Sur les ensembles finis.

Par

Alfred Tarski (Varsovie).

Introduction.

Le présent ouvrage est en grande partie un ouvrage sytématisant. Il a pour but de développer la théorie des ensembles finis comme une partie de la Théorie générale des Ensembles et sans faire intervenir les notions ou théorèmes de l'Arithmétique des nombres naturels. Les raisonnements seront basés sur le système d'axiomes de M. Zermelo [1]), notamment sur les 5 premiers de ses axiomes, ceux *du choix* et *de l'infini* étant exclus.

L'ideé de construire ainsi la théorie des ensembles finis a été énoncée à plusieurs reprises [2]), bien que jusqu'à présent elle ne soit nulle part complètement realisée. La première tentative a été faite par Dedekind dans son travail „*Was sind und was sollen die Zahlen*" [3]) qui fut conçu d'ailleurs d'un point de vue différent. Il y établit sa définition connue de l'ensemble fini et — en se basant sur cette définition — il démontre certains théorèmes concernant les propriétés fondamentales des ensembles finis. Or ces résultats de Dedekind, n'ayant pas de solide fondement axiomatique, éveillent quelquefois des doutes tout à fait essentiels (p. ex. la démonstration de l'existence d'un ensemble infini. Cf. aussi le § 5 du présent ouvrage).

[1]) E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* I, Mathematische Annalen, 65 Band, Leipzig 1908, p. 261—281.

[2]) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 47.

[3]) R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* III Auflage, Braunschweig 1911, § 5, § 14.

Après Dedekind on a donné plusieurs définitions de l'ensemble fini, que je citerai plus loin; cependant les auteurs de ces définitions se sont généralement contentés de prouver leur équivalence soit à la définition arithmétique ordinaire soit à une quelconque de définitions publiées antérieurement. Par contre, la théorie des ensembles finis que l'on trouve chez Russell et Whitehead [1]) a des limites étendues. Mais c'est la définition arithmétique [2]) dont se servent ces auteurs comme du point de départ et le caractère spécifique du système de Russell et Whitehead — lié à la théorie des types — ne permet pas de transporter totalement leurs résultats et la méthode de leurs démonstrations dans le système sur lequel s'appuyent les miens.

Ce qu'il y a d'essentiellement nouveau dans mon ouvrage, c'est la définition suivante de l'ensemble fini:

„*L'ensemble A est fini, lorsque à toute classe K de ses sous-ensembles appartient comme élément au moins un ensemble B dont aucun vrai sous-ensemble n'appartient à K*".

En partant de cette définition, je démontre les théorèmes concernant les propriétés fondamentales des ensembles finis qui me sont connus [3]). J'envisage ensuite le rapport entre ma définition et celles qui ont été proposées jusqu'à présent, ce qui me permet en même temps d'examiner les propriétés des ensembles finis liées aux notions de la puissance et de l'ordre. Les théorèmes sur l'équivalence de deux définitions sont présentés sous la forme des théorèmes sur la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit fini.

Parmi les théorèmes donnés dans la suite il y a qui peuvent être généralisés (p. ex. les théorèmes 1 et 13), si l'on envisage des ensembles ayant une certaine propriété P, au lieu d'envisager les éléments d'une classe K: on sait en effet que toute classe K dé-

[1]) A. N. Whitehed and B. Russell, *Principia Mathematica*, Vol. II, Part III, Section C, Cambridge 1912; Vol. III, Part V, Section E, Cambridge 1913.

[2]) Cf. A. N. Whitehead and B. Russell, op. cit., 120.02. Bien que ces auteurs définissent la notion du nombre naturel à l'aide des notions de la Théorie des ensembles, mais leur procédé n'est légitime que grâce à la théorie des types.

[3]) Cela prouve qu'on peut fonder la théorie des ensembles finis sans faire appel à la notion d'ordre, contrairement à l'opinion de M. Schoenflies qui écrit dans l'introduction à la deuxième édition de son livre connu: „Eine Begründung der ersten Sätze über endliche Mengen und Zahlen ist ohne den Ordnungsbegriff unmöglich" (*Entwickelung der Mengenlehre*..., Leipzig unh Berlin, 1913, p. V).

termine une propriété dont jouissent tous ses éléments et seulement eux (à savoir, la propriété d'appartenir à cette classe), tandis que l'on peut démontrer à l'aide des axiomes de M. Zermelo l'existence de propriétés qui ne déterminent aucune classe de tous les objets possédant cette propriété. Or, la tendance d'éliminer de la Théorie des Ensembles les notions générales de „propriété", de „relation" etc. ayant des partisans parmi quelques théoriciens de cette science [1]) je renonce, bien que je ne partage point leur opinion, de généraliser ainsi mes théorèmes, afin de donner à mes raisonnements un fondement indubitable.

Bibliographie.

Je tache dans cet ouvrage de tenir compte des résultats les plus importants contenus dans les travaux suivants:

R. Dedekind: *Was sind und was sollen die Zahlen?* III Auflage, Braunschweig 1911.

C. Kuratowski: *Sur la notion de l'ensemble fini.* Fund. Math., Tom I, Warszawa 1920, p. 130.

— *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles.* Fund. Math., Tom II, Warszawa 1921, p. 161 [2]).

W. Sierpiński: *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Theorie des Ensembles et l'Analyse*, § 1. Extrait du Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Cracovie 1919.

P. Stäckel: *Zu H. Webers Elementarer Mengenlehre.* Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 16 Band, Leipzig 1907, p. 425.

H. Weber: *Elementare Mengenlehre.* Jahresberichte..., 15 Band, Leipzig 1906, p. 270.

A. N. Whitehead and B. Russell: *Principia Mathematica.* Vol. II, Part III, Section C et Vol. III, Part V, section E; Cambridge 1912—1913.

E. Zermelo: *Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète.* Acta Mathematica, 32, Stockholm 1909, p. 185.

Über die Grundlagen der Arithmetik. Atti del IV Congresso Internationale dei Mathematici, Vol. II, Sezione I, Roma 1909.

Notations.

Je désigne par „a", „b"... les objets dont je n'admets pas l'hypothèse qu'ils soient des ensembles;

„ „ „A", „B"... les ensembles, sur les éléments desquels je n'admets pas par hypothèse qu'ils soient des ensembles;

[1]) Cf. C. Kuratowski, *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles,* Fundamenta Mathematicae, T. II (1921), p. 163.

[2]) Je citerai ces ouvrages comme C. Kuratowski I, resp. II.

Je désigne par „K", „L", „M"... les ensembles des ensembles, que j'appelle d'habitude „classes des ensembles";
„ „$\mathscr{F}$", „$\mathscr{H}$", „$\mathscr{L}$"... les classes des classes des ensembles, que j'appelle parfois „familles des classes".

Au lieu de „ensemble vide"	j'écris	„0";
„ „ensemble composé d'un seul élément „a"	„	„(a)";
„ „ensemble composé des deux éléments a et b"	„	„(a, b)";
„ „a est élément de (appartient à) A"	„	„$a \varepsilon A$";
„ „a n'est pas élément (n'appartient pas à) A"	„	„$a \bar{\varepsilon} A$";
„ „a est identique à b"	„	„$a = b$";
„ „a est différent de b"	„	„$a \neq b$";
„ „A est sous-ensemble de B (B contient A)"	„	„$A \subset B$";
„ „somme des ensembles A et B"	„	„$A + B$";
„ „différence des ensembles A et B"	„	„$A - B$";
„ „partie commune des ensembles A et B"	„	„$A \times B$";
„ „classe de tous les sous-ensembles de l'ensemble A"	„	„$S(A)$";
„ „somme de tous les ensembles-éléments de K [1])"	„	„$\Sigma(K)$";
„ „partie commune de tous les ensembles-éléments de K [2])"	„	„$\Pi(K)$";
„ „produit de tous les ensembles-éléments de K [3])"	„	„$P(K)$".

§ 1. La définition fondamentale de l'ensemble fini.

Je commence par introduire deux notions dont je vais me servir dans la suite.

Définition 1. *Elément irréductible d'une classe K d'ensembles est tout ensemble A tel que*

I. $A \varepsilon K$,

II. *aucun vrai sous-ensemble de A n'appartient à K*

(autrement dit:

$$\textit{si } B \subset A \quad \text{et} \quad B \varepsilon K, \quad \text{on a} \quad B = A).$$

Définition 2. *Elément saturé d'une classe K d'ensembles est tout ensemble A tel que*

I. $A \varepsilon K$,

II. *A n'est vrai sous-ensemble d'aucun élément de K*

[1]) „Vereinigungsmenge" ibid., Axiom V, p. 265.

[2]) „Durchschittmenge" ibid., 9, p. 264.

[3]) „Produkt" ou „Verbindungsmenge", ibid., 13, p. 266, c'est-à-dire la classe de tous les sous-ensembles de $\Sigma(K)$ qui ont avec chaque ensemble appartenant à K un seul élément commun. Cette notion n'est définie que pour les classes K des ensembles disjoints, c. à d. assujetties à la condition:

$$\text{si } A \varepsilon K \quad \text{et} \quad B \varepsilon K, \quad \text{on a} \quad A \times B = 0.$$

(autrement dit:

$$\text{si } A \subseteq B \quad \text{et} \quad B \varepsilon K, \quad \text{on a} \quad A = B$$ [1])).

On peut formuler à l'aide de chacune de ces deux notions une définition correspondante de l'ensemble fini. Ayant à employer dans la suite les deux définitions ainsi obtenues, je vais en prendre l'une comme point de départ et je donnerai l'autre comme le théorème 3.

Définition 3. *L'ensemble A est fini lorsque toute classe non-vide K de ses sous-ensembles admet au moins un élément irréductible* [2]).

Je vais démontrer tout d'abord deux lemmes suivants:

Lemme 1. *Toute classe non-vide K de sous-ensembles d'un ensemble fini A admet au moins un élément saturé.*

Démonstration. Désignons par L la classe de tous les sous-ensembles B de l'ensemble A tels que

$$A - B \varepsilon K.$$

La classe L n'est pas vide. En effet, si

$$C \varepsilon K,$$

on a en vertu de l'hypothèse du théorème

$$C \subset A,$$

$$C = A - (A - C),$$

d'où d'après la définition de la classe L,

$$A - C \varepsilon L.$$

Par conséquent la classe L admet, conformément à la définition 3, au moins un élément irréductible D.

Je vais prouver que $A - D$ est un élément saturé de K.

D'abord la définition de la classe L donne:

(1) $$A - D \varepsilon K.$$

[1]) Les termes „irréductible" et „saturé" sont introduits et définis par Janiszewski dans un sens plus général. Voir *Journ. de l'École Polytechnique*, 1912, Chap. I (Thèse)

[2]) On peut remplacer dans la définition 3 les mots „de sous-ensembles" par „dont A est élément". Mais la définition du texte est peut-être plus avantageuse, car elle donne un critère qui permet de décider si un ensemble est fini ou non en considérant uniquement cet ensemble et les classes de ses sous-ensembles

Supposons ensuite qu'un ensemble E remplit les conditions:

(2) $$E \varepsilon K,$$

(3) $$A - D \subset E.$$

On a en vertu de (2)

(4) $$E \subset A,$$

(5) $$E = A - (A - E),$$

d'où

(6) $$A - E \varepsilon K.$$

D'autre part on conclut de (3) que

(7) $$A - E \subset D.$$

Or, l'ensemble D étant un élément irréductible de K, les formules (6) et (7) donnent conformément à la définition 1 :

(8) $$A - E = D,$$

(9) $$A - D = E.$$

Nous avons donc démontré que l'ensemble $A-D$, qui conformément à (1) appartient à la classe K n'est pas vrai sous-ensemble d'aucun élément de cette classe (puisque (2) et (3) entrainent (9)). $A - D$ est donc, selon la déf. 2, un élément saturé de K, c. q. f. d.

Lemme 2 (inverse). *Si toute classe K non-vide de sous-ensembles de l'ensemble A admet au moins un élément saturé, l'ensemble A est fini.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle du lemme précédent.

Les deux lemmes permettent d'établir le théorème suivant:

Théorème 3. *Pour qu'un ensemble A soit fini il faut et il suffit que toute classe non-vide K de ses sous-ensembles admette au moins un élément saturé.*

§ 2. Ensembles élémentaires et opérations sur les ensembles finis.

Théorème 4. 0 *est un ensemble fini.*

Théorème 5. *a étant un objet quelconque, (a) est un ensemble fini.*

Pour démontrer ces deux théorèmes, il suffit d'envisager toutes les classes non-vides de sous-ensembles de 0 et (a). L'ensemble 0

[1]) E. Zermelo (op. cit, Axiom II, p. 263) appelle ainsi l'ensemble vide et les ensembles composés d'un seul ou de deux éléments.

ne possède qu'une seule classe pereille, à savoir la classe (0); l'ensemble (a) en a trois: (0), $((a))$ et $(0, (a))$. Or on voit que chacune de ces classes admet un élément irréductible.

Théorème 6. *A et B étant des ensembles finis, $A+B$ l'est également.*

Démonstration. Considérons une classe non-vide K quelconque de sous ensembles de $A+B$. Soit L la classe de tous les sous-ensembles de A dont chacun étant ajouté à un sous-ensemble convenablement choisi de B donne un élément de la classe K.

La classe L n'est pas vide. Il existe en effet un ensemble C tel que

$$C \varepsilon K.$$

On en conclut que

$$C \subset A+B,$$

$$C = C \times A + C \times B;$$

et comme

$$C \times A \subset A,$$

$$C \times B \subset B,$$

on a en vertu de la définition de la classe L,

$$C \times A \;\varepsilon\; L.$$

D'après la définition 3 il existe dans la classe L au moins un élément irréductible D. On a donc

$$D \varepsilon L, \tag{1}$$

d'où

$$D \subset A. \tag{2}$$

Désignons par M la classe de tous les sous-ensembles E de B qui satisfont à la condition:

$$D + E \;\varepsilon\; K.$$

En raison de (1) et de la définition de la classe L, la classe M n'est pas vide. Elle admet donc un élément irréductible F. On a donc

$$F \varepsilon M, \tag{3}$$

$$F \subset B, \tag{4}$$

$$D + F \;\varepsilon\; K. \tag{5}$$

où les formules (4) et (5) résultent immédiatement de la définition de la classe M.

Nous allons démontrer que $D+F$ est un élément irréductible de K. Supposons en effet qu'un ensemble G remplit les conditions:

(6) $$G \varepsilon K,$$

(7) $$G \subset D+F,$$

d'où

(8) $$G = G \times D + G \times F.$$

Comme conformément à (2) et (4) on a

(9) $$G \times D \subset D \subset A,$$

(10) $$G \times F \subset F \subset B,$$

on obtient en vertu de (6), de (8) et de la définition de L:

(11) $$G \times D \varepsilon L.$$

Or, D étant un élément irréductible de L, on a selon (9) et (11)

(12) $$G \times D = D,$$

et en raison de (8) et (12)

(13) $$G = D + G \times F.$$

D'une façon analogue on conclut en vertu de (6), (10), (13) et de la définition de M que

(14) $$G \times F \varepsilon M.$$

F étant un élément irréductible de M, on a donc

(15) $$G \times F = F$$

et, conformément à (13),

(16) $$G = D + F$$

On voit donc que $D+F$, qui est d'après (5) un élément de K, n'admet aucun vrai sous-ensemble appartenant à cette classe; $D+F$ en est donc un élément irréductible.

Par conséquent une classe arbitraire non-vide de sous-ensembles de $A+B$ admet un élément irréductible, ce qui prouve en vertu de la définition 3 que cet ensemble est fini.

Les théorèmes 5 et 6 impliquent immédiatement le

Corollaire 7. *A étant un ensemble fini et a un objet quelconque, l'ensemble $A+(a)$ est fini.*

En particulier, tout ensemble (a, b) où a et b sont objets quelconques est fini.

Théorème 8. *Tout sous-ensemble B d'un ensemble fini A est fini.*

Pour le prouver, il suffit de remarquer que toute classe non-vide de sous-ensembles de B est à la fois une classe de sous-ensembles de A et admet par conséquent un élément irréductible.

Des théorèmes démontrés résultent tout à l'heure les théorèmes suivants qui sont leur inversion:

Théorème 9. *$A+B$ étant un ensemble fini, chacun des ensembles A et B est fini.*

Il suffit de remarquer que

$$A \subset A+B,$$
$$B \subset A+B$$

et d'appliquer le théorème 8.

Théorème 10. *Chaque vrai*[1]) *sous-ensemble de l'ensemble A étant fini, l'ensemble A l'est aussi.*

Démonstration. Nous pouvons poser:

$$A \neq 0,$$

puisque dans le cas contraire le théorème est évident. Soit donc

$$a \varepsilon A.$$

$A-(a)$ est évidemment un vrai sous-ensemble de A; il est donc fini. Mais comme on a l'identité

$$A = [A-(a)] + (a),$$

l'ensemble A est fini en vertu du corollaire 7.

Le théorème 8 donne encore les corollaires suivants:

Corollaire 11. *A étant un ensemble fini et B un ensemble quelconque, $A-B$ est un ensemble fini.*

Corollaire 12. *A étant un ensemble fini et B un ensemble quelconque, $A \times B$ est un ensemble fini.*

On a, en effet,

$$A-B \subset A,$$
$$A \times B \subset A.$$

[1]) Dans le théorème 10, qui présente l'inversion du théorème 8, il faudrait strictement dit omettre le mot „vrai"; mais dans ce cas le théorème deviendrait trivial.

Les propositions inverses par rapport aux deux théorèmes précédents sont évidemment fausses. On peut s'en convaincre soit à l'aide de l'axiome VII de M. Zermelo (*axiome de l'infini*) soit en s'appuyant, en général, sur un système quelconque, pourvu que ses axiomes impliquent l'existence des ensemble infinis.

Par exemple, dans l'Arithémique des nombres naturels l'ensemble A des nombres premiers, l'ensemble B des nombres impaires et l'ensemble C des nombres pairs sont infinis, tandis que l'ensemble

$$A - B = A \times C = (2)$$

est fini.

Nous avons donc examiné dans ce § ce que l'on peut dire des ensembles: $A + B$, $A - B$, $A \times B$, lorsqu'on sait que l'un des ensembles A et B ou les deux à la fois sont finis; nous avons étudié aussi les problèmes inverses. Les questions analogues concernant le produit des ensembles A et B trouveront leurs réponses dans le § 4. (cf. les corollaires 24 et 26).

§ 3. Le principe d'induction complète pour les ensembles finis. Les définitions de MM. Russell, Sierpiński et Kuratowski.

J'appelle „*principe d'induction complète pour les ensembles finis*" ou, tout court, „*principe d'induction*" le théorème suivant, qui va jouer un rôle important dans la suite.

Théorème 13. *Si A est un ensemble fini, A appartient à toute classe d'ensembles K qui satisfait aux conditions:*

I. $0 \varepsilon K$;

II. *si $B \varepsilon K$ et $a \varepsilon A$, on a $B + (a) \varepsilon K$.*

Démonstration. Soit K une classe d'ensembles satisfaisant aux conditions I et II.

Considérons la classe $S(A) \times K$ Elle n'est pas vide, puisque en vertu de la condition I et de la formule

$$0 \varepsilon S(A)$$

(qui est évidemment vraie), on a

$$0 \varepsilon S(A) \times K.$$

Par conséquent, en raison du lemme 1, il existe au moins un ensemble B tel que

(1) B est élément saturé de $S(A) \times K$.

Je vais prouver que

$$B = A.$$

Supposons, en effet, que

(2) $$B \neq A.$$

En vertu de (1) on a

(3) $$B \subset A$$

et, selon (2) et (3),

(4) $$A - B \neq 0.$$

Posons

(5) $$a \varepsilon A - B,$$

d'où

(6) $$a \varepsilon A,$$

(7) $$a \bar{\varepsilon} B.$$

Les propositions (1) et (6) impliquent, en vertu de la condition II, que

(8) $$B + (a) \varepsilon K,$$

d'où selon (3) et (6),

(9) $$B + (a) \varepsilon S(A) \times K.$$

Or, comme

(10) $$B \subset B + (a),$$

on a d'après (1) et (9)

(11) $$B = B + (a),$$

(12) $$a \varepsilon B.$$

L'hypothèse (2) conduit donc à la contradiction (dans les formules (7) et (12)), ce qui nous contraint d'admettre que

(12) $$B = A,$$

d'où, selon (1),

$$A \varepsilon K, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Il est aisé également de démontrer le théorème inverse:

Théorème 14. *Si A appartient à chaque classe d'ensembles K qui remplit les conditions I et II du théorème 13, A est un ensemble fini.*

Démonstration. Soit K la classe de tous les sous-ensembles finis de A. Conformément au théorème 4 et au corollaire 7, cette classe remplit les conditions I et II.

Par conséquent

$$A \varepsilon K$$

ce qui veut dire que A est un ensemble fini.

Les théorèmes 13 et 14 donnent le

Corollaire 15. *Pour que l'ensemble A soit fini, il faut et il suffit, que A appartienne à toute classe d'ensembles K qui remplit les conditions I et II du théorème 13.*

Ce corollaire figure comme théorème dans le système de Russell et Whitehead sous une forme un peu modifiée [1]. Déjà ces deux auteurs constatent qu'il peut être admis comme définition de l'ensemble fini. Ce fut la première des définitions ne faisant plus usage de notions telles que l'égalité des puissances et l'ordre.

La définition établie par M. Sierpiński [2]) est rapprochée de la précédente. Je la donne ici comme théorème 16, en la modifiant de façon qu'elle embrasse également l'ensemble 0 et qu'elle soit correcte envers le système de M. Zermelo.

Théorème 16. *Pour que l'ensemble A soit fini, il faut et il suffit qu'il appartienne à toute classe K d'ensembles qui satisfait aux conditions:*

I. $0 \varepsilon K$;

II. *si* $a \varepsilon A$, $(a) \varepsilon K$;

III. *si* $B \varepsilon K$ *et* $C \varepsilon K$, *on a* $B + C \varepsilon K$;

Pour prouver que cette condition est nécessaire, on applique le raisonnement tout à fait analogue à celui de la démonstration du théorème 13. Pour prouver qu'elle est suffisante, on raisonne comme dans la démonstration du théorème 14 à cette différence près qu'au lieu de se servir du corollaire 7, on fait usage des théorèmes 5 et 6.

Une autre modification de la définition de M. Sierpiński, également correcte au point de vue du système de M. Zermelo, a été signalée par M. Kuratowski [3]). Je la donne ici en la modifiant de façon à la faire englober aussi l'ensemble vide.

Théorème 17. *Pour que l'ensemble A soit fini, il faut et il suffit que la classe $S(A)$ soit la seule classe d'ensembles K qui satisfait aux conditions:*

[1]) A. N. Whitehead and B. Russell. op. cit., Vol. II, *120·23

[2]) W. Sierpiński. *L'axiome de M. Zermelo* etc., p. 106.

[3]) C. Kuratowski, I, p. 130—131. Cette définition présente l'avantage indiqué dans la note [2]) p. 49. Il n'en est pas ainsi des définitions de MM. Russell et Sierpiński.

I. $K \subset S(A)$;

II. $0 \varepsilon K$;

III. *si* $a \varepsilon A$, $(a) \varepsilon K$;

IV. *si* $B \varepsilon K$ *et* $C \varepsilon K$, *on a* $B + C \varepsilon K$.

Démonstration.

(a) La condition est nécessaire. La classe $S(A)$ remplit évidemment les conditions I—IV. Considérons maintenant une classe arbitraire K qui satisfait également à ces conditions et un sous-ensemble quelconque D de A.

En vertu du théorème 8,

(1) D est un ensemble fini.

Conformément aux conditions II—IV, on a

(2) $$0 \varepsilon S(D) \times K;$$

(3) $$\text{si } E \varepsilon S(D) \times K \text{ et } d \varepsilon D,\ E + (d) \varepsilon S(D) \times K.$$

En appliquant le principe d'induction (le théorème 13), on conclut donc, selon (1), (2) et (3), que

(4) $$D \varepsilon S(D) \times K,$$

d'où

(5) $$D \varepsilon K.$$

Or. D étant un sous-ensemble tout à fait arbitraire de A, on peut affirmer que

(6) $$S(A) \subset K.$$

En rapprochant ce résultat avec la condition I de notre théorème, on obtient

$$S(A) = K.$$

(b) La condition est suffisante. Désignons, en effet, par K la classe de tous les sous-ensembles finis de A. Conformément aux théorèmes 4, 5 et 6 la classe K satisfait aux conditions I—IV de sorte que l'on a

$$S(A) = K.$$

Or, comme

$$A \varepsilon S(A),$$

on a

$$A \varepsilon K$$

et A est un ensemble fini c. q. f. d.

Le théorème qui précède implique que la définition 3 et celle de M. Kuratowski sont équivalentes. Cette dernière définition étant équivalente à la définition arithmétique habituelle[1], la définition 3 lui équivaut également.

§ 4. Sur les classes d'ensembles finis et les classes finies d'ensembles.

Je vais commencer par introduire quelques notions, au premier rang celle de la *paire ordonnée* définie d'une façon à la fois précise et commode par M. Kuratowski[2]. Je démontre ensuite le lemme 18, qui est formulé à l'aide d'une de ces notions et dont je ferai plusieurs fois usage dans la suite.

Définition 4. *Paire ordonnée, dont le premier membre est l'objet a et le second l'objet b, est la classe* $((a, b), (a))$.

Au lieu de „paire ordonnée dont le premier membre est a et le second est b" j'écrirai „$p(a, b)$".

Cette définition donne ausitôt la conclusion suivante:

$$\text{si } p(a, b) = p(c, d), \text{ on a } a = c \text{ et } b = d.$$

Définition 5. *La classe $\mathcal{K}$ transforme d'une façon univoque l'ensemble A en l'ensemble B, si les conditions suivantes sont remplies:*

I. si $a \varepsilon A$, il existe un élément b et un seul de B tel que l'on ait

$$p(a, b) \,\varepsilon\, \mathcal{K};$$

II. si $b \varepsilon B$, il existe au moins un élément a de A tel que l'on ait

$$p(a, b) \,\varepsilon\, \mathcal{K}.$$

Définition 6. *La classe $\mathcal{K}$ transforme d'une façon biunivoque l'ensemble A en l'ensemble B, si les conditions suivantes sont remplies:*

I. si $a \varepsilon A$, il existe un élément b et un seul de B tel que l'on ait

$$p(a, b) \,\varepsilon\, \mathcal{K};$$

II. si $b \varepsilon B$, il existe un élément a et un seul de A tel que l'on ait

$$p(a, b) \,\varepsilon\, \mathcal{K}.$$

[1]) C. Kuratowski, I, p. 180—181.

[2]) C. Kuratowski, II, p. 171. Cf. aussi F. Hausdorff, op. cit., p. 32.

Je suppose ici que les théorèmes généraux, qui concernent la transformation univoque ou biunivoque, sont connus (p. ex les théorèmes sur la transformation de la somme des ensembles, sur leur produit, sur les sous-ensembles d'un ensemble transformé etc.) [1].

Lemme 18. *Si la classe $\mathcal{H}$ transforme d'une façon univoque l'ensemble A en l'ensemble B et l'ensemble A est fini, l'ensemble B l'est également.*

Démonstration. C étant un sous-ensemble arbitraire de A, il existe, comme on sait, un sous-ensemble D de B et un seul tel que la classe $\mathcal{H}$ transforme C en D. Désignons cet ensemble par $\Phi(C)$.

Soit L la classe de tous les ensembles C tels que l'on ait:

I. $C \subset A$.

II. $\Phi(C)$ est un ensemble fini.

Nous allons établir au préable deux lemmes (a) et (b):

(a) $0 \varepsilon L$.

C'est évident, car $\Phi(0) = 0$

(b) Si $C \varepsilon L$ et $a \varepsilon A$, on a $C + (a) \varepsilon L$.

La condition I de la définition de L donne en effet:

$$C \subset A, \tag{1}$$

d'où

$$C + (a) \subset A. \tag{2}$$

D'autre part, il n'existe, selon la définition 5, qu'un seul élément b de B tel que

$$p(a, b) \varepsilon \mathcal{H}; \tag{3}$$

d'où d'après la définition de la fonction Φ

$$\Phi((a)) = (b), \tag{4}$$

$$\Phi(C + (a)) = \Phi(C) + \Phi((a)) = \Phi(C) + (b) \tag{5}$$

De la condition II et de (5) on conclut conformément au corollaire 7, que

(6) $\Phi(C + (a))$ est un ensemble fini.

Il résulte de (2) et (6) que

$$C + (a) \varepsilon L \quad \text{c. q. f. d.}$$

[1] Cf. R. Dedekind, op. cit., §§ 2—4.

Ceci dit, nous allons reprendre la démonstration du lemme 18. A étant un ensemble fini, on peut, après avoir établi les lemmes (a) et (b), y appliquer le principe d'induction. On obtient:

(7) $$A \varepsilon L,$$

d'où

(8) $\Phi(A)$ est un ensemble fini.

Mais, selon l'hypothèse, on a

(9) $$\Phi(A) = B.$$

En vertu de (8) et (9) l'ensemble B est donc fini.

Je reviens maintenant aux théorèmes, qui se rapprochent par leurs caractéres de ceux du § 2 et qui en présentent parfois une généralisation.

Théorème 19. *L'ensemble A étant fini, la classe $S(A)$ est finie aussi.*

Démonstration. Désignons par L la classe de tous les ensembles B qui satisfont aux conditions:

I. $B \subset A$

II. la classe $S(B)$ est finie.

Il est évident que

(a) $0 \varepsilon L$,

car

$$0 \subset A$$

et

$$S(0) = (0).$$

Je vais prouver que

(b) si $B \varepsilon L$ et $a \varepsilon A$, on a $B + (a) \varepsilon L$.

Pour le démontrer on peut évidemment poser:

(1) $$a \bar{\varepsilon} B.$$

Désignons par $\mathcal{K}$ la classe de toutes les paires ordonnées qui se présentent sous la forme

$$p(C, C + (a))$$

où

$$C \varepsilon S(B).$$

En vertu de (1), on obtient

(2) $$\text{si } C \varepsilon S(B), \text{ on a}$$
$$C + (a) \varepsilon S(B + (a)) - S(B)$$
$$\text{et } p(C, C + (a)) \varepsilon \mathcal{K};$$

(3) si $D \varepsilon S(B+(a)) - S(B)$, on a
$$D-(a) \varepsilon S(B)$$
$$\text{et } p(D-(a), D) \varepsilon \mathscr{H}.$$

On conclut donc, d'après (2), (3), la définition de $\mathscr{H}$ et la définition 5 que la classe $\mathscr{H}$ transforme d'une façon univoque la classe $S(B)$ en la classe $S(B+(a)) - S(B)$, d'où, conformément au lemme précédent, on a

(4) la classe $S(B+(a)) - S(B)$ est finie.

Mais comme

(5) $$S(B) \subset S(B+(a)),$$

on obtient:

(6) $$S(B+(a)) = [S(B+(a)) - S(B)] + S(B).$$

Or, en vertu de (4), (6) et de la condition II, on a en appliquant le théorème 6:

(7) la classe $S(B+(a))$ est finie.

Comme en même temps la condition I de la définition de L donne

(8) $$B+(a) \subset A,$$

on peut donc affirmer, selon (7) et (8), que
$$B+(a) \varepsilon L.$$

Les lemmes (a) et (b) démontrés, on en conclut en vertu du principe d'induction, que
$$A \varepsilon L,$$
d'où, selon la condition II, la classe $S(A)$ est finie c. q. f. d.

Théorème 20. *Si K est une classe finie d'ensembles et tout élément de K est un ensemble fini, l'ensemble $\Sigma(K)$ est également fini.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ la famille de toutes les classes L remplissant les conditions:

I. $L \subset K$,

II. $\Sigma(L)$ est un ensemble fini.

Je dis que

(a) $0 \varepsilon \mathscr{F}$.

En effet, on a
$$0 \subset K$$
et
$$\Sigma(0) \text{ est un ensemble fini, car } \Sigma(0) = 0.$$

(b) Si $L \varepsilon \mathfrak{F}$ et $A \varepsilon K$, on a $L + (A) \varepsilon \mathfrak{F}$.

La condition I donne en effet

(1) $$L + (A) \subset K.$$

Comme on a en même temps

(2) $$\Sigma(L + (A)) = \Sigma(L) + A,$$

on en conclut, selon l'hypothèse et la condition II, en y appliquant le théorème 6, que

(3) $\Sigma(L + (A))$ est un ensemble fini.

On a par conséquent, en vertu de (1) et (3),

$$L + (A) \varepsilon \mathfrak{F}.$$

Les lemmes (a) et (b) établis, on en conclut, en appliquant le principe d'induction:

$$K \varepsilon \mathfrak{F}.$$

L'ensemble $\Sigma(K)$ est donc fini c. q. f. d.

Nous pouvons à présent démontrer les théorèmes inverses aux deux précédents.

Théorème 21. *Si la classe $S(A)$ est finie, l'ensemble A est fini.*

Démonstration. Désignons par K la classe de tous les sous-ensembles finis de A.

On a

(1) $$K \subset S(A),$$

ce qui prouve, conformément au théorème 8, que K est une classe finie.

Or, en appliquant le théorème précédent, on obtient:

(2) $\Sigma(K)$ est un ensemble fini.

D'autre part, conformément au théorème 5 et à la définition de K, on a:

(3) $$\text{si } a \varepsilon A,\ (a) \varepsilon K.$$

Donc

(4) $$\Sigma(K) = A.$$

On en conclut, selon (2) et (4), que l'ensemble A est fini. c. q. f. d.

Théorème 22. *L'ensemble $\Sigma(K)$ étant fini, on a:*

I. la classe K est finie,

II. chaque élément de K est un ensemble fini.

Démonstration. La proposition I résulte de la formule

$$K \subset S(\Sigma(K)),$$

où $S(\Sigma(K))$ est une classe finie en vertu du théorème 19.

Quant à la proposition II, il suffit de remarquer que:

la condition $A \varepsilon K$ entraîne $A \subset \Sigma(K)$.

Théorème 23. *Si K est une classe finie d'ensembles disjoints et tout élément de K est un ensemble fini, $P(K)$ est également une classe finie.*

Pour le démontrer il suffit de remarquer que

$$P(K) \subset S(\Sigma(K))$$

et d'appliquer successivement les théorèmes 20, 19 et 8.

On en tire en particulier ce

Corollaire 24. *A et B étant des ensembles finis et disjoints, leur produit, c'est-à-dire la classe $P((A, B))$, est aussi fini.*

Les deux propositions qui viennent d'être démontrées ne sont pas susceptibles d'inversion. La définition du produit implique en effet tout de suite que

$$\text{si } 0 \varepsilon K, \text{ on a } P(K) = 0.$$

Il en résulte que, A étant un ensemble donné dont on ait prouvé qu'il n'est pas fini, si l'on pose

$$K = (A, 0),$$

on obtient la conclusion:

la classe $P(K)$, c'est-à-dire le produit des ensembles A et 0, est finie, malgré que l'élément A de cette classe ne soit pas fini.

Par contre l'inversion partielle du théorème 23 donne le vrai théorème suivant:

Théorème 25. *K étant une classe d'ensembles disjoints, si la classe $P(K)$ est finie et non-vide, chaque ensemble A appartenant à K est fini.*

Démonstration. Je n'indiquerai que la marche générale du raisonnement.

Désignons par $\mathcal{F}$ la famille de toutes les classes L qui satisfont aux conditions:

I. $L \subset P(K)$,

II. $A \times \Sigma(L)$ est un ensemble fini.

On démontre facilement les deux lemmes:

(a) $0 \varepsilon \mathcal{F}$;

(b) si $L \varepsilon \mathcal{F}$ et $B \varepsilon P(K)$, on a $L + (B) \varepsilon \mathcal{F}$.

Pour établir le lemme (b), il suffit de remarquer que

$$A \times \Sigma(L + (B)) = A \times (\Sigma(L) + B) = A \times \Sigma(L) + A \times B$$

et que, conformément à la définition du produit, l'ensemble $A \times B$ n'admet qu'un seul élément.

En tenant compte, que $P(K)$ est une classe finie, et en appliquant le principe d'induction, on obtient:

(1) $$P(K) \varepsilon \mathfrak{F},$$

d'où, selon la condition II,

(2) $$A \times \Sigma(P(K)) \text{ est un ensemble fini.}$$

Or, on peut prouver sans peine dans la Théorie générale des Ensembles que la formule

$$P(K) \neq 0$$

implique que

(3) $$\Sigma(P(K)) = \Sigma(K).$$

Donc, d'après (2) et (3),

(4) $$A \times \Sigma(K) \text{ est un ensemble fini.}$$

Mais

(5) $$A \subset \Sigma(K).$$

d'où

(6) $$A = A \times \Sigma(K).$$

Les formules (4) et (6) prouvent que l'ensemble A est fini c. q. f. d.

Il en résulte aussitôt le

Corollaire 26. *Si le produit de deux ensembles disjoints non-vides A et B est fini, chacun de ces ensembles est fini aussi.*

Lorsque $P(K)$ est une classe finie, on ne peut en conclure, que K est également une classe finie. D'après les considérations qui précèdent c'est évident dans le cas où

$$P(K) = 0.$$

En effet, si on a démontré d'une classe L d'ensembles disjoints, qu'elle est infinie, on obtient en posant

$$K = L + (0)$$

que

$P(K)$ est une classe finie, égale à 0 (puisque $0 \varepsilon K$), malgré que K soit en même temps une classe infinie.

Plus encore: même si l'on sait que

$$P(K) \neq 0$$

on ne peut en conclure que K est une classe finie.

En effet, étant prouvé d'un ensemble A qu'il est infini, on parvient facilement à démontrer que, $\boldsymbol{K}$ désignant la classe de tous les sous-ensembles de A qui n'admettent qu'un seul élément, on a

$$P(\boldsymbol{K}) = (\Sigma(\boldsymbol{K})) = (A);$$

or, la classe $P(\boldsymbol{K})$ reste de nouveau finie bien que $\boldsymbol{K}$ est une classe infinie.

Par contre, on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 27. *Si pour une classe quelconque $\boldsymbol{K}$ d'ensembles disjoints et ayant plus d'un élément la classe $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K})$ est finie et non-vide, $\boldsymbol{K}$ est aussi une classe finie.*

Démonstration. Voici la marche du raisonnement en points les plus importants.

Soit $\mathcal{H}$ la classe de toutes les paires ordonnées qui se présentent sous la forme

$$p(\boldsymbol{L}, \Sigma(\boldsymbol{L}) - \Pi(\boldsymbol{L})),$$

où $\boldsymbol{L}$ remplit la condition:

$$\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}).$$

Désignons par $\boldsymbol{M}$ la classe de tous les ensembles A tels que l'on ait pour une certaine classe $\boldsymbol{L}$

I. $A = \Sigma(\boldsymbol{L}) - \Pi(\boldsymbol{L})$,

II. $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K})$.

Conformément à la définition 5, la classe $\mathcal{H}$ transforme la famille de classes $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}))$ en la classe $\boldsymbol{M}$ d'une façon univoque.

On a, en vertu du théorème 19,

(1) la famille de classes $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}))$ est finie,

d'où, en appliquant le lemme 18, on obtient:

(2) la classe $\boldsymbol{M}$ est finie.

Je vais prouver que

$$\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{M}.$$

Envisageons, en effet, un ensemble B qui remplit la condition

$$B \varepsilon \boldsymbol{K}. \tag{3}$$

Soit, d'accord avec l'hypothèse du théorème,

$$C \varepsilon \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}). \tag{4}$$

Désignons par $\boldsymbol{L}$ la classe de tous les ensembles D qui satisfont aux conditions:

I. $D \varepsilon \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K})$,

II. $D - C \subset B$

(en d'autres termes, l'ensemble D diffère de C tout au plus d'un seul élément, appartenant en même temps à B).

On démontre sans peine que

$$(5)\qquad \boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}),$$

$$(6)\qquad \Sigma(\boldsymbol{L}) = C + B$$

et, comme l'ensemble B admet plus d'un élément,

$$(7)\qquad \Pi(\boldsymbol{L}) = C - B$$

On a donc, selon (6) et (7),

$$(8)\qquad B = (C + B) - (C - B) = \Sigma(\boldsymbol{L}) - \Pi(\boldsymbol{L}).$$

Conformément à la définition de $\boldsymbol{M}$, les formules (5) et (8) impliquent que

$$(9)\qquad B \,\varepsilon\, \boldsymbol{M}.$$

Ce raisonnement se rapportant à tout ensemble B qui appartient à $\boldsymbol{K}$, on obtient

$$(10)\qquad \boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{M}$$

de sorte que, en vertu de (2), $\boldsymbol{K}$ est une classe finie c. q. f. d.

Le théorème précédent peut être, bien entendu, énoncé d'une façon un peu plus générale, en remplaçant dans son hypothèse les mots „*ayant plus d'un élément*" par la condition, d'après laquelle la classe des ensembles appartenant à $\boldsymbol{K}$ qui n'admettent qu'un seul élément est finie.

Au théorème 23 se rattache par son énoncé le suivant:

Théorème 28. *Si $\boldsymbol{K}$ est une classe non-vide et finie d'ensembles disjoints et tout son élément est non-vide, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K})$ est également une classe non-vide.*

Démonstration. Nous allons de nouveau appliquer le principe d'induction.

Désignons par $\mathscr{F}$ la famille de toutes les classes $\boldsymbol{L}$ telles que l'on ait:

I. $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{K}$,

II. $\boldsymbol{L} = 0$ ou $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}) \neq 0$

Il est évident que

(a) $0 \,\varepsilon\, \mathscr{F}$.

Je vais démontrer le lemme:

(b) si $\boldsymbol{L} \,\varepsilon\, \mathscr{F}$ et $A \,\varepsilon\, \boldsymbol{K}$, on a $\boldsymbol{L} + (A) \,\varepsilon\, \mathscr{F}$.

En effet, la condition I de la définition de $\mathcal{F}$ implique que

(1) $$L+(A)\subset K.$$

Soit, conformément à l'hypothèse du théorème:

(2) $$a\,\varepsilon\,A.$$

On a, en vertu de la condition II,

(3) $$L=0 \text{ ou } P(L)\neq 0.$$

Dans le premier cas on aura

(4) $$L+(A)=(A);$$

par conséquent, d'après (2) et selon la définition du produit,

(5) $$(a)\;\varepsilon\;P(L+(A)).$$

Dans le deuxième cas soit

(6) $$B\;\varepsilon\;P(L).$$

On peut poser

(7) $$A\,\bar{\varepsilon}\,L,$$

puisque dans le cas contraire le lemme est évident.

On aura donc, en vertu de (2), (6), (7) et de la définition du produit:

(8) $$B+(a)\;\varepsilon\;P(L+(A)).$$

Selon (5) et (8) on obtient en tout cas:

(9) $$P(L+(A))\neq 0,$$

d'où, conformément à (1) et à la définition de $\mathcal{F}$,

$$L+(A)\;\varepsilon\;\mathcal{F}.$$

Les lemmes (a) et (b) établis, on en conclut que

$$K\,\varepsilon\,\mathcal{F},$$

et comme K est une classe non-vide

$$P(K)\neq 0 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le théorème précédent peut s'énoncer, sans l'aide de la notion du produit, de la façon suivante:

K étant une classe non-vide et finie d'ensembles non-vides et disjoints, il existe un ensemble qui a avec chaque ensemble appartenant à K un élément commun et un seul.

On voit ainsi que le théorème, qui vient d'être démontré, n'est autre chose qu'un cas particulier de *l'axiome du choix* de M. Zermelo (pour les classes finies).

Les problèmes analogues aux précédents se rattachent aux éléments de la classe $P(K)$. On démontre facilement le suivant:

Théorème 29. *Si K et une classe finie d'ensembles disjoints, tout ensemble A appartenant à la classe $P(K)$ est fini.*

Démonstration. Soit $\mathscr{H}$ la classe des toutes les paires ordonnées $p(B, B \times A)$, B étant un ensemble qui appartient à K. Désignons par L la classe de tous les sous-ensembles de A qui n'admettent qu'un seul élément.

On a, conformément à la définition 5 et à celle du produit,

(1) la classe $\mathscr{H}$ transforme K en L d'une façon univoque,

d'où, selon le lemme 18,

(2) la classe L est finie.

Or, tout élément de L étant aussi un ensemble fini, on obtient en vertu du théorème 20:

(3) l'ensemble $\Sigma(L)$ est fini.

Comme d'autre part

(4) $$\Sigma(L) = A,$$

on conclut, selon (3) et (4), que l'ensemble A est fini c. q. f. d.

Théorème 30 (inverse). *K étant une classe d'ensembles disjoints, si un au moins ensemble A appartenant à la classe $P(K)$ est fini, la classe K est finie.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème précédent.

Le théorème 8 donne encore lieu à la généralisation suivante de corollaire 12, correspondante au cycle des théorèmes 19, 20 et 23:

Corollaire 31. *Si un au moins des ensembles appartenant à la classe K est fini, $\Pi(K)$ est également un ensemble fini.*

On sait, en effet, que lorsque

$$A \varepsilon K,$$

on a

$$\Pi(K) \subset A.$$

Grâce a la remarque qui accompagne le corollaire 12, il est évident que la proposition inverse n'est pas vraie.

Ainsi nous avons examiné tout ce que l'on peut dire des ensembles ou des classes $S(A)$, $\Sigma(K)$, $P(K)$, $\Pi(K)$, lorsqu'on sait que soit la classe K d'ensembles (ou l'ensemble A), soit leurs éléments, soit enfin l'une et les autres sont finis, et nous l'avons complété par l'étude des problèmes inverses.

§ 5. De la puissance des ensembles finis. La première définition de Dedekind.

Je me propose dans ce § d'étudier les propriétés des ensembles finis liées à la notion de *l'égalité de puissances*. Je n'en donnerai ici, naturellement, que les théorèmes exprimant les propriétés spécifiques d'ensembles finis et ceux que l'on ne sait pas démontrer à l'aide de 5 premiers axiomes de M. Zermelo dans leur forme tout à fait générale. Quant aux autres théorèmes de la Théorie générale des Ensembles, qui concernent l'égalité de puissances, je les suppose ici connus.

En profitant des notions introduites dans le § précédent, je vais formuler la définition générale de l'égalité de puissances de deux ensembles A et B quelconques; je procède donc différemment de M. Zermelo[1]), qui définit cette notion d'abord pour les ensembles disjoints pour l'étendre ensuite aux ensembles arbitraires.

Définition 7. *L'ensemble A est de la même puissance que l'ensemble B*

$$A \sim B,$$

s'il existe une classe $\mathfrak{H}$ qui transforme A en B d'une façon biunivoque.

Définition 8. *L'ensemble A a la puissance inférieure à celle de l'ensemble B*

$$A < B$$

et l'ensemble B a la puissance supérieure à celle de l'ensemble A

$$B > A,$$

si

I. l'ensemble A n'est pas de la même puissance que l'ensemble B,
II. l'ensemble A est de la même puissance qu'un sous-ensemble de B.

Théorème 32. *Si A est un ensemble fini et $A \sim B$, B est aussi un ensemble fini.*

Pour le démontrer, il suffit de remarquer qu'en vertu de la définition 7 il existe une classe $\mathfrak{H}$ qui transforme A en B d'une

1) E. Zermelo, op. cit., 15. p. 267 et 21, p. 269.

façon biunivoque, donc, à raison plus forte, d'une façon univoque. En appliquant le lemme 18, on conclut que l'ensemble B est fini.

Le théorème précédent implique le

Corollaire 33. *Si A est un ensemble fini et $B < A$, B est aussi un ensemble fini.*

En effet, B est en vertu de la définition 8 de la même puissance qu'un sous-ensemble de A, donc qu'un ensemble fini.

Théorème 34. *A étant un ensemble fini et B un ensemble quelconque, on a*

$$A < B \text{ ou } A \sim B \text{ ou } A > B.$$

Démonstration. Désignons par L la classe de tous les ensembles C tels que

I. $C \subset A$,

II. $C < B$ ou $C \sim B$ ou $C > B$.

Il est évident que

(a) $0 \varepsilon L$.

Car, si $0 = B$, on a

$$0 \sim B,$$

et dans le cas contraire on a

$$0 < B.$$

Nous allons démontrer le lemme:

(b) si $C \varepsilon L$ et $a \varepsilon A$, on a $C + (a) \varepsilon L$.

Nous pouvons supposer à cet effet que

$$a \bar{\varepsilon} C. \tag{1}$$

On a par définition de la classe L

$$C + (a) \subset A \tag{2}$$

et

$$C < B \text{ ou } C \sim B \text{ ou } C > B. \tag{3}$$

Envisageons le premier de ces cas à part de deux autres.

(α) $C < B$.

En vertu de la définition 8, il existe dans ce cas une classe $\mathscr{K}$ qui transforme d'une façon biunivoque l'ensemble C en un certain vrai sous-ensemble D de B.

On a donc

$$D \subset B, \tag{4}$$

$$B - D \neq 0 \tag{5}$$

Soit

(6) $$b \,\varepsilon\, B - D.$$

On obtient, selon (4) et (6),

(7) $$D + (b) \subset B,$$

(8) $$b \,\bar{\varepsilon}\, D.$$

En vertu de la définition 6, on conclut de (1) et (8) que la classe $\mathscr{K} + (\mathfrak{p}(a, b))$ transforme $C + (a)$ en $D + (b)$ d'une façon biunivoque, d'où

(9) $$C + (a) \sim D + (b)$$

(on peut évidemment supposer que la classe $\mathscr{K}$ n'admette comme élément aucune paire ordonnée. dont le premier membre soit a ou le second b).

Les formules (7) et (9) impliquent, conformément à la définition 8, que

(10) $$C + (a) < B \text{ ou } C + (a) \sim B.$$

(β) $C \sim B$ ou $C > B$.

Il est évident que

(11) $$C + (a) \sim C \text{ ou } C + a > C.$$

En vertu des théorèmes connus de la Théorie générale des Ensembles, on conclut facilement de (β) et (11) que

(12) $$C + (a) \sim B \text{ ou } C + (a) > B.$$

On a donc en tout cas, selon (10) et (12):

(13) $$C + (a) < B \text{ ou } C + (a) \sim B \text{ ou } C + (a) > B,$$

ce qui donne, en vertu de (2) et de la définition de L,

$$C + (a) \,\varepsilon\, L.$$

En reprenant la démonstration du théorème, nous appliquons le principe d'induction. On obtient

$$A \,\varepsilon\, L,$$

d'où $$A < B \text{ ou } A \sim B \text{ ou } A > B \quad \text{c. q. f. d.}$$

Le théorème précédent sous sa forme générale, c'est-à-dire, sans la restriction „*A est un ensemble fini*" est nommé „*loi de la trichotomie*" et équivaut, comme l'a prouvé M. Hartogs[1]), à *l'axiome du choix* de M. Zermelo.

[1]) F. Hartogs, *Ueber das Problem der Wohlordnung*, Mathematische Annalen 76, p. 438—443.

Corollaire 35. *A étant un ensemble fini et B ne l'étant pas, on a*

$$A < B.$$

Il suffit de remarquer que les deux derniers des cas

$$A < B, \quad A \sim' B \text{ ou } A > B$$

n'entrent pas en considération en vertu du théorème 30 et du corollaire 31.

Un des théorèmes les plus importants de ce § est le suivant:

Théorème 36. *Si A est un ensemble fini et B son vrai sous-ensemble, A n'est pas de la même puissance que B.*

Démonstration. Supposons, par contre, que

$$(1) \qquad A \sim B.$$

Il existe donc, conformément à la définition 7, une classe $\mathcal{K}$ qui transforme A en B d'une façon biunivoque.

C étant un sous-ensemble de A, désignons par $\Phi(C)$ le sous-ensemble de A, en lequel la classe $\mathcal{K}$ transforme l'ensemble C. En d'autres termes, $\Phi(C)$ est l'ensemble de tous les éléments a de A qui remplissent la condition:

pour un certain élément c de C, $p(c, a) \,\varepsilon\, \mathcal{K}$.

En particulier on a

$$(2) \qquad B = \Phi(A).$$

Soit L la classe de tous les ensembles C qui satisfont aux conditions:

I. $\Phi(C) \subset C \subset A$,

II. $\Phi(C) \neq C$.

On a, selon (2) et l'hypothèse du théorème:

$$(3) \qquad A \,\varepsilon\, L.$$

Or, la classe L n'étant pas vide, il existe, en vertu de la définition 3, un ensemble D tel que l'on ait

(4) D est un élément irréductible de L,

d'où

$$(5) \qquad \Phi(D) \subset D \subset A,$$

$$(6) \qquad \Phi(D) \neq D.$$

De (4), (5) et (6) on obtient:

$$(7) \qquad \Phi(D) \,\bar{\varepsilon}\, L.$$

D'autre part, on conclut sans peine, en vertu de (5), (6) et de la définition de Φ, que

(8) $$\Phi(\Phi(D)) \subset \Phi(D) \subset A,$$

(9) $$\Phi(\Phi(D)) \neq \Phi(D).$$

Or, la définition de L donne, selon (8) et (9):

(10) $$\Phi(D) \varepsilon L.$$

La contradiction entre les propositions (7) et (10) prouve que la supposition (1) est fausse. L'ensemble A n'est donc pas de la même puissance que B c. q. f. d.

Le théorème 36 exprime une condition nécessaire pour qu'un ensemble soit fini: cet ensemble ne peut être de la même puissance qu'aucun de ses vrais sous-ensembles. Il est important de constater qu'on ne sait pas démontrer sans *l'axiome du choix* que cette condition est aussi suffisante. Par cela même on ne sait pas établir sans avoir recours à cet axiome l'équivalence de la définition que j'ai adoptée dans cet ouvrage et de la définition suivante de l'ensemble fini, donnée par Dedekind[1]):

„*L'ensemble A est fini, lorsque aucun de ses vrais sous-ensembles n'est de la puissance égale à la sienne* [2])".

La définition de Dedekind est (au point de vue chronologique) la première qui n'est pas fondée sur la notion du nombre naturel. Déjà son auteur a montré lui-même que les ensembles finis ainsi définis jouissent de propriétés analogues à celles que j'ai examinées dans cet ouvrage. MM. Russell et Whitehead appellent dans „*Principia Mathematica* [3])" les ensembles finis dans le sens de Dedekind „*ensembles non-refléchis*" pour les distinguer des „*ensembles inductifs*", c'est-à-dire, finis dans le sens de la définition arithmétique ordinaire. Ils étudient les propriétés de ces deux sortes d'ensembles.

[1]) R. Dedekind, op. cit., § 5, p. 17.

[2]) Tout au moins toutes les démonstration connues de l'équivalence de la définition de Dedekind et des autres définitions de l'ensemble fini font usage plus ou moins explicité de *l'axiome du choix*. Cf. E. Zermelo, *Sur les ensembles finis...*, p. 190. On peut d'ailleurs, comme l'ont indiqué MM. Russell et Whitehead (op. cit., Vol. II., *124.55), appliquer cet axiome sous la forme restreinte aux classes dénombrables.

[3]) Vol. II, Part III, Section C, *120 et *124.

Nous allons indiquer une conclusion intéressante qui résulte de leurs recherches. On peut notamment établir *sans l'aide de l'axiome du choix* l'équivalence de la définition 3 et de la suivante:

„*A est un ensemble fini, lorsque aucune vraie sous-famille de* $S(S(A))$ *n'est de la puissance égale à celle de* $S\,S(A))$".

Ainsi, l'équivalence de cette dernière définition et de celle de Dedekind ne peut être prouvée sans faire intervenir *l'axiome du choix*.

Le théorème 36 implique quelques corollaires importants dont je cite ici les suivants:

Corollaire 37. *A étant un ensemble fini et B son vrai sous-ensemble, on a*

$$B < A.$$

En effet, comme

$$B \sim B,$$

on a selon la définition 8 une au moins des relations

$$B \sim A \text{ ou bien } B < A,$$

dont la première est impossible en vertu du théorème précédent.

Corollaire 38. *A, B et C étant des ensembles finis, si*

$$A < B \textit{ et } B \times C = 0,$$

on a

$$A + C < B + C.$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer que $A + C$, en vertu de la définition 8, est de la même puissance qu'un vrai sous-ensemble de $B + C$ et d'appliquer le corollaire qui vient d'être établi.

Corollaire 39. *A, B, C et D étant des ensembles finis, si*

$$A < B,\ C \lesssim D \textit{ et } B \times D = 0,$$

on a

$$A + C < B + D.$$

On raisonne comme dans la démonstration du corollaire précédent.

Ce corollaire sous sa forme générale (c'est-à-dire, concernant les ensembles quelconques), équivaut à *l'axiome du choix* [1]).

Les deux derniers théorèmes de ce § concernent les propriétés des classes d'ensembles finis.

[1]) Cf. ma Note: „*Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix*", Fund. Math., Tom V (1924), p. 147.

Théorème 40. *Toute classe non-vide $\boldsymbol{K}$ d'ensembles finis admet au moins un élément A qui remplit la condition:*

$$\text{si } B \,\varepsilon\, \boldsymbol{K}, \text{ on a } A < B \text{ ou } A \sim B.$$

Démonstration. Soit

$$(1) \qquad C \,\varepsilon\, \boldsymbol{K}.$$

Désignons par L la classe de tous les sous-ensembles D de C qui satisfont à la condition:

$$\text{si } B \,\varepsilon\, \boldsymbol{K}, \text{ on a } D < B \text{ ou } D \sim B.$$

Comme on a évidemment

$$0 \,\varepsilon\, L,$$

la classe L n'est pas vide. L'ensemble C étant fini, il existe donc, conformément au lemme 1, un ensemble E tel que l'on ait:

(2) E est un élément saturé de L,

d'où, conformément à la définition de L,

$$(3) \qquad E \subset C$$

et

$$(4) \qquad \text{si } B \,\varepsilon\, \boldsymbol{K}, \text{ on a } E < B \text{ ou } E \sim B.$$

Je vais prouver qu'il appartient à la classe $\boldsymbol{K}$ au moins un ensemble, dont la puissance est égale à celle de E.

Ceci est évident, selon (1), si l'on a

$$E = C.$$

Nous pouvons donc poser

$$(5) \qquad E \neq C.$$

Soit, conformément à (3) et (5),

$$(6) \qquad a \,\varepsilon\, C - E,$$

d'où

$$(7) \qquad E + (a) \subset C$$

et, en vertu de (2),

$$(8) \qquad E + (a) \,\bar{\varepsilon}\, L.$$

De (7) et (8) il résulte, en raison de la définition de L, qu'au moins un ensemble A appartenant à $\boldsymbol{K}$ n'est de la puissance supérieure ni égale à celle de $E + (a)$.

On a donc

$$A \varepsilon K \tag{9}$$

et, en raison du théorème 34,

$$A < E + (a). \tag{10}$$

De cette dernière formule on conclut facilement qu'une des deux relations suivantes subsiste:

$$A < E \text{ ou } A \sim E. \tag{11}$$

Or, on a d'antre part, selon (4) et (9),

$$E < A \text{ ou } E \sim A, \tag{12}$$

d'où, en rapprochant (11) et (12), on obtient

$$A \sim E. \tag{13}$$

On déduit de (4) et (13) que l'ensemble A, qui appartient à la classe K en vertu de (9), est l'ensemble cherché.

On peut énoncer le théorème précédent d'une façon plus générale: *Toute classe d'ensembles K, à laquelle appartient au moins un ensemble fini, admet un élément A qui remplit la condition:*

$$si\ B \varepsilon K,\ on\ a\ A < B\ ou\ A \sim B.$$

Le théorème 40 appartient à cette série de théorèmes, signalés dans le présent ouvrage, qu'on ne sait pas démontrer sous leur forme générale (c'est à dire, concernant les ensembles quelconques, qu'ils soient finis ou non) sans avoir recours à *l'axiome du choix*.

Théorème 41. *Toute classe non-vide d'ensembles K, dont tout élément est de la puissance inférieure à celle d'un ensemble fini C, admet au moins un élément A qui remplit la condition:*

$$si\ B \varepsilon K,\ on\ a\ B < A\ ou\ B \sim A.$$

Démonstration. Je n'indiquerai que la marche générale du raisonnement qui est d'ailleurs tout à fait analogue à celui de la démonstration précédente.

Désignons par L la classe de tous les sous-ensembles D de C qui satisfont à la condition:

$$\text{si } B \varepsilon K, \text{ on a } B < D \text{ ou } B \sim D.$$

Comme

$$C \varepsilon L,$$

la classe L, n'étant pas vide, admet un élément irréductible E.

On prouve sans peine qu'il appartient à la classe K un ensemble A qui est de la puissance égale à celle de E, pour en conclure ensuite que l'ensemble A remplit la condition du théorème.

Si on veut introduire la notion de l'élément de *la plus petite puissance* et celle de l'élément de *la plus grande puissance*, les théorèmes qui viennent d'être établis peuvent s'énoncer de la façon suivante:

Toute classe non-vide K d'ensembles finis admet au moins un élément de la plus petite puissance.

Toute classe non-vide d'ensembles K, dont tout élément est d'une puissance inférieure à celle d'un ensemble fini C, admet au moins un élément de la plus grande puissance.

§ 6. De l'ordre dans les ensembles finis. Les définitions de MM. Stäckel et Weber.

Pour introduire la notion de l'ordre je vais profiter de la méthode, developpée par M. Hessenberg et simplifée par M. Kuratowski [1]). Avec cette méthode il est possible d'introduire la notion de l'ordre sans faire appel à la notion générale de la relation.

Définition 9. *La classe K est une classe d'ensembles croissants, lorsqu'elle remplit la condition:*

$$si \;\; A \varepsilon K \;\; et \;\; B \varepsilon K, \;\; on \;\; a \;\; A \subset B \;\; ou \; bien \;\; B \subset A.$$

Définition 10. *La classe K établit un ordre dans l'ensemble A, lorsqu'elle est un élément saturé de la famille de toutes les classes d'ensembles croissants contenues dans la classe $S(A)$.*

Conformément à la définition 2, la classe K qui ordonne l'ensemble A remplit donc les deux conditions suivantes:

I. K est une classe d'ensembles croissants,

II. $K \subset S(A)$,

mais elle n'est une vraie sous-classe d'aucune classe qui les remplit.

[1]) Hessenberg, *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Abhandlungen der Fries'schen Schule I, 4, Göttingen 1906, p. 674—685.

C. Kuratowski, II, p. 161—174, où on trouvera les noms des autres auteurs qui ont étudié la même méthode.

Définition 11. *La classe K établit un bon ordre dans l'ensemble A, lorsque*

I. la classe K établit un ordre dans l'ensemble A,

II. toute sous-classe non-vide L de K admet un élément saturé.

Définition 12[2]. *La classe K établit un double bon ordre dans l'ensemble A (range l'ensemble A dans une série finie), lorsque*

I. la classe K établit un ordre dans l'ensemble A,

II. toute sous-classe non-vide L de K admet un élément irréductible et un élément saturé.

Je vais étudier les propriétés d'ensembles finis liées aux notions introduites ci-dessus.

Lemme 41. *A étant un ensemble fini, il existe une classe K qui établit un ordre dans A.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{F}$ la famille de toutes les classes d'ensembles croissants contenues dans la classe $S(A)$.

Comme évidemment

$$0 \varepsilon \mathfrak{F},$$

la famille $\mathfrak{F}$ n'est pas vide.

D'autre part, la classe $S(A)$, en vertu du théorème 19, est finie. Or la famille $\mathfrak{F}$ étant une famille de sous-classes d'une classe finie admet, selon le lemme 1, un élément saturé K. Conformément à la définition 10, cette classe K établit un ordre dans l'ensemble A c. q. f. d.

On ne saurait généraliser ce lemme sans *l'axiome du choix.*

Théorème 42. *Si la classe K établit un ordre dans un ensemble fini A, K établit un double bon ordre dans A.*

Démonstration. On a, conformément à définition 10,

$$K \subset S(A).$$

Toute sous-classe non-vide L de K admet donc, en vertu du lemme 1 et de la définition 3, un élément saturé et un élément irréductible.

Or on peut affirmer, selon la définition 12 et l'hypothèse du théorème, que la classe K établit un double bon ordre dans A c. q. f. d.

Lemme 43. *Si la classe K établit un double bon ordre dans l'ensemble A, A est un ensemble fini.*

[1]) Il est aisé à établir l'équivalence des définitions 10-12 et des définitions I-III de la Note II* de M. Kuratowski.

Démonstration[1]). Supposons, par contre, que

(1) A n'est pas un ensemble fini.

Conformément aux définitions 10 et 12,

(2) K est un élément saturé de la famille $\mathcal{F}$ de toutes les classes d'ensembles croissants contenues dans la classe $S(A)$.

Il est évident, en vertu de (2) et de la définition 8, que les classes $K+(0)$ et $K+(A)$ sont également des classes d'ensembles croissants contenues dans $S(A)$. On a donc:

(3) $$K+(0) \;\varepsilon\; \mathcal{F},$$

(4) $$K+(A) \;\varepsilon\; \mathcal{F},$$

d'où selon (2):

(5) $$K+(0)=K,$$

(6) $$K+(A)=K.$$

Les formules (5) et (6) impliquent immédiatement que

(7) $$0 \;\varepsilon\; K,$$

(8) $$A \;\varepsilon\; K.$$

Soit L la classe de tous les ensembles finis qui appartiennent à K; $K-L$ est donc la classe de tous ces éléments de K qui sont des ensembles infinis.

On a, en vertu de (7) et du théorème 4,

(9) $$0 \;\varepsilon\; L;$$

la classe L n'étant pas vide, il existe donc conformément à la définition 12 un ensemble B tel que

(10) B est un élément saturé de L.

D'une façon analogue, en vertu de (1), on a

(11) $$A \;\varepsilon\; K-L$$

et il existe un ensemble C qui remplit la condition:

(12) C est un élément irréductible de $K-L$,

d'où, selon (10),

(13) $$B \neq C.$$

[1]) La raisonnement que j'applique ci-dessous est tout à fait analogue à celui dont fait usage M. Kuratowski pour démontrer le théorème correspondant dans sa Note précitée (Théorème IV, p. 169). On peut aussi démontrer ce lemme en se basant sur le principe d'induction appliquée aux éléments d'un ensemble bien ordonné.

On conclut sans peine de (2), en appliquant la définition 9. qu'au moins une des relations suivantes subsiste:

(14) $$B \subset C \text{ ou bien } C \subset B.$$

Comme le deuxième cas est exclu en vertu de la définition de L et du théorème 8, on obtient

(15) $$B \subset C.$$

Soit, conformément à (13) et (15),

(16) $$a \varepsilon C - B,$$

d'où

(17) $$B \subset B + (a) \subset C.$$

De (10), (12) et (17) il résulte que l'ensemble $B + (a)$ vérifie les conditions suivantes:

(18) si $D \varepsilon \mathbf{L}$, on a $D \subset B \subset B \subset B + (a)$;

(19) si $D \varepsilon \mathbf{K} - \mathbf{L}$, on a $B + (a) \subset C \subset D$;

donc:

(20) si $D \varepsilon \mathbf{K}$, on a $D \subset B + (a)$ ou $B + (a) \subset D$.

On en obtient, en vertu de (2),

(21) $$\mathbf{K} + (B + (a)) \varepsilon \mathscr{F}$$

et puisque $\mathbf{K}$ est un élément saturé de $\mathscr{F}$,

(21) $$\mathbf{K} + (B + (a)) = \mathbf{K},$$

(22) $$B + (a) \varepsilon \mathbf{K}.$$

Or on a, selon (10) et (16),

(24) $$B + (a) \bar{\varepsilon} \mathbf{L},$$

d'où, en raison de (23),

(25) $$B + (a) \varepsilon \mathbf{K} - \mathbf{L},$$

de sorte que, conformément à la définition de L, $B + (a)$ est un ensemble infini.

Il est maintenant évident que la supposition (1) nous conduit à la contradiction: l'ensemble B étant fini en vertu de (10), l'ensemble $B + (a)$ doit être également fini. Nous sommes donc contraints d'admettre que A est un ensemble fini c. q. f. d.

Les lemmes 41 et 43 et le théorème 42 impliquent immédiatement le suivant:

Théorème 44. *Pour que l'ensemble A soit fini, il faut et il suffit qu'il existe une classe $\boldsymbol{K}$ qui établit un double bon ordre dans A.*

Le théorème précédent a été admis par Stäckel[1]) comme définition de l'ensemble fini. On peut énoncer quelques modifications de ce théorème, dont je signale ici la suivante:

Théorème 45. *Pour que l'ensemble A soit fini, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:*

I. il existe une classe $\boldsymbol{K}$ qui établit un ordre dans l'ensemble A;

II. tout ordre établi dans A par une classe arbitraire $\boldsymbol{L}$ est un bon ordre.

Démonstration. Il résulte aussitôt du lemme 41 et du théorème 42 que ces conditions sont nécessaires. Pour prouver qu'elles sont suffisantes, il faut appliquer un raisonnement, dont je vais indiquer la marche générale.

Soit $\boldsymbol{K}$ une classe qui, conformément à la condition I, établit un ordre dans A; cet ordre est, en vertu de la condition II, un bon ordre.

$\boldsymbol{L}$ étant une sous-classe de $\boldsymbol{K}$, désignons par $\Phi(\boldsymbol{L})$ la classe de tous les sous-ensembles B de A qui satisfont à la condition:

$$A - B \,\varepsilon\, \boldsymbol{L}.$$

On peut facilement prouver que la classe $\Phi(\boldsymbol{K})$ établit aussi un ordre dans A (réciproque par rapport à $\boldsymbol{K}$); cet ordre est évidemment un bon ordre.

Envisageons maintenant une sous-classe non-vide $\boldsymbol{L}$ de $\boldsymbol{K}$. En vertu de la définition 11, $\boldsymbol{L}$ admet un élément saturé B. D'autre part on obtient les formules suivantes:

$$\Phi(\boldsymbol{L}) \subset \Phi(\boldsymbol{K}),$$

et

$$\Phi(\boldsymbol{L}) \neq 0;$$

$\Phi(\boldsymbol{L})$ admet donc aussi un élément saturé C.

On conclut sans peine en appliquant un raisonnement analogue à celui du lemme 1, que $A - C$ est un élément irréductible de $\boldsymbol{L}$.

[1]) P. Stäckel, *Zu H. Webers Elementarer Mengenlehre.* Jahresberichte d. d. M.-V., 16 Band, Leipzig 1907, p. 425.

Or, comme L est une sous-classe non-vide de K tout à fait arbitraire, il résulte conformément à la définition 12 que la classe K établit dans A un double bon ordre. L'ensemble A est donc fini en vertu du lemme 43, c. q. f. d.

Une autre modification du théorème 44 présente la définition proposée par Weber[1]) et simplifiée un peu par M. J. Kürschak. On peut l'énoncer en temes employés dans cet ouvrage de la façon suivante:

L'ensemble A est fini lorsqu'il satisfait aux conditions:

I. il existe une classe K qui établit un ordre dans A;

II. si la classe L établit un ordre dans A et $A \neq 0$, il existe un ensemble qui appartient à L et n'admet qu'un seul élément a.

L'élément a est dit *dernier élément de A par rapport à L*.

On ne sait pas démontrer sans *l'axiome du choix* que la condition II du théorème 45 suffit elle-même, pour que l'ensemble A soit fini. Autrement dit, on ne sait pas établir sans avoir recours à cet axiome la proposition suivante:

(P) *Si tout ordre établi dans l'ensemble A par une classe arbitraire K est un bon ordre, l'ensemble A est fini.*

Il est peut-être intéressant que la proposition (P) équivaut à la proposition suivante:

(Q) *A étant un ensemble quelconque, il existe une classe K qui établit un ordre dans A.*

Il est évident, en vertu du théorème 45, que (P) résulte de (Q). Pour établir l'implication inverse on raisonne de cette façon:

Supposons, qu'aucune classe K n'établit un ordre dans l'ensemble donné A. L'hypothèse de la proposition (P) étant remplie, l'ensemble A serait donc fini. Mais dans ce cas, selon le lemme 41, il existe une classe K qui établit dans A un ordre. La supposition que la proposition (Q) est fausse conduit donc à une contradiction [2]).

[1]) H. Weber, *Elementare Mengenlehre*, Jahresberichte d. d. M.-V., 15 Band, Leipzig 1906. P. Stäckel dans la Note précitée a établi l'équivalence de la définition de Weber et de la sienne.

[2]) M. Kuratowski m'a fait observer que la proposition (Q) implique un cas particulier de *l'axiome du choix*, notamment cet axiome appliqué aux classes quelconques d'ensembles finis. Pour s'en convaincre, envisageons une classe L qui établit un ordre dans l'ensemble $\Sigma(K)$, K étant une classe d'ensembles finis disjoints. L'ensemble $\Sigma(K)$ étant ordonné, on en déduit un ordre pour chaque ensemble A appartenant à K. Comme cet ordre est un bon ordre (en vertu du th. 42), on peut faire correspondre à chaque A un élément $\varphi(A)$, à savoir: son premier élément. L'ensemble B de tous les $\varphi(A)$, où $A \varepsilon K$, réalise la thèse de *l'axiome du choix*; en symboles: $B \varepsilon P(K)$.

Je renonce d'étudier ici la notion d'*ordre semblable*. Je me borne à signaler le théorème suivant, le plus important parmi ceux qui concernent les propriétes d'ensembles finis lieés à cette notion:

Pour qu'un ensemble A soit fini, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux conditions:

I. il existe une classe qui établit un ordre dans A;

II. si les classes $\mathbf{K}$ et L ordonnent l'ensemble A, elles l'ordonnent d'une façon semblable.

Ce théorème peut donc servir de définition d'ensemble fini.

§ 7. De l'ordre cyclique. La seconde définition de Dedekind et la définition de M. Zermelo.

La notion d'*ordre cyclique* que j'envisage dans ce § a été définie par E. Schröder[1]). Sa définition peut être énoncée en termes de la Théorie des Ensembles de la façon suivante:

Définition 13. *La classe $\mathscr{H}$ range l'ensemble A dans un cycle, lorsque les conditions suivantes sont remplies:*

I. la classe $\mathscr{H}$ transforme d'une façon biunivoque l'ensemble A en lui-même;

II. la classe $\mathscr{H}$ ne transforme d'une façon biunivoque aucun vrai sous-ensemble non-vide de A en lui-même.

En d'autres termes, l'ensemble A que la classe $\mathscr{H}$ range dans un cycle est vide ou bien il est un élément irréductible de la classe de tous les ensembles non-vides qui sont transformés d'une façon biunivoque par la classe $\mathscr{H}$ en eux-mêmes.

Il est aisé d'établir le suivant:

Théorème 46. *A étant un ensemble fini, il existe une classe $\mathscr{H}$ qui le range dans un cycle.*

Démonstration. Je n'indiquerai que la marche générale du raisonnement.

Soit L la classe de tous les ensembles B qui satisfont aux conditions:

I. $B \subset A$;

II. il existe une classe $\mathscr{H}$ qui range B dans un cycle.

Il est évident que

(a) $0 \varepsilon L$,

[1]) E. Schröder, *Algebra und Logik der Relative*, I Abteilung, Leipzig 1895, p. 578—579.

car conformément à la définition 13 toute classe $\mathscr{K}$ range 0 dans un cycle.

On peut facilement démontrer le lemme suivant:

(b) si $B \varepsilon L$ et $a \varepsilon A$, on a $C + (a) \varepsilon L$.

Pour le prouver nous pouvons poser:

(1) $$a \bar{\varepsilon} B.$$

Nous pouvons également poser:

(2) $$B \neq 0,$$

puisque dans le cas contraire on aurait

$$B + (a) = (a),$$

et la classe $(p(a, a))$ rangerait l'ensemble $B + (a)$ dans un cycle.

En vertu de la définition de L, il existe une classe $\mathscr{K}$ qui range l'ensemble B dans un cycle. Désignons par $\mathfrak{L}$ la classe de toutes les paires ordonnées qui appartiennent à $\mathscr{K}$ et dont les deux membres diffèrent de a. Il est aisé de voir, selon (1), que

(3) la classe $\mathfrak{L}$ range B dans un cycle.

Soit, en raison de (2),

(4) $$b \varepsilon B;$$

il existe donc, conformément aux définitions 6 et 13, un seul élément c de B tel que l'on ait

(5) $$p(b, c) \varepsilon \mathfrak{L}.$$

Or, on déduit sans aucune difficulté de (1), (3), (4) et (5) que

(6) la classe $\mathfrak{L} - (p(b, c)) + (p(b, a), p(a, c))$ range l'ensemble $B + (a)$ dans un cycle.

Il est, en effet, évident que cette classe transforme d'une façon biunivoque l'ensemble $B + (a)$ en lui-même. Si elle transformait aussi de cette façon un vrai sous-ensemble non-vide C de $B + (a)$ en lui-même, la classe $\mathfrak{L}$ transformerait l'ensemble $C - (a)$, qui est un vrai sous-ensemble non-vide de B, en lui-même, ce qui est contraire à (3) et à la définition 13.

Comme en même temps, en vertu de la définition de L,

(7) $$B + (a) \subset A.$$

on conclut de (6) et (7) que

$$B + (a) \varepsilon L.$$

Les lemmes (a) et (b) établis, on peut appliquer maintenant le principe d'induction. On obtient:

$$A \varepsilon L,$$

de sorte qu'il existe une classe $\mathscr{K}$ qui range A dans un cycle c. q. f. d.

Par contre le théorème inverse au théorème précédent n'est pas vrai. Soit p. ex. A l'ensemble de tous les nombres intègres et $\mathscr{K}$ la classe de toutes les paires ordonnées $p(a, a+1)$, a étant un nombre intègre. Il est évident que la classe $\mathscr{K}$ range l'ensemble infini A dans un cycle [1].

L'ordre cyclique d'un ensemble A est dit, selon Schröder [2], *„fermé"*, lorsque A est fini; *„ouvert"*, en cas contraire. La définition d'ordre cyclique fermé et ouvert, que nous allons proposer, ne fait pas usage de la notion d'ensemble fini. En nous appuyant sur cette définition, nous allons prouver que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit fini est qu'il puisse être rangé dans un cycle fermé. Cette condition (sous une forme un peu modifiée, ne faisant pas d'usage explicite de la notion d'ordre cyclique) a été énoncée par Dedekind [3]) comme définition d'ensemble fini.

Définition 14. *L'ensemble A est une chaîne par rapport à la classe $\mathscr{K}$, lorsque la classe $\mathscr{K}$ transforme l'ensemble A d'une façon univoque en un sous-ensemble de A* [4].

Définition 15. *La classe $\mathscr{K}$ range l'ensemble A dans un cycle fermé, lorsque les conditions suivantes sont remplies:*

I. A est une chaîne par rapport à $\mathscr{K}$;

II. aucun vrai sous-ensemble non-vide de A n'est une chaîne par rapport à $\mathscr{K}$.

Lemme 47. *Si la classe $\mathscr{K}$ range l'ensemble fini A dans un cycle, elle le range dans un cycle fermé.*

Démonstration. En rapprochant les définitions 6 et 13, on obtient aussitôt:

(1) la classe $\mathscr{K}$ transforme l'ensemble A d'une façon biunivoque en lui-même,

d'où, d'après les définition 5 et 14,

(2) A est une chaîne par rapport à $\mathscr{K}$.

[1]) On peut prouver sans peine que tout ensemble infini qui peut être rangé dans un cycle est dénombrable.

[2]) Op. cit., p. 581.

[3]) R. Dedekind, op. cit., p. XVII.

[4]) Cf. R. Dedekind, op. cit., § 4, p. 11.

Envisageons maintenant un vrai sous-ensemble non-vide B de A; supposons que

(3) B est une chaîne par rapport à $\mathscr{K}$.

Soit C le sous-ensemble de B, en lequel la classe $\mathscr{K}$ transforme B d'une façon univoque; comme

(4) $$C \subset B \subset A,$$

on en conclut, selon (1), que cette transformation est biunivoque. Il en résulte, conformément à la définition 7:

(5) $$C \sim B.$$

Les formules (4) et (5) impliquent, en vertu du théorème 34, l'identité:

(6) $$C = B,$$

de sorte que la classe $\mathscr{K}$ transforme l'ensemble B d'une façon biunivoque en lui-même. Or, cette conclusion est contraire à la condition II de la définition 13.

La supposition (3) nous conduit donc à une contradiction, et il faut admettre que

(7) aucun vrai sous-ensemble non-vide de A n'est une chaîne par rapport à $\mathscr{K}$

De (2) et (7) on conclut immédiatement que la classe $\mathscr{K}$ range l'ensemble A dans un cycle fermé c. q. f. d.

Les lemmes 48 et 50 sont inverses au lemme précédent.

Lemme 48. *S'il existe une classe $\mathscr{K}$ qui range l'ensemble A dans un cycle fermé, cet ensemble est fini.*

Démonstration. Il résulte des définitions 14 et 15 que la classe $\mathscr{K}$, qui range l'ensemble A dans un cycle fermé, le transforme d'une façon univoque en un de ses sous-ensembles. Il est évident que cette classe transforme de la même façon tout sous-ensemble B de A en un autre sous-ensemble de A, que je vais désigner par $\Phi(B)$.

Pour démontrer le lemme on peut supposer que l'ensemble A n'est pas vide; soit

(1) $$a \varepsilon A.$$

Il existe donc un objet b et un seul qui vérifie les formules:

(2) $$b \varepsilon A,$$

(3) $$p(a, b) \varepsilon \mathscr{K},$$

d'où, selon (1) et la définition de Φ,

(4) $$\Phi((a)) = (b).$$

c étant un élément arbitraire de A, soit $\Psi(c)$ la partie commune de tous les ensembles C qui remplissent les conditions:

I. $C \subset A$,
II. $b \varepsilon C$,
III. $\Phi(C-(c)) \subset C$.

En d'autres termes, $\Omega(c)$ étant la classe de tous les ensembles C qui satisfont aux conditions I—III, on a

$$\Psi(c) = \Pi(\Omega(c)).$$

On a pour tout élément c de A:

$$A \varepsilon \Omega(c),$$

car l'ensemble A remplit évidemment les conditions I—III. Il en résulte que la classe $\Omega(c)$ n'est pas vide, ce qui suffit pour affirmer l'existence de l'ensemble $\Psi(c)$.

Je vais établir au préalable quelques propriétés de la fonction Ψ.

(α) Si $c \varepsilon A$, l'ensemble $\Psi(c)$ remplit les conditions I—III.

La démonstration ne présente aucune difficulté.

(β) Si $c \varepsilon A$, $d \varepsilon A$ et $p(c, d) \varepsilon \mathfrak{K}$, on a $\Psi(d) \subset \Psi(c) + (d)$.

On obtient sans peine, conformément à la définition de Φ,

(5) $$\Phi((c)) = (d)$$

et, selon (α),

(6) $$\Psi(a) + (d) \subset A,$$

(7) $$b \varepsilon \Psi(c) + (d),$$

(8) $$\Phi(\Psi(c) - (c)) \subset \Psi(c).$$

Les formules (5) et (8) donnent, en vertu du théorème général sur la transformation d'une somme d'ensembles,

(9) $$\Phi(\Psi(c) + (c)) \subset \Psi(c) + (d).$$

Comme d'autre part

(10) $$[\Psi(c) + (d)] - (d) \subset \Psi(c) \subset \Psi(c) + (c),$$

on a, selon (9) et (10):

(11) $$\Phi([\Psi(c) + (d)] - (d)) \subset \Psi(c) + (d).$$

Or, il résulte de (6), (7) et (11) que l'ensemble $\Psi(c) + (d)$ satisfait aux conditions I—III (lorsque on remplace dans III „c" par „d"). On en conclut aussitôt en vertu de la définition de Ψ que

$$\Psi(d) \subset \Psi(c) + (d), \text{ c. q. f. d.}$$

(γ) $\Psi(a) = A$.

L'ensemble $\Psi(a)$ satisfait, selon (1) et (α), aux conditions I—III; autrement dit, on a

(12) $$\Psi(a) \subset A;$$

(13) $$b \,\varepsilon\, \Psi(a)$$

et

(14) $$\Phi(\Psi(a) - (a)) \subset \Psi(a).$$

Il résulte de (4) et (13):

(15) $$\Phi((a)) \subset \Psi(a).$$

En raisonnant comme dans la démonstration de la propriété (β), on conclut de (14) et (15):

(16) $$\Phi(\Psi(a)) \subset \Psi(a).$$

Cette inclusion exprime, conformément à la définition 14 et à celle de la fonction Φ, que l'ensemble $\Psi(a)$ est une chaîne par rapport à la classe $\mathscr{K}$. Cet ensemble ne peut donc être un vrai sous-ensemble non-vide de A, en vertu de la définition 15 et de l'hypothèse du lemme 48. En tenant compte que $\Psi(a)$ est en effet, selon (12) et (13), un sous-ensemble non-vide de A, on obtient:

$$\Psi(a) = A \text{ c. q. f. d.}$$

(δ) $\Psi(b) = (b)$.

L'ensemble $\Psi(b)$ remplissant, en vertu de (2) et (α), les conditions I—III (lorsqu'on remplace „c" par „b"), on a en particulier:

(17) $$(b) \subset \Psi(b).$$

Comme il est clair que l'ensemble (b) remplit aussi ces conditions, on en conclut selon la définition de Ψ:

(18) $$\Psi(b) \subset (b).$$

Les inclusions (17) et (18) donnent aussitôt l'identité (δ) qu'il fallait démontrer.

Les propiétés (α)—(δ) établies, nous allons reprendre la démonstration du lemme 48. A cet effet désignons par D l'ensemble de tous les éléments d de A qui remplissent la condition:

l'ensemble $\Psi(d)$ est fini.

On a évidemment

(19) $$D \subset A$$

et

(20) $$D \neq 0,$$

car la propriété (δ) implique, en vertu du théorème 5, que

$$b \varepsilon D.$$

On prouve sans peine que:

(21) si $d \varepsilon D$, $e \varepsilon A$ et $p(d, e) \varepsilon \mathcal{K}$, on a $e \varepsilon D$.

En effet, l'ensemble $\Psi(e)$ vérifie, selon (β), la formule:

$$\Psi(e) \subset \Psi(d) + (e).$$

Or, l'ensemble $\Psi(d)$ étant fini, on conclut, en appliquant le corollaire 7 et le théorème 8, que l'ensemble $\Psi(e)$ est aussi fini.

Il résulte de (21) que l'ensemble D est une chaîne par rapport à $\mathcal{K}$. D ne peut donc être un vrai sous-ensemble non-vide de A, de sorte qu'on a, selon (19) et (20):

(22) $$D = A.$$

On en déduit immédiatement, d'après (1), que

(23) $$a \varepsilon D,$$

d'où, conformément à la définition de D:

(24) $\Psi(a)$ est un ensemble fini.

On conclut enfin, selon (24) et (γ), que l'ensemble A est fini c. q. f. d.

Lemme 49. *Si la classe $\mathcal{K}$ transforme l'ensemble fini A d'une façon univoque en lui même, cette transformation est biunivoque.*

D é m o n s t r a t i o n. En rapprochant les définitions 5 et 6, on voit aussitôt qu'il suffit de prouver que la condition suivante est remplie:

(a) si $a \varepsilon A$, il n'existe qu'un seul élément b de A tel que l'on ait

$$p(b, a) \varepsilon \mathcal{K}.$$

Supposons au contraire qu'ils existent des éléments a, b_1 et b_2 qui satisfont aux conditions:

(1) $$p(b_1, a) \varepsilon \mathcal{K},$$

(2) $$p(b_2, a) \varepsilon \mathscr{K}$$
et
(3) $$b_1 \neq b_2.$$

d étant un élément de A, désignons par $\Phi(d)$ l'ensemble du tous les éléments e de A qui vérifient la formule:

$$p(e, d) \varepsilon \mathscr{K}.$$

On obtient, conformément à la définition 5 et à l'hypothèse du lemme:

(4) si $d \varepsilon A$, on a $\Phi(d) \neq 0$;

(5) si $d_1 \varepsilon A$, $d_2 \varepsilon A$ et $d_1 \neq d_2$, on a $\Phi(d_1) \times \Phi(d_2) = 0$.

Soit L la classe de tous les ensembles D qui remplissent la condition:

pour un certaint élément d de A, $D = \Phi(d)$.

La classe L n'est pas vide, puisqu'on a p. ex.

$$\Phi(a) \varepsilon L.$$

En vertu de (4) et (5), ses éléments sont des ensembles non-vides et disjoints. Cette classe est enfin finie, car, selon la définition de L et celle de la fonction Φ:

$$L \subset S(A).$$

On peut donc appliquer à la classe L le théorème 28 (*l'axiome de choix* pour les classes finies); on obtient

(6) $$P(L) \neq 0.$$

Soit

(7) $$B \varepsilon P(L).$$

Or, on conclut sans peine de (7), conformément à la définition de L et à celle du produit, que l'ensemble B satisfait aux conditions suivantes:

(8) la classe $\mathscr{K}$ transforme B en A d'une façon biunivoque,

(9), $$B \subset A.$$
et
(10) $$B \neq A,$$

car, selon (1)—(3), une des relations suivantes subsiste:

$$b_1 \bar{\varepsilon} B \text{ ou bien } b_2 \bar{\varepsilon} B.$$

Il résulte de (8)—(10) que l'ensemble A est de la même puissance que son vrai sous-ensemble B, ce qui est impossible en vertu du théorème 36.

Cette contradiction nous contraint d'admettre que la condition (a) est remplie et, par conséquent, que la classe $\mathcal{K}$ transforme l'ensemble A d'une façon biunivoque en lui-même c. q. f. d.

Lemme 50. *Si la classe $\mathcal{K}$ range l'ensesemble A dans un cycle fermé (dans le sens de la définition 15), elle le range dans un cycle (dans le sens de la définition 13).*

Démonstration. On peut poser

$$(1) \qquad A \neq 0,$$

puisqu'en cas contraire la démonstration est évidente.

Conformément aux définitions 14 et 15, l'ensemble A est une chaîne par rapport à $\mathcal{K}$; en d'autres termes, la classe $\mathcal{K}$ transforme A d'une façon univoque en un de ses sous-ensembles B On prouve sans aucune difficulté [1]) que cet ensemble B est aussi une chaîne par rapport à $\mathcal{K}$.

Comme on a en même temps, selon (1),

$$B \neq 0,$$

l'ensemble B, en vertu de la définition 15 (condition II), ne peut donc être un vrai sous-ensemble de A. Il en résulte que

$$B = A.$$

d'où la classe $\mathcal{K}$ transforme l'ensemble A d'une façon univoque en lui-même.

L'ensemble A étant fini, en raison du lemme 48, on conclut, en appliquant le lemme précédent, que cette transformation est biunivoque; la condition I de la définition 13 est donc remplie.

La condition II est évidemment remplie aussi. En effet, si la classe $\mathcal{K}$ transformait un vrai sous-ensemble non-vide de A d'une façon biunivoque en lui-même, ce sous-ensemble serait une chaîne par rapport à $\mathcal{K}$, ce qui est impossible, comme nous l'avons déjà mentionné auparavant.

Le lemme 50 est donc complètement démontré.

Nous pouvons maintenant établir deux théorèmes suivants:

[1]) Cf. Dedekind, op. cit., p. 11.

Théorème 51. *Pour que la classe $\mathfrak{K}$ range l'ensemble A dans un cycle fermé, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:*

I. la classe $\mathfrak{K}$ range l'ensemble A dans un cycle,

II. l'ensemble A est fini.

Théorème 52. *Pour que l'ensemble A soit fini, il faut et il suffit qu'il existe une classe $\mathfrak{K}$ qui le range dans un cycle fermé.*

Le premier de ces théorèmes résulte immédiatement des lemmes 47, 48 et 50; le second du théorème 46 et des lemmes 47-48.

Le théorème 51 justifie l'emploi du terme „cycle fermé": il montre, en effet, que la définition du cycle fermé, proposé dans cet ouvrage (déf. 15), équivaut à la définition générale de l'ordre cyclique (déf. 13) limitée au cas d'ensemble fini.

Si l'on élimine dans le théorème 52 le terme „cycle fermé" en se basant sur la définition 15, on en obtient la définition d'ensemble fini donnée par Dedekind et mentionnée déjà dans ce §. Comme on sait, cette définition n'a pas été admise par Dedekind comme point de départ dans ses recherches sur les ensembles finis et l'Arithmétique des nombres naturels. La définition que nous citons dans le § 5 lui semblait bien plus avantageuse à cet effet; voici comme il s'exprime à ce propos [1]):

„Nun mache man einmal den Versuch, auf dieser neuen Grundlage das Gebäude zu errichten! Man wird alsbald auf grosse Schwierigkeiten stossen, und ich glaube behaupten zu dürfen, dass selbst der Nachweis der vollständigen Übereinstimmung mit der früheren nur dann... gelingt, wenn man die Reihe der natürlichen Zahlen schon als entwickelt... zu Hülfe nehmen darf".

Cependant, nos recherches conduisent à une conclusion bien différente: si l'on admet le théorème 52 comme définition d'ensemble fini, on en déduit sans aucune difficulté les théorèmes les plus importants sur les ensembles finis et on prouve son équivalence à la définition habituelle arithmétique; par contre, si l'on se base sur la définition du § 5, on ne peut parvenir à ces résultats, à moins qu'on fasse intervenir *l'axiome du choix*.

En terminant je vais citer une définition d'ensemble fini proposée par M. Zermelo [2]) dont l'idée se rattache au théorème 52.

[1]) R. Dedekind, op. cit., p. XVII.

[2]) E. Zermelo, *Sur les ensembles finis*..., p. 186.

Appelons, à ce but, avec M. Zermelo deux ensembles A et B *séparés* par rapport à une classe $\mathcal{K}$, lorsque les conditions $a \varepsilon A$ et $b \varepsilon B$ entraînent:

$$p(a, b) \bar{\varepsilon} \mathcal{K} \text{ et } p(b, a) \bar{\varepsilon} \mathcal{K}.$$

L'ensemble C est dit *chaîne simple* par rapport à une classe $\mathcal{K}$, lorsqu'il est assujetti aux conditions:

I. il existe deux éléments c et d de C tels que $\mathcal{K}$ transforme $C-(c)$ en $C-(d)$ d'une façon biunivoque;

II. si $C = A + B$ et $A \times B = 0$, les ensembles A et B sont séparés par rapport à $\mathcal{K}$.

L'ensemble E est fini, s'il est vide ou bien s'il existe une classe $\mathcal{K}$ par rapport à laquelle il est une chaîne simple.

Comme le prouve M. Zermelo, cette définition équivaut à la définition basée sur la notion du double bon ordre; nous avons énoncé cette dernière définition comme théorème 44.

Annexe. Quelques problèmes qui se rattachent à l'axiome du choix.

Je veux attirer l'attention du lecteur sur quelques problèmes non résolus qui se rattachent à la théorie des ensembles finis.

Tous les théorèmes énoncés dans cet ouvrage sont démontrés sans l'aide de *l'axiome du choix*. En particulier, nous avons établi que la définition adoptée ici comme point de départ équivaut à plusieurs autres définitions publiées antérieurement (cf. par exemple le corollaire 15, les théorèmes 16, 17, 44 et 52). Par contre, nous ne savons démontrer sans *l'axiome du choix* l'équivalence de cette définition — je vais la dénoter comme *définition I* — et d'aucune des définitions suivantes:

Définition II. *L'ensemble A est fini lorsque toute classe de sous-ensembles croissants de A admet un élément irréductible (ou saturé).*

Définition III. *L'ensemble A est fini lorsque la classe $S(A)$ n'est de la même puissance qu'aucune de ses vraies sous-classes*[1].

Définition IV[2]. *L'ensemble A est fini lorsqu'il n'est de la même puissance qu'aucun de ses vraies sous-ensembles.*

Définition V. *L'ensemble A est fini lorsqu'il n'est pas la somme de deux ensembles disjoints ayant la même puissance que A.*

[1]) Une définition analogue formulée à l'aide de la classe $S(S(A))$ équivaut à la définition I.

[2]) C'est la première définition de Dedekind. Cf. § 5, p. 73.

Nous ne savons même démontrer sans *l'axiome du choix* qu'une des définitions II—V équivaut à une autre de ces définitions.

Or les questions suivantes s'imposent: quels cas particuliers de *l'axiome du choix* suffisent pour démontrer l'équivalence des définitions I—V? quels cas particuliers de cet axiome sont nécessaires pour ces démonstrations - en d'autres termes, quels cas particuliers peut on déduire, en acceptant l'équivalence de deux de ces définitions comme hypothèse? peut-on déduire d'une pareille hypothèse *l'axiome du choix* sous sa forme générale?

Je vais signaler ici quelques résultats particuliers qui me sont connus et qui seront peut-être utiles pour la résolution des problèmes mentionnés.

On peut démontrer sans *l'axiome du choix* les théorèmes suivants:

A. Tout ensemble fini au sens de la définition I est aussi fini au sens de la définition II.

B. Tout ensemble fini au sens de la définition II est aussi fini au sens de la définition III.

C. Tout ensemble fini au sens de la définition III est aussi fini au sens de la définition IV.

D. Tout ensemble fini au sens de la définition IV est aussi fini au sens de la définition V.

Les démonstrations de tous ces théorèmes ne présentent pas de difficulté, sauf peut-être celle du théorème B. Ce résultat est obtenu par M. Kuratowski.

Démonstration de B. Supposons que la classe $S(A)$ est de la même puissance qu'une de ses vraies sous-classes. Elle contient alors [1]) une sous-classe dénombrable. Autrement dit: il existe une suite infinie d'ensembles différents A_1, A_2, ... contenus dans A. Il s'agit de prouver que ces ensembles peuvent être supposés *croissants*. A ce but, il suffit de démontrer ce lemme: *étant donnée une suite infinie S_0 d'ensembles différents A_1, A_2, ..., il existe une suite infinie d'ensembles disjoints non-vides contenus dans* $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ [2]).

Pour le prouver, on peut supposer qu'il n'existe aucune suite descendante d'ensembles différents $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ telle que B_n soit le produit d'un nombre

[1]) Cf. W. Sierpiński, *L'axiome de M. Zermelo* etc., p. 105.

[2]) En termes de M. Fréchet on pourrait dire: toute classe de puissance $\geqslant \aleph_0$ close par rapport aux opérations $X + Y$ et $X - Y$ contient une suite infinie d'ensembles disjoints (Cf. Fund. Math. IV, p. 335).

fini de termes de la suite S_0. Car, autrement, la suite $B_1 - B_2$, $B_2 - B_3, \dots$ réaliserait le lemme.

Cela posé, on peut faire correspondre à la suite S_0 un ensemble $F(S_0)$ tel que 1°: $F(S_0)$ est le produit d'un nombre fini de termes de S_0, 2°: $F(S_0) \neq 0$, 3°: pour tout n, on a: $F(S_0) \subset A_n$ ou bien $F(S_0) \times A_n = 0$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait former une suite infinie d'indices $n_1, n_2, \dots$ telle que $\prod_{i=1}^{k} A_{n_i} \supset \prod_{i=1}^{k+1} A_{n_i}$, contrairement à l'hypothèse.

Or, la condition 3° entraîne l'existence d'une suite infinie d'indices $m_1, m_2, \dots$ telle que l'on ait: $F(S_0) \supset A_{m_n}$ pour tout n ou bien $F(S_0) \times A_{m_n} = 0$ pour tout n. En posant $A_{m_n} - F(S_0) = A_n^1$, on arrive donc à une suite infinie S_1 d'ensembles différents $A_1^1, A_2^1, \dots$ En outre $F(S_0) \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ et $F(S_0) \times \sum_{n=1}^{\infty} A_n^1 = 0$.

L'ensemble $F(S_1)$ vérifie donc par rapport à S_1 les conditions 1°—3°. En procédant d'une façon analogue on obtient la suite S_2, $F(S_2)$ etc. Comme

$$F(S_k) \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n^k \text{ et } F(S_k) \times \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{k+1} = 0,$$

la suite infinie $F(S_0)$, $F(S_1), \dots$ est composée d'ensembles disjoints non-vides contenus dans $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

Observons encore les théorèmes:

E [1]. L'équivalence des définitions I et III résulte de *l'axiome du choix* sous la forme restreinte aux classes dénombrables.

F. L'équivalence des définitions I et III résulte de l'équivalence des définitions III et IV; autrement dit, cette équivalence résulte de la proposition suivante: „Si l'ensemble A est fini au sens de la définition III, la classe $S(A)$ est finie au même sens".

Remarquons enfin que pour les ensembles des points situés dans un espace euclidéen les définitions II—III équivalent à la définition I. Le problème s'il en est de même pour les définitions IV et IV n'est pas résolu jusqu'à présent.

[1]) Cf. § 5, p. 73, note [2]).