

XXII SEMINARIO NAZIONALE DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Pisa, 26 – 28 maggio 2005

Matematica ed Intercultura: quale didattica?

Implicazioni didattiche ed esempi

LA YUPANA ELETTRONICA: UNO STRUMENTO PER LA DIDATTICA INTERCULTURALE DELLA MATEMATICA *

Giuseppe Fiorentino **

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Introduzione.

Uno dei principali problemi nella didattica della matematica riguarda come coniugare teoria e pratica; talvolta è difficile trovare la strada giusta per riuscire a trattare efficacemente entrambe gli aspetti. Un compito ancora più complesso si presenta agli insegnanti di matematica che intendono organizzare la propria attività didattica nell'ambito di un programma etnomatematico. Gli insegnanti che si trovano ad operare in classi multiculturali, nel pianificare e condurre le attività di classe dovrebbero essere consci che:

- in passato, molte culture non “occidentali” hanno contribuito grandemente allo sviluppo delle conoscenze matematiche [Joseph];
- molte società indigene hanno sviluppato, e stanno ancora sviluppando, attività matematiche che, benché differiscano da quelle “standard”, costituiscono un bagaglio necessario e sufficiente ad affrontare con successo i loro problemi quotidiani [Bishop];
- la conoscenza matematica “indigena” è culturalmente rilevante e pertanto finisce spesso con l'interferire con i processi di insegnamento ed apprendimento attuati in contesti culturali differenti, come le scuole nei paesi occidentali [Favilli e Tintori].
- L'approccio interculturale sembra essere il modello educativo più appropriato ed efficace in questi casi [Oliveras, Favilli & César], raccoglie e riassume le osservazioni precedenti.

L'approccio interculturale all'insegnamento della matematica non è pertanto un modo semplice di insegnare; richiede un bagaglio professionale e di conoscenza della disciplina non standard, una notevole attenzione al contesto culturale della classe e la capacità di adattare coerentemente la programmazione. In molti paesi gli insegnanti lamentano sia lo scarso supporto nella formazione in servizio sia la mancanza di risorse didattiche pensate per l'insegnamento della matematica in contesti multiculturali [Favilli, César & Oliveras]. D'altro canto, realizzare del materiale per

* Questa presentazione è una versione estesa ed aggiornata di [Fiorentino & Favilli].

** fiorent@dm.unipi.it

l'insegnamento interculturale della matematica nelle scuole occidentali è un'autentica sfida. Per ottenere strumenti che siano da un lato efficaci sul piano didattico e dall'altro utili all'intera classe sul piano sociale, è necessaria una valutazione completa e quindi un uso corretto dei possibili contributi offerti dalle differenti culture. Claudia Zaslavsky [Zaslavsky], Paulus Gerdes [Gerdes] ed altri hanno fornito notevoli esempi di questo tipo.

In questo lavoro si presenta una versione elettronica della *yupana*, l'antico abaco Inca. L'intento principale è stato quello di ottenere uno strumento moderno ed attraente da un manufatto matematico antico esaltandone l'intatta validità didattica. La *yupana* elettronica, dal nostro punto di vista, rappresenta anche un tentativo di unire tradizione e modernità, sapere indigeno e conoscenza scientifica, "culture ricche" e "culture povere".

Poiché l'eredità culturale Inca è stata quasi completamente distrutta dai *conquistadores* spagnoli, le informazioni che ci sono state tramandate sulla *yupana* ed il suo uso pratico sono pochissime. L'unica rappresentazione disponibile di una *yupana* antica è contenuta in un disegno effettuato dal prete spagnolo Guaman Poma de Ayala (1615) nella sua cronaca della conquista dell'impero Inca. Nella Figura 1 tratta dall'opera citata, la *yupana* è rappresentata insieme al *quipu*, uno strumento statistico/contabile costituito da fili annodati.



Figura 1 – La yupana (con il quipu), come riportato da Guaman Poma de Ayala.

Solo di recente la ricerca matematica e storica si è interessata a questi strumenti provenienti dalla cultura Inca [Ascher & Ascher], mentre, a quanto ci risulta, non sono stati oggetto di attenzione da parte di insegnanti e didatti della matematica, almeno fin ora...

Come accade con la maggior parte degli abachi, la *yupana* fornisce l'opportunità di familiarizzare con i concetti di quantità e di numero naturale, di imparare la notazione posizionale e di capire il significato di somma e sottrazione di numeri naturali. Altre attività matematiche possibili con la *yupana* includono la moltiplicazione e la divisione, la rappresentazione e l'uso dei numeri decimali, la rappresentazione dei numeri naturali in altre basi e le operazioni di cambio di base.

Nell'implementazione della *yupana* elettronica si è tentato di creare un miniambiente didattico in cui i bambini possono muovere i loro primi passi nel mondo della matematica in maniera divertente ed amichevole. La *yupana* elettronica è una sorta di gioco colorato, interattivo e facile da usare con cui mediare i primi rudimenti di aritmetica ai bambini più piccoli. I ragazzi più grandi troveranno invece nella *yupana* elettronica uno strumento tramite il quale familiarizzare con la notazione posizionale (in base non necessariamente decimale) ed il cambio di base e tramite cui sviluppare propri "algoritmi di calcolo" per le operazioni più complesse.

Dal legno al silicio – La progettazione di una yupana computerizzata.

In Figura 2 si riporta la yupana sia nella versione antica rappresentata nel libro di Guaman Poma de Ayala, sia nella versione moderna realizzata dai ragazzi di strada dell'organizzazione non governativa Qosqo Maki¹.

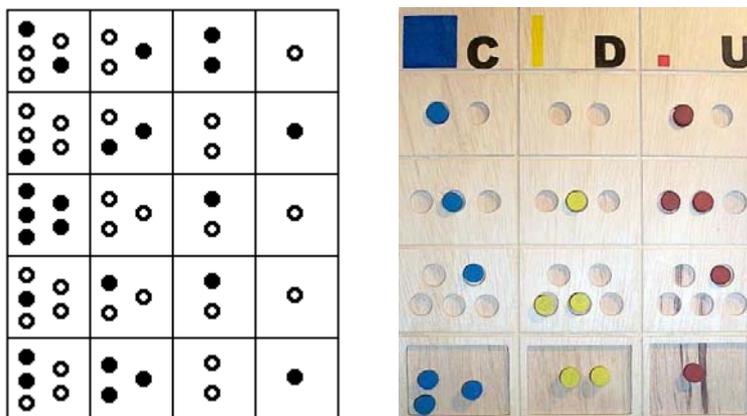


Figura 2 – La yupana antica ed una moderna.

Non sono ancora note con certezza le modalità d'uso della yupana antica, anche se molte congetture sono state avanzate, mentre la descrizione di un possibile uso della yupana moderna si trova in [Goutet e Alvarez Torres]. Nella yupana moderna, ogni colonna rappresenta una cifra e i numeri sono rappresentati da configurazioni di pedine di legno di colore diverso per migliaia, centinaia, decine ed unità. Nella parte inferiore della tabella si trovano delle aree rettangolari usate sia come depositi per le pedine in eccesso sia per rappresentare il secondo operando nelle operazioni aritmetiche. La presenza di queste aree rettangolari, da un punto di vista didattico, rappresenta una debolezza della yupana moderna. Queste aree, infatti, consentono una rappresentazione differente per la stessa entità (le cifre) e possono generare confusione in bambini nei quali il concetto di numero sta prendendo forma e significato. Nella realizzazione di una versione computerizzata della yupana tale difficoltà è stata superata eliminando le aree rettangolari e recuperandone la funzionalità mediante l'uso di *due* yupane tradizionali sovrapposte, come mostrato in Figura 3. Si recupera in questo modo la coerenza semiotica: i numeri sono rappresentati in un unico modo e gli operandi sono sempre visibili nella *doppia yupana*. Sulla doppia yupana in Figura 3, ad esempio, sono rappresentati i numeri 6355 e 5248.

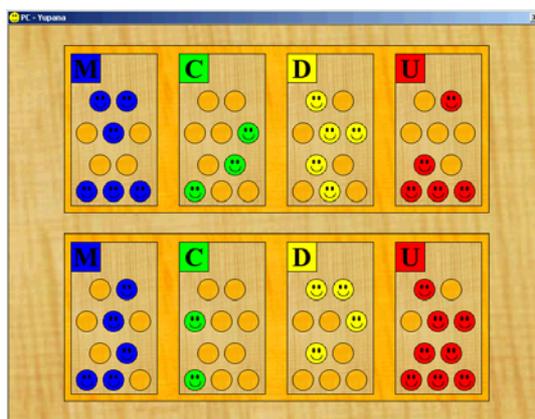


Figura 3 – La doppia yupana.

Un altro approccio unificante è costituito dal *modus operandi* che la yupana elettronica supporta: il *drag-and-drop* o trascinamento. Tutte le operazioni realizzabili con la yupana elettronica vanno

¹ Asociación Qosqo Maki, Calle Fierro 525, Cusco, Peru - qosqomaki@terra.com.pe.

condotte trascinando una pedina alla volta. Il concetto di numero è gradualmente indotto da questa ripetizione di operazioni unitarie.

Come per la yupana reale, l'uso di colori diversi per migliaia, centinaia, decine e unità, introduce lo scolaro alla notazione posizionale. Allo stesso modo, usando colori uguali per pedine con lo stesso peso posizionale, la doppia yupana consente un approccio naturale all'aritmetica in notazione posizionale. Il programma, infatti, permette solo trascinamenti che coinvolgono pedine/buchi di uguale valore posizionale. In questo modo l'aritmetica in base è, di fatto, un "effetto collaterale" del funzionamento del programma!

Il *drag-and-drop*, unito alla regola che "l'operazione termina quando una delle due yupane è vuota" fornisce un'altra struttura unificante per tre operazioni matematiche fondamentali: la somma, la sottrazione ed il cambio di base.

- La somma si effettua trascinando tutte le pedine di una yupana nelle caselle vuote (di peso posizionale equivalente) dell'altra. Non appena una delle yupane è vuota la somma è conclusa.
- La sottrazione avviene per "cancellazione" di pedine dello stesso colore, trascinando le pedine di una yupana su quelle di uguale colore (e quindi di pari peso posizionale) nell'altra yupana. Vale la pena notare che il segno del risultato si ricava da quale delle due yupane rimane vuota!
- Il cambio di base è effettuato con le regole della somma ma con le seguenti varianti strutturali:
 - il numero delle posizioni (i buchi) per ciascuna cifra delle due yupane è ovviamente diverso (tutte le basi dal 2 al 10 sono usabili);
 - a causa delle basi differenti, sulle due yupane compaiono più colori del solito; se da un lato questo limita la mobilità delle pedine fino ai soli spostamenti unitari quando le due basi sono numeri coprimi, dall'altro consente degli interessanti "trascinamenti in diagonale" come nel caso delle basi 2 e 4, quando si sposta una pedina di valore 4.

Il numero ridotto e la semplicità delle "regole del gioco" fanno della yupana elettronica uno strumento didattico su cui il bambino può costruire le sue basi matematiche nella maniera a lui più appropriata e distintiva: giocando.

Usare la yupana elettronica

Passando dall'aspetto metodologico a quello pratico, in questo paragrafo descriveremo le caratteristiche e l'uso della yupana elettronica commentando brevemente alcune schermate.

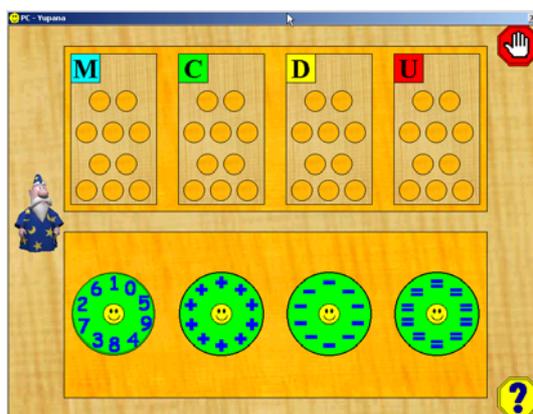


Figura 4 – La schermata iniziale.

In Figura 4 si riporta la schermata iniziale, mediante la quale è possibile scegliere una delle quattro attività previste dal programma: "gioca con i numeri", in cui lo studente è libero di sperimentare le

regole del gioco; **somma** e **sottrazione** di due numeri e “**cerca il numero**” in cui viene richiesto di riprodurre sulla yupana superiore un numero mostrato in forma decimale. Sono anche presenti il pulsante per terminare l’attività corrente (👉) così come quello per chiedere dei suggerimenti (❓). Il “mago”, con animazioni e fumetti, spiega come usare il programma e, a richiesta, fornisce suggerimenti utili. Mostriamo di seguito come impostare una somma con la yupana elettronica e come eseguirla.

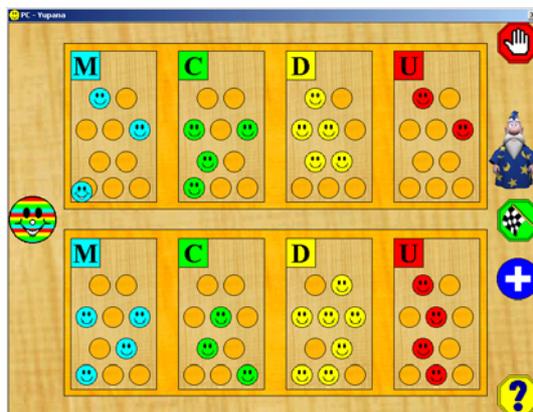


Figura 5 – Preparazione della yupana per trascinamento.

Nella Figura 5, si riporta la fase di preparazione della yupana effettuata trascinando le pedine dalla faccina grande ai buchi liberi (nella figura una pedina celeste è ancora in transito). Un click sulla bandiera chiude la fase di preparazione dando il via alla modalità operativa.

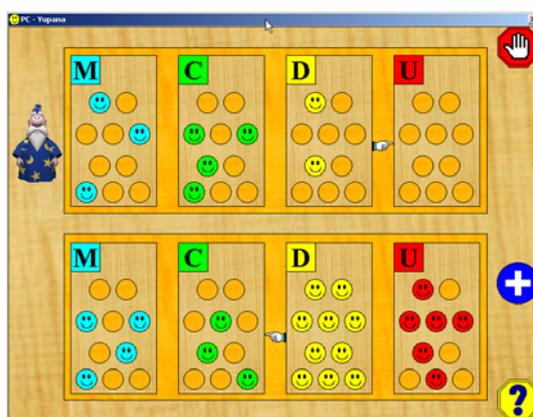


Figura 6 – Somma in corso.

In Figura 6 la somma è in corso; tutte le pedine rosse della yupana superiore sono state trasferite in quella inferiore, così come alcune pedine gialle. Poiché tutte le posizioni per le pedine gialle sono occupate, è apparsa una manina che consente di “promuovere” le dieci pedine gialle in una verde.

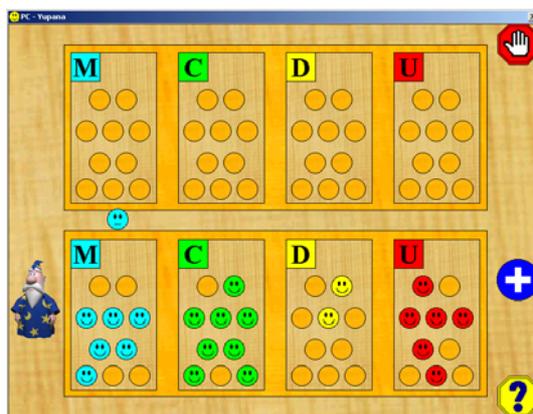


Figura 7 – Il passo finale della somma. L’ultima pedina va a posto.

La Figura 7 riporta il passo finale della somma. La “promozione” delle pedine gialle è stata fatta in modo da poter trasferire le rimanenti nella yupana inferiore; anche le pedine celesti sono state spostate (l’ultima è ancora a metà strada).

Altre caratteristiche ed intenti della yupana elettronica.

Il programma prevede aiuti e facilitazioni per adattarsi a più situazioni scolastiche, vedi la Figura 8.

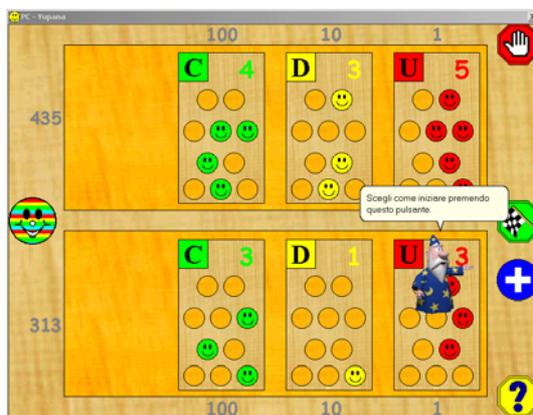


Figura 8 – Aiuti e facilitazioni.

- Con un click, il mago si anima e fornisce sia istruzioni su come utilizzare il programma che suggerimenti su come continuare in caso di impasse.
- Il programma può fornire un feedback numerico (in base 10), mostrando ed aggiornando continuamente tutte le “informazioni numeriche” presenti sulla yupana elettronica.
- Il numero di cifre attive può essere variato a piacimento da una a quattro (tre in Figura 8).
- È possibile attivare una “modalità di apprendimento senza errori” realizzata con dei feedback visuali. Durante il trascinarsi, le pedine mostreranno una faccia felice quando si trovano in una posizione dove possono essere rilasciate con successo e una triste in caso contrario. Questa modalità è di aiuto sia per i bambini più piccoli sia per quelli diversamente abili.

Sul versante opposto, vi sono delle opzioni che consentono di utilizzare proficuamente il programma anche per ragazzi più grandi (o matematicamente più consapevoli), vedi la Figura 9.

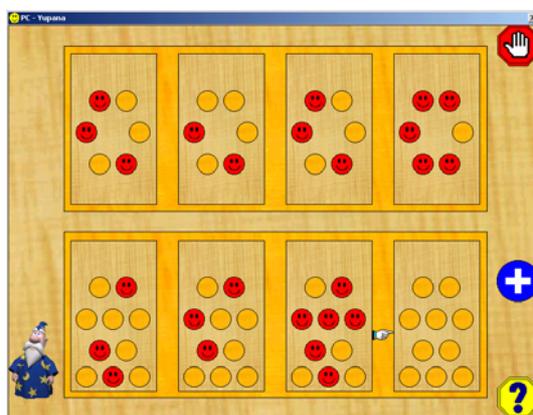


Figura 9 – Modulazione della difficoltà.

- L'uso di colori diversi per valori posizionali differenti può essere disabilitato (ma non i vincoli sul trascinamento).
- Basi diverse possono essere utilizzate contemporaneamente (in Figura 9 sono attive la base 6 e la base 10). In questo modo è possibile sia calcolare cambi di base, quando una delle yupane è inizialmente vuota, sia effettuare “operazioni in base mista”.

Sperimentazione didattica

La sperimentazione in classe con la yupana è prevista per il prossimo anno scolastico in collaborazione con alcuni insegnanti di scuola elementare. Per questo, sono in fase di approntamento alcune unità didattiche.

Bibliografia

- Alvarez Torres, R. and Goutet, C. (2002). ‘Medidas arbitrarias andinas y la aritmetica mediante la yupana’, in Sebastiani Ferreira E. (ed.), *Proceedings of the II International Congress on Ethnomathematics*, Summary Booklet (p. 13). Ouro Preto.
- Ascher, M. and Ascher, R. (1980). *Code of the quipu: a study on media, mathematics and culture*. Ann Arbor: University of Michigan Press.
- Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 179-191.
- Favilli F., César M. and Oliveras M. L. (2003). ‘Maths teachers in multicultural classes: findings from a Southern European project’, in Mariotti, M.A. (ed.), *Proceedings of CERME 3*. Pisa: Edizioni PLUS. [http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG10/TG10_Favilli_cerme3.pdf]
- Favilli, F. and Tintori, S. (2002). ‘Teaching mathematics to foreign pupils in Italian compulsory schools: Findings from an European project’, in P. Valero & O. Skovmose (eds.), *Proceedings of the 3rd International Conference on Mathematics Education and Society*, vol. 2 (pp.260-272). Copenhagen: Centre for research in Learning Mathematics.
- Fiorentino, G. and Favilli, F. (2004). ‘The electronic yupana: A didactical proposal from an ancient mathematical tool’, in *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education*. [http://www.icme-organisers.dk/dg15/DG15_GF&FF_final_ed.pdf]
- Gerdes, P. (1999). *Geometry from Africa – Mathematical and Educational Explorations*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Guaman Poma de Ayala, F. [1615] (1993). *Nueva corónica y buen gobierno*. Edited by Franklin Pease G.Y., Quechua vocabulary and translations by Jan Szeminski. 3 vols. Lima: Fondo de Cultura Económica.
- Joseph, J.J. (1992). *The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics*. London: Penguin.
- Oliveras, M.L., Favilli, F. & César, M. (2002). ‘Teacher Training for Intercultural Education based on Ethnomathematics’, in Sebastiani Ferreira E. (ed.), *Proceedings of the II International Congress on Ethnomathematics*. Ouro Preto. [CD-Rom]
- Zaslavsky, C. (1973). *Africa counts: Number and Pattern in African Culture*. Boston: Prindle Weber & Schmidt Inc.