-complexe naturelle de C^n.

Etant donnée une variété analytique-complexe B, on a la notion de *fonction analytique* (ou *holomorphe*) dans B: c'est une fonction définie dans B, à valeurs complexes, et qui, au voisinage de chaque point P, s'exprime comme fonction analytique des n coordonnées locales d'un système attaché à P. Par exemple, une fonction analytique dans D/Γ n'est autre chose qu'une fonction analytique dans

[1] Cette communication était mentionnée sur le programme imprimé sous le titre *Sur les fonctions analytiques de variables complexes*.

) et invariante par le groupe Γ (fonction *automorphe*). Plus généralement, on a la otion de fonction holomorphe dans un ensemble ouvert de B (un tel ensemble uvert étant lui-même muni d'une structure de variété analytique-complexe, ıduite par la structure de B). Précisons encore la notion de fonction holomorphe ans un sous-ensemble *compact* K de B: c'est, par définition, une fonction définie t holomorphe dans un voisinage ouvert de K; on convient d'identifier deux onctions quand elles coïncident dans un voisinage de K. Avec cette définition, les onctions holomorphes dans K forment un *anneau*; en particulier, on a l'anneau es fonctions holomorphes *en un point* de la variété B.

L'étude générale des variétés analytiques, et des fonctions holomorphes sur ces ariétés, est encore très peu avancée. Un des premiers problèmes qui se posent est suivant: existe-t-il une fonction holomorphe dans B et non constante? Il n'en xiste certainement pas si B est une variété *connexe* et *compacte*, parce qu'une onction holomorphe ne peut admettre de maximum, même au sens large, en un oint P de B sans être constante au voisinage de P. Mais on peut alors poser la uestion de savoir s'il existe des fonctions *méromorphes* non constantes sur une ariété compacte connexe B (une fonction méromorphe est une fonction qui, au oisinage de chaque point, peut s'écrire comme quotient de deux fonctions olomorphes). Par exemple: supposons que B soit l'espace quotient de l'espace ^{n} (considéré comme groupe additif) par un sous-groupe discret Γ engendré par n éléments linéairement indépendants; B est alors homéomorphe à un tore à $2n$ imensions réelles, muni d'une structure analytique-complexe; les fonctions ıéromorphes dans B ne sont autres que les "fonctions abéliennes", et on sait que ur existence n'est assurée que s'il y a certaines relations entre les périodes.[2] Jous reviendrons plus loin sur les variétés analytiques compactes; nous allons uparavant nous occuper de la "réalisation" d'une variété analytique dans espace C^n de n variables complexes.

Une "réalisation" de B, c'est une application analytique de B dans l'espace C^n, 'est-à-dire un système de n fonctions holomorphes $f_1, \cdots, f_n$. Si B est compacte onnexe, de telles fonctions sont nécessairement constantes, et il n'existe donc ue des réalisations triviales. On ne s'occupera donc que de la réalisation des ariétés (connexes) non compactes. Plus précisément, nous allons imposer aux onctions $f_1, \cdots, f_n$ d'avoir leur déterminant fonctionnel $\neq 0$ en tout point de B; 'est la condition nécessaire et suffisante pour que l'application f de B dans C^n oit *localement biunivoque*; cela exprime aussi que $f_1, \cdots, f_n$ constituent un ystème de coordonnées locales en tout point de B. Une réalisation de ce type appellera un *domaine étalé* dans C^n; en particulier, ce domaine étalé est *univalent* 'schlicht") si l'application f est une application *biunivoque* de B sur un sousısemble (ouvert) de C^n. Bien entendu, une même variété peut être susceptible de lusieurs réalisations; par exémple, elle peut avoir des réalisations *bornées* et 'autres réalisation non bornées (ainsi: le cercle $|z| < 1$ et le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$).

[2] A ce sujet, consulter le cours récent de C. L. Siegel, *Analytic functions of several comlex variables*, Institute for Advanced Study, Princeton, 1950, et un exposé de A. Weil au éminaire Bourbaki de mai 1949.

2. Domaines d'holomorphie. Il n'existe actuellement une théorie des *domaines d'holomorphie* que pour les variétés susceptibles d'une réalisation comme "domaine étalé".

Pour $n = 1$, tout domaine est le domaine total d'existence d'une fonction holomorphe convenable; mais on sait qu'il n'en est plus de même pour $n \geqq 2$. Rappelons l'exemple classique de Hartogs (1906): dans l'espace des 2 variables z_1 et z_2, considérons la réunion A des 2 ensembles compacts

$$|z_1| \leqq 1, \qquad |z_2| = 1,$$

et

$$z_1 = 0, \qquad |z_2| \leqq 1;$$

toute fonction holomorphe dans A se laisse prolonger en une fonction holomorphe dans le polycylindre compact $|z_1| \leqq 1$, $|z_2| \leqq 1$.

E. E. Levi a montré, peu d'années plus tard, qu'on en peut dire autant pour les fonctions méromorphes; il a aussi prouvé que toute fonction holomorphe (ou méromorphe) au voisinage de la sphère $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ se laisse prolonger en une fonction holomorphe (ou méromorphe) dans la boule $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqq 1$ résultat qui s'étend au cas de n variables complexes ($n \geqq 2$), et qui a été généralisé par Severi au cas où certaines variables sont réelles (l'une au moins étant complexe). On trouve, dans le livre récent de Bochner et Martin, une généralisation intéressante de ces résultats.

Il m'est impossible de retracer ici l'historique du développement de la théorie des domaines d'holomorphie. Retenons-en seulement deux choses: d'abord, la propriété, pour une variété B, de posséder une fonction holomorphe dans B et non prolongeable au-delà de B, est une propriété indépendante de la réalisation de B comme domaine étalé; autrement dit, le fait, pour B, d'être un domaine d'holomorphie, est une propriété de la variété analytique-complexe B, dès que B admet une réalisation spatiale comme domaine étalé.

La seconde chose que nous voulons mentionner, c'est la caractérisation des domaines d'holomorphie par une propriété interne de *convexité*[3] qui s'avère essentielle dans beaucoup de problèmes. Soit B une réalisation spatiale d'un domaine d'holomorphie, et soit K un sous-ensemble compact de B; soit r la distance de K à la frontière de B; alors, pour tout point z de B dont la distance à la frontière de B est $<r$, il existe une fonction f holomorphe dans B et telle que $|f(z)| > \sup_K |f|$ (théorème de Thullen). Réciproquement, si une réalisation spatiale B jouit de cette propriété (ou même d'une propriété affaiblie que nous ne précisons pas ici), B est un domaine d'holomorphie. Or l'ensemble K_r des points de B dont la distance à la frontière de B est $\leqq r$ est *compact*, tout au moins si B est univalent, ou, plus généralement, s'il existe un entier N tel que tout point de l'espace C^n soit couvert au plus N fois par B (domaine à un nombre borné de "feuillets"). Nous nous limiterons désormais à ce cas; alors le résultat précédent entraîne celui-ci: si B est un domaine d'holomorphie à un nombre

[3] Voir H. Cartan et P. Thullen, Math. Ann. t. 106 (1932) pp. 617–647.

borné de feuillets, B est réunion d'une suite croissante d'ensembles *compacts* P_k, dont chacun est défini par un nombre fini d'inégalités de la forme $|f_{kj}(z)| \leqq 1$ $(j = 1, 2, \cdots)$, les f_{kj} étant holomorphes dans B; plus exactement, P_k est une composante connexe, supposée compacte, d'un ensemble ainsi défini. Un ensemble compact du type de P_k sera appelé un *polyèdre analytique*; ainsi, tout domaine d'holomorphie à un nombre borné de feuillets est réunion d'une suite croissante de polyèdres analytiques; j'ignore si ce théorème est encore exact quand le nombre des feuillets de B n'est pas borné. La réciproque est vraie: si un domaine étalé B est réunion d'une suite croissante de polyèdres analytiques, c'est un domaine d'holomorphie; cela résulte d'un théorème de Behnke et Stein,[4] qui dit que la réunion d'une suite croissante de domaines d'holomorphie est un domaine d'holomorphie.

Les polyèdres analytiques ont été considérés explicitement pour la première fois par André Weil en 1935; *l'intégrale de* Weil,[5] qui généralise l'intégrale de Cauchy, exprime une fonction holomorphe dans un polyèdre analytique par une intégrale portant sur les valeurs de cette fonction sur les "arêtes" à n dimensions (réelles) du polyèdre. Mais la construction du noyau de cette intégrale soulève, dans le cas général, des difficultés qui ne peuvent être surmontées que grâce à la théorie des idéaux de fonctions holomorphes, dont il sera parlé plus loin.

A quoi reconnaît-on qu'un domaine donné B est un domaine d'holomorphie? Dès 1911, E. E. Levi avait indiqué des conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire la frontière d'une réalisation spatiale de B, lorsque cette frontière est suffisamment différentiable. Il s'agissait alors de savoir, étant donné un point frontière z_0 de B, s'il existe, dans l'intersection de B et d'un voisinage de z_0, une fonction holomorphe (ou méromorphe) qui admette z_0 comme point singulier essentiel. Il s'agissait donc d'un critère de nature *locale*, qui d'ailleurs s'exprimait en écrivant qu'une certaine forme hermitienne était définie positive au point z_0 considéré. Pendant longtemps la question est restée posée de savoir si de telles conditions locales, supposées vérifiées on chaque point frontière d'une réalisation spatiale de B, étaient suffisantes pour que B soit, *globalement*, un domaine d'holomorphie. Il était réservé à Oka de résoudre ce problème par l'affirmative en 1942, tout au moins dans le cas des domaines univalents.[6] La solution de Oka (qu'il a exposée pour $n = 2$) est l'aboutissement d'une suite de recherches difficiles et met en oeuvre toute une technique spéciale, d'ailleurs liée, elle aussi, à la théorie des idéaux de fonctions holomorphes. Le lemme de Oka qui donne la clef du problème est le suivant: soit z l'une des variables complexes de l'espace ambiant C^n; soient B_1 et B_2 les intersections du domaine B avec $\text{Re}(z) < \epsilon$ et $\text{Re}(z) > -\epsilon$ respectivement $(\epsilon > 0)$; alors, si B_1 et B_2 sont des domaines d'holomorphie, B est aussi un domaine d'holomorphie. On reconnaît ici un énoncé du type de ceux qui permettent d'effectuer, de proche en proche, le passage d'une propriété locale à une propriété globale.

[4] Math. Ann. t. 116 (1938) pp. 204–216.
[5] Math. Ann. t. 111 (1935) pp. 178–182.
[6] Tôhoku Math. J. t. 49 (1942) pp. 15–52.

3. Etude globale des idéaux de fonctions holomorphes. On peut y être conduit en analysant la notion de *sous-variété analytique*. Soit B une variété à structure analytique-complexe, de dimension (complexe) n; un sous-ensemble M de points de B sera une sous-variété analytique dans B (éventuellement décomposable) si c'est un sous-ensemble *fermé* de B, et si chaque point z de M possède, dans B, un voisinage ouvert $V(z)$ tel que $M \cap V(z)$ soit exactement l'ensemble des zéros communs à une famille de fonctions holomorphes dans $V(z)$; autrement dit, si, au voisinage de z, M peut être définie par des équations analytiques, qu'on peut d'ailleurs supposer en nombre fini. Il faut prendre garde que, malgré la terminologie de "sous-variété", M, comme espace topologique, n'est pas en général une variété: M peut posséder des points singuliers, dits *non essentiels*, analogues aux points singuliers d'une sous-variété algébrique de l'espace; l'ensemble de ces points singuliers forme, à son tour, une sous-variété analytique; au voisinage de tout point non singulier, M est doué d'une structure de variété analytique (au sens du §1), avec des systèmes de coordonnées locales.

La définition d'une sous-variété analytique M de B a ainsi un caractère *local.* Problème: est-il possible de définir M, *globalement* dans B, en égalant à zéro une famille (finie ou infinie) de fonctions holomorphes dans B tout entier? Ce problème peut avoir une réponse négative: par exemple, si B est une variété connexe compacte, et si M est non vide, toute fonction holomorphe qui s'annule sur M est identiquement nulle. Voici un autre contre-exemple: soit, comme dans l'exemple de Hartogs, B la réunion de

$$| z_1 | < 1 + \epsilon, \qquad 1 - \epsilon < | z_2 | < 1 + \epsilon,$$

et de

$$| z_1 | < \epsilon, \qquad | z_2 | < 1 + \epsilon \qquad (0 < \epsilon < 1/2).$$

Considérons, dans B, l'ensemble M des points tels que $z_1 = z_2$, $| z_1 | < \epsilon$; M est bien une sous-variété analytique de B. Toute fonction f, holomorphe dans B, et qui s'annule sur M, est holomorphe dans le polycylindre $| z_1 | < 1 + \epsilon$, $| z_2 | < 1 + \epsilon$ et s'annule aux points tels que $z_1 = z_2$ (car la trace de f sur la variété $z_1 = z_2$ est une fonction holomorphe de z_1, nulle au voisinage de $z_1 = 0$, donc identiquement nulle pour $| z_1 | < 1 + \epsilon$). Or, parmi les points de B tels que $z_1 = z_2$, il en est qui n'appartiennent pas à M; donc M ne peut pas être défini comme l'ensemble des zéros d'une famille de fonctions holomorphes dans B.

Ce dernier exemple montre qu'il est raisonnable de se borner d'abord au cas où B est un domaine d'holomorphie. Dans ce cas, nous allons voir que le problème posé est toujours résoluble. Donnons quelques précisions: considérons la sous-variété M de B, qui nous est donnée; si un point z de B appartient à M, les fonctions holomorphes au point z et qui s'annulent sur M (c'est-à-dire en tout point de M suffisamment voisin de z) forment un *idéal* I_z dans l'anneau des fonctions holomorphes au point z; si $z \notin M$, I_z désignera l'idéal-unité (idéal de toutes les fonctions holomorphes en z). Posons-nous la question suivante: existe-t-il un ensemble de fonctions holomorphes dans B tout entier, et qui, en

:haque point z de B, engendre l'idéal I_z attaché à ce point? On peut évidemment e borner à chercher un ensemble de fonctions qui soit un *idéal* I de l'anneau des onctions holomorphes dans B. Voici maintenant une réponse à la question ›osée: si B est un *domaine d'holomorphie* (plus exactement: la réunion d'une uite croissante de polyèdres analytiques), un tel idéal existe toujours; si en ›utre on le suppose *fermé* (ce qui signifie que toute fonction holomorphe dans B ıui est, sur tout compact, limite uniforme de fonctions de l'idéal I, appartient ι I), alors un tel idéal I est *unique*: c'est l'idéal de toutes les fonctions, holonorphes dans B, qui s'annulent en tout point de M; enfin, sur tout compact K :ontenu dans B, l'idéal I peut être engendré par un nombre *fini* d'éléments, et ›ar suite la sous-variété M peut être définie par un nombre fini d'équations lans le voisinage d'un ensemble compact K arbitraire.

Ces résultats rentrent dans le cadre d'une théorie générale des idéaux de onctions holomorphes, théorie développée à une époque récente, parallèlement, ›ar Oka et H. Cartan.[7] Supposons qu'à chaque point z de B on ait attaché un déal I_z de l'anneau des fonctions holomorphes au point z; cherchons s'il existe, lans B, un idéal I qui engendre I_z en chaque point z de B. Or il y a une condition ·videmment nécessaire: c'est que tout point z de B possède un voisinage ouvert lans lequel existe un idéal engendrant $I_{z'}$ en tout point z' assez voisin de z. ʃi cette condition est remplie, nous dirons que le système des idéaux I_z est *ohérent*. Par exemple, le système des idéaux qu'une sous-variété analytique M ›ermet d'attacher aux divers points de B est un système cohérent; c'est là un héorème de nature locale, qui est d'ailleurs assez difficile à prouver; une fois ce héorème démontré, on peut aborder l'étude globale des sous-variétés analytiques, ·tude dont nous avons déjà indiqué les principaux résultats.

Cela dit, supposons, d'une manière générale, qu'on nous ait donné un système :ohérent d'idéaux I_z dans B; alors on peut démontrer ceci: sur tout polyèdre ınalytique P contenu dans B, il existe un idéal *et un seul* qui engendre I_z en out point z de P, et cet idéal a un nombre *fini* de générateurs; de plus, tout déal, dans un polyèdre P, est *fermé*. Si en outre on suppose que B est un domaine l'holomorphie, alors il existe dans B un idéal fermé et un seul qui engendre le ystème cohérent donné: c'est l'idéal des fonctions qui, en chaque point z de B, ıppartiennent à l'idéal I_z attaché à ce point. D'ailleurs, dans un domaine d'holonorphie, tout idéal engendré par un nombre fini d'éléments est fermé. A titre l'application des résultats précédents, signalons aussi le théorème suivant: si p onctions f_i, holomorphes dans un domaine d'holomorphie B, n'ont pas de zéro ommun, elles sont liées par une relation $\sum_i c_i f_i = 1$ à coefficients c_i holomorphes lans B. Ceci permet notamment de lever les difficultés qu'on rencontre dans la onstruction du noyau de l'intégrale de Weil.

La théorie des idéaux dont nous venons d'esquisser rapidement quelques ésultats, sans pouvoir donner le principe des démonstrations, permet de prouver

[7] H. Cartan, Journal de Math. sér. 9 t. 19 (1940) pp. 1–26; H. Cartan, Ann. Ecole Norm. . 61 (1944) pp. 149–197; K. Oka, Bull Soc. Math. France t. 78 (1950) pp. 1–27; H. Cartan, ʃull. Soc. Math. France t. 78 (1950) pp. 29–64.

une ancienne conjecture d'André Weil: soit M une sous-variété analytique dans un domaine d'holomorphie B; et soit f une fonction holomorphe dans M, c'est-à-dire holomorphe dans un voisinage de M; alors il existe une fonction g, holomorphe dans tout B, et égale à f en tout point de M. Ce théorème peut servir, notamment, à montrer que, dans un polyèdre analytique défini par des inégalités $| \varphi_k(z) | \leqq 1$, toute fonction holomorphe est limite uniforme de *polynomes* par rapport aux variables z_j et aux fonctions $\varphi_k(z)$.

4. Prolongement analytique des sous-variétés. Le problème est le suivant: soit M une sous-variété analytique dans un sous-ensemble ouvert D de B; existe-t-il, dans B, une sous-variété analytique M' telle que $M' \cap D = M$? S'il en existe une, elle n'est pas nécessairement unique, mais il existe alors une sous-variété M' *minimale*, qui est contenue dans toutes les autres; car toute intersection de sous-variétés analytiques dans B est une sous-variété analytique dans B.

Sur ce problème, nous n'avons aujourd'hui que des résultats fragmentaires. Le plus ancien est dû à Thullen:[8] soit, dans la variété analytique-complexe B de dimension n, une sous-variété analytique M_0 de dimension $n - 1$, indécomposable; soit D un sous-ensemble ouvert de B, contenant l'ensemble complémentaire de M_0 et au moins un point de M_0 ; si M est une sous-variété analytique dans D, de dimension $n - 1$, alors M se prolonge en une sous-variété analytique dans B tout entier. En d'autres termes: si une sous-variété analytique M, de dimension $n - 1$, n'a pas de singularité essentielle en dehors d'une sous-variété indécomposable M_0 de dimension $n - 1$, deux cas seulement sont possibles: ou bien tous les points de M_0 sont effectivement des points singuliers essentiels de M, ou bien aucun point de M_0 n'est singulier essentiel pour M. En particulier, une sous-variété M de dimension $n - 1$ ne peut avoir de singularité essentielle *isolée*, si $n \geqq 2$. Cet intéressant théorème de Thullen peut, comme Stein me l'a signalé récemment, se généraliser aux sous-variétés de dimension quelconque: il suffit, dans l'énoncé précédent, de supposer que M_0 et M sont toutes deux de même dimension $k < n$; alors: ou bien tous les points de M_0 sont des points singuliers essentiels de M, ou bien aucun point de M_0 n'est singulier essentiel pour M. En particulier, une sous-variété M de dimension $k \geqq 1$ n'a jamais de point singulier essentiel isolé. Ceci donne notamment une nouvelle démonstration du théorème de Chow[9] suivant lequel toute sous-variété analytique de l'espace projectif complexe est nécessairement une sous-variété *algébrique*. En effet, en prenant des coordonnées homogènes dans l'espace projectif, on est ramené à considérer, dans l'espace C^{n+1}, un cône qui est analytique au voisinage de chacun de ses points sauf peut-être en son sommet; comme il n'a pas de singularité essentielle isolée, il est aussi analytique au voisinage de son sommet, ce qui implique aussitôt qu'il est algébrique.

Le prolongement analytique des sous-variétés n'obéit pas aux mêmes lois que le

[8] Math. Ann. t. 111 (1935) pp. 137–157.

[9] Amer. J. Math. t. 71 (1949) pp. 893–914.

prolongement analytique des fonctions. Par exemple, reprenons, avec Hartogs, la réunion A des 2 ensembles compacts $|z_1| \leqq 1$, $|z_2| = 1$, et $z_1 = 0$, $|z_2| \leqq 1$; soit $f(z_1)$ une fonction holomorphe pour $|z_1| < 1$, admettant la circonférence $|z_1| = 1$ comme coupure essentielle, et telle que $|f(z_1)| < 1/2$. Soit, dans un voisinage de A, la sous-variété analytique définie par $|z_1| < 1$, $z_2 = f(z_1)$; elle ne peut pas se prolonger en une sous-variété analytique dans un voisinage du polycylindre B: $|z_1| \leqq 1$, $|z_2| \leqq 1$, bien que toute fonction holomorphe dans A se prolonge en une fonction holomorphe dans B.

Cependant, il semble, à en croire un mémoire de Rothstein qui vient de paraître aux Math. Ann. (1950), qu'on doive s'attendre à des théorèmes généraux concernant le prolongement analytique des sous-variétés, théorèmes qui, quoique différents de ceux qui concernent le prolongement des fonctions, leur ressemblent tout de même un peu. Par exemple, Rothstein démontre ceci: soit, dans l'espace de 3 variables complexes, une sous-variété analytique M de dimension 2 au voisinage de la sphère $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1$; alors M se prolonge en une sous-variété analytique dans toute la boule $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \leqq 1$ (la proposition analogue, pour 2 variables et une sous-variété de dimension 1, est *fausse*). Voici un autre théorème de Rothstein, qui ressemble au théorème de Hartogs: si M, de dimension 2, est analytique au voisinage de $|z_1| \leqq 1$, $|z_2|^2 + |z_3|^2 = 1$, et au voisinage de $z_1 = 0$, $|z_2|^2 + |z_3|^2 \leqq 1$, M se prolonge en une sous-variété analytique au voisinage de $|z_1| \leqq 1$, $|z_2|^2 + |z_3|^2 \leqq 1$. Il y a là les prémices d'une théorie pleine d'intérêt, dans laquelle on verra plus clair quand on aura des énoncés valables pour des sous-variétés de dimension p dans l'espace de dimension n.

5. Relations avec la topologie. On sait que, sur une variété différentiable, une forme différentielle qui est localement une différentielle exacte peut ne pas l'être globalement. Considérons en particulier, sur une variété analytique-complexe B, une forme différentielle du premier degré ω qui, localement, soit la différentielle totale d'une fonction holomorphe; utilisant la terminologie de la géométrie algébrique, nous l'appellerons une *différentielle de première espèce*. La primitive d'une telle forme différentielle ω est une fonction holomorphe *multiforme*, qui se reproduit augmentée d'une constante lorsqu'on parcourt un lacet dans la variété B; elle définit donc un homomorphisme du premier groupe d'homologie $H_1(B)$ dans le groupe additif C des nombres complexes (il s'agit d'homologie à coefficients entiers). Cet homomorphisme est évidemment nul sur le sous-groupe $H_1'(B)$ des éléments d'ordre fini de $H_1(B)$, d'où un homomorphisme du groupe de Betti $H_1(B)/H_1'(B) = H_1''(B)$ dans C. Lorsque B est une variété *compacte*, $H_1''(B)$ est un groupe libre à un nombre fini r de générateurs, dont chacun peut être défini par un circuit fermé de B. L'homomorphisme de $H_1''(B)$ dans C est alors déterminé quand on connait l'intégrale de ω le long de chacun de ces r circuits: ce sont les "périodes" de ω. Quand B est une variété algébrique plongée sans singularité dans l'espace projectif complexe, l'entier r est *pair*, et il existe une différentielle de première espèce ω et une seule dont les périodes aient des *parties* *réelles* données. La démonstration de Hodge[10] vaut, plus généralement, lorsque B est une variété analytique *compacte* (connexe) susceptible d'être munie d'une *métrique kählérienne*, c'est-à-dire d'une forme différentielle quadratique hermitienne $\sum_\nu \omega_\nu \bar{\omega}_\nu$, définie positive, telle que la forme extérieure associée $\Omega = \sum_\nu \omega_\nu \cap \bar{\omega}_\nu$ satisfasse à $d\Omega = 0$.[11]

Le cas où B est un *domaine d'holomorphie* (étalé dans l'espace C^n) donne lieu à des résultats tout différents. Par les méthodes de Oka, on peut montrer[12] qu'il existe toujours une différentielle de première espèce dont les périodes soient des *nombres complexes* arbitrairement données; d'une façon précise, étant donné arbitrairement un homomorphisme du groupe d'homologie $H_1(B)$ dans C, il existe une différentielle de première espèce qui donne naissance à cet homomorphisme.

Nous allons aussi être amenés à des considérations topologiques en examinant un problème très simple concernant les idéaux de fonctions. Considérons, dans B, un système cohérent d'idéaux I_z tel que chaque idéal I_z soit *principal*, c'est-à-dire engendré par une seule fonction holomorphe au point z. Alors I_z définit, au voisinage de z, un nombre fini de sous-variétés analytiques de dimension $n - 1$, dont chacune est affectée d'un ordre de multiplicité (entier > 0). La donnée du système cohérent des I_z est équivalente à la donnée, dans B, d'une famille de sous-variétés analytiques de dimension $n - 1$, affectées d'ordres de multiplicité (cette famille pouvant être infinie, pourvu que chaque sous-ensemble compact de B n'en rencontre qu'un nombre fini). C'est ce qu'on appelle une "donnée de Cousin" dans B. Supposons que B soit un domaine d'holomorphie; alors, d'après les résultats généraux de la théorie des idéaux, il existe dans B un idéal fermé I, et un seul, qui engendre I_z en chaque point z de B. Mais le "problème de Cousin" consiste à chercher une *fonction unique*, holomorphe dans B, et qui, en chaque point z, engendre l'idéal I_z (c'est-à-dire s'annule sur chaque variété avec l'ordre de multiplicité voulu, et pas ailleurs). En d'autres termes, on exige que l'idéal I soit un idéal *principal*. Or cette nouvelle exigence ne peut pas toujours être satisfaite, même si B est un domaine d'holomorphie: comme nous allons le voir, elle pose des conditions de nature topologique.

Avant d'en parler, rappelons que le problème précédent avait été résolu par l'affirmative par Cousin, dès 1895,[13] dans le cas où B est un polycylindre, produit de domaines $z_k \in B_k$ supposés tous simplement connexes sauf un au plus. Cousin avait étudié ce problème à la suite de Poincaré qui s'était préoccupé de mettre une fonction méromorphe dans l'espace C^n sous la forme du quotient de 2 fonctions entières, premières entre elles.

Pour étudier l'aspect topologique du problème, plaçons-nous d'abord dans le cas général où B est une variété quelconque, à structure analytique-complexe.

[10] *The theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge, 1941.

[11] Voir A. Weil, Comment. Math. Helv. t. 20 (1947) pp. 110–116.

[12] Résultat de H. Cartan, non encore publié; des cas particuliers en étaient connus auparavant, notamment lorsque B est une surface de Riemann étalée dans le plan d'une variable complexe.

[13] Acta Math. t. 19 (1895) pp. 1–62.

Une donnée de Cousin dans B définit un nouvel espace topologique E que voici: un point de E sera, par définition, un couple (z, f) formé d'un point z de B et d'un élément générateur f de l'idéal principal I_z attaché au point z; on identifiera les couples (z, f) et (z', f') si $z = z'$ et si le quotient f/f' (qui est holomorphe et $\neq 0$ au point z) est *égal à un* au point z. Faisons opérer, dans cet espace E, le groupe multiplicatif C^* des nombres complexes $\neq 0$, comme suit: un nombre complexe $\alpha \neq 0$ transforme (z, f) en $(z, \alpha f)$. Le groupe C^*, en opérant ainsi dans E, définit une relation d'équivalence; les classes d'équivalence, ou *fibres*, sont isomorphes à C^*, et l'espace quotient de E par la relation d'équivalence n'est autre que l'espace B. Dans le langage de la topologie moderne, E est un *espace fibré principal*, de groupe C^*, ayant B pour espace de base. L'hypothèse suivant laquelle les idéaux I_z forment un système cohérent exprime que chaque fibre de E possède un voisinage isomorphe au produit $U \times C^*$ d'un ensemble ouvert U de B par la fibre C^*; ceci permet de définir, sur E, une structure de variété analytique-complexe.

Ainsi, une donnée de Cousin, sur une variété analytique B de dimension n, définit une variété analytique E de dimension $n + 1$, qui est un espace fibré principal de base B et de groupe C^*. On voit aussitôt qu'une solution du problème de Cousin définit une *section analytique* de cet espace fibré, et réciproquement (une section analytique est une application analytique de B dans E, qui transforme chaque point z de B en un point de la fibre correspondant à z). Ainsi: pour que le problème de Cousin ait une solution, il faut et il suffit que l'espace fibré E ait une section analytique, ou, ce qui revient au même, qu'il soit isomorphe au produit $B \times C^*$ (il s'agit d'isomorphisme au sens analytique-complexe). Dans le langage de la théorie des espaces fibrés, notre espace fibré E doit être *trivial*; mais non pas trivial au sens topologique, ni même au sens de la structure différentiable, mais au sens analytique-complexe.

Les remarques qui précèdent sont dues à André Weil, qui attira récemment mon attention sur cette intervention de la notion d'espace fibré dans ce problème bien connu de la théorie des fonctions analytiques. Ainsi, on peut appliquer au problème de Cousin les résultats donnés par la théorie topologique des espaces fibrés: pour que l'espace fibré E défini plus haut soit topologiquement trivial, il faut et il suffit que la classe caractéristique de cet espace fibré, qui est un élément u du deuxième groupe de cohomologie $H^2(B)$ à coefficients entiers, soit nulle. C'est donc là une condition *nécessaire* pour que l'espace soit analytiquement trivial, mais peut-être pas suffisante.

Or Oka, dès 1939,[14] a montré que si B est un domaine d'holomorphie, et si le problème de Cousin peut être résolu dans le champ des fonctions continues, alors il admet aussi une solution dans le champ des fonctions analytiques. Cela revient à dire que si l'espace fibré E défini par la donnée de Cousin est topologiquement trivial, il est analytiquement trivial. Par conséquent, si B est un domaine d'holomorphie, la nullité de l'élément $u \in H^2(B)$ défini par la donnée de Cousin est nécessaire et suffisante pour que le problème de Cousin ait une solution.

[14] Journal of Science of the Hirosima University (1939) pp. 7–19.

En fait, dès 1941, Stein[15] avait explicité des conditions de nature homologique pour la résolubilité du problème de Cousin, sans faire appel à la théorie des espaces fibrés.

Indépendamment de tout problème de Cousin, on peut se demander si tout espace fibré analytique E, de groupe C^*, qui est topologiquement trivial, est analytiquement trivial. Or il en est bien ainsi quand l'espace de base B est un domaine d'holomorphie. Ce dernier résultat peut être utilisé pour le problème de Cousin généralisé, dans lequel on se donne un système cohérent de fonctions f_z, non plus holomorphes, mais méromorphes; cela revient à se donner, dans B, une famille de sous-variétés analytiques M_j, de dimension $n - 1$, affectées d'ordres de multiplicité p_j qui sont des entiers de signe quelconque; dans le langage de la géométrie algébrique, on se donne un "diviseur", combinaison linéaire, à coefficients entiers p_j, de sous-variétés analytiques de dimension $n - 1$. Une donnée de Cousin généralisée définit encore un espace fibré principal de base B et de groupe C^*; sa classe caractéristique $u \in H^2(B)$ est facile à interpréter à l'aide du cycle de dimension réelle $2n - 2$ défini par le diviseur. Lorsque B est un domaine d'holomorphie, la nullité de la classe d'homologie définie par le "diviseur" est nécessaire et suffisante pour que le problème de Cousin généralisé soit résoluble.

Le problème de Cousin dont nous venons de parler est appelé, par les spécialistes, "deuxième problème de Cousin". Le *premier* problème de Cousin consiste à chercher une fonction méromorphe dans B, dont la partie principale est donnée en chaque point de B. On voit facilement que la donnée de ces parties principales définit un espace fibré de base B, dont le groupe est cette fois le groupe *additif* C des nombres complexes. Un tel espace est toujours topologiquement trivial. La démonstration qu'a donnée Oka du fait que le premier problème de Cousin a toujours une solution quand B est un domaine d'holomorphie, prouve en réalité le théorème suivant: lorsque B est un domaine d'holomorphie, tout espace fibré de base B et de groupe C est analytiquement trivial.

Nous voudrions maintenant dire quelques mots des problèmes précédents dans le *cas où B est une variété compacte, kählérienne.* Alors, il n'est plus vrai qu'un espace fibré de base B et de groupe C soit toujours analytiquement trivial: un tel espace possède un invariant (de sa structure fibrée analytique-complexe), qui est un élément du premier groupe de cohomologie de B à coefficients réels; la nullité de cet invariant est nécessaire et suffisante pour que l'espace soit analytiquement trivial. Interprétons cet invariant lorsque la structure fibrée de groupe C provient de la donnée des parties principales d'une fonction méromorphe inconnue (premier problème de Cousin): il n'existe pas, en général, de fonction méromorphe f admettant ces parties principales; mais si on tolère une fonction f *multiforme*, on peut lui imposer de se reproduire augmentée d'une constante *réelle* par tout lacet dans B, et alors le problème a toujours une solution et une seule. Les "périodes" réelles de cette solution définissent l'invariant homologique cherché.

[15] Math. Ann. t. 117 (1941) pp. 727–657

Revenons au deuxième problème de Cousin généralisé, toujours dans le cas où B est une variété compacte kählérienne. Si on se donne un "diviseur", la nullité de l'élément $u \in H^2(B)$ qu'il définit assure seulement l'existence d'une fonction méromorphe *multiforme* admettant ce diviseur; on peut imposer à cette fonction d'être multipliée par une constante > 0 par tout lacet dans B. Si on tolère des multiplicateurs qui soient des constantes complexes, il n'est même plus nécessaire que u soit nul: dans ce cas, il faut et il suffit que l'intersection du "diviseur" avec tout cycle à 2 dimensions réelles soit nulle; et ce résultat vaut aussi bien lorsque B est une variété compacte kählérienne (A. Weil, Kodaira[16]) que lorsque B est un domaine d'holomorphie. Dans un cas comme dans l'autre, on peut astreindre les multiplicateurs à être des nombres complexes de valeur absolue égale à un; si B est kählérienne compacte, cette restriction entraîne l'unicité de la solution, à un facteur constant près.

Il resterait à parler du deuxième problème de Cousin dans le cas général où il n'existe même pas de solution non uniforme admettant des multiplicateurs constants. C'est le problème que l'on rencontre dans la théorie classique des *fonctions thêta* de n variables: B est alors le quotient de C^n par un sous-groupe Γ engendré par $2n$ éléments indépendants ("périodes"); étant donnée une fonction méromorphe dans $C^n = \tilde{B}$ et admettant les $2n$ périodes, les *pôles* d'une telle fonction définissent un "diviseur"; il est certain que l'élément $u \in H^2(B)$ défini par ce diviseur n'est pas nul (en vertu d'un théorème connu,[17] une sous-variété analytique d'une variété kählérienne compacte n'est jamais homologue à zéro). Mais il existe toujours une "fonction thêta" qui admette un diviseur arbitrairement donné: c'est une fonction holomorphe dans $\tilde{B}$ et qui, par tout lacet dans B, est multipliée par $e^{\varphi(z)}$, où φ est une fonction primitive d'une différentielle de première espèce de B (dans le cas présent, ceci implique que la fonction $\varphi(z)$ est linéaire dans l'espace C^n). Enoncé sous cette forme, ce résultat a été généralisé par Kodaira[16] à toutes les variétés compactes kählériennes, de la manière suivante: si l'élément du deuxième groupe de cohomologie *réel* défini par le "diviseur" est une somme de produits d'éléments du premier groupe de cohomologie, alors ce diviseur est celui d'une "fonction thêta généralisée".

Or il est remarquable que des fonctions analogues aient été considérées par Stein en 1941[18] dans le cas, fort différent, où B est un polycylindre de la forme

$$z_1 \in B_1, \cdots, z_n \in B_n.$$

L'invariant $u \in H^2(B)$ défini par une donnée de Cousin est alors caractérisé par la loi d'intersection du diviseur avec les produits $\gamma_j \times \gamma_k$ d'un cycle $\gamma_j \in H_1(B_j)$ et d'un cycle $\gamma_k \in H_1(B_k)$. Le résultat de Stein, que j'énonce pour simplifier dans le cas $n = 2$, est le suivant: le problème de Cousin possède une solution holomorphe

[16] A. Weil, *loc. cit.* en (11); K. Kodaira, Chapter V du cours de G. De Rham sur les intégrales harmoniques, Institute for Advanced Study, Princeton, 1950.

[17] Voir B. Eckmann et H. Guggenheimer, C. R. Acad. Sci. Paris t. 229 (4) (1949) pp. 577–579.

[18] Voir §4 du mémoire cité en 15.

$f(z_1, z_2)$, uniforme par rapport à z_1 (z_2 étant fixé), et qui, pour z_1 fixé, est multipliée par un facteur $f_\gamma(z_1)$ (holomorphe, uniforme, et $\neq 0$) quand z_2 décrit un cycle γ. De plus, Stein montre qu'il existe toujours une donnée de Cousin dont l'invariant $u \in H^2(B)$ soit un élément arbitrairement donné de $H^2(B)$, contrairement à ce qui se passe pour les fonctions thêta: dans le cas d'une fonction thêta, la loi d'intersection du diviseur qu'elle définit, avec les produits $\gamma_j \times \gamma_k$, donne naissance à une forme bilinéaire alternée à $2n$ variables réelles qui n'est pas quelconque, car elle doit être la partie imaginaire d'une forme quadratique hermitienne positive à n variables complexes.

Dans cet ordre d'idées, il se pose de nombreux problèmes que je ne puis même pas mentionner. Je serai heureux si j'ai réussi à vous montrer que de nouveaux domaines s'ouvrent aujourd'hui à la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables. Les résultats déjà obtenus sont encourageants, mais encore assez fragmentaires pour exciter notre curiosité. Dans les recherches qu'ils ne manqueront pas de susciter, l'algèbre moderne aussi bien que la topologie auront leur rôle à jouer. Ainsi s'affirmera, une fois de plus, l'unité de la mathématique.

University of Paris,
Paris, France.