Aplicaciones Lineales

Primeras definiciones. Una *aplicación lineal* de un $\mathbb{K}$-ev de salida E a un $\mathbb{K}$-ev de llegada F es una aplicación $f : E \to F$ tal que

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$ para todos $u, v \in E$.
- $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$ para todo $u \in E$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Notaremos por $L(E,F)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales de E a F.

Problema relacionado. 1.

Las siguientes propiedades se deducen a partir de la definición. Si $f : E \to F$ es una aplicación lineal, entonces:

- $f(\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot u_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot f(u_j)$, para todos $u_1, \ldots, u_n \in E$ y para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
- $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.
- Si G es un sev del ev de llegada F, $f^{-1}(G) = \{u \in E : f(u) \in G\}$ es un sev del ev de salida E.
- Si H es un sev del ev de salida E, $f(H) = \{f(u) : u \in H\}$ es un sev del ev de llegada F.

Ejercicio. Probar las propiedades anteriores.

Los casos $G = \{\mathbf{0}\}$ y $H = E$ dan lugar a dos importantes definiciones.

- El *núcleo* de f es el sev del ev de salida definido por
$$\operatorname{Nuc} f = f^{-1}(\mathbf{0}) = \{u \in E : f(u) = \mathbf{0}\}.$$
- La *imagen* de f es el sev del ev de llegada definido por
$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(u) : u \in E\} = [f(u_1), \ldots, f(u_n)]$$
donde $(u_1, \ldots, u_n)$ puede ser cualquier base del ev de llegada.

Recordamos que una aplicación $f : A \to B$ entre conjuntos es:

- *inyectiva* cuando no hay dos elementos diferentes del conjunto de salida que tengan la misma imagen. Es decir, cuando
$$f(u) = f(v) \Longleftrightarrow u = v.$$
- *exhaustiva* cuando cualquier elemento del conjunto de llegada es la imagen de algún elemento del conjunto de salida. Es decir, cuando
$$\forall w \in B \ \exists u \in A \text{ t.q. } f(u) = w.$$
- *biyectiva* cuando es inyectiva y exhaustiva.

Las aplicaciones biyectivas se pueden invertir. Dada una aplicación biyectiva $f : A \to B$, existe otra aplicación $f^{-1} : B \to A$ tal que $f(u) = v \Leftrightarrow f^{-1}(v) = u$.

Estos conceptos se pueden trasladar al marco de las aplicaciones lineales, dando lugar a las siguientes caracterizaciones. Supongamos que E y F son ev de dimensión finita. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal y sea $(u_1, \ldots, u_n)$ una base del ev de salida E. Entonces:

- f es inyectiva $\Longleftrightarrow \operatorname{Nuc} f = \{\mathbf{0}\} \Longleftrightarrow f(u_1), \ldots, f(u_n)$ son li en F.
- f es exhaustiva $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = F \Longleftrightarrow f(u_1), \ldots, f(u_n)$ generan F.
- f es biyectiva $\Longleftrightarrow f(u_1), \ldots, f(u_n)$ son una base de F.

Las caracterizaciones referentes al núcleo y a la imagen no requieren la hipótesis de dimensión finita.

Ejercicio. Probar estas caracterizaciones.

Problema relacionado. 2.

Finalmente, listamos un vocabulario que no vamos a usar, pero que conviene saber. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Diremos que:

- f es un *monomorfismo* si y sólo si f es inyectiva.
- f es un *epimorfismo* si y sólo si f es exhaustiva.
- f es un *isomorfismo* si y sólo si f es biyectiva.

- f es un *endomorfismo* si y sólo si $E = F$.
- f es un *automorfismo* si y sólo si $E = F$ y f es biyectiva.

Notaremos por $L(E)$ o por $\mathrm{End}(E)$ al conjunto de todos los endomorfismos de E.

Ejemplos de aplicaciones lineales. Vamos a empezar con los ejemplos más sencillos posibles:

- La *aplicación nula* de un ev E a otro ev F es aquella que envia todos los vectores de E al vector nulo de F. Es decir, $f(u) = \mathbf{0}$, para todo $u \in E$. Escribiremos $f = \mathbf{0} = \mathbf{0}_{E,F}$. Además,
$$\mathrm{Nuc}\, f = E \qquad \mathrm{Im}\, f = \{\mathbf{0}\}.$$
- La *aplicación identidad* de un ev E es el endomorfismo que envia cualquier vector al propio vector. Es decir, $f(u) = u$, para todo $u \in E$. Escribiremos $f = \mathrm{Id} = \mathrm{Id}_E$. Además,
$$\mathrm{Nuc}\, f = \{\mathbf{0}\} \qquad \mathrm{Im}\, f = E.$$

A continuación, presentamos un ejemplo geométrico en el plano y otro en el espacio.

- En el plano $E = \mathbb{R}^2$, consideramos el *giro* de ángulo θ. Veremos más adelante que, en coordenadas naturales, este giro se expresa como
$$g_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad g_\theta : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
El giro de ángulo θ es una aplicación biyectiva cuya inversa es el giro de ángulo $-\theta$. En particular, $\mathrm{Nuc}\, g_\theta = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathrm{Im}\, g_\theta = \mathbb{R}^2$.
- En el espacio $E = \mathbb{R}^3$, consideramos la *proyección* sobre el plano $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ en la dirección de la recta $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = z\}$. En coordenadas naturales, esta proyección se expresa como
$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad p(x, y, z) = (x, y - z, 0).$$
El núcleo de p es la recta H y su imagen es el plano G, luego p no es ni inyectiva, ni exhaustiva.

Finalmente, presentamos una aplicación lineal que no es un endomorfismo. Concretamente, damos un ejemplo con $E = M_2(\mathbb{R})$ y $F = \mathbb{R}_2[x]$. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación dada por
$$f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a + d) + (a + b - c + d)x + (b - c)x^2.$$
Empezamos calculando el núcleo de esta aplicación.
$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}\, f &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : (a + d) + (a + b - c + d)x + (b - c)x^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{array}{rcl} a + d &=& 0 \\ b - c &=& 0 \end{array} \right\} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$
Así pues, $\dim \mathrm{Nuc}\, f = 2$ y la aplicación no es inyectiva. Ahora calculamos la imagen usando que $\mathrm{Im}\, f$ es el sev generado por las imágenes de una base cualquiera de ev de salida $E = M_2(\mathbb{R})$. Obviamente, trabajamos con la base natural de $M_2(\mathbb{R})$.
$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, f &= \left[f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= [1 + x, x + x^2, 1 + x, -x - x^2] = [1 + x, x + x^2]. \end{aligned}$$
Luego $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$ y la aplicación tampoco es exhaustiva.

Comentarios sobre dimensiones. En esta sección siempre supondremos que los ev de salida y llegada son de dimensión finita. Enpezamos estableciendo una fórmula con importantes consecuencias.

Si $f : E \to F$ es una aplicación lineal entre ev de dimensión finita, entonces

$$\dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

Ejercicio. Comprobar que esta fórmula se cumple en todos los ejemplos de la sección anterior.

Ejercicio. Probar la fórmula.

Las importantes consecuencias antes mencionadas son las siguientes:

- f inyectiva $\Rightarrow \dim E \leq \dim F$.
- f exhaustiva $\Rightarrow \dim E \geq \dim F$.
- f biyectiva $\Rightarrow \dim E = \dim F$.
- Si $\dim E = \dim F$, entonces f inyectiva $\Leftrightarrow f$ exhaustiva $\Leftrightarrow f$ biyectiva.

Ejemplo. Una aplicación lineal $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ nunca puede ser inyectiva. Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ nunca puede ser exhaustiva.

El *rango* de una aplicación lineal $f : E \to F$ es igual a la dimensión de la imagen:

$$\operatorname{rango} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

Determinación de aplicaciones lineales. En esta sección queremos determinar que aplicaciones lineales cumplen ciertas condiciones prefijadas de antemano.

Sean E y F dos ev de dimensión finita. Sean $w_1, \ldots, w_r$ unos vectores del ev de salida E y $v_1, \ldots, v_r$ unos vectores del ev de llegada F. ¿Cuántas aplicaciones lineales $f : E \to F$ hay tales que

$$f(w_j) = v_j \qquad j = 1, \ldots, n?$$

La respuesta depende de los vectores escogidos:

- Cuando los vectores $w_1, \ldots, w_r$ son una base de E, tan sólo hay una.
- Cuando los vectores $w_1, \ldots, w_r$ son li pero no son una base de E, hay infinitas.
- Cuando los vectores $w_1, \ldots, w_r$ son ld, puede haber infinitas, una o ninguna, dependiendo de como sean los vectores $v_1, \ldots, v_r$.

Ejercicio. Probar estas afirmaciones.

Ejemplo. No hay ninguna aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,0) = (1,-1,1) \qquad f(0,1) = (1,2,3) \qquad f(1,1) = (2,1,0)$$

ya que $f(1,0) + f(0,1) = (1,-1,1) + (1,2,3) = (2,1,4) \neq (2,1,0) = f(1,1) = f((1,0)+(0,1))$.

Ejemplo. Existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,0) = (1,-1,1) \qquad f(0,1) = (1,2,3) \qquad f(1,1) = (2,1,4).$$

Es la aplicación $f(x,y) = x \cdot f(1,0) + y \cdot f(0,1) = (x+y, 2y-x, x+3y)$.

Matriz de una aplicación lineal. Vamos a introducir el concepto más importante del curso. Es importante entender perfectamente esta sección. Aquí también supondremos que los ev de salida y llegada son de dimensión finita.

Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal entre ev de dimensión finita. Sea $W = (w_1, \ldots, w_n)$ una base del ev de salida y $V = (v_1, \ldots, v_m)$ una base del ev de llegada.

Por definición, la *matriz de la aplicación f en la base de salida W y la base de llegada V* es la matriz $M_V^W(f) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ cuya columna j está formada por las coordenadas en la base de llegada V de la imagen del vector j de la base de salida W. Es decir,

$$f(w_j) = \alpha_{1j} \cdot v_1 + \alpha_{2j} \cdot v_2 + \cdots + \alpha_{mj} \cdot v_m \Longrightarrow M_V^W(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

La matriz $M^W_V(f)$ tiene $n = \dim E$ columnas, tiene $m = \dim F$ filas y cumple rango $M^W_V(f) = \text{rango}\, f$.

La propiedad fundamental la matriz $M^W_V(f)$ es la siguiente:

$$\overline{f(u)}_V = M^W_V(f) \cdot \bar{u}_W \qquad \forall u \in E.$$

Conviene recordar que $\bar{u}_W$ denota las coordenadas del vector u en la base de salida W, mientras que $\overline{f(u)}_V$ denota las coordenadas del vector imagen $f(u)$ en la base de llegada V. (Repasar el tema *Espacios Vectoriales.*)

Ejercicio. Comprobar que esta propiedad es cierta si u es uno de los vectores de la base de salida W. A continuación, probar que la propiedad es cierta para cualquier vector u.

Ejercicio. Comprobar que cuando $F = E$, entonces $M^W_V(\text{Id}) = C^W_V$.

Cuando el ev de salida y el de llegada coincidan: $F = E$ y f es un endomorfismo, pondremos la misma base en la salida y la llegada: $V = W$ y diremos que $M^W_W(f)$ es la *matriz de f en la base W*.

Ejemplo. Vamos a calcular la matriz del giro de ángulo θ en la base natural de $\mathbb{R}^2$.

Notamos por $g_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ al giro y por $N = (e_1, e_2)$ con $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ a la base natural. Mediante un dibujo y un poco de trigonometría se puede ver que

$$g_\theta(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta) \cdot e_1 + (\sin\theta) \cdot e_2 \quad g_\theta(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta) = (-\sin\theta) \cdot e_1 + (\cos\theta) \cdot e_2.$$

Por tanto, la respuesta es $M^N_N(g_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z) = (2x + 5y - 3z, x - y + z, x + 2y + 3z, z).$$

Sean W y V las bases naturales de $E = \mathbb{R}^3$ y $F = \mathbb{R}^4$ respectivamente. Queremos calcular la matriz de f en las bases naturales de salida y llegada, es decir, $A = M^W_V(f)$. Como

$$f(1, 0, 0) = (2, 1, 1, 0) \qquad f(0, 1, 0) = (5, -1, 2, 0) \qquad f(0, 0, 1) = (-3, 1, 3, 1)$$

la matriz que buscamos es $A = M^W_V(f) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es importante observar que los elementos de la fila i de la matriz $A = M^N_N(f)$ son los coeficientes de la ecuación i de la aplicación. Por eso resulta tan sencillo calcular la matriz de una aplicación en las bases naturales. Es mucho más díficil calcular la matriz en otras bases.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación del ejemplo anterior. Sea $W' = (w'_1, w'_2, w'_3)$ la base de salida formada por los vectores $w'_1 = (1, 1, 1)$, $w'_2 = (1, 1, 0)$ y $w'_3 = (1, 0, 0)$. Sea $V' = (v'_1, v'_2, v'_3, v'_4)$ la base de llegada formada por los vectores

$$v'_1 = (1, 0, 0, 0) \qquad v'_2 = (1, 1, 1, 0) \qquad v'_3 = (0, 1, 0, 0) \qquad v'_4 = (0, 0, 1, 1).$$

Queremos calcular $B = M^{W'}_{V'}(f)$. Mediante unos cálculos un poco pesados, pero simples, vemos que

$$\begin{aligned} f(w'_1) &= (4, 1, 6, 1) = (-1) \cdot v'_1 + 5 \cdot v'_2 + (-4) \cdot v'_3 + 1 \cdot v'_4 \\ f(w'_2) &= (7, 0, 3, 0) = 4 \cdot v'_1 + 3 \cdot v'_2 + (-3) \cdot v'_3 + 0 \cdot v'_4 \\ f(w'_3) &= (2, 1, 1, 0) = 1 \cdot v'_1 + 1 \cdot v'_2 + 0 \cdot v'_3 + 0 \cdot v'_4 \end{aligned}$$

luego la matriz que buscamos es $B = M^{W'}_{V'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ una aplicación lineal tal que cualquier polinomio y su imagen por f siempre tienen el mismo grado. Sea

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

la matriz de f en la base natural de $\mathbb{R}_3[x]$. ¿Qué elementos de esta matriz podemos decir que son nulos? ¿Y cuáles no pueden ser nulos? (Respuesta: $a_1 = a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_3 = 0$ y $a_0, b_1, c_2, d_3 \neq 0$.)

Ejercicio. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal tal que la imagen de cualquier matriz es una matriz antisimétrica. Sea

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

la matriz de f en la base natural de $M_2(\mathbb{R})$. ¿Qué elementos de esta matriz podemos decir que son nulos? (Respuesta: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$.)

Problemas relacionados. 3, 8 y 9.

Cambios de base. Para entender bién esta sección es necesario recordar los cambios de base del tema *Espacios Vectoriales*. Seguimos suponiendo que los ev de salida y llegada son de dimensión finita.

Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal entre ev de dimensión finita. Dadas dos bases cualquiera de salida W y W' y dos bases cualquiera de llegada V y V', entonces

$$M_{V'}^{W'}(f) = C_{V'}^{V} \cdot M_V^W(f) \cdot C_W^{W'}.$$

Un truco memotécnico para recordar esta fórmula consiste en escribir que $\frac{W'}{V'} = \frac{V}{V'} \cdot \frac{W}{V} \cdot \frac{W'}{W}$. Otro truco, quizás el más adecuado para resolver problemas, pasa por escribir el diagrama

$$\begin{tikzcd} (E;W) \arrow[r, "A", "f"'] & (F;V) \\ (E;W') \arrow[u, "S"] \arrow[r, "B", "f"'] & (F;V') \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

donde $A = M_V^W(f)$ y $B = M_{V'}^{W'}(f)$, mientras que $S = C_W^{W'}$ y $T = C_V^{V'}$ son matrices de cambio de base. Mirando el diagrama vemos que

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot S$$

pues la inversa $T^{-1} = C_{V'}^{V}$ va en sentido inverso a la matriz $T = C_V^{V'}$.

Cuando la base de llegada no cambia tenemos que $V' = V$, luego $T = C_V^V = \mathrm{Id}$ y $B = A \cdot S$.

Cuando la base de salida no cambia tenemos que $W' = W$, luego $S = C_W^W = \mathrm{Id}$ y $B = T^{-1} \cdot A$.

Cuando el ev de salida y el de llegada coinciden es habitual que $V = W$ y $V' = W'$. En tal caso $T = S$ y $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z) = (2x + 5y - 3z, x - y + z, x + 2y + 3z, z)$$

que hemos usado en los ejemplos anteriores. Sean W, W', V y V' las bases de esos ejemplos.

La matriz de la aplicación en las bases naturales $A = M_V^W(f)$ es fácil de calcular. Queremos calcular $B = M_{V'}^{W'}(f)$ usando $A = M_V^W(f)$. Las matrices de cambio de base que nos interesan son:

$$S = C_W^{W'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = C_V^{V'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La fórmula de cambio de base que resuelve el problema es:

$$B = T^{-1}\cdot A\cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal dada por

$$f : P(x) \mapsto \begin{pmatrix} P(1) - P''(1) & P(1) - P'(1) \\ P(1) - P'(1) & P(1) - P''(1) \end{pmatrix}.$$

Queremos calcular la matriz de f en la base natural de salida $W = (1, x, x^2)$ y la base de llegada $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ formada por las matrices

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea N la base natural del ev $M_2(\mathbb{R})$. Empezamos calculando $A = M_N^W(f)$. Como

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad f(x^2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

vemos que $A = M_N^W(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. A continuación, aplicamos la fórmula del cambio de base para calcular $B = M_V^W(f)$ teniendo en cuenta que la base de salida no cambia. Así pues,

$$B = T^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $T = C_N^V$ es la matriz de cambio de base de la base V a la base natural N.

Problemas relacionados. 10b, 11e, 13 y 14.

Cálculo de núcleos, imágenes, rangos y anti-imágenes. Sea $f : E \to F$ una aplicación entre ev de dimensión finita. Sea W una base de salida y V una base de llegada. Sea $A = M_V^W(f)$. Sea G un sev del ev de llegada F y sea B una matriz cuyas filas son los coeficientes de unas ecuaciones del sev G en base V. Entonces:

- Las columnas de A son las coordenadas en base V de unos generadores del sev $\operatorname{Im} f$.
- Las filas de A son los coeficientes de las ecuaciones del sev $\operatorname{Nuc} f$ en base W.
- $\operatorname{rango} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rango} A$ y $\dim \operatorname{Nuc} f = \dim E - \operatorname{rango} f = \dim E - \operatorname{rango} A$.
- Las filas de BA son los coeficientes de unas ecuaciones de la anti-imagen $f^{-1}(G)$ en base W.

Ejemplo. Queremos calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \to M_2(\mathbb{R})$ cuya matriz en las bases naturales de salida y llegada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

También queremos calcular la anti-imagen del sev G de $M_2(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas.

Cálculo del núcleo:

$$\operatorname{Nuc} f = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : \begin{array}{rcl} a_0 - a_1 - a_2 + a_3 & = & 0 \\ 2a_0 - a_1 - a_2 - 3a_3 & = & 0 \\ 3a_0 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 & = & 0 \\ a_0 \qquad\qquad - 4a_3 & = & 0 \end{array} \right\} = [x^2 - x, x^3 + 5x + 4].$$

Cálculo de la imagen:

$$\operatorname{Im} f = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Cálculo de la anti-imagen: Empezamos buscando unas ecuaciones del sev G.

$$G = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) : M^\top = M \} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b - c = 0 \right\}$$

luego $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Por tanto,

$$f^{-1}(G) = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 : a_0 - a_1 - a_2 + a_3 = 0 \right\} = [x+1, x^2+1, x^3-1].$$

Problemas relacionados. 4, 5, 6, 7 y 21.

Suma, composición, e inversión de aplicaciones lineales. Sean E, F y G tres $\mathbb{K}$-ev. Las principales operaciones que podemos realizar con aplicaciones lineales son las siguientes.

- *Suma.* Dadas $f, g \in L(E,F)$, $f + g \in L(E,F)$ es la aplicación dada por
$$(f+g)(u) = f(u) + g(u) \qquad \forall u \in E.$$
- *Producto por escalar.* Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f \in L(E,F)$, $\lambda \cdot f \in L(E,F)$ es la aplicación dada por
$$(\lambda \cdot f)(u) = \lambda \cdot f(u) \qquad \forall u \in E.$$
- *Composición.* Dadas $f \in L(E,F)$ y $g \in L(F,G)$, $g \circ f \in L(E,G)$ es la aplicación dada por
$$(g \circ f)(u) = g\big(f(u)\big) \qquad \forall u \in E.$$
(Para calcular $g \circ f$ es necesario que el ev de llegada de f coincida con el ev de salida de g.)
- *Potencia.* Dada $f \in \operatorname{End}(E)$, su potencia k-ésima $f^k \in \operatorname{End}(E)$ es la aplicación
$$f^k = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{k \text{ veces}}.$$
- *Inversión.* Si $f \in L(E,F)$ es biyectiva, existe una única $f^{-1} \in L(F,E)$ tal que
$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \operatorname{Id}.$$

Ejercicio. Probar que si $f : E \to F$ y $g : F \to G$ son lineales, la composición $g \circ f$ también lo es.

Ejercicio. Probar que si f es una aplicación lineal biyectiva, su inversa f^{-1} también lo es.

Ejemplo. Sean $D, f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ las aplicaciones lineales dadas por

$$D : P(x) \mapsto P'(x) \qquad f : P(x) \mapsto P(x) - P'(x).$$

Entonces $D^4 = \mathbf{0}$. Además, $f = \operatorname{Id} - D$ es invertible y su inversa es $f^{-1} = \operatorname{Id} + D + D^2 + D^3$.

Ejercicio. Sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^4)$. Probar que $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Im} f \iff f^2 = \mathbf{0}$ y $\operatorname{rango} f = 2$.

A continuación, se listan las propiedades de estas operaciones. (Comparar con el tema *Matrices.*)

- El conjunto $L(E,F)$ es un $\mathbb{K}$-ev con las operaciones suma y producto por escalar.
- El elemento neutro de la suma de aplicaciones es la aplicación nula: $f = \mathbf{0}$.
- El elemento neutro de la composición de aplicaciones es la aplicación identidad: $f = \operatorname{Id}$.
- Propiedad asociativa combinada: $\lambda \cdot (g \circ f) = (\lambda \cdot g) \circ f = g \circ (\lambda \cdot f)$.
- La composición de aplicaciones es asociativa: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- La composición de aplicaciones **no** es conmutativa.
- La composición de aplicaciones **no** tiene elemento inverso.
- Propiedad distributiva: $g \circ (f_1 + f_2) = (g \circ f_1) + (g \circ f_2)$ y $(g_1 + g_2) \circ f = (g_1 \circ f) + (g_2 \circ f)$.
- Si $f \in L(E,F)$ y $g \in L(F,G)$ son biyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Hay otras propiedades importantes, pero requieren trabajar en ev de dimensión finita. Por ejemplo, si $f, g \in \mathrm{End}(E)$ con $\dim E < \infty$, entonces

$$g \circ f = \mathrm{Id} \Longleftrightarrow f \circ g = \mathrm{Id} \Longleftrightarrow g = f^{-1} \Longleftrightarrow f^{-1} = g.$$

En el problema 12 se comprueba que estas (y otras) propiedades son falsas en ev de dimensión infinita.

Finalmente, sean W, V y U unas bases cualesquiera de los ev E, F y G, respectivamente. Para calcular las matrices de una aplicación suma, composición, potencia o inversa basta seguir las siguientes reglas teniendo cuidado para que las bases cuadren.

- La matriz de la aplicación suma es la suma de las matrices de las aplicaciones:
$$M_V^W(f+g) = M_V^W(f) + M_V^W(g) \qquad \forall f, g \in L(E,F).$$
- La matriz de la aplicación producto por escalar es el producto del escalar por la matriz de la aplicación:
$$M_V^W(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot M_V^W(f) \qquad \forall f \in L(E,F), \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$
- La matriz de la aplicación composición es el producto de las matrices las aplicaciones:
$$M_U^W(g \circ f) = M_U^V(g) \cdot M_V^W(f) \qquad \forall f \in L(E,F), \forall g \in L(F,G).$$
(La base de llegada de la matriz de f debe coincir con la base de salida de la matriz de g.)
- La matriz de la aplicación potencia k-ésima es la potencia k-ésima de la matriz de la aplicación:
$$M_W^W(f^k) = \big(M_W^W(f)\big)^k \qquad \forall f \in \mathrm{End}(E).$$
- La matriz de la aplicación inversa es la inversa de la matriz de la aplicación:
$$M_W^V(f^{-1}) = \big(M_V^W(f)\big)^{-1} \qquad \forall f \in L(E,F) \text{ invertible.}$$

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $f(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$. Queremos probar que la aplicación $(f^2 - \mathrm{Id}) \circ (f - 3 \cdot \mathrm{Id})$ es igual a la aplicación nula.

La matriz de f en la base natural N de $\mathbb{R}^3$ es $A = M_N^N(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, la matriz de la aplicación $(f^2 - \mathrm{Id}) \circ (f - 3 \cdot \mathrm{Id})$ en la base natural es igual a $(A^2 - \mathrm{Id})(A - 3 \cdot \mathrm{Id}) = \mathbf{0}$.

Problemas relacionados. 10, 11, 12, 15 y 16.

Sev invariantes. En esta sección trabajaremos con endomorfismos, es decir, supondremos que el ev de salida y llegada coinciden. El concepto de sev invariante volverá a parecer en el tema *Jordan.*

Sea $f : E \to E$ una aplicación lineal. Sea $F = [u_1, \ldots, u_r]$ un sev del ev E. Diremos que F es un *sev invariante* por f cuando se cumpla alguna de las siguientes condiciones (son equivalentes):

- $f(u) \in F$ para todo $u \in F$.
- $f(u_j) \in F$ para $j = 1, \ldots, r$.

Ejemplo. El sev $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$ es invariante por la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = (x - y + z, y, x/2 + 3z/2)$.

Empezamos viendo que $F = [u_1, u_2]$ con $u_1 = (1,1,0)$ y $u_2 = (0,2,1)$. Para acabar, basta ver que

$$f(u_1) = (0,1,1/2) \in F \qquad f(u_2) = (-1,2,3/2) \in F.$$

Ejercicio. Supongamos que F y G son sev invariantes por una aplicación lineal $f : E \to E$. ¿Es la intersección $F \cap G$ invariante por f? ¿Y la suma $F + G$? (Respuesta: Sí y sí.)

Ejercicio. Sea $f : \mathbb{R}_{2n+1}[x] \to \mathbb{R}_{2n+1}[x]$ una aplicación lineal tal que los sev

$$F = [1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n-2}, x^{2n}] \qquad G = [x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n-1}, x^{2n+1}]$$

son invariantes por f. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de f en la base natural $N = (1, \ldots, x^{2n+1})$ de $\mathbb{R}_{2n+1}[x]$. ¿Qué elementos de la matriz A podemos decir que son nulos? (Respuesta: $a_{ij} = 0$ si $|i-j|$ impar.)

Problemas relacionados. 27, 28, 29 y 30.

Problemas para no dormir. 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24 y 25.