La géométrie diophantienne, selon Serge Lang.

Marc HINDRY

"*Diophantine problems represent some of the strongest aesthetic attractions to algebraic geometry. They consist in giving criteria for the existence of solutions of algebraic equations in rings and fields, and eventually for the number of such solutions.*

The fundamental ring of interest is the ring of ordinary integers $\mathbf{Z}$*, and the fundamental field of interest is the field* $\mathbf{Q}$ *of rational numbers. One discovers rapidly that to have all the technical freedom needed in handling general problems, one must consider rings and fields of finite type over the integers and the rationals. Furthermore, one is led to consider also finite fields,* $\wp$*-adic fields (including the real and complex numbers) as representing a localization of the problems under consideration.*" (Lang [L12])

Ces premiers mots de la préface du livre visionnaire (1962) de Serge Lang *Diophantine Geometry* fournissent une bonne présentation du sujet. En fait le terme "*géométrie diophantienne*" a été, sinon inventé, au moins popularisé par Serge Lang pour désigner une branche féconde des mathématiques qu'il a énormément irriguée, par ses travaux, sa vision et, le mot est un peu inévitable quand on parle de Serge Lang, ses conjectures. Je vais essayer dans ce court texte de donner un échantillon des résultats de Serge Lang et de faire un petit panorama de quelques magnifiques problèmes qu'ils nous a laissés. Toute l'œuvre de Serge Lang tend à regrouper, croiser de multiples domaines, théorie des nombres, géométrie algébrique, analyse et géométrie complexe, théorie des groupes, etc, etc. Je me concentrerai sur l'aspect "diophantien" et laisserai de côté ses travaux modulaires ou liés à la théorie d'Iwasawa, je renvoie également à l'article de Michel Waldschmidt pour l'aspect "approximations rationnelles et nombres transcendants" qui est pourtant intimement lié aux thèmes abordés. Le lecteur désirant en savoir davantage pourra se délecter en se plongeant dans le volume de l'encyclopédie russe "*Survey of Diophantine Geometry*" alias "*Number Theory III*" écrit par Serge Lang [L25].

1. Serge Lang et la géométrie diophantienne.

Ainsi le problème originel de la géométrie diophantienne est la détermination des points rationnels ou entiers sur une variété algébrique V définie sur un corps de nombres k. Une fois qu'on s'est posé la question pour un corps de nombres k ou sur $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers algébriques de k (par exemple sur $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Q}$), on est rapidement amené à réduire modulo un idéal premier $\wp$ et considérer donc des variétés sur un corps fini $\mathbf{F}_q = \mathcal{O}_k/\wp$; on a envie de compléter selon une place $\wp$-adique ou archimédienne, ce qui amène à regarder la situation sur un corps $\wp$-adique ou les corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On notera k_v le complété d'un corps de nombres pour une place v. Les célèbres analogies entre corps de nombres et corps de fonctions amènent aussi à considérer les corps comme $k[T]$ ou $k[T_1, \ldots, T_n]$ ou plus généralement $k(V)$ le corps de fonctions d'une variété algébrique V ainsi que ses complétés du type $k[\![T_1, \ldots, T_n]\!]$. Pour mesurer l'intérêt d'une telle généralisation il est important d'observer avec Lang que toute variété algébrique V définie *a priori* sur un corps K quelconque (par exemple $K = \mathbf{C}$) peut-être définie *a posteriori* sur une extension de type fini du sous-corps premier, i.e. sur $\mathbf{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$ ou $\mathbf{Q}[t_1, \ldots, t_n]$ (avec des t_i non nécessairement algébriquement indépendants).

Dans ce mariage entre arithmétique et géométrie (algébrique pour le moment), on dira qu'une propriété est géométrique si elle peut être regardée sur la clôture algébrique $\bar{k}$ (ou sur $\mathbf{C}$, ce qui revient souvent au même d'après le principe de Lefschetz classique). Les questions posées peuvent être dans l'ordre :
(a) A-t-on $V(k) \neq \emptyset$?
(b) L'ensemble $V(k)$ est-il infini?
(c) Décrire une paramétrisation ou la répartition de $V(k)$, densité, etc.

En fait la question (b) n'est vraiment pertinente que si V est une courbe; si $\dim(V) > 1$ il est plus naturel de demander :
(b') L'ensemble $V(k)$ est-il dense pour la topologie de Zariski?
Rappelons que la *topologie de Zariski* sur une variété algébrique est ainsi définie : les *fermés* sont les sous-ensembles algébriques, i.e. les zéros communs d'une famille (ou d'un idéal) de polynômes dans V. Ainsi une ensemble infini de points de V est dense si V est une courbe, mais dans le cas général un ensemble de points de V est dense s'il n'est contenu dans aucune hypersurface de V.

La question (c) peut être rendue plus précise de plusieurs façons; les deux variantes les plus intéressantes sont :

(c') On choisit un ensemble fini S de places de k (par exemple un plongement de k dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ ou dans un corps $\wp$-adique), on note k_v le complété de k en v et on demande si

$$V(k) \hookrightarrow \prod_{v \in S} V(k_v) \qquad \text{est une inclusion dense?}$$

Ici on considère à droite la topologie produit de la topologie usuelle sur la variété analytique $V(k_v)$.

(c") On choisit une *fonction de comptage* $H : V(k) \to \mathbf{R}$ et on demande une estimation asymptotique de la fonction

$$N(V(k), H, B) := \operatorname{card}\{x \in V(k) \mid H(x) \leq B\}$$

On choisit généralement H une fonction *hauteur* (voir le paragraphe suivant pour des définitions).

Remarque. Un invariant important de V est son *corps de fonctions* qu'on notera $k(V)$; on dit que V et V' sont birationnelles (ou k-birationnelles) s'il existe $f : V \cdots \to V'$ application rationnelle qui induise un isomorphisme $f^* : k(V') \to k(V)$. Il revient au même de demander que f induise un isomorphisme $U \to U'$ entre deux ouverts de Zariski de V et V'. Notons que la propriété (b') est invariante birationnellement, la propriété (a) ne l'est pas sauf si on se restreint aux variétés projectives lisses (voir plus loin), la propriété (c') l'est également mais une transformation birationnelle peut changer les estimations dans (c''). Plus loin nous utiliserons un autre invariant géométrique : le *groupe de Picard* de V noté $\operatorname{Pic}(V)$, c'est-à-dire le groupe des fibrés en droites inversibles modulo isomorphismes (muni du produit tensoriel).

On sait répondre aujourd'hui à ces questions de façon (presque) totalement satisfaisante dans le cas où V est une courbe algébrique. Rappelons qu'une courbe algébrique est birationnellement équivalente à une unique courbe lisse et projective, donc on peut supposer V lisse et complète (ou projective). L'invariant crucial est alors le *genre* et la courbe a un comportement différent suivant que $g = 0$, $g = 1$ ou $g \geq 2$.

On dispose dans le cas des courbes d'un merveilleux dictionnaire entre courbes algébriques (disons lisses et projectives sur $\mathbf{C}$), corps de type fini et degré de transcendance 1 sur $\mathbf{C}$ et surfaces de Riemann compactes.

Si V est de genre 0, elle est k-isomorphe à une conique ; de plus cette conique est isomorphe à la droite projective $\mathbf{P}^1$ si et seulement si $V(k) \neq \emptyset$. Enfin, d'après le théorème de Hasse-Minkowski, on a $V(k) \neq \emptyset$ si et seulement si $\prod_v V(k_v) \neq \emptyset$. Si H_k est la hauteur usuelle sur $\mathbf{P}^1$ (voir plus loin) on a $N(\mathbf{P}^1(k), H_k, B) \sim cB^2$. Par exemple, pour $k = \mathbf{Q}$, la constante c vaut $12/\pi^2$.

Si V est de genre 1 et si $V(k) \neq \emptyset$ alors V est k-isomorphe à une cubique projective plane, on peut définir une loi de groupe (c'est une courbe elliptique) et $V(k)$ est alors un groupe de type fini (théorème de Mordell-Weil) et $N(V(k), H_k, B) \sim c(\log B)^{r/2}$ où r est le rang de $V(k)$ (théorème de Néron). Ainsi une courbe elliptique peut posséder une infinité de points rationnels, mais ceux-ci sont "beaucoup moins nombreux" que sur une courbe de genre 0.

Si V est de genre $g \geq 2$ alors $V(k)$ est fini ; c'est la célèbre conjecture de Mordell démontrée en 1983 par Faltings [Fa1], et dont Vojta [Vo2] a donné une deuxième démonstration sur laquelle nous reviendrons.

On dispose d'une description qualitativement complète des points rationnels sur une courbe. Cependant indiquons que c'est seulement pour les courbes de genre 0 que l'on a des solutions *effectives* (i.e. que l'on peut calculer par un algorithme donnant les solutions en un temps déterminé).

Pour une courbe affine V (qu'on peut voir comme une courbe projective $\bar{V}$ privée de s points), la question des points entiers a été résolue par Siegel (1929): si la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V) := 2 - 2g - s$ vérifie $\chi(V) < 0$, alors l'ensemble des points entiers est fini. Ainsi aussi bien un ouvert affine d'une courbe elliptique que la droite projective privée de trois points ou plus n'ont qu'un nombre fini de points entiers.

Siegel démontrait son résultat en utilisant un théorème d'approximation diophantienne (démontré par lui-même). Rappelons quelques étapes historiques de ces questions d'approximation diophantienne pour un nombre réel α algébrique (non rationnel) de degré d (i.e. $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = d$).

(i) En 1844 Liouville démontre que, pour tout rationnel p/q, on a (avec $c = c(\alpha)$ constante adéquate) :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^d}$$

(ii) Thue (1909) montre qu'on peut remplacer l'exposant d par $\frac{d}{2} + 1 + \epsilon$ (pour tout $\epsilon > 0$ avec $c = c(\alpha, \epsilon)$).
(iii) Siegel (1921) montre qu'on peut remplacer l'exposant d par $2\sqrt{d} + \epsilon$.
(iv) Gelfond et Dyson (1947) montrent qu'on peut remplacer l'exposant d par $\sqrt{2d} + \epsilon$.
(v) Roth (1954) montre qu'on peut remplacer l'exposant d par $2 + \epsilon$, ce qui est optimal.

Le résultat ultérieur le plus important est le théorème du sous-espace de Schmidt [Sch1,Sch2]. Réécrivons le théorème de Roth sous la forme $|q(q\alpha - p)| \geq q^{-\epsilon}$ sauf pour un nombre fini d'exceptions. Une des généralisations de Schmidt s'écrit en prenant $L_1, \ldots, L_n$ formes linéaires en n variables, à coefficients algébriques et indépendantes; on obtient alors $\prod_i |L_i(x_1, \ldots, x_n)| \geq \max_i |x_i|^{-\epsilon}$ pour $x \in \mathbf{Z}^n$ situé hors d'une réunion finie de sous-espaces vectoriels propres.

L'idée de départ sous-jacente à la méthode de Siegel est très simple, expliquons-la pour $k = \mathbf{Q}$ et $\mathcal{O}_k = \mathbf{Z}$. On peut tout d'abord se ramener au cas d'une courbe plane d'équation

$$f(x, y) = f_d(x, y) + \ldots + f_1(x, y) + f_0 = 0,$$

où $f_j(x, y)$ est homogène de degré j et disons $f_d(x, y) = \prod_{i=1}^{d}(x - \alpha_i y)$. Si l'on trouve une suite de points entiers $P_n = (x_n, y_n) \in \mathbf{Z}^2$, alors cette suite tend vers l'infini et une sous-suite se rapprochera d'une des asymptotes $x - \alpha_i y = 0$; c'est-à-dire en particulier que les x_n/y_n fournissent de très bonnes approximations rationnelles de α_i. Dans le cas où le genre de la courbe est ≥ 1 Siegel montre par un argument transcendant (utilisant des fonctions thêta et leurs lois d'addition) que l'on peut encore améliorer la qualité des approximations à l'aide de transformations. La version moderne, due à Serge Lang, utilise plutôt la jacobienne de la courbe et les revêtements non ramifiés d'icelle. La présentation du théorème de Siegel par Lang dans [L9], reprise dans [L12], est bien sûr simplifiée par l'utilisation du théorème de Roth mais aussi par l'utilisation de la géométrie de la jacobienne de la courbe, ce qui lui permet de généraliser le théorème aux anneaux de S-entiers d'un corps de nombres et aux anneaux de type fini. La version géométrique des inégalités d'approximation rationnelle donnée par Lang est la suivante (voir le paragraphe suivant pour la définition des valeurs absolues normalisées $||.||_v$ et de la hauteur H) :

Proposition. (Lang-Siegel, [L9]) *Soit V une courbe projective lisse définie sur k, soit $f \in k(V)$ non constante.*
(i) Si r est la plus grande multiplicité d'un pôle de f, si S est un ensemble fini de places de k, l'ensemble des points $P \in V(k)$ vérifiant

$$\prod_{v \in S} \max(1, ||f(P)||_v) \geq H_k(P)^{(2+\epsilon)r}$$

est fini (de hauteur bornée).
(ii) Si la courbe est de genre $g \geq 1$ on peut remplacer l'exposant $(2+\epsilon)r$ par ϵ en gardant la même conclusion.

Comme il découle aisément de la définition de H_k que, si $f(P)$ est S-entier et S contient les places archimédienne, on a $H_k(f(P)) = \prod_{v \in S} \max(1, ||f(P)||_v)$, le théorème de Siegel s'ensuit immédiatement pour les courbes de genre $g \geq 1$. Tout comme les théorèmes de Mordell-Weil et Faltings, le théorème de Siegel n'est pas effectif, cependant les travaux de Baker ont permis de rendre la détermination effective des points entiers pour $g \leq 1$ et dans un certain nombre de cas en genre supérieur.

On peut noter qu'on a longtemps cru que la méthode de Siegel ne permettait pas d'attaquer la question des points rationnels. En effet on se heurte à une difficulté : si $P_n = (x_n, y_n)$ est maintenant une suite de points rationnels, on peut en extraire un sous-suite convergente (au sens archimédien ou p-adique) mais alors cette limite sera en général un point (α, β) avec des coordonnées transcendantes! Néanmoins Vojta [Vo2], huit ans après la preuve de Faltings, soixante ans après l'article de Siegel, a trouvé un moyen de contourner cette difficulté et d'utiliser l'approximation rationnelle pour les points rationnels.

La poursuite de ces travaux phares du XXème siècle se poursuit grosso modo dans deux directions.

(A) Tenter de rendre *effectifs* ces résultats (Mordell-Weil, Siegel, Roth, Faltings). C'est l'objet notamment des travaux de Baker et plus récemment de Masser-Wüstholz et de manière générale des "méthodes de transcendance". Je renvoie à l'article de Michel Waldschmidt [ce volume] pour une description de la contribution de Lang à ces questions.

(B) Tenter d'étendre ces résultats *qualitatifs* aux variétés algébriques de dimension > 1. Cette question est discutée dans le paragraphe suivant.

Avant d'aborder les généralisations (pour la plupart conjecturales), je clos ce paragraphe avec un échantillon à la Prévert de quelques théorèmes de Serge Lang en géométrie diophantienne.

La propriété d'avoir un point k-rationnel est k-birationnelle parmi les variétés lisses et projectives et peut donc être lue sur $k(V)$ le corps de fonctions de la variété [L1].

Deux groupes algébriques isogènes sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ ont le même nombre de points sur $\mathbf{F}_q$; un espace homogène sous un groupe algébrique possède un point rationnel sur $\mathbf{F}_q$ (Cf [L3], [LT6]). Le dernier énoncé était connu pour une courbe C de genre 1; on peut en fait le déduire de la majoration de Hasse $|\mathrm{card}\, C(\mathbf{F}_q) - (q+1)| \leq 2\sqrt{q}$ (c'est l'"hypothèse de Riemann" pour les courbes de genre 1 sur $\mathbf{F}_q$).

Le décompte approché du nombre de points d'une variété algébrique V sur $\mathbf{F}_q$ obtenu en collaboration avec Weil [LW2] s'énonce ainsi. Si V est fermée dans $\mathbf{P}^n$, et $r = \dim V$, $d = \deg V$

$$|\mathrm{card}\, V(\mathbf{F}_q) - q^r| \leq (d-1)(d-2)q^{r-1/2} + C(n,d,r)q^{r-1}$$

que l'on peut réécrire de manière peut-être plus suggestive

$$|\mathrm{card}\, V(\mathbf{F}_q) - \mathrm{card}\, \mathbf{P}^r(\mathbf{F}_q)| \leq (d-1)(d-2)q^{r-1/2} + C'(n,d,r)q^{r-1}.$$

Cette estimation peut-être améliorée dans le cas où V est lisse et on a des renseignements sur les nombres de Betti de V, grâce aux conjectures de Weil (démontrées par Grothendieck et Deligne), mais reste extrêmement utile dans le cas général.

Tout revêtement d'une courbe algébrique lisse projective s'obtient par image réciproque via une isogénie de sa jacobienne; c'est une belle formulation géométrique de la théorie du corps de classes non ramifié d'une courbe [L4]. Les extensions abéliennes ramifiées s'obtiennent en utilisant les "jacobiennes généralisées" construites par Rosenlicht. Cette théorie, due à Lang, est exposée dans le livre de Serre [Se1].

Dans un article aussi court que remarquable [L5], Lang montre comment l'énoncé sur les revêtements abéliens peut être démontré à partir du cas des courbes définies sur un corps fini (cas que Lang avait déjà traité). Ainsi le "principe de Lefschetz" devient un mode de voyage entre corps finis, corps de type fini sur $\mathbf{F}_p$ ou $\mathbf{Q}$, et le corps des complexes $\mathbf{C}$. Cette idée a été reprise dans un contexte différent et de façon spectaculaire par Mori et son fameux "*bend-and-break lemma*" (Cf [Mo]).

2. Les conjectures et la vision de Serge Lang.

Dans son livre fondateur [L12] Lang met en avant quatre résultats diophantiens : les théorèmes de Mordell-Weil, Siegel, Roth et le théorème d'irréductibilité de Hilbert. Ce dernier affirme que si un polynôme $P(X_1,\ldots,X_n)$ dans $k[X_1,\ldots,X_n]$ est irréductible, les spécialisations $P(X_1,\ldots,X_m,t_{m+1},\ldots,t_n)$ dans $k[X_1,\ldots,X_m]$ restent irréductibles pour une infinité de valeurs des paramètres $t_i \in k$. Les outils fondamentaux sont la théorie des hauteurs et l'utilisation systématique de la géométrie algébrique. Je commencerai donc par des préliminaires sur ces deux aspects (les spécialistes sauteront sans hésiter cette liste de définitions).

2.1. Géométrie et hauteurs.

Donnons maintenant un peu de vocabulaire issue de la géométrie algébrique et de la géométrie complexe. Le *fibré canonique* sur une variété V de dimension r est le fibré en droites dont les sections sont les r-formes différentielles algébriques; on le note ω_V. C'est un invariant important habitant dans le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(V)$ de la variété. Soit L un fibré en droites sur une variété projective V, alors pour chaque

$m \geq 1$ l'espace vectoriel des sections globales $H^0(X, L^{\otimes m})$ permet de définir une application rationnelle $\Phi_m : V \cdots \to \mathbf{P}H^0(X, L^{\otimes m})$. On note $\kappa(V, L) = \max \dim \Phi_m(V)$ et, si $L = \omega_V$ on pose $\kappa(V) = \kappa(V, \omega_V)$ qu'on appelle *dimension de Kodaira* de V. Un fibré en droites L est dit *très ample* (resp. *ample*) si L (resp. une puissance de celui-ci) fournit un plongement, autrement dit si $\Phi_L : V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$, resp. si pour un certain $m \geq 1$, on a $\Phi_{L^{\otimes m}} : V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$. Un fibré en droites L est dit *gros* ("*big*" en anglais) si $\kappa(V, L) = \dim(V)$. On peut montrer (lemme de Kodaira) que, quitte à tensoriser par $\mathbf{Q}$, un fibré gros est produit tensoriel d'un fibré ample par un fibré effectif (i.e. admettant une section globale non nulle). Suivant Lang une variété est dite *canonique* (resp. *pseudo-canonique*) si son fibré canonique est ample (resp. son fibré canonique est gros). Du côté analytique la notion de fibré en droites ample correspond à la notion de fibré positif. La définition suivante est importante dans la philosophie de Lang.

Définition. Une variété complexe $V(\mathbf{C})$ est dite *hyperbolique* (au sens de Brody) si toute application holomorphe de $\mathbf{C}$ vers $V(\mathbf{C})$ est constante.

Note. Si la variété est projective (compacte) cette définition coïncide avec celle donnée par Kobayashi, mais pas en général.

La théorie des hauteurs, associées à un diviseur, avait été développée par Weil. Sur les variétés abéliennes Néron et Tate en ont donné une version plus canonique et jolie. On note respectivement H, $h = \log H$, $\hat{h}$ ces objets. Serge Lang prêtait beaucoup d'attention aux notations dont il estimait qu'elles devaient être "fonctorielles avec les idées"(1). Pour la théorie des hauteurs on peut consulter bien sûr l'ouvrage de Lang [L12] ou encore [Se2], [H-S2] et [B-G]. Considérons donc un corps k muni d'une famille de valeurs absolues M_k normalisées de sorte que la *formule du produit* soit vérifiée :

$$\forall \lambda \in k^*, \quad \prod_{v \in M_k} ||\lambda||_v = 1.$$

Donnons deux exemples typiques. Tout d'abord $k = \mathbf{Q}$ avec $M_{\mathbf{Q}}$ l'ensemble constitué par la valeur absolu "usuelle" (c'est-à-dire archimédienne) et des valeurs absolues p-adiques normalisées par $||p||_p = 1/p$; autrement dit si $x = p^m a/b \in \mathbf{Q}$ avec $m \in \mathbf{Z}$ et a, b non divisibles par p, on $||x||_p = p^{-m}$. Ensuite, si K est un corps algébriquement clos et $k = K(T)$ on peut choisir $M_k = \mathbf{P}^1(K)$ avec $||f||_v := \exp(\mathrm{ord}_v(f))$. Une fois qu'on a une normalisation avec formule du produit sur un corps k, on peut en tirer une normalisation avec formule du produit sur toute extension finie k' de sorte que $\prod_{w \mid v} ||\alpha||_w = ||N_k^{k'}(\alpha)||_v$.

On pose alors :

$$H_k(P) = \prod_{v \in M_k} \max\{||x_0(P)||_v, \ldots, ||x_n(P)||_v\} \qquad \text{ou} \qquad h_k(P) := \log H_k(P).$$

On peut montrer que si $P \in \mathbf{P}^n(k)$ et $k \subset k'$ alors $H_{k'}(P) = H_k(P)^{[k':k]}$ d'où l'on tire que

$$H(P) := H_k(P)^{\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}} \qquad \text{et} \qquad h(P) := \log H(P) = \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} h_k(P)$$

est une hauteur *absolue* indépendante du corps de définition du point ; on obtient ainsi une fonction $h = \log H : \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}$ dont la principale propriété est que les ensembles $\{P \in \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}}) \mid h(P) \leq B,\ [\mathbf{Q}(P) : \mathbf{Q}] \leq d\}$ sont finis.

Si L est un fibré en droites très ample sur V et $\Phi_L : V \to \mathbf{P}H^0(V, L) \cong \mathbf{P}^n$ est le plongement associé on pose

$$H_L(P) := H(\Phi_L(P)).$$

Comme ce plongement est unique à un automorphisme linéaire près (un élément α de $\mathrm{PGL}(n+1)$), la hauteur ainsi définie dépend du plongement. Cependant on a $H \circ \alpha \gg\ll H$, ce qui veut dire $h_L \circ \alpha - h_L$ est bornée

(1) Il est connu pour avoir effacé systématiquement, dans le dos d'un orateur réputé parlant au tableau de hauteurs, des "h" pour les remplacer par des "H" et avoir émis, à une autre occasion l'affirmation péremptoire "*Your notation stinks!*", d'autres m'ont rapporté un sonore "*Your notation sucks!*"

sur $V(\bar{k})$. Ces hauteurs jouissent de bonnes propriétés fonctorielles par rapport au groupe de Picard de V, par exemple

$$h_{L\otimes M}(P) = h_L(P) + h_M(P) + O(1), \qquad \text{et} \qquad h_L(\phi(P)) = h_{\phi^* L}(P) + O(1),$$

pour L, M fibrés en droites et $\phi : W \to V$ morphisme de variétés projectives. La première formule permet de définir la hauteur associée à n'importe quel fibré en droites L en le décomposant $L = L_1 \otimes (L_2)^{-1}$, où L_1, L_2 sont très amples, et en posant $h_L := h_{L_1} - h_{L_2} + O(1)$.

2.2. Hauteurs de Néron-Tate et théorème de Mordell-Weil.

Dans le cas d'une variété abélienne on peut faire un choix plus canonique de hauteurs, en posant, pour un fibré symétrique (i.e. tel que $[-1]^* L \cong L$):

$$\hat{h}_L(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{h_L([2^n](P))}{4^n}.$$

Cette hauteur diffère de la hauteur initiale par une fonction bornée : $\hat{h}_L(P) - h_L(P) = O(1)$. La hauteur $\hat{h}_L : A(\bar{k}) \to \mathbf{R}$, associée à un fibré ample et symétrique, est alors une forme quadratique définie positive au sens que la forme

$$\hat{h}_{L,\mathbf{R}} : A(\bar{k}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

est définie positive. Ainsi la positivité analytique du fibré se traduit par une positivité arithmétique de la hauteur associée. On définit de même le produit scalaire de Néron-Tate :

$$\langle P, Q\rangle_L := \frac{1}{2}\left(\hat{h}_L(P+Q) - \hat{h}_L(P) - \hat{h}_L(Q)\right).$$

En particulier on peut voir $A(k)$ ou plutôt $A(k)/A(k)_{\mathrm{tor}}$ comme un réseau dans l'espace euclidien $A(k)\otimes\mathbf{R}$ (le théorème de Mordell-Weil dit que $A(k)$ est un groupe de type fini donc $A(k)\otimes\mathbf{R}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie).

Une question fondamentale est de donner une borne pour la hauteur de générateurs de la partie infinie de $A(k) = \mathbf{Z}P_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}P_r \oplus A(k)_{\mathrm{tor}}$. Au vu de ce qui précède, en utilisant un peu de géométrie euclidienne des réseaux, on voit que le problème se réduit à donner une *minoration* de la hauteur d'un point d'ordre infini de $A(k)$ et une *majoration* du volume de la maille du réseau ou encore une majoration du régulateur $\mathrm{Reg}(A/k) := \det(\langle P_i, P_j\rangle)$.

Serge Lang a proposé deux conjectures dans cette direction que je formule sous leur forme la plus élémentaire sur les courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$ (les généralisations aux corps de nombres et variétés abéliennes de dimension quelconque sont données en commentaires).

Conjecture. (Lang [L17], [L18]) *Il existe une constante absolue $c > 0$ vérifiant l'énoncé suivant. Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, soit $y^2 = x^3 + ax + b$ un modèle de Weierstrass entier minimal (i.e. $a, b \in \mathbf{Z}$ et, pour tout p premier, ou bien p^4 ne divise pas a, ou bien p^6 ne divise pas b) et soit $\Delta_E := |4a^3 + 27b^2|$ la valeur absolue de son discriminant, si $P \in E(\mathbf{Q})$ est d'ordre infini :*

$$\hat{h}(P) \geq c \log \Delta_E.$$

On dispose d'un certain nombre de résultats positifs en direction de cette conjecture (voir [H-S1] et [Da]); une généralisation aux variétés abéliennes A/k a été proposée par Joe Silverman, l'inégalité s'écrivant alors $\hat{h}_L(P) \geq ch(A)$ où $h(A)$ est une hauteur pour les variétés abéliennes, par exemple la hauteur de Faltings définie dans [Fa1] et où l'on suppose que le point P est non seulement d'ordre infini, mais reste d'ordre infini dans A modulo toute sous-variété abélienne propre de A.

Conjecture. (Lang [L18]) *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $c_\epsilon > 0$ vérifiant l'énoncé suivant. Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, soit $y^2 = x^3 + ax + b$ un modèle de Weierstrass entier minimal, il existe $P_1, \ldots, P_r$ générateurs de la partie infinie de $E(\mathbf{Q})$ tels que*

$$\max\left\{\hat{h}(P_1), \ldots, \hat{h}(P_r)\right\} \leq c_\epsilon \Delta_E^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

Cette dernière conjecture est motivée par la conjecture de Birch & Swinnerton-Dyer qui fait apparaître le régulateur $\mathrm{Reg}(E/\mathbf{Q})$ dans le terme dominant du développement de Taylor de la série de Dirichlet $L(E, s)$ associée à E, en $s = 1$. J'ai omis un terme c^{r^2} présent dans [L18], mais qui n'a que peu d'intérêt tant qu'on ignore même si r est borné ou non. La majoration dans le cas d'une variété abélienne devrait s'écrire $c_\epsilon H(A)^{1+\epsilon}$ avec $H(A) = \exp h(A)$. Les théorèmes en direction de la majoration du régulateur sont inexistants aujourd'hui, ce qui est dommage car ils permettraient un calcul effectif de $E(\mathbf{Q})$.

Le théorème de Mordell-Weil - Mordell (1922) pour les courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$, Weil (1929) pour les jacobiennes sur les corps de nombres - a été clarifié et étendu par Serge Lang aux variétés abéliennes. Le résultat vraiment nouveau est le théorème de Lang-Néron [LN7] que nous énonçons ci-dessous. Pour cela rappelons la définition de la K/k-trace de Chow (voir [L8]): si K/k est une extension *régulière* (i.e. k est algébriquement clos dans K ou encore, si K est de type fini sur k, on a $K = k(V)$ avec V variété définie sur k) et si A est une variété abélienne définie sur K, il existe une "*plus grande sous-variété abélienne définie sur k*"; plus précisément il existe B, variété abélienne définie sur k et $\tau : B_K \to A$ morphisme universel, tels que tout homomorphisme $\phi : C_K \to A$ à partir d'une variété abélienne C définie sur k se factorise à travers τ.

Théorème. (Lang-Néron) *Soit K une extension régulière de type fini de k, soit A une variété abélienne sur K, soit B sa K/k-trace et $\tau : B_K \to A$ l'application universelle. Alors*

$$A(K)/\tau(B(k)) \quad \textit{est un groupe de type fini.}$$

En particulier si $K = F(t_1, \ldots, t_r)$ est une extension de type fini de F, si A est une variété abélienne sur K ne contenant pas de partie constante sur F, alors $A(K)$ est un groupe de type fini.

2.3. Intersection d'une sous-variété avec un sous-groupe.

Dans un effort pour aborder la conjecture de Mordell et la généraliser, Lang a été amené à considérer l'intersection d'un sous-groupe de type (ou rang) fini de A avec une courbe.

La conjecture suivante (parfois dite de Manin-Mumford-Lang ou Mordell-Lang) est aujourd'hui un théorème grâce principalement aux travaux de Faltings [Fa2], complétés par [H], [Vo3] et [McQ]. Elle (ou ses analogues) a été et continue à être la source de travaux intéressants comme par exemple la théorie différentielle algébrique des jets (Cf Buium [Bu]) elle-même inspirée des travaux pionniers de Manin [Ma], l'apparition surprenante (au moins pour certains) de la théorie des modèles dans ces questions (Cf Hrushovski [HR]) ou des simplications (dans le cas où Γ est le groupe de torsion, Cf Pink-Roessler [P-R]), voir aussi les travaux de Raynaud [Ra] et Rémond [Ré].

Conjecture. (Lang). *Soit A une variété semi-abélienne définie sur $\mathbf{C}$, soit Γ un sous-groupe de $A(\mathbf{C})$ de rang fini et V une sous-variété fermée de A alors il existe un ensemble fini de $\gamma_i \in \Gamma$ et de sous-groupes algébriques B_i tels que $\gamma_i + B_i \subset V$ et*

$$V(\mathbf{C}) \cap \Gamma = \cup_{i=1}^{s} \gamma_i + (B_i(\mathbf{C}) \cap \Gamma)\,.$$

En particulier si $V(\mathbf{C}) \cap \Gamma$ est Zariski dense dans V alors V est le translaté d'un sous-groupe algébrique par un élément de Γ.

Rappelons qu'un groupe abélien Γ est de rang fini r si $\Gamma \otimes \mathbf{Q}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension r. Pour l'énoncé de Lang, on peut penser au cas où l'on part d'un groupe de type fini Γ_0 et on prend le saturé $\Gamma := \{x \in A(\mathbf{C}) \mid \exists m \geq 1,\ mx \in \Gamma_0\}$.

Cet énoncé généralise la conjecture de Mordell : prendre pour V une courbe dans sa jacobienne J et pour Γ le groupe de Mordell-Weil $J(k)$. Dans [L14] est énoncée la conjecture de Lang pour les courbes; dans [L13] il prouve l'analogue pour une courbe dans un tore $(\mathbf{G}_m)^n$.

Serge Lang était friand de l'énoncé suivant que l'on peut voir comme un énoncé purement d'analyse complexe dont la preuve est en fait essentiellement équivalente à celle de la conjecture de Mordell et passe par l'utilisation massive d'arithmétique.

Corollaire. *Soit S une surface de Riemann compacte de genre g, soit $T := \mathbf{C}^n/\Lambda$ un tore complexe ($\Lambda \cong \mathbf{Z}^{2n}$ sous-groupe discret de rang maximal dans $\mathbf{C}^n$) et $f : S \to T$ une application holomorphe, soit Γ un sous-groupe de type fini (ou même de rang fini) de T, alors l'ensemble $\{z \in S \mid f(z) \in \Gamma\}$ est fini, sauf si $f(S)$ est un translaté par un élément de Γ d'un sous-tore complexe, i.e. si il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma + f(S) = \mathbf{C}/(\Lambda \cap \mathbf{C})$ pour une droite complexe $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^n$.*

L'énoncé a de multiples applications arithmétiques mais aussi géométriques. Ainsi, par exemple, l'article de Cutkosky et Srinivas [C-S], concernant le problème de Zariski sur la dimension des systèmes linéaires sur les surfaces, utilise le cas particulier $r = 1$ de la conjecture de Lang.

2.4. Arithmétique et géométrie algébrique et analytique.

Un des problèmes les plus fondamentaux soulevés par Serge Lang est l'existence d'un dictionnaire entre propriétés arithmétiques d'une variété, propriétés géométriques et propriétés analytiques. Les livres et articles [L19], [L20], [L21] y sont consacrés; le livre [L22] développe la géométrie hyperbolique en introduisant le point de vue qui intéressait Lang.

L'observation suivante est frappante. Il existe des applications holomorphes non constantes de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^1 \setminus \{\text{un point}\}$ ou même $\mathbf{P}^1 \setminus \{\text{deux points}\}$ (prendre $\exp(z) : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$) et vers une surface de Riemann de genre 1 (prendre $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\Lambda$). Cependant il n'existe aucune application holomorphe non constante de $\mathbf{C}$ vers une surface de Riemann de genre ≥ 2 (car son revêtement universel est le disque $\mathbf{D}$), vers une surface de Riemann de genre 1 privée d'un point ou vers $\mathbf{P}^1 \setminus \{a, b, c\}$ d'après le théorème de Picard. En termes différentiels, les surfaces de Riemann (algébriques) n'admettant pas de fonctions entières non constantes sont celles qui ont une courbure constante négative. En comparant avec les théorèmes diophantiens, on voit apparaître une remarquable correspondance entre propriétés arithmétiques, géométriques et analytiques.

Ainsi, si une variété contient une courbe rationnelle $\mathbf{P}^1 \to V$, ou une application non constante d'un groupe algébrique $G \to V$, on obtient donc une infinité de points rationnels. Dans ce cadre, Lang a proposé la conjecture élégante suivante (voir [L15]).

Conjecture. (Lang) *Soit V une variété algébrique projective et lisse définie sur un corps de nombres k ; les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) Pour tout corps de nombres K contenant k, l'ensemble des points rationnels $V(K)$ est fini (on dit que la variété est mordellique[(2)]*).*

(ii) La variété V ainsi que toutes ses sous-variétés sont pseudo-canoniques [(3)] (i.e. de dimension de Kodaira maximale).

(iii) La variété $V(\mathbf{C})$ est hyperbolique (au sens de Brody, i.e. toute application holomorphe $\mathbf{C} \to V(\mathbf{C})$ est constante).

Le *lieu spécial* d'une variété est l'adhérence de Zariski de l'union de ses sous-variétés images par un morphisme non constant d'un groupe algébrique (on peut se restreindre aux variétés abéliennes). Cette définition est due à Serge Lang qui demande au passage s'il est nécessaire de prendre la clôture de Zariski (autrement dit si l'union des sous-variétés images par un morphisme d'un groupe algébrique n'est pas automatiquement fermée). On notera ce lieu spéc(V). Une autre question purement géométrique est de savoir si spéc(V) est un sous-ensemble propre de V quand on suppose que celle-ci est pseudo-canonique. D'un point de vue analytique, on peut définir un *lieu spécial analytique* : c'est l'adhérence de Zariski de l'union de toutes les images d'applications holomorphes non constantes $\mathbf{C} \to V(\mathbf{C})$; les conjectures de Lang suggèrent que le lieu spécial (algébrique) coïncide avec le lieu spécial analytique (ce qui n'est pas connu).

Conjecture. (Lang) *La variété quasi-projective $V \setminus \text{spéc}(V)$ est mordellique.*

Ces conjectures ont été formulées comme des généralisations de la trichotomie pour les courbes algébriques, appelées aussi (sur $\mathbf{C}$) surfaces de Riemann… Une courbe de genre 0 est isomorphe à la droite projective

(2) *La dissonance du mot (au moins en français) est une pointe d'humour qui n'a vraisemblablement rien d'involontaire chez Serge Lang.*

(3) *Dans la littérature, ces variétés sont appelées "de type général", le terme "pseudo-canonique" a été proposé par Serge Lang et est utilisé ici en son honneur. Je pense que le terme "log-canonique", utilisé plus loin, lui aurait fait plaisir.*

$\mathbf{P}^1$ (dès qu'elle a un point rationnel) et a donc beaucoup de point rationnels; une courbe de genre 1 est à isomorphe une cubique plane (dès qu'elle a un point rationnel) et a donc "peu" de point rationnels même s'ils sont en nombre infini (Mordell-Weil). Une courbe de genre $g \geq 2$ n'a qu'un nombre fini de point rationnels (conjecture de Mordell, théorème de Faltings). Ces conjectures générales ne sont connues en dimension supérieure essentiellement que pour les sous-variétés de variétés abéliennes [Fa2]. En effet on sait que si V est une sous-variété d'une variété abélienne A, alors spéc(V) est l'union des translatées de sous-variétés abéliennes $t + B$ contenues dans V et de plus on sait que l'union est fermée. On peut ajouter aussi l'exemple des variétés de Shimura qui, comme l'a remarqué Ullmo [Ul], peuvent être traitées en utilisant les travaux de Faltings. Ainsi tous les exemples connus passent par les variétés abéliennes.

Il est relativement aisé de formuler une conjecture plus générale à condition d'introduire le *bord* d'une variété algébrique non nécessairement complète. Une façon "économique" de faire cela est, partant d'une variété quasi-projective lisse V, de la compactifier en une variété complète $V \subset \bar{V}$, puis, quitte à éclater le bord $\bar{V} \setminus V$ et utiliser le théorème de résolution des singularités d'Hironaka (cela force à laisser le monde de la caractéristique p dans le conditionnel) on peut supposer que $\partial V := \bar{V} \setminus V$ est un diviseur à croisements normaux. La variété sera alors dite *log-canonique* si $\omega_{\bar{V}}(\partial V)$ est "gros" (observer que la définition ne dépend que de V et pas de la compactification choisie).

Conjecture. (Lang) *Soit V une variété algébrique affine lisse définie sur un corps de nombres k ; les énoncés suivants sont équivalents :*
(i) Pour tout corps de nombres K contenant k, l'ensemble des points entiers $V(\mathcal{O}_K)$ est fini. [(4)]
(ii) La variété V ainsi que toutes ses sous-variétés sont log-canoniques.
(iii) La variété $V(\mathbf{C})$ est hyperbolique (i.e. toute application holomorphe $\mathbf{C} \to V(\mathbf{C})$ est constante).

On pourrait formuler cette conjecture de manière à ce qu'elle contienne la précédente puisque, si V est projective, points rationnels et points entiers coïncident, cependant la restriction aux variétés affines est assez naturelle et, pour les variétés quasi-projectives générales, il y a plusieurs définitions non équivalentes d'hyperbolicité. Hormis le cas des courbes où elle équivaut au théorème de Siegel, cette conjecture est démontrée par Faltings dans le cas d'un ouvert affine d'une variété abélienne [Fa2], ce qui avait été conjecturé depuis longtemps ... par Serge Lang [L10].

Caporaso, Harris et Mazur [C-H-M] ont montré une conséquence surprenante de la conjecture de Lang sur les variétés pseudo-canoniques : elle entraîne que pour $g \geq 2$ et k corps de nombres, il existe une constante $c(k, g)$ telle que pour toute courbe V de genre g définie sur k on a $\operatorname{card} V(k) \leq c(k, g)$. La force de cette conclusion (dont la fausseté n'est pas démontrée) fait douter certains de la validité de la conjecture de Lang; on peut aussi dire que cela renforce l'intérêt évident de la conjecture de Lang.

Lang a fait beaucoup de publicité pour les travaux de Vojta, qui développent une analogie remarquable entre théorie de Nevanlinna (appartenant donc à la théorie de la variable complexe) et approximations rationnelles (appartenant donc à la théorie des nombres). Par exemple le théorème du sous-espace de Schmidt en aproximation diophantienne correspond au théorème de Cartan en théorie de Nevanlinna. Je renvoie au livre de Vojta [Vo1] et aux exposés de Lang dans [L19], [L22], [L24] et [L25] pour l'énoncé des conjectures que Vojta tire de cette analogie. Indiquons simplement ici qu'elles fournissent une sorte de version quantitative des conjectures de Lang.

3. Conclusion avec quelques souvenirs personnels.

Il est difficile de parler de Serge Lang en évoquant seulement ses mathématiques et sans évoquer quelques touches vertes ou rouges du personnage haut en couleurs. J'ai d'abord connu Lang par ses livres, son *Algebra* m'accompagne depuis la maîtrise et, préparant ma thèse, j'ai appris mes mathématiques dans ses livres *Abelian varieties*, *Diophantine Geometry*, *Elliptic curves*, *Elliptic functions*. Il m'a fait le plaisir et l'honneur de participer au jury de ma thèse. Comme tous ceux qui l'ont connu ne serait-ce qu'un peu, j'ai été frappé par son intensité, son exigence, voire son incandescence qui ne laissaient personne indifférent. Son exigence n'était pas que dureté, je ne suis pas le seul jeune mathématicien à avoir été encouragé par

[(4)] *Lang aurait pu appeler* siegelienne *ou* siegelsche *une telle variété affine mais il ne l'a, semble-t-il, pas fait.*

Lang. Et puis évidemment ... ses fameuses polémiques ont égayé, stimulé, parfois effrayé ou irrité beaucoup d'entre nous. Je ne citerai que la polémique directement en rapport avec la géométrie diophantienne, celle qui l'opposa à Mordell et Siegel. Mordell publia en effet une recension fort critique du livre *Diophantine Geometry* [L12] et reçut un soutien de la part de Siegel, dans une lettre au langage étonnamment virulent. Lang se régala d'ailleurs un peu plus tard à écrire une recension d'un livre de Mordell (les deux reviews cités sont reproduits dans la réédition de [L12]). L'histoire a totalement donné raison à Lang et celui-ci s'est de nouveau régalé en publiant il y a quelques années un texte [L26] dans la *gazette* relatant la polémique, les idées, l'histoire (il m'avait écrit à cette occasion "*on va bien s'amuser*"). Serge était toujours prompt à réagir et dégainer, ainsi une lettre d'Arnold publiée dans la *gazette* citant une phrase de Landau "*les nombres premiers sont fait pour être multipliés, pas additionnés*" l'avait fait bondir et ils nous envoya donc une missive "de représailles" qui fut aussi publiée dans la gazette et contient une très jolie présentation de la conjecture de Bateman-Horn [L27] décrivant les valeurs premières prises par un ou plusieurs polynômes. Lang aimait les mathématiques nouvelles et avait un flair remarquable pour voir ce qui allait devenir important. Ainsi, bien qu'il ait lui-même plutôt écrit la géométrie algébrique dans le langage des *foundations* de Weil, il salua l'arrivée de la géométrie des schémas de Grothendieck avec un *review* très intéressant [L11] et suivit avec passion les développements de la théorie d'Arakelov (Szpiro, Faltings ... et Gillet-Soulé) écrivant même un ouvrage de référence sur les bases du sujet [L23].

Parmi les buts multiples poursuivis par Serge Lang, j'ai insisté sur celui qui consiste à d'établir un dictionnaire entre les propriétés arithmétiques (l'ensemble $V(k)$) et géométriques (la variété algébrique $V(\mathbf{C})$) et analytiques (la variété complexe analytique ou différentielle $V(\mathbf{C})$). Ce croisement d'idées venues de l'approximation rationnelle, de l'analyse complexe, de la géométrie différentielle analytique s'est déjà montré très fécond, renouvelant même les problématiques de tous ces domaines. L'avenir dira si le dictionnaire proposé par Serge Lang devra être rectifié ou modifié; il a d'ores et déjà éclairé le chemin à suivre.

Je conclus avec une autre citation de Serge Lang extraite de l'ouvrage [L25] (page 206) qui se réfère en fait à des travaux et conjectures de Vojta (utilisant la géométrie d'Arakelov et s'inspirant d'analogies avec la théorie de Nevanlinna), mais décrit assez bien la conception du Graal mathématique selon Serge Lang. Sa grande ombre sur ces mathématiques va nous manquer.

"*Thus we behold the grand unification of algebraic geometry, analysis and PDE, Diophantine approximation, Nevanlinna theory and classical Diophantine problems about rational and integral points.*"

4. Références.

4.1. Références citées de Serge Lang

[L1] *Some applications of the local uniformization theorem.* Amer. J. Math. 76, 1954, 362-374.

[LW2] (avec A. Weil) *Number of points of varieties in finite fields.* Amer. J. Math. 76, 1954, 819-827.

[L3] *Algebraic groups over finite fields.* Amer. J. Math. 78, 1956, 555–563.

[L4] *Unramified class field theory over function fields in several variables.* Annals of Math. 64, 1956, 39–330.

[L5] *On the Lefschetz principle.* Annals of Math. 64, 1956, 326–327.

[LT6] (avec J. Tate) *Principal homogeneous spaces over abelian varieties.* Amer. J. Math. LXXX, 1958, 659–684.

[LN7] (avec A. Néron) *Rational points of abelian varieties over function fields.* Amer. J. Math. 81, 1959, 95–118.

[L8] *Abelian varieties.* Interscience, New York 1959, réédité par Springer-Verlag, 1983.

[L9] *Integral points on curves.* Pub. Math. IHES, 1960, 319–335.

[L10] *Some theorems and conjectures in diophantine equations*, Bull. Amer. Math. Soc. 66, 1960, 240-249.

[L11] *Review of Eléments de géométrie algébrique (par Grothendieck et Dieudonné).* Bull. Amer. Math. Soc. 67, 1961, 239–246.

[L12] *Diophantine geometry.* Wiley, Interscience, 1962. Une ré-édition fortement augmentée *Fundamentals of Diophantine Geometry*, a été publié par Springer en 1983.

[L13] *Diophantine approximations on toruses.* Amer. J. Math. 86, 1964, 521–533.

[L14] *Division points on curves.* Ann. Mat. Pura Appl. LXX, 1965, 229–234.

[L15] *Higher dimensional diophantine problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 80, 1974, 770–787.

[L16] *Division points of elliptic curves and abelian functions over number fields.* Amer. J. Math. 97, 1975, 124–132.

[L17] *Elliptic curves: Diophantine analysis.* Springer-Verlag 1978.

[L18] *Conjectured diophantine estimates on elliptic curves.* In *Arithmetic geometry*, dedié à Shafarevic, Birkhaüser, 1983, 155–171.

[L19] *Variétés hyperboliques et analyse diophantienne.* Séminaire de théorie des nombres de Paris 1984-85, Birkhäuser PM 63, 1986, 177–184.

[L20] *Hyperbolic and diophantine analysis.* Bull. Amer. Math. Soc. 14, 1986, 159–205.

[L21] *Diophantine problems in complex hyperbolic analysis.* Contemporary Math. 67, 1987, 229–246.

[L22] *Introduction to complex hyperbolic spaces.* Springer-Verlag 1987.

[L23] *Introduction to Arakelov theory.* Springer-Verlag 1988.

[L24] *Old and new conjectures in diophantine inequalities.* Bull. Amer. Math. Soc. 23, 1990, 37–75.

[L25] *Number Theory III. Diophantine Geometry.* Volume 60 (Teoriya Chisel 3) de l'encyclopédie russe. Springer-Verlag, 1991. [réédité sous le titre *Survey of Diophantine Geometry*, 1997].

[L26] *Mordell's review, Siegel's letter to Mordell, diophantine geometry, and 20th century mathematics.* Gazette Math., S.M.F. 63, 17–36 (1995).

[L27] *La conjecture de Bateman-Horn.* Gazette Math., S.M.F. 67, 82–84 (1996).

(Hormis les livres [L8], [L12], [L17], [L22], [L23] et [L25], tous ces textes figurent dans les *Collected Papers* de Serge Lang publiés par Springer).

4.2. Autres références.

[B-G] E. Bombieri, W. Gubler. *Heights in Diophantine Geometry.* Cambridge University Press, 2006.

[Bu] A. Buium. *Intersections in jet spaces and a conjecture of S. Lang.* Annals of Math. 136, 1992, 557–567.

[C-H-M] L. Caporaso, J. Harris, B. Mazur. *Uniformity of rational points.* J. Am. Math. Soc. 10, 1997, 1–35.

[C-S] S. Cutkosky; V. Srinivas. *On a problem of Zariski on dimensions of linear systems.* Annals of Math. 137, 1993, 531-559.

[Da] S. David. *Autour d'une conjecture de S. Lang.* In Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy, 1990), 65–98, de Gruyter, Berlin, 1992.

[Fa1] G. Faltings. *Endlichkeitssätze für abelschen Varietäten Über Zahlkörpern.* Inventiones math.73, 1983, 9–27.

[Fa2] G. Faltings. *Diophantine approximations on abelian varieties.* Annals of Math. 133, 1991), 549–576.

[H] M. Hindry. *Autour d'une conjecture de Serge Lang.* Inventiones Math. 94, 1988, 575–603.

[H-S1] M. Hindry, J. Silverman. *The canonical height and integral points on elliptic curves.* Inventiones Math.93, 1988, 419–450.

[H-S2] M. Hindry, J. Silverman. *Diophantine Geometry. An introduction.* GTM 201, Springer, 2000.

[HR] E. Hrushovski. *The Mordell-Lang conjecture for function fields.* J. Am. Math. Soc. 9, 1996, 667–690.

[Ma] Y. Manin. *A proof of the analog of the Mordell conjecture for algebraic curves over function fields* (en russe) Dokl. Akad. Nauk SSSR 152, 1963, 1061–1063; (traduction anglaise) Sov. Math., Dokl. 4, 1963, 1505–1507.

[McQ] M. McQuillan. *Division points on semi-abelian varieties.* Inventiones Math. 120,1995, 143–159.

[Mo] S. Mori. *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective.* Annals of Math. 116, 1982, 133–176.

[P-R] R. Pink, D. Roessler. *On Hrushovski's proof of the Manin-Mumford conjecture.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing), Vol. I, Higher Ed. Press, 2002, 539–546.

[Ra] M. Raynaud. *Around the Mordell conjecture for function fields and a conjecture of Serge Lang.* In Algebraic geometry, Springer LN 1016, 1983, 1–19.

[Ré] G. Rémond. *Décompte dans une conjecture de Lang.* Inventiones Math. 142, 2000, 513–545.

[Sch1] W. Schmidt. *Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals.* Acta Math. 125, 1970, 189–201.

[Sch2] W. Schmidt. *The subspace theorem in diophantine approximations.* Compos. Math. 69, 1989, 121-173.

[Se1] J.-P. Serre. *Groupe algébriques et corps de classes.* Herman, 1959.

[Se2] J.-P. Serre. *Lectures on the Mordell-Weil theorem.* Vieweg, 1989.

[Ul] E. Ullmo. *Points rationnels des variétés de Shimura.* Int. Math. Res. Not. 76, 2004, 4109–4125.

[Vo1] P. Vojta. *Diophantine approximations and value distribution theory.* Springer LN 1239, 1987.

[Vo2] P. Vojta. *Siegel's theorem in the compact case.* Annals of Math. 133, 1991, 509–548.

[Vo3] P. Vojta. *Integral points on subvarieties of semiabelian varieties I.* Inventiones Math. 126, 1996, 133–181.