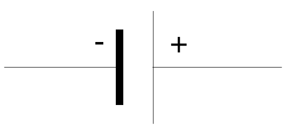
4 – Kapazität, Dielektrika, Energiespeicherung

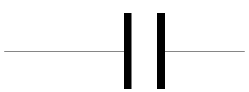
Mit diesem Kapitel schließen wir den Themenbereich der Elektrostatik ab. Wir befassen uns noch mit den Möglichkeiten der Ladungs- und Energiespeicherung.

4.1 – Kapazität, Dielektrika, Energiespeicherung

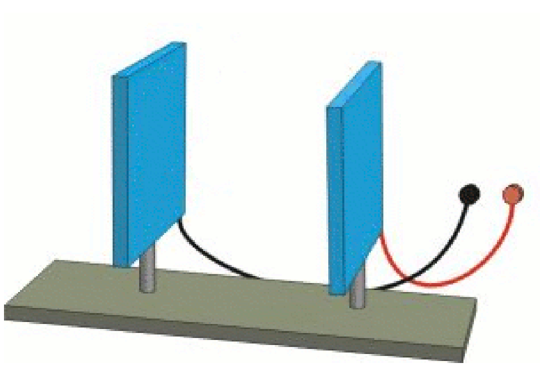
Eine **Kapazität**, oder auch ein **Kondensator**, kann elektrische Ladung speichern. Im einfachsten Fall besteht er aus zwei parallelen, leitenden Platten in geringem Abstand voneinander. Kapazitäten sind in der elektrischen Schaltungstechnik allgegenwärtig, was wir aber hier nicht vertiefen wollen. Wir befassen uns vielmehr mit ihrem Funktionsprinzip. Für das darauffolgende Kapitel merken wir uns aber schon einmal die Schaltsymbole für den Kondensator und die Batterie:



Batterie



Kondensator



Plattenkondensator (Prinzip)

Wird an einen Kondensator eine Potentialdifferenz (=Spannung) angelegt, so wird er aufgeladen. Auf jeder Platte wird die Ladungsmenge Q aufgenommen - positiv auf der einen, negativ auf der anderen. Diese Ladungsmenge ist der Spannung proportional. Die **Kapazität C** ist die Proportionalitätskonstante:

$$Q = C\,V_{ba}$$

Die Einheit der Kapazität ist das **Farad**: 1 F = 1 C/V.

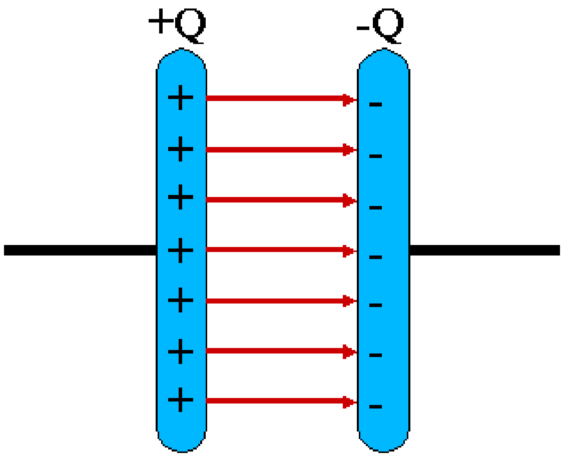
Elektrolytkondensator, Wicklung

Typische Kapazitäten haben Werte zwischen 10^{-12} F und 10^{-6} F. Dabei wird zur Vergrößerung der Kapazität versucht, die Oberfläche zwischen den Platten zu vergrößern (bspw. durch aufwickeln der Platten) und ihren Zwischenraum mit einem Dielektrikum zu füllen. Dazu später mehr.

4.2 – Bestimmung der Kapazität

Wie bestimmt man die Kapazität eines Kondensators mit simpler Geometrie? Wir betrachten dazu zunächst den Fall von durch Vakuum (oder Luft) getrennten Leiteranordnungen. Wir beginnen mit der Anordnungen zweier planparalleler Platten der Fläche A (je Platte) im Abstand d. Wir wissen schon, dass das elektrische Feld einer Platte gleich $\sigma/2\varepsilon_0$ ist, mit der Flächenladungsdichte σ. Bei zwei identischen Platten gleicher Flächenladungsdichte (mit verschiedenem Ladungsvorzeichen) ist das Feld entsprechend doppelt so groß: $E=\sigma/\varepsilon_0$. Nun ist $\sigma = Q/A$ und damit gilt:

$$E=\frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$



Über die Integralbeziehung zwischen dem elektrischen Feld und der Potentialdifferenz erhalten wir damit:

$$V_{ba} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_a^b E\, ds \cos(180\,°) = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \int_a^b ds = \frac{Q\,d}{\varepsilon_0 A}$$

Dabei haben wir entgegen der Feldlinienrichtung integriert.

Wir erhalten so eine Beziehung zwischen V_{ab} und Q, woraus wir die **Kapazität des Plattenkondensators** wegen $C=Q/V_{ab}$ direkt ablesen können:

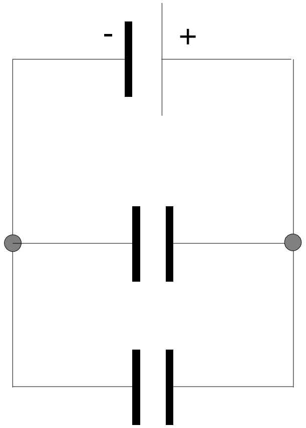
$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Hörsaal-Übung: Ein **Zylinderkondensator** besteht aus zwei konzentrischen, metallischen Zylindern mit den Radien R_i und R_a ($R_i < R_a$). Beide Zylinder haben die Länge L, und wir nehmen an, dass $L >> R_a$ gilt. Welche Kapazität hat dieser Kondensatortyp?

Kondensatoren werden in fast allen elektrischen Schaltkreisen eingesetzt. Sie können in Reihe (= in Serie) oder auch parallel verschaltet werden.

Betrachten wir zuerst die **Parallelschaltung**: Die Kondensatoren (hier zwei) sind mit ihren linken Platten und ihren rechten Platten jeweils auf dem gleichen Potential. Zwischen den Platten herrscht also die gleiche Potentialdifferenz V. Demnach muss für die Gesamtladung gelten:

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$$

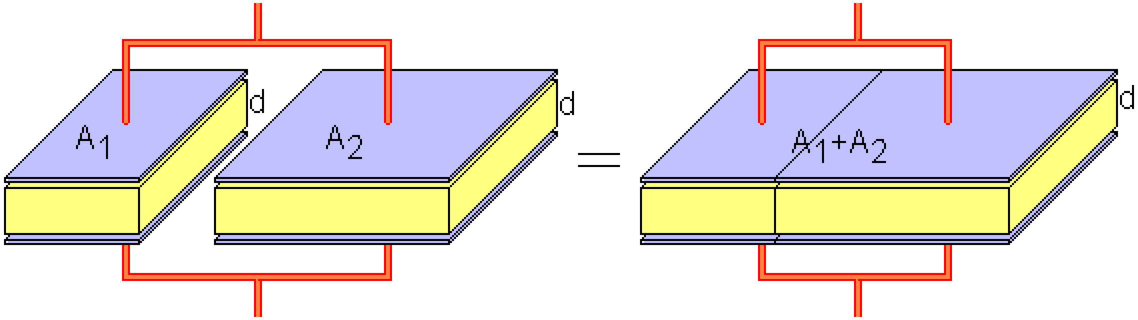


Für einen einzelnen Kondensator, der die gleiche Ladung hält bei der gleichen Spannung muss gelten: Q = C V
Damit gilt durch Vergleich der beiden Gleichungen offensichtlich:

$$\boxed{C = C_1 + C_2}$$

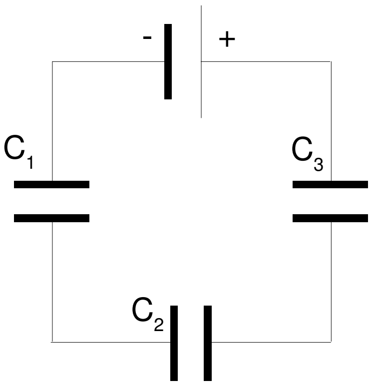
Die Kapazitäten von parallelgeschalteten Kondensatoren addieren sich.

Als Merkhilfe:



Bei der **Reihenschaltung** von Kondensatoren fließt zunächst die Ladung +Q bzw. -Q von den äußeren Platten zu den Batteriepolen. Die inneren Platten sind zunächst neutral, werden dann aber umgeladen, aufgrund der Anziehungskraft der Ladungen auf der jeweiligen Nachbarplatte, die bereits geladen ist. Schließlich ist auf allen Platten die gleiche Ladungsmenge Q (im Wechsel mit positivem und negativem Vorzeichen). Die Gesamtspannung über allen Kondensatoren muss der Batteriespannung V entsprechen. An jedem einzelnen Kondensator der Kapazität C_i fällt die Spannung V_i ab. Es muss gelten (hier für drei Kondensatoren):

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$



Weiterhin haben wir $Q = C_i V_i$ für jeden der Kondensatoren, sowie Q = CV für den Ersatzkondensator gleicher effektiver Kapazität. Wir können also schreiben:

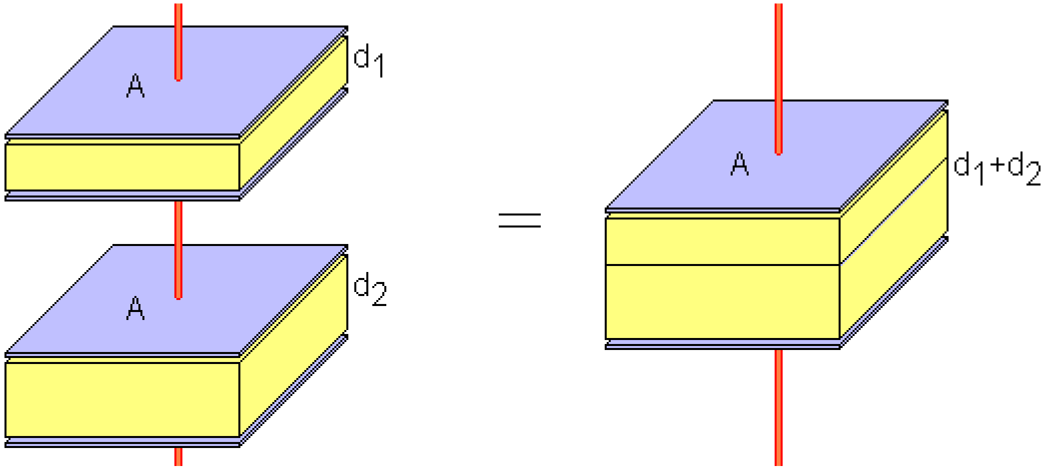
$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$

und damit für die Kapazität des Ersatzkondensators:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

In einer Reihenschaltung von Kondensatoren addieren sich die Kehrwerte der Kapazitäten.

Als Merkhilfe:



Ein Kondensator speichert elektrische Energie. Die gespeicherte Energie entspricht der Arbeit, die beim Aufladen des Kondensators geleistet wurde. Das sieht man so:
Der Ladeprozess des Kondensators erfolgt nicht instantan. Erst wird eine kleine Ladungsmenge dq aufgebracht. Dafür ist noch keine Arbeit nötig, da die Platten anfangs nicht geladen sind. Für das Aufbringen der nächsten Ladungsmenge dq ist dann schon Arbeit gegen die abstoßende Coulomb-Kraft der bereits auf den Platten vorhandenen Ladung nötig. Insgesamt ist die zu leistende Arbeit:

$$W = \int_0^Q V(q)\,dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Die im Kondensator gespeicherte Energie U ist also:

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

Nun gilt weiterhin Q = CV = CEd und C = ε_0A/d, woraus folgt:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2 E^2 d^2}{2C} = \frac{\varepsilon_0 A E^2 d}{2} = \mathrm{Vol}\cdot\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Dabei haben wir A·d = Vol als das Volumen zwischen den Kondensatorplatten identifiziert.

Da der Raum zwischen den Platten vom elektrischen Feld erfüllt ist, ist es naheliegend, die gespeicherte Energie als **elektrische Feldenergie** anzusehen. Es gilt dann für die **Energiedichte u = U/Vol**:

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Die im elektrischen Feld pro Einheitsvolumen in einem beliebigen Raumgebiet gespeicherte Energiedichte ist proportional zum **Quadrat** der elektrischen Feldstärke.

Zwar haben wir dies nur für den Plattenkondensator gezeigt. Diese Aussage gilt aber ganz allgemein für jedes Raumgebiet, in dem ein elektrisches Feld herrscht.

4.5 – Dielektrikum

In den meisten Kondensatoren wird zwischen die Platten ein isolierendes Material eingefügt. Dies wird **Dielektrikum** genannt. Es erfüllt drei Zwecke:

- es erhöht die elektrische Durchbruchfeldstärke im Vergleich zu Luft (oder Vakuum)
- es erlaubt ein engeres Zusammenrücken der Platten (womit die Kapazität steigt)
- es zeigt sich darüberhinaus eine Erhöhung der Kapazität um einen Faktor k

Den Faktor k nennt man die **Dielektrizitätskonstante** und es gilt:

$$C = k\,C_0$$

wenn C_0 die Kapazität eines baugleichen Kondensators ohne Dielektrikum ist.

<u>Typische Werte für k und die Durchbruchfeldstärke</u>

Material	**k**	**Durchbruchfeldstärke (V/m)**
Vakuum	1.0	
Luft (1 atm)	1.0006	$3\cdot10^6$
Neopren	6.7	$12\cdot10^6$
Papier	3.7	$15\cdot10^6$
Quarz	4.3	$8\cdot10^6$
Porzellan	6-8	$5\cdot10^6$
Glimmer	7	$150\cdot10^6$
Strontiumtitanant	300	$8\cdot10^6$

Wird das Volumen zwischen den Platten eines Plattenkondensators vollständig gefüllt, so ergibt sich für seine Kapazität:

$$C = k\,\varepsilon_0\,A/d$$

Da der Faktor k 0 so oft auftritt, erhält er ein eigenes Symbol.
Die **(dielektrische) Permeabilität** ε ist definiert als:

$$\boxed{\varepsilon = k\,\varepsilon_0}$$

ε_0 ist die Permeabilität des Vakuums.

Wenn wir die Ableitung der Energiedichte im elektrischen Feld rekapitulieren und berücksichtigen, dass C durch kC zu ersetzen ist, so erhalten wir für die in einem Dielektrikum gespeicherte Feldenergiedichte:

$$u = \frac{\varepsilon E^2}{2}$$

Der Einfluss eines Dielektrikums lässt sich mit zwei einfachen Experimenten illustrieren:

Wir verbinden einen Plattenkondensator mit einer Batterie (Leerlaufspannung V_0). Nun schieben wir ein Dielektrikum zwischen die Platten. Wir finden experimentell, dass die auf den Platten ohne Dielektrikum gespeicherte Ladung Q_0 sich nach dem Einschieben erhöht auf:

$$Q = k\, Q_0$$

Damit ist offensichtlich die Kapazität angestiegen von $C_0 = Q_0/V_0$ auf $C = kQ_0/V_0$.

Im zweiten Experiment laden wir den Kondensator ohne Dielektrikum auf die Spannung V_0 auf und trennen ihn dann von der Batterie. Jetzt wird, bei dann fester Plattenladung Q_0, ein Dielektrikum eingeschoben und wir beobachten ein Abfallen der Spannung zwischen den Platten von V_0 auf

$$V = V_0/k$$

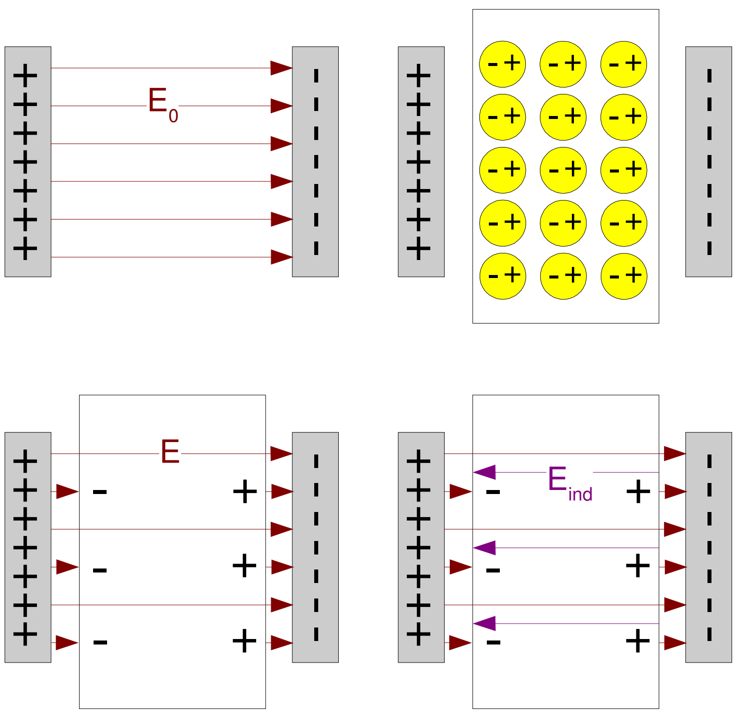
Wieder ist also die Kapazität mit Dielektrikum angestiegen auf $C = Q_0/(V_0/k) = kC_0$.
Daraus können folgende Schlussfolgerung ziehen:

Das elektrische Feld in einem Kondensator wird durch das Einbringen eines Dielektrikums von E_0 (ohne Dielektrikum) auf $E=E_0/k$ reduziert.

In einem Leiter geht diese Reduktion bis auf 0, womit die (statische) Dielektrizitätskonstante eines Leiters ∞ sein muss.

4.6 – Molekulare Beschreibung des Dielektrikums

Die Ursache der Feldabschwächung liegt in der **Polarisierbarkeit** des Dielektrikums. Die Moleküle sind zwar elektrisch neutral, sie können aber bspw. ein Dipolmoment besitzen (wie das H_20-Molekül). Dieses wird im elektrischen Feld des Plattenkondensators gegen die ungeordnete thermische Bewegung teilweise ausgerichtet. Man nennt dies **Orientierungspolarisation**. Als Folge dieser Ausrichtung entstehen auf den Oberflächen des Dielektrikums, die den Platten gegenüberliegen, Oberflächenladungen. An diesen Enden einige der Feldlinien, was gleichbedeutend ist mit einer Abschwächung des Feldes im Dielektrikum von E_0 auf $E = E_0/k$.



In der Tat ist das Feld E eine Vektorsumme des Feldes aufgrund von freien (d.h. beweglichen) Ladungen auf den Kondensatorplatten, E_0, und des **induzierten Feldes**, $\mathbf{E_{ind}}$, aufgrund der gebundenen Oberflächenladungen auf dem Dielektrikum:

$$E = E_0 - E_{ind} = E_0/k \rightarrow E_{ind} = E_0 \left(1 - 1/k\right)$$

Wie wir schon wissen gilt allgemein bei einer Parallelplattenanordnung $E = \sigma/\varepsilon_0$ und damit:

$$E_{ind} = \sigma_{ind}/\varepsilon_0$$

Die Oberflächenladungsdichte der induzierten Ladungen hat demnach den folgenden Wert:

$$\sigma_{\text{ind}} = \sigma\left(1 - 1/k\right)$$

Da k stets größer 1 ist, ist die induzierte Oberflächenladungsdichte stets kleiner als die Oberflächenladungsdichte der freien Ladungen auf den Kondensatorplatten.