Universität Koblenz-Landau
Institut für integrierte Naturwissenschaften
Abteilung Physik
Dozent: Dr. Merten Joost

Seminar „Digitale Signalverarbeitumg“ im
Sommersemester 2005

Diskrete Fourier-Transformation

Sebastian Thiel

6. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in die Diskrete Fourier- Transformation

Mit Hilfe der Fourier-Transformation kann das Frequenzspektrum eines zeitkontinuierlichen Signals ermittelt werden. Somit kann mit Hilfe dieser Technik eine Aussage über die in einem Signal (zeitkontinuierlichen) vorkommenen Frequenzen gemacht werden. Sollen Signale digital verarbeitet werden, so benutzt man meist zeitdiskrete Signale. Für diese Klasse von Signalen gibt es die diskrete Fourier-Transformation (DFT). Der Unterschied beider Transformationen besteht darin, dass die DFT eher eine Folge als eine Funktion einer kontinuierlichen Variablen ist. Die DFT entspricht den Abtastwerten der Fourier-Transformation des Signals bei äquidistanten Frequenzen.

Neben der eher theorethischen Bedeutung als eine Fourier-Darstellung von Folgen können mit Hilfe der DFT eine Vielzahl von digitalen Signalverarbeitungsalgorithmen implementiert werden. Es gibt sehr effiziente Algorithmen für ihre Berechnung, z.B. die Fast Fourier-Transformation oder der Goertzel Algorithmus.

Durch die Anwendung der DFT auf ein zeitdiskretes Signal ist es möglich den Frequenzgehalt zu bestimmen. Beispiele für die Spektralanalyse sind: Berechnung der Harmonischen des Netzstromes, Ermittlung des Spektrums eines Nachrichtensignals, Schwingungsanalyse an mechanischen Objekten, suchen von Sinussignalen im Rauschen und so weiter.

Des weiteren ist es möglich die DFT für eine schnelle Berechnung der Faltung und der Korrelation zu benutzen. So kann die Faltung und die Korrelation von langen Signalen fast in Echtzeit durchgeführt werden.

2 Mathematische Herleitung aus der Fourier-Transformation

Ausgangspunkt für die Herleitung der DFT ist die Formel der Fourier-Transformation.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{2.1}$$

Mit Hilfe dieser Formel kann das zeitkontinuierliche Signal (Abb. 2.1) transformiert werden.

Mit Hilfe der Abtastung läßt sich ein kontinuierliches Signal in ein diskretes Signal überführen, wobei das Abtasttheorem möglichst nicht verletzt werden sollte. In der Formel oben wird $x(t)$ durch seine Abtastwerte $x(nT)$ ersetzt, sowie das Differential durch das Abtastintervall T und das Integral wird durch die Summe approximiert.

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j2\pi nT}T \tag{2.2}$$

Aus der unendlichen Anzahl von Abtastwerten schneiden wir eine endliche Anzahl N heraus. Der Faktor T wird weggelassen und wir erhalten das abgetastete (engl.sampled) und gefensterte (engl. windowed) Signal.

$$X_sw(f) = \sum_{n=-\infty}^{N-1} x(nT)e^{-j2\pi n\frac{f}{f_s}} \tag{2.3}$$

Die Funktion $X_sw(f)$ ist f_s periodisch ($f_s = \frac{1}{T}$) und hat nur an N Frequenzstellen linear unabhängige Funktionswerte. Daher werten wir $X_sw(f)$ an N äquidistanten Frequenzstellen $f = 0, \frac{f_s}{N}, 2\frac{f_s}{N}, ..., (N-1)\frac{f_s}{N}$ aus.

$$X_sw(k\frac{f_s}{N}) = \sum_{n=-\infty}^{N-1} x(nT)e^{-j2\pi n\frac{k\frac{f_s}{N}}{f_s}}, k = 0, 1, 2, ..., N-1 \tag{2.4}$$

Im letzten Schritt wird die Kennzeichnung $_{sw}$ und der Faktor $\frac{f_s}{N}$ in der Klammer weggelassen und die Abtastwerte werden mit $x[n]$ gekennzeichnet.

$$X[k] = \sum_{n=-\infty}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}}, k = 0, 1, 2, ..., N-1 \tag{2.5}$$

Diese ist die Definition der DFT. Sie wird meist als Analysegleichung bezeichnet. Die Herleitung der Synthesegleichung aus der Gleichung der Fourier-Transformation verliefe fast analog. Sie wird hier ohne Herleitung eingeführt.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{N-1} X(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}}, n = 0, 1, 2, ..., N-1 \tag{2.6}$$

Mit Hilfe der Analysegleichung können aus einer gegebenen Sequenz von Funktionswerten ($x[n]$) im Zeitbereich die Werte im Frequenzbereich ($X[k]$) ermittelt (diskrete Fourier-Transformation) werden. Umgekehrt, wenn die Werte im Frequenzbereich bekannt sind, ermittelt man mit Hilfe der Synthesegleichung die Werte im Zeitbereich (Inverse diskrete Fourier-Transformation).

Somit sagen wir das $x[n]$ und $X[K]$ ein Transformationspaar bilden.

Die Werte $X[K]$ (die im Allgemeinen komplex sind) nennt man meißt DFT Koeffizienten. Die Variable n wird als diskrete Zeitvariable oder Zeitindex und die Variable k wird analog als diskrete Frequenzvariable oder Frequenzindex bezeichnet.

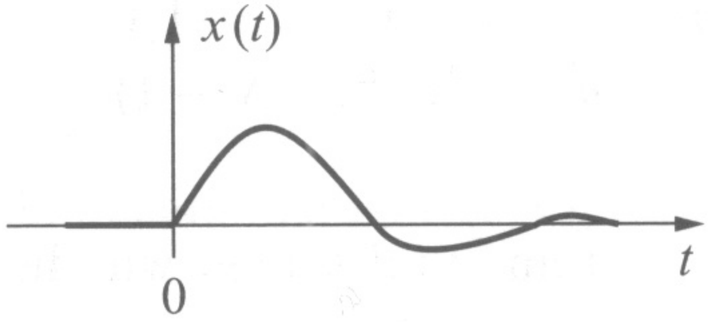

Abbildung 2.1: Zeitkontinuierliches Signal

3 Graphische Interpretation

Wir betrachten ein zeitkontinuierliches Signal (Abb. 3.1) und dessen Frequenzbereich. Den Frequenzbereich erhalten wir durch die Anwendung der Fourier-Transformation (Formel 2.1).

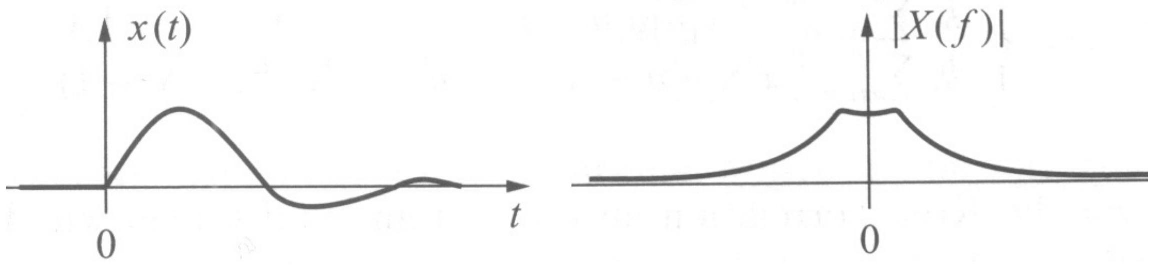

Abbildung 3.1: Zeitkontinuierliches Signal und Frequenzspektrum

Abbildung 3.2 zeigt das abgetastete Signal und Abbildung 3.3 das f_s periodische Spektrum. Die gestrichelt gezeichneten Linien zeigen an, dass das Abtasttheorem verletzt wurde.

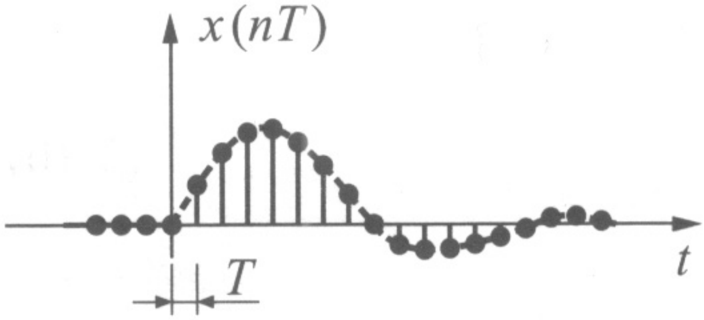

Abbildung 3.2: Abgetastetes Signal und das f_s periodische Spektrum

In den Abbildungen (Abb. 3.4 und 3.5) wurde das Signal "Rechteckgefenstert", wobei die Länge des Fensters NT beträgt. Eine Erklärung für die "Störungen" im Frequenzspektrum liefert folgendes Theorem:

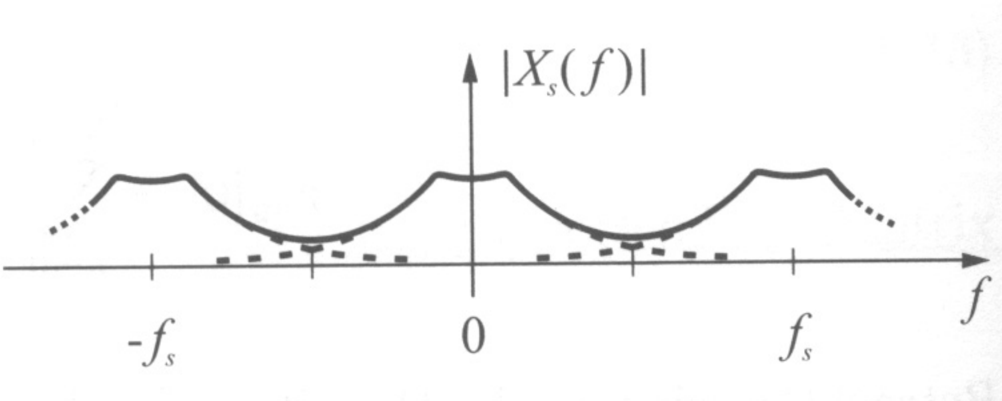

Abbildung 3.3: Das f_s periodische Spektrum

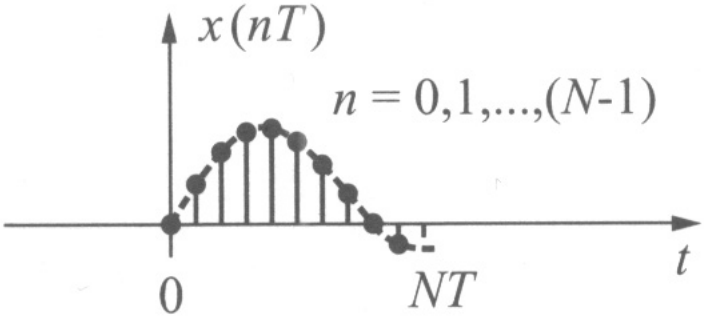

Abbildung 3.4: Signal nach der Rechecktfensterung

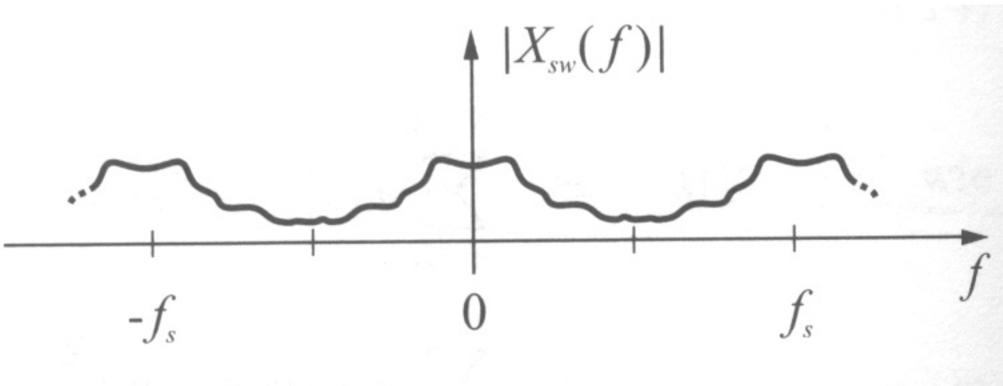

Abbildung 3.5: Frequenzspektrum nach der Rechteckfensterung

Satz 1 (Faltungstheorem) *Eine Faltung im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation im Frequenzbereich und eine Multiplikation im Zeitbereich entspricht* *einer Faltung im Frequenzbereich.*

Betrachten wir uns die Rechteckfunktion und ihr Frequenzspektrum (Abb. 3.6), so können wir, wenn wir das Faltungstheorem anwenden, die "Störungen" im Frequenzbereich des Signals erklären. Da die Fensterung mathematisch gesehen eine Multiplikation des Signals mit einem Rechteckimpuls ist, wird $X_s(f)$ mit dem Frequenzspekturm der Rechteckfunktion gefaltet.

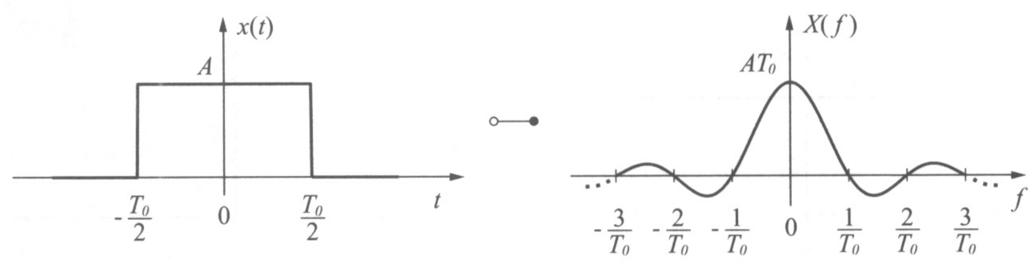

Abbildung 3.6: Rechteckfunktion mit Frequenzspektrum

Wie durch N-maliges Abtasten des gefalteten Spektrums im Abstand von $\frac{f_s}{N}$ die DFT $X[k]$ entsteht, wird in Abbildung 3.7 gezeigt.

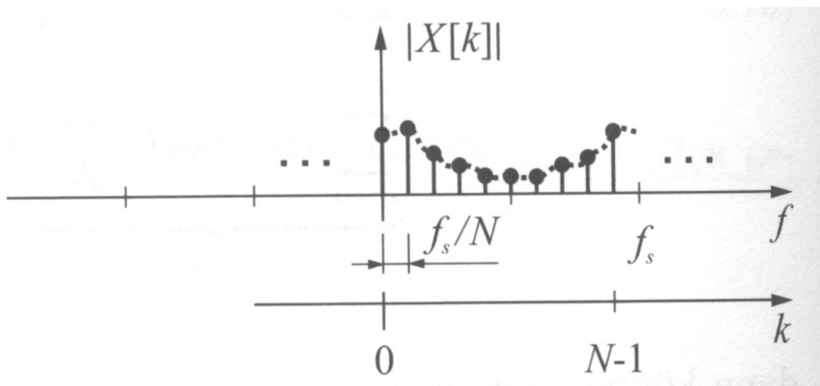

Abbildung 3.7: Frequenzspektrum des DF Transformierten Signals

Der Abstand $\triangle f$zweier Frequenzpunkte (in Abb. 3.7) nennt man auch die Frequenzauflösung der DFT. Der Abstand zweier Frequenzpunkte ist gleich $\frac{f_s}{N}$ und $f_s = \frac{1}{T}$, somit ergibt sich für die Frequenzauflösung $\triangle f = \frac{1}{NT}$. NT (Länge des Rechteckfensters) heisst Messdauer, Messintervall oder Fensterlänge.

4 Eigenschaften

4.1 Linearität

Die diskrete Fourier-Transformation ist eine lineare Transformation. Das heisst, wenn

Satz 2 *$x_1[n] und X_1[k]$ sowie $x_1[n]$ und $X_1[k]$ sind Transformationspaare. k_1 und k_2 sind Konstanten. Dann gilt: $k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n]$ und $k_1 X_1[k] + k_2 X_2[k]$ sind ebenfalls ein Transformationspaar. In Worten: Die DFT einer Linearkombination von Signalen ist gleich der Linearkombination ihrer DFTs.*

4.2 Periodizität

Die Periodizität der DFT lässt sich einfacher definieren, wenn wir zuerst den Drehfaktor W_N einführen. W_N ist wie folgt definiert: $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. Die Analysegleichung hat somit folgende Form:$X[k] = \sum\limits_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$. Wir können annehmen (ohne Beweis), dass der Drehfaktor N-periodisch ist.

Daraus folgt: $X[k] = X[k+N]$

Ist $x[n]$ die inverse DFT, dann gilt ebenfalls: $x[n] = x[n+N]$

Satz 3 *Die DFT und die IDFT sind N-periodisch.*

Ein periodisches diskretes Zeitsignal ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

4.3 Zirkulare Verschiebung

Satz 4 *Eine Verschiebung des diskreten periodischen Signals um m Punkte im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation der Fourier-Transformierten im Frequenzbereich mit $e^{-j\omega m}$.*

Sind $x[n]$ und $X[k]$ ein Transformationspaar, so sind auch $x[n-m]$ und $e^{-j\omega m} X[k]$ eins.

Ist m positiv, so verzögert sich das Signal zeitlich, wohingegen bei negativem m ein zeitliches voreilen zu beobachten ist.

In Abbildung 4.2 wird die zirkulare Verschiebung graphisch dargestellt. Im oberen Bildbereich links ist das Orginalsignal zu sehen. Im rechten Bereich das

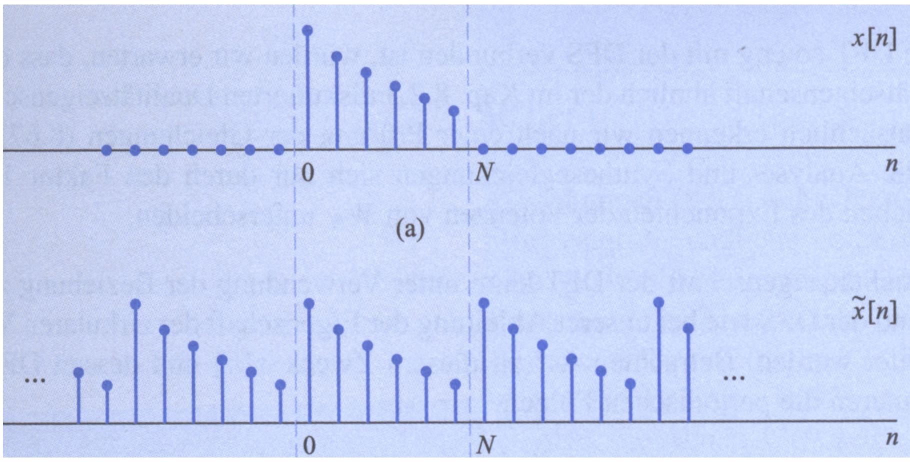

Abbildung 4.1: Periodisches Diskretes Signal

Betragsspektrum dieses Signals. In der Abbildung unten links ist das Originalsignal um m=6 zirkular verschoben. Das Betragspektrum unten rechts ist identisch mit dem des ursprünglichen Signals. Dies war auch zu erwarten, da laut Satz 4 die DFTs sich nur um den Phasenfaktor $e^{-j\omega m}$ unterscheiden.

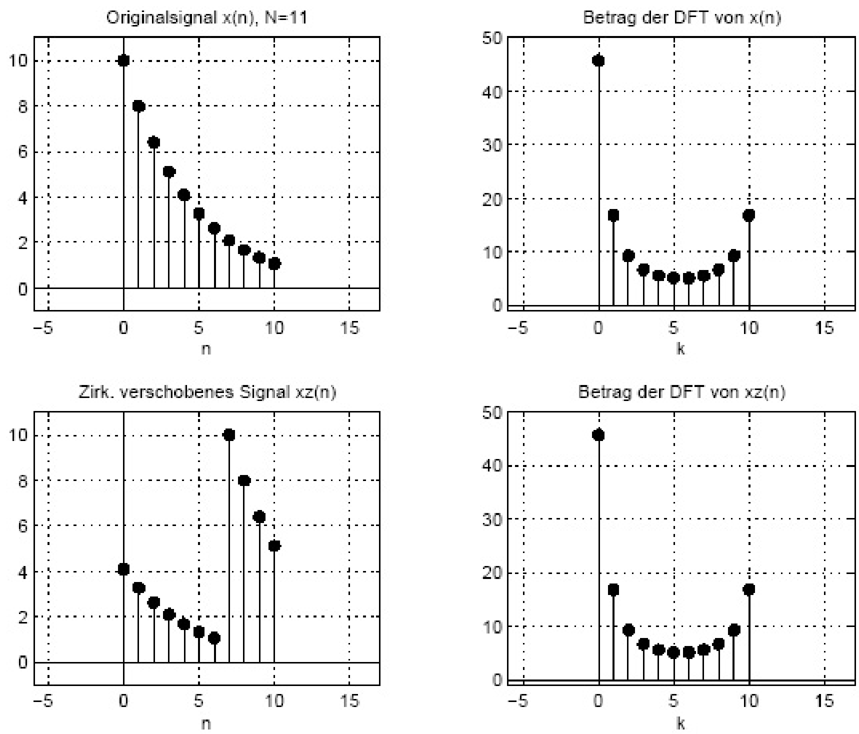

Abbildung 4.2: Zirkulare Verschiebung

4.4 Dualität

Satz 5 *Analyse und Synthesegleichung unterscheiden sich nur durch den Faktor* $\frac{1}{N}$ *und das Vorzeichen der Potenz* W_N.
Wenn $x[n]$ *und* $X[k]$ *ein Transformationspaar ist dann gilt:*
$X[n]$ *und* $Nx[-k], 0 \leq k \leq N-1$ *ist auch ein Transformationspaar.*

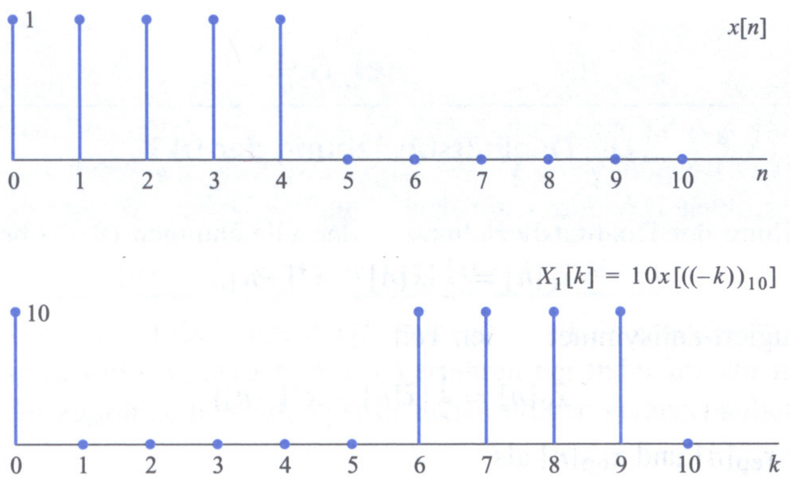

Abbildung 4.3: Darstellung der Dualität

In Abbildung 4.3 ist im oberen Bereich ein diskretes Signal im Zeitbereich dargestellt. Das Frequenzspektrum und die Umbenennung der Zeitvariablen in die Frequenzvariablen sind nicht dargestellt. Zum Verständnis der Dualität reicht es aus, das Signal nach der Umbenennung im Zeitbereich zu betrachten. Dieses ist in der Abbildung 4.3 unten dargestellt.

Die Forderung von Satz 5 ist erfüllt. Das neue Signal ist mit 10 multipliziert und zeitlich invertiert.

5 Zirkulare Faltung

In Satz 1 wurde das Faltungstheorem definiert. Sehr ähnlich wird auch die zirkulare Faltung definiert.

Satz 6 *Multiplikation der DFT Koeffizienten zweier endlichen Folgen entspricht der zirkularen Faltung der Folgen.*

Eine Multiplikation im Frequenzbereich führt zu einer Faltung im Zeitbereich.

Wir haben zwei endliche Folgen $x_1[n]$ und $x_2[n]$ sowie deren Transformationspartner $X_1[k]$ und $X_2[k]$. Die Folge $x_3[n]$ ist nun zu bestimmen, deren DFT nach Satz 6 gleich $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ ist. Somit können wir mit Hilfe der IDFT $x_3[n]$ aus $X_3[k]$ berechnen.

Eine weitere Voraussetzung dafür ist das wir erst von zirkularer Faltung sprechen, wenn die zweite Folge in Bezug auf die erste zirkular verschoben und zirkular Zeitinvertiert ist.

Aufgrund dieser Eigenschaften können wir folgende Formel aufstellen:

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m)_N], 0 \leq n \leq N-1 \tag{5.1}$$

Auf ein Beispiel soll hier verzichtet werden.

Die zirkulare Faltung können wir aber verwenden, um mit Hilfe der DFT zwei Folgen allgemein miteinander zu falten.

Satz 7 *Dazu sind drei Schritte notwendig:*

1. *Berechnen der diskreten N-Punkt-Transformation $X_1[k]$ und $X_2[k]$ der beiden Folgen $x_1[n]$ und $x_2[n]$*

2. *Berechnen des Produkts $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ für $0 \leq k \leq N-1$*

3. *Berechnen der Folge $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m)_N], 0 \leq n \leq N-1$ als IDFT von $X_3[k]$*

6 Korrelation

Die Korrelation ist ein Mass für die Übereinstimmung zweier Signale. Mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation ist es möglich zu bestimmen wie stark Cosinus- und Sinusschwingungen in einem Signal vorhanden sind.

Mit Hilfe der Euler'schen Formel ist es möglich die Analysegleichung wie folgt zu schreiben:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] cos(kn\frac{2\pi}{N}) + j \sum_{n=0}^{N-1} x[n](-1) sin(kn\frac{2\pi}{N}) \tag{6.1}$$

Satz 8 *Korrelation mit Hilfe der DFT*

- *Der Realteil $R\ X[k]$ des k-ten DFT-Koeffizienten sagt aus, wie stark die Cosinusschwingung mit der diskreten Frequenz k und der Länge N im Signal enthalten ist.*
- *Der Imaginärteil $I\ X[k]$ sagt aus, wie stark die negative Sinusschwingung mit der diskreten Frequenz k und der Länge N im Signal enthalten ist.*

7 Matrixdarstellung

Ziel der digitalen Signalverarbeitung ist es, Signale mit Hilfe eines Computers oder eines sonstigen digitalen System zu verarbeiten. Stellen wir die DFT in der Matrixdarstellung dar, ist es einfach möglich mit Hilfe eines Computers die DFT eines abgetasteten Zeitsignals zu berechnen.

Ausgangspunkt für die Matrixdarstellung sind die Analyse und die Synthesegleichung (Formel 9 und 10) in vereinfachter Dargestellung mit Hilfe des Drehfaktors.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \tag{7.1}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \tag{7.2}$$

Die beiden Sequenzen $x[n]$ und $X[k]$ enthalten jeweils n bzw. K reelle Zahlen und die jeweils andere wird durch die Analyse bzw. Synthesgleichung berechnet.

Wir stellen $x[n]$ und $X[k]$ wie folgt als Spaltenvektor dar:

$$x_N = \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ ... \\ x[N-1] \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

$$X_N = \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ ... \\ X[N-1] \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

Die DFT Matrix W_N wird im nächsten Schritt wie folgt definiert.

$$X_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & W_N^{-}1 & ... & W_N^{N}-1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & W_N^{N}-1 & ... & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

Durch Anwendung der in der Analytischen Geometrie definierten Matrizenmultiplikation kann jetzt die DFT berechnet werden. Als abkürzende Schreibweise wird häufig Formel 14 verwendet. Es wird in diesem Zusammenhang oft von der N-Punkt-DFT Matrizenmultiplikation gesprochen.

$$X_N = x_N * W_N \tag{7.6}$$

Für die Definition der inversen diskreten Fourier-Transformation benötigen wir die inverse DFT Matrix W_N^{-1}. Diese ist wie folgt definiert:

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^* \tag{7.7}$$

Wobei das Zeichen * andeutet, dass jedes Element der DFT Matrix W_N konjugiert komplex genommen werden muss.

Mit Einführung der DFT Matrix und der N-Punkt-DFT Matrizenmultiplikation ist es jetzt möglich mit Programmen wie z.B. MathLab sehr einfach den jeweils anderen Vektor zu berechnen.

Folgendes Beispiel zeigt ein einfaches MathLab Programm, welches genau diese Funktionalität besitzt ($X_N = x_N * W_N$).

```
function [Xk] = DFT(xn,N)
% Computes Discrete Fourier Transform
% -----------------------------------
% Xk = DFT coeff. array over 0 <= k <= N-1
% xn = N-point finite-duration sequence
% N = Length of DFT
%
n = [0:1:N-1]; k = [0:1:N-1];

WN = exp(-j*2*pi/N);

nk = n'*k;

DN =WN .^ nk;

Xk = xn * DN;
```

Selbstverständliche liese sich ein solches Programm auch in Java oder C++ implementieren. Aus Gründen des einfachen Umgangs mit der komplexen Exponential-Funktion habe ich das Beispiel mit MathLab realisiert.

8 Zusammenfassung

Die diskrete Fourier-Transformation ist ein sehr gutes Hilfsmittel zur digitalen Bearbeitung von Signalen. In Kapitel 2 wird gezeigt, dass die DFT sich direkt aus der Formel der Fourier-Transformation herleiten lässt. Dabei spielt die Abtastung und die Fensterung eine wichtige Rolle. Bei der Abtastung ist zu beachten, dass das Abtasttheorem nicht verletzt wird und es zu Aliasing kommt. Im Unterschied zur Fourier-Transformation transformiert die DFT, wie der Name schon sagt, diskrete Signale und anders als die zeitdiskrete Fourier-Transformation periodische und endliche Signale der Länge N. Im 4. Kapitel werden die Eigenschaften Linearität, Periodizität, zirkulare Verschiebung und Dualität besprochen. Einige dieser Eigenschaften werden im Kapitel 5 und 6 verwendet um die Faltung und die Korrelation mit Hilfe der DFT durchzuführen. Aufgrund der im Anschluss vorgestellten Darstellung der DFT als Matrix und ihrer Realisierung z.B. mit Hilfe von einem Programm wie Mathlab, ist es möglich die Transformation einfach und recht schnell mit Hilfe eines Computers zu berechnen.

In der Praxis ist es oft erwünscht die DFT (sehr) schnell zu berechnen. Aus diesem Grunde wurden sehr effiziente Algorithmen entwickelt wie z.B. die FFT (Fast Fourier-Transformation) oder der Goertzel Algorithmus. Mit Hilfe dieser Berechnungsvorschriften ist es z.B. möglich die Faltung und die Korrelation in (fast) Echtzeit durchzuführen.

9 Literaturverzeichnis

Grüningen 2002 Daniel Ch. von Grünigen, Digitale Signalverarbeitung, Fachbuchverlag Leipzig, 2. Auflage München 2002.

Oppenheim 2004 Alan V. Oppenheim, Roland W. Schafer und John R. Buck, Zeitdiskrete Signalverarbeitung, Pearson Studium, 2. überarbeitete Aufl. München 2004.

Fliege 2004 Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. N. J. Fliege, Vorlesung Elektrotechnik II - Kapitel 11, Universität Mannheim, , Mannheim 2004.

http://et.ti.uni-mannheim.de/content/lehre/et2/skript/et11.pdf