Teoria das Categorias: uma introdução

Prof. Carlos A. P. Campani

4 de novembro de 2005

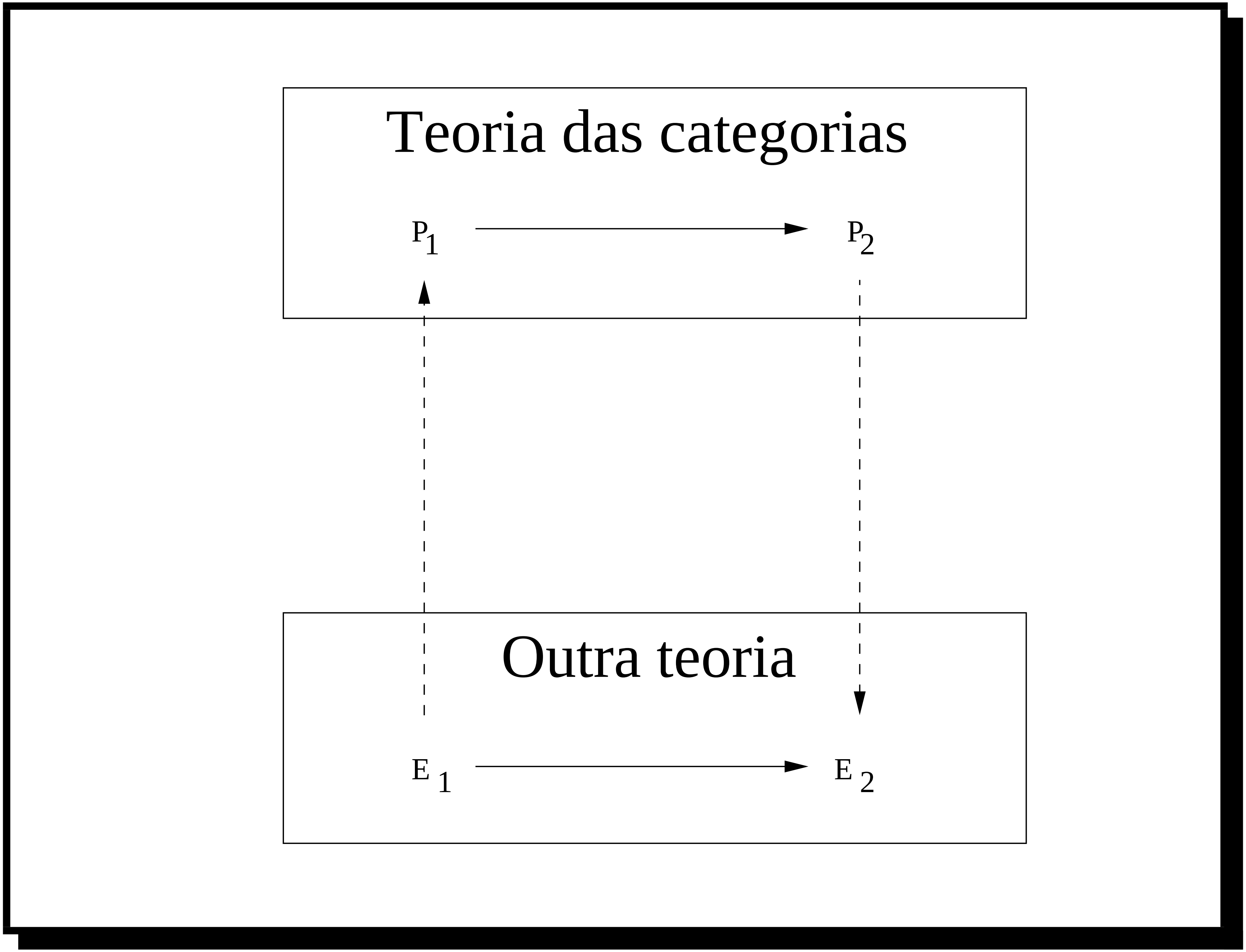
Bibliografia

- ASPERTI, A. ; LONGO, G. *Categories Types and Structures: an introduction to Category Theory for the working computer scientist*. MIT Press, 1991. Disponível em: `ftp://ftp.di.ens.fr/pub/users/longo/CategTypesStructures/book.pdf`.
- MENEZES, P. ; HAEUSLER, E. *Teoria das Categorias para Ciência da Computação*. Editora Sagra Luzzatto, 2001.
- MAC LANE, S. *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

1 Introdução

- Teoria das Categorias estuda “objetos” e “morfismos” entre eles;
- Ela é uma generalização da teoria dos conjuntos e das funções:
  - Objetos = Conjuntos estruturados;
  - Morfismos = “funções”;

- Fornece uma ferramenta para a descrição abstrata de problemas de matemática;
- Fornece um jargão matemático e um ambiente matemático consistente e unificado para a investigação em matemática;


Teoria das categorias
P1
P2
Outra teoria
E 1
E 2

- A capacidade de generalização, abstração e unificação são os principais méritos de Teoria das Categorias;
- A relevância de Teoria das Categorias para Ciência da Computação é que Teoria da Computação, assim como Teoria das Categorias, é uma "teoria das funções";
- Fornece uma estrutura para o estudo de semântica de linguagens de programação.

2 Definição de Categoria

- A única operação básica de Teoria das Categorias é a *composição*;
- Exige-se que a composição seja associativa e que exista uma identidade para todos os objetos;

Uma *categoria* $\mathcal{C}$ é:

1. Uma coleção $\mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ de *objetos*, denotados por $a, b, \ldots, A, B, \ldots$;
2. Uma coleção $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ de *morfismos* (*setas*), denotadas por $f, g, \ldots$;
3. As operações dom e cod atribuindo para cada seta f dois objetos, respectivamente *domínio* (*origem*) e *codomínio* (*destino*) de f;

4. Uma operação id associando a cada objeto b um morfismo id_b (a *identidade* de b) tal que $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_b) = \mathrm{cod}(\mathrm{id}_b) = b$;

5. Uma operação $\circ$ (*composição*) associando a cada par de setas f e g, com $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)$ uma seta $f \circ g$ tal que $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{dom}(g)$ e $\mathrm{cod}(f \circ g) = \mathrm{cod}(f)$.

Identidade e composição devem satisfazer:

Lei da identidade Para quaisquer setas f e g, tal que $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g) = b$, $\mathrm{id}_b \circ f = f$ e $g \circ \mathrm{id}_b = g$;

Lei da associatividade Para quaisquer setas f, g e h, tal que $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)$ e $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(h)$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Notação:

- $f : a \rightarrow b$ denota um morfismo com origem a e destino b;
- Dados dois objetos a e b, o conjunto de todos os morfismos f tal que $f : a \rightarrow b$ é denotado por $\mathcal{C}[a, b]$. Assim, $f \in \mathcal{C}[a, b]$ significa que $\mathrm{dom}(f) = a$ e $\mathrm{cod}(f) = b$.

Observação: Pela definição de categoria, todo objeto $b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ deve possuir uma identidade $\mathrm{id}_b : b \to b$, e esta identidade é única pois se existisse uma $\mathrm{id}'_b \neq \mathrm{id}_b$ então, pela lei da identidade, $\mathrm{id}'_b = \mathrm{id}_b \circ \mathrm{id}'_b = \mathrm{id}_b$.

- Um morfismo em que coincidem origem e destino é chamado de *endomorfismo*;
- Uma categoria $\mathcal{C}$ é *pequena* se $\mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ e $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}$ são conjuntos. Caso contrário a categoria é dita *grande*.

3 Diagramas

- Diagramas são usados para representar equações;
- Permitem inferir novas equações a partir de outras já conhecidas.

$$a \xrightarrow{f} b$$

Onde: a, b – objetos;

$f : a \rightarrow b$ – morfismo.

Exemplo: Sejam os morfismos $f : a \to b$, $g : a \to c$ e $h : c \to b$, então seu diagrama é:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & b \\
 & c \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

Representando a identidade:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop above, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

ou

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] & b \\ a \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Um diagrama *comuta* se a composição dos morfismos ao longo de qualquer caminho entre dois objetos fixos é igual.

Lei associativa:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d] & b \arrow[dl, "g"] \arrow[d] \\ c \arrow[r, "f"'] & d \end{tikzcd}$$

$$f : c \to d \quad g : b \to c \quad h : a \to b \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Lei da identidade:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & a \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, "g"] & \\ & a \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

$$f : b \to a \quad g : a \to c \quad \mathrm{id}_a \circ f = f \quad g \circ \mathrm{id}_a = g$$

4 Exemplos de Categorias

Categoria	Objetos	Morfismos
Set	conjuntos	funções (totais)
Top	espaços topológicos	funções contínuas
Vect	espaços vetoriais	tranformações lineares
Grp	grupos	homomorfismos de grupos
PO	conjuntos parcialmente ordenados	funções monotônicas

Sobre **Set**:

- Para comprovar que **Set** é uma categoria basta verificar a associatividade de funções e a identidade;
- Dados $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, e para qualquer $a \in A$:

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) =$$

$$= h(g(f(a))) = h(g \circ f(a)) = (h \circ (g \circ f))(a)$$

- Para qualquer $f : A \to B$ e para qualquer $a \in A$:

$$(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(\mathrm{id}_A(a)) = f(a) = b = \mathrm{id}_B(b) =$$

$$= \mathrm{id}_B(f(a)) = (\mathrm{id}_B \circ f)(a)$$

Definindo **Top**:

- Uma *topologia* em um conjunto A é uma coleção $\beta = \{A_\lambda \subseteq A | \lambda \in L\}$ de partes de A, chamados *abertos* da topologia, tal que:

  1. $\emptyset, A \in \beta$;
  2. Se $A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_n} \in \beta$ então $\cap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} \in \beta$;
  3. Se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in V}$, com $A_\lambda \in \beta$ para cada $\lambda \in V$ e $V \subseteq L$, então $\cup_{\lambda \in V} A_\lambda \in \beta$;

- Um conjunto A com uma topologia β é um *espaço topológico*;
- Uma função $f : A \to B$ é *contínua* em $a \in A$ se para todo aberto V de B tal que $f(a) \in V$ existe um aberto U de A tal que $a \in U$ e $f(U) \subseteq V$;
- Se $f : A \to B$ é contínua para todo $a \in A$ então dizemos que f é *contínua*;
- Observe-se que a composição de funções contínuas é uma função contínua.

Definindo **Vect**:

- Um *espaço vetorial* $\mathcal{E}$ é um conjunto, cujos elementos são chamados *vetores*, no qual estão definidas duas operações:

  adição $u + v \in \mathcal{E}$ para cada $u, v \in \mathcal{E}$;

  multiplicação por escalar $\alpha.v$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathcal{E}$;

- Estas operações devem satisfazer as propriedades de comutatividade, associatividade, existência do vetor nulo, existência do inverso aditivo, e distributividade;

- Dados dois espaços vetoriais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, uma *transformação linear* $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ é uma correspondência que associa a cada vetor $v \in \mathcal{E}$ um vetor $\mathcal{A}(v) \in \mathcal{F}$ de modo que vale, para quaisquer $u, v \in \mathcal{E}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:
  1. $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v)$;
  2. $\mathcal{A}(\alpha.v) = \alpha.\mathcal{A}(v)$;
- Observe-se que a composição de transformações lineares é associativa.

Definindo **Grp**:

- Um conjunto G com uma operação $\oplus : G \times G \rightarrow G$ é um *grupo* se:
  1. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$, para todo $a, b, c \in G$;
  2. Existe $e \in G$, chamado *neutro*, tal que $a \oplus e = e \oplus a = a$, para todo $a \in G$;
  3. Para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = e$;
- Exemplo: $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo;

- Uma função $\phi : G_1 \rightarrow G_2$, onde G_1 e G_2 são grupos, é um *homomorfismo* de grupos se:
  1. $\phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$, onde e_{G_1} é o neutro de G_1 e e_{G_2} é o neutro de G_2;
  2. $\phi(a \oplus_{G_1} b) = \phi(a) \oplus_{G_2} \phi(b)$, para todo $a, b \in G_1$;
- Observe-se que a composição de homomorfismos de grupos é associativa.

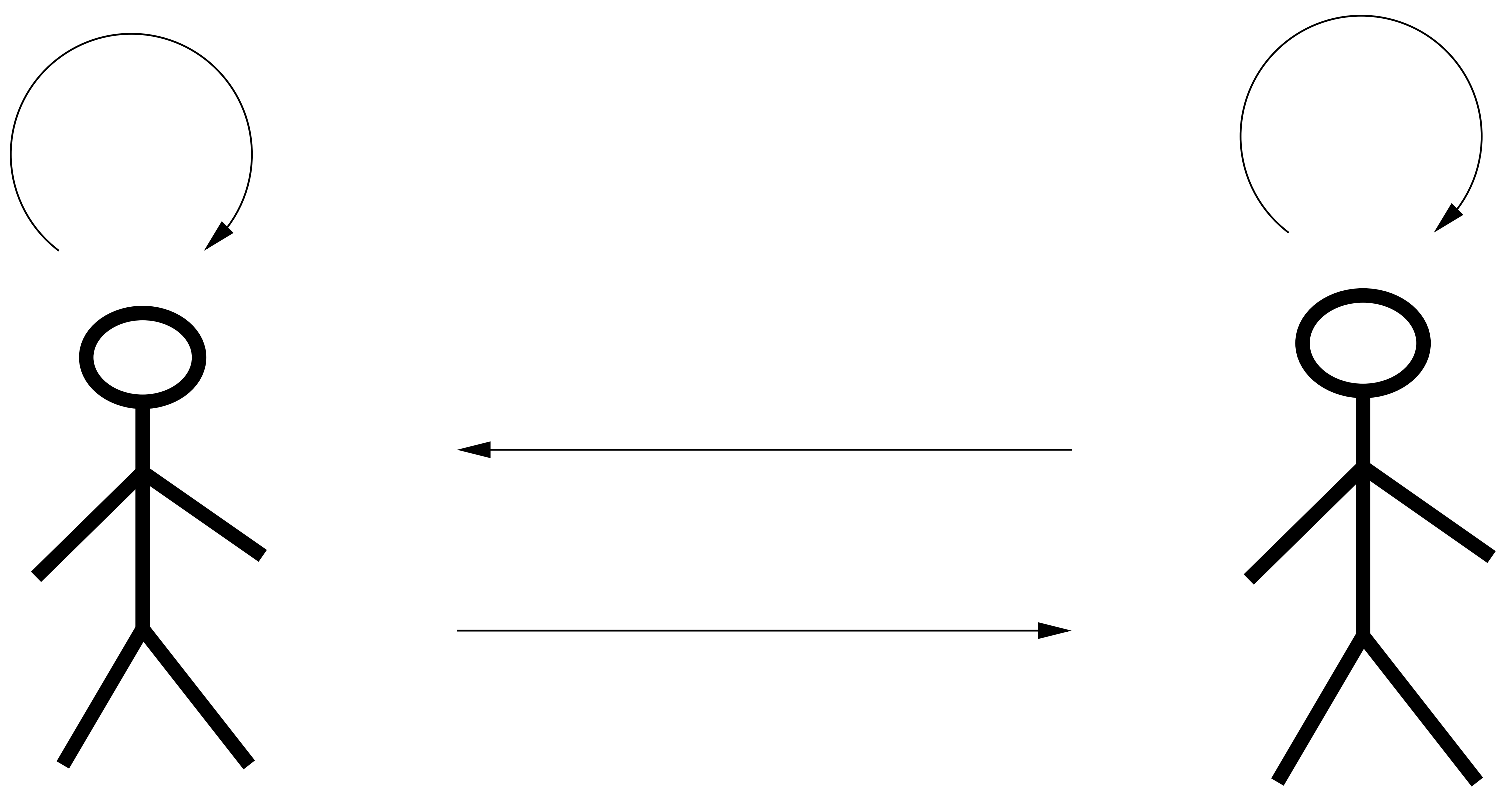
Definindo **PO**:

- Um *conjunto parcialmente ordenado* é um par $(A, \sqsubseteq)$, onde A é um conjunto e $\sqsubseteq$ é uma ordem parcial sobre o conjunto A;
- Uma função f é *monotônica* se ela preserva a ordem, ou seja, $x_1 \sqsubseteq x_2 \Rightarrow f(x_1) \sqsubseteq f(x_2)$;
- Sabe-se que a composição de duas funções monotônicas é uma função monotônica.

Observações e mais exemplos:

- A noção de "categoria" considera objetos como coleções de conjuntos estruturados e morfismos como as suas funções associadas;
- Não devemos restringir nossas definições pois os morfismos não necessariamente são "funções", um exemplo é a categoria **Rel** que possui conjuntos como objetos e relações como morfismos;

- Em Teoria das Categorias não consideramos a estrutura interna dos objetos, apenas as relações estabelecidas entre eles pelos seus morfismos;
- Categoria **Amor**:



- A menor categoria possível é a categoria **1** que possui apenas um objeto e uma seta (a identidade do objeto);
- Uma categoria é chamada *discreta* se cada seta é a identidade de algum objeto;
- Esta categoria seria totalmente determinada pela coleção de seus objetos;
- Um exemplo de categoria discreta é a categoria **1**;

- Uma categoria é chamada de *pré-ordem* se, para cada par de objetos a e b, existe no máximo um morfismo $f : a \to b$;
- Uma pré-ordem é totalmente determinada pela relação de pré-ordem entre seus objetos;
- Em uma pré-ordem, toda seta $f : a \to b$ pode ser identificada pelo par (a, b);
- Assim, toda a informação sobre a categoria $\mathcal{C}$, que é uma pré-ordem, é dada pela relação $R_{\mathcal{C}} = \{(a, b) | \exists f \in \mathcal{C}[a, b]\}$;

- Toda categoria discreta é uma pré-ordem;
- A menor categoria não-discreta que é uma pré-ordem é a categoria **2**, que possui dois objetos (chamaremos de 0 e 1) e três setas: as duas identidades e a seta $(0, 1) : 0 \to 1$;

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop above, "\mathrm{id}_0"] \arrow[r, "(0,1)"'] & 1 \arrow[loop above, "\mathrm{id}_1"] \end{tikzcd}$$

- Um *monoide* é um conjunto tendo uma operação binária associativa e um elemento neutro:

$$(A, \oplus, e)$$

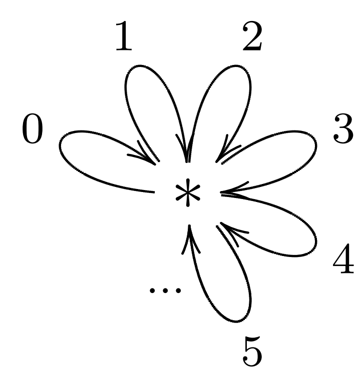
Onde: A – conjunto suporte;

$\oplus : A \times A \rightarrow A$ – operação binária;

e – elemento neutro, tal que

$a \oplus e = e \oplus a = a, \ \forall a \in A$;

- Podemos interpretar um monoide como uma categoria que possui apenas um objeto, e a composição de morfismos seria a operação binária;
- Exemplo: $(\mathbb{N}, +, 0)$, e o elemento neutro é o 0 (identidade):



- *Sistemas dedutivos* podem ser interpretados como categorias;
- O morfismo $f : a \to b$ corresponde à prova $a \vdash b$;
- Observe-se que a categoria é obtida na presença da identidade $\mathrm{id}_a : a \to a$, correspondente a prova trivial $a \vdash a$, e da composição associativa de provas:

$$\frac{f : a \to b \quad g : b \to c}{g \circ f : a \to c}\,.$$

- Um *grafo* é uma quádrupla $G = (V, T, \delta_0, \delta_1)$, tal que:

  V um conjunto de *nodos* ou *vértices*;

  T um conjunto de *arcos* ou *arestas*;

  $\delta_0, \delta_1 : T \to V$ funções totais denominadas *origem* e *destino*;

- Categoria **Gr**: Possui como objetos todos os grafos e como morfismos os homomorfismos de grafos;

- Sejam $G_1 = (V_1, T_1, \delta_{0_1}, \delta_{1_1})$ e $G_2 = (V_2, T_2, \delta_{0_2}, \delta_{1_2})$. Um *homomorfismo de grafos*:

$$h : G_1 \rightarrow G_2$$

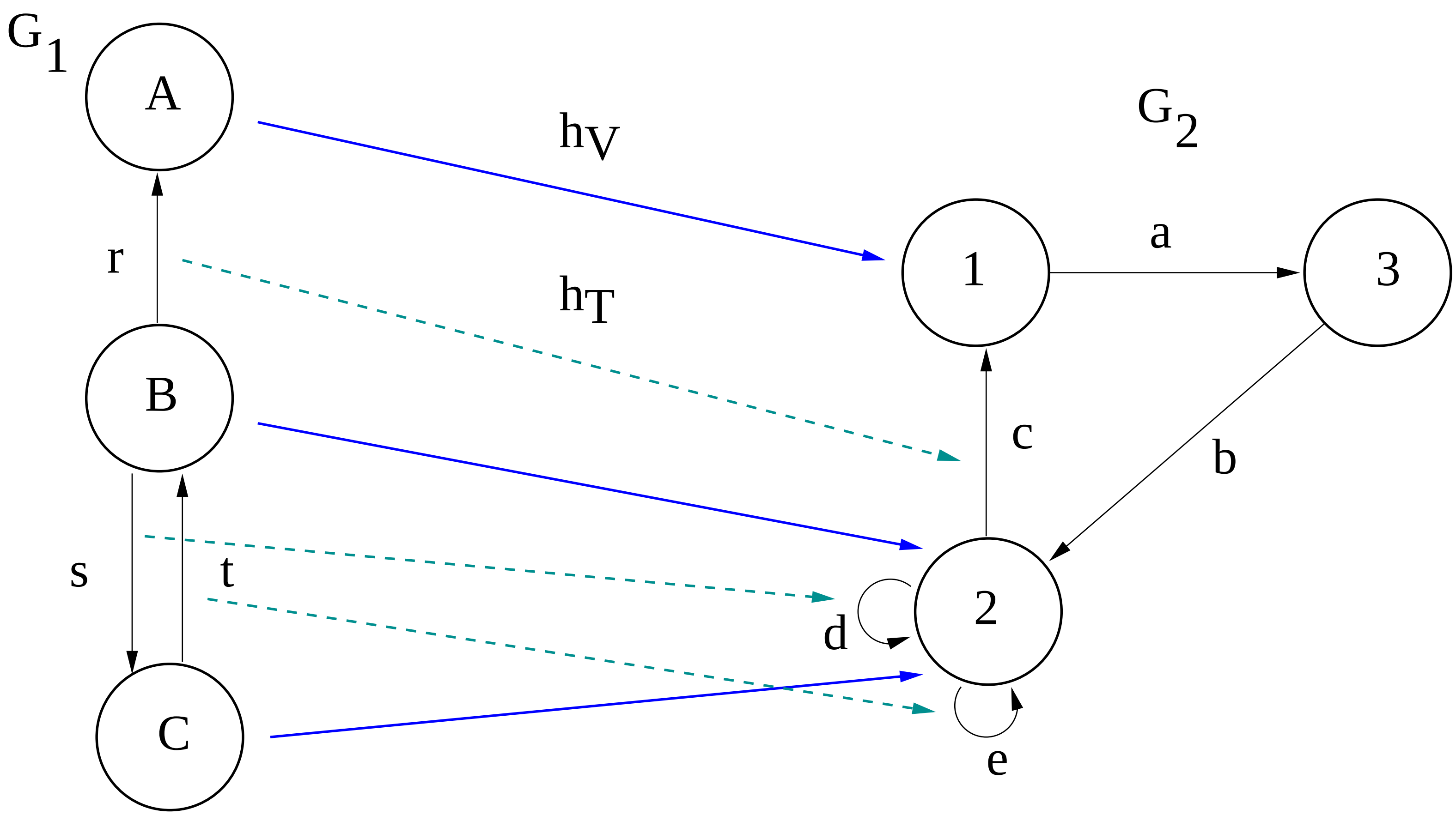
é um par de funções:

$$h = (h_V, h_T)$$

onde: $h_V : V_1 \rightarrow V_2$ e $h_T : T_1 \rightarrow T_2$ são tais que:

$$\delta_{0_2} \circ h_T = h_V \circ \delta_{0_1} \text{ e } \delta_{1_2} \circ h_T = h_V \circ \delta_{1_1}\ .$$

Exemplo:



5 Subcategoria

Uma categoria $\mathcal{D}$ é uma *subcategoria* de uma categoria $\mathcal{C}$ se:

1. $\mathrm{Ob}_{\mathcal{D}} \subseteq \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$;
2. Para todo a e b em $\mathrm{Ob}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D}[a, b] \subseteq \mathcal{C}[a, b]$;
3. Composições e identidades em $\mathcal{D}$ coincidem com as de $\mathcal{C}$.

Uma subcategoria é *completa* se, para todo a e b em $\mathrm{Ob}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D}[a,b] = \mathcal{C}[a,b]$. Uma subcategoria completa é totalmente determinada pela coleção de seus objetos.

6 Categoria Dual

A *categoria dual* $\mathcal{C}^{op}$ da categoria $\mathcal{C}$ tem os mesmos objetos e os mesmos morfismos de $\mathcal{C}$, $\mathrm{id}_b^{op} = \mathrm{id}_b$, $\mathrm{dom}^{op}(f) = \mathrm{cod}(f)$, $\mathrm{cod}^{op}(f) = \mathrm{dom}(f)$, e $f \circ^{op} g = g \circ f$.

Observações:

- $\mathcal{C}^{op}[b,a] = \mathcal{C}[a,b]$ e $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$;
- Se P é uma proposição que é verdadeira na categoria $\mathcal{C}$, então P^{op} é verdadeira em $\mathcal{C}^{op}$;
- Se P é uma proposição verdadeira para qualquer categoria, então P^{op} também é verdadeira para qualquer categoria, pois toda categoria é dual de sua dual.

Com relação ao diagrama da categoria dual:

- Para obter o diagrama da dual basta inverter as setas;
- O diagrama da dual comuta se e somente se o diagrama original comuta.

7 Categoria Produto

Dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, a *categoria produto* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ tem por objetos os pares (a, b), onde a e b são os objetos das categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ respectivamente, e por morfismos os pares $(f, g) : (a, b) \to (a', b')$, onde $f : a \to a'$ e $g : b \to b'$ são morfismos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ respectivamente. Finalmente, $\mathrm{id}_{(a,b)} = (\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_b)$ e $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$.

8 Categorias $\mathcal{C} \downarrow a$ e $\mathcal{C} \uparrow a$

Dada uma categoria $\mathcal{C}$ e um objeto $a \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$, a categoria $\mathcal{C} \downarrow a$ de objetos sobre a (também conhecida como *categoria fatia*, "*slice category*") é definida como:

1. $\mathrm{Ob}_{\mathcal{C}\downarrow a} = \{f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}} | \mathrm{cod}(f) = a\}$;
2. Dados dois objetos $f : b \to a$ e $g : c \to a$, um morfismo com origem f e destino g é uma seta $h \in \mathcal{C}[b, c]$ tal que $g \circ h = f$;
3. Identidades e composição de $\mathcal{C} \downarrow a$ são herdadas de $\mathcal{C}$.

Em $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dd, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
& a \\
c \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Em $\mathcal{C} \downarrow a$:

$$[f : b \to a] \xrightarrow{h} [g : c \to a]$$

Em $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_b"'] & \\
& a \\
b \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Em $\mathcal{C} \downarrow a$:

$$\begin{tikzcd}
{[f : b \longrightarrow a]} \arrow[loop above, "\mathrm{id}_b"]
\end{tikzcd}$$

- Considere $\mathbf{Set} \downarrow A$;
- Podemos pensar um objeto $g : B \to A$ desta categoria como sendo uma família de conjuntos disjuntos indexados por A, $\{g^{-1}(a)\}_{a \in A}$;
- $h : B \to B'$ é um morfismo de $g : B \to A$ para $g' : B' \to A$ se e somente se
  $\forall b\ b \in g^{-1}(a) \Rightarrow h(b) \in g'^{-1}(a)$;

Podemos definir também uma categoria $\mathcal{C} \uparrow a$, cujos objetos são os morfismos de $\mathcal{C}$ que tem como origem a.

9 Monomorfismo, Epimorfismo e Isomorfismo

- Uma função $f : A \rightarrow B$ é *injetiva* quando, para todo $a, a' \in A$, se $f(a) = f(a')$ então $a = a'$;
- Conclui-se que, para f injetiva, dadas duas funções $g : C \rightarrow A$ e $h : C \rightarrow A$, se para todo $c \in C$ $f(g(c)) = f(h(c))$ então para todo $c \in C$ $g(c) = h(c)$, ou seja, $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$;
- O inverso também é verdade, ou seja, se $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$ então f é injetiva;

- Suponha o contrário, então existem a e a' tal que $f(a) = f(a')$ mas $a \neq a'$;
- Definimos g tal que $g(c) = a$ para todo $c \in C$ e h tal que $h(c) = a'$ para todo $c \in C$;
- Então, $f \circ g = f \circ h$ mas $g \neq h$, o que é uma contradição;

- $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$ se e somente se f é injetiva (como se a aplicação de f se cancelasse a esquerda);
- De forma similar, $g \circ f = h \circ f$ implica $g = h$ se e somente se f é *sobrejetiva* (como se a aplicação de f se cancelasse a direita).

Sejam uma categoria $\mathcal{C}$ e $a, b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$. Então:

1. Uma seta $h \in \mathcal{C}[a, b]$ é um *monomorfismo* (ou é *mono*) se e somente se $h \circ g = h \circ f \Rightarrow g = f$;

2. Uma seta $h \in \mathcal{C}[a, b]$ é um *epimorfismo* (ou é *epi*) se e somente se $g \circ h = f \circ h \Rightarrow g = f$;

3. Uma seta $h \in \mathcal{C}[a, b]$ é um *isomorfismo* (ou é *iso*) se e somente se existe $g \in \mathcal{C}[b, a]$ tal que $g \circ h = \mathrm{id}$ e $h \circ g = \mathrm{id}$.

Mono $\begin{tikzcd} c \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "f"'] \arrow[rr, bend left, "h\circ g=h\circ f"] & a \arrow[r, "h"] & b \end{tikzcd}$ então $g = f$;

Epi $\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left, "g\circ h=f\circ h"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "f"'] & c \end{tikzcd}$ então $g = f$;

Iso $\begin{tikzcd} a \arrow[loop above, "\mathrm{id}"] \arrow[r, shift left, "h"] & b \arrow[loop above, "\mathrm{id}"] \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$ e $g \circ h = \mathrm{id}$ e $h \circ g = \mathrm{id}$.

Observações:

- Se uma seta h é iso, então também é epi e mono, embora o contrário não seja necessariamente verdadeiro:

  Se h é iso, então existe f tal que $f \circ h = \mathrm{id}$. Logo, $h \circ g = h \circ g' \Rightarrow f \circ h \circ g = f \circ h \circ g' \Rightarrow g = g'$. O argumento é similar para epi.

- Embora seja útil em **Set** pensar mono e epi como sendo injeção e sobrejeção respectivamente, isto pode conduzir a confusão em outras categorias;

- Um mono $h \in \mathcal{C}[a,b]$ *cinde* ("*split*") se existe um $g \in \mathcal{C}[b,a]$ tal que $g \circ h = \mathrm{id}_a$;
- Um epi $h' \in \mathcal{C}[a,b]$ *cinde* ("*split*") se existe um $g' \in \mathcal{C}[b,a]$ tal que $h' \circ g' = \mathrm{id}_b$.

10 Objetos Isomórficos

- Dois objetos a e b são *isomórficos* ($a \cong b$) se existe um isomorfismo $h \in \mathcal{C}[a, b]$;

- Isomorfismo estabelece, em certo grau de abstração, uma relação de "semelhança" ou "equivalência" entre objetos.

11 Morfismo Principal

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $a, b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$. Então:

1. Uma seta $h \in \mathcal{C}[a, b]$ é um *morfismo principal* se e somente se $\forall f \in \mathcal{C}[a, b]\ \exists g \in \mathcal{C}[a, a]\ f = h \circ g$;

2. Um par de setas $f \in \mathcal{C}[a, b]$ e $g \in \mathcal{C}[b, a]$ é um *par de retração* se e somente se $g \circ f = \mathrm{id}$. Então a é chamado de *retração* de b ($a < b$) via o par de retração (f, g).

Observações:

- h é principal se e somente se para todo f existe um g tal que:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] & b \\ a \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

- f e g são um par de retração ($a < b$) se:

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} a$$

e $g \circ f = \mathrm{id}$.

Teorema 1 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $a, b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$. Então:*

1. *Se $a < b$ via (i, h), então h é epi e principal, e i é mono;*

2. *Se $h \in \mathcal{C}[a, b]$ é principal e existe um epi $k \in \mathcal{C}[a, b]$, então h é epi;*

3. *Se $a < b$ e $f \in \mathcal{C}[b, a]$ é principal, então existe $g \in \mathcal{C}[a, b]$ tal que $a < b$ via (g, f).*

Prova:

1. *Se* $a < b$ *via* (i, h)*, então* h *é epi e principal, e* i *é mono;*
   - $g \circ h = f \circ h \Rightarrow g \circ h \circ i = f \circ h \circ i \Rightarrow g = f$ *para* $h \circ i = \mathrm{id}$*;*
   - *Prova que* h *é principal:* $\forall f \exists g\ f = h \circ g$*. Tome* $g = i \circ f$*, então* $h \circ g = h \circ i \circ f = f$*. Segundo o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i"] & b \arrow[d, "h"] \\ b \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd}$$

   - $i \circ g = i \circ f \Rightarrow h \circ i \circ g = h \circ i \circ f \Rightarrow g = f$*;*

2. *Se* $h \in \mathcal{C}[a,b]$ *é principal e existe um epi* $k \in \mathcal{C}[a,b]$*, então* h *é epi;*

   $g \circ h = f \circ h \Rightarrow g \circ h \circ g' = f \circ h \circ g' \Rightarrow g \circ k = f \circ k \Rightarrow g = f$ *(para um* g' *apropriado);*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] & b \\ a \arrow[u, "g'"] \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

3. *Se* $a < b$ *e* $f \in \mathcal{C}[b, a]$ *é principal, então existe* $g \in \mathcal{C}[a, b]$ *tal que* $a < b$ *via* (g, f)*;*

   Seja $a < b$ *via* (i, j)*. Como* f *é principal então* $\exists s \in \mathcal{C}[b, b]$ $j = f \circ s$*. Assim, para* $g = s \circ i$ *temos* $f \circ g = j \circ i = \mathrm{id}_a$*. Em diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "g"'] & b \arrow[r, "j"] \arrow[d, "s"'] & a \\
& b \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

12 Categoria dos Idempotentes

Se $f : a \to b$ e $g : b \to a$ são um par de retração, então a função $h = f \circ g : b \to b$ é idempotente, isto é, $h \circ h = h$, pois $h \circ h = (f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ (g \circ f) \circ g = f \circ g = h$ (pela associatividade da composição).

Dada uma categoria $\mathcal{C}$ e um objeto $b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$, a *categoria dos idempotentes sobre b* ($\mathbf{Ret}_b$) é definida como:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ob}_{\mathbf{Ret}_b} &= \{f \in \mathcal{C}[b,b] | f \circ f = f\} \\
\mathrm{Mor}_{\mathbf{Ret}_b} &= \{(f,k,g) | f,g \in \mathrm{Ob}_{\mathbf{Ret}_b}, k \in \mathcal{C}[b,b], \\
&\qquad k = g \circ k \circ f\} \\
\mathrm{dom}((f,k,g)) &= f \\
\mathrm{cod}((f,k,g)) &= g \\
\mathrm{id}_f &= (f,f,f) \\
(f,k,g) \circ (g',k',f) &= (g', k \circ k', g)
\end{aligned}
$$

identidade $(f, k, g) \circ (f, f, f) = (f, k \circ f, g)$. Sabemos que f e g são idempotentes e $k = g \circ k \circ f$:

$$k \circ f = g \circ k \circ f \circ f = g \circ k \circ f = k$$

Similar para $(f, f, f) \circ (g, k, f)$;

associatividade da composição

$((f_1, f_2, f_3) \circ (g_1, g_2, f_1)) \circ (h_1, h_2, g_1) =$
$(g_1, f_2 \circ g_2, f_3) \circ (h_1, h_2, g_1) = (h_1, (f_2 \circ g_2) \circ h_2, f_3) =$
$(h_1, f_2 \circ (g_2 \circ h_2), f_3)$ e
$(f_1, f_2, f_3) \circ ((g_1, g_2, f_1) \circ (h_1, h_2, g_1)) =$
$(f_1, f_2, f_3) \circ (h_1, g_2 \circ h_2, f_1) = (h_1, f_2 \circ (g_2 \circ h_2), f_3)$.

13 Sub-objeto

- Sub-objeto é a versão categorial de subconjunto da teoria dos conjuntos;
- Baseia-se na idéia de definir um subconjunto $A \subseteq B$ como um monomorfismo $f : D \to B$ (intuitivamente "$f(D) = A$");

- Se existem muitas setas mono definindo o mesmo subconjunto, é necessário introduzir uma classe de equivalência e definir sub-objetos usando-a;
- Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Se $f : b \to a$ e $g : c \to a$ são duas setas mono com destino comum a, então dizemos que $f \leq g$ se e somente se existe $h : b \to c$ tal que $g \circ h = f$;
- Note que o único h é mono também, pois $h \circ k = h \circ k' \Rightarrow g \circ h \circ k = g \circ h \circ k' \Rightarrow f \circ k = f \circ k' \Rightarrow k = k'$;

- Se $f \leq g$ e $g \leq f$ então dizemos que $f \cong g$, e $\cong$ é uma relação de equivalência entre monomorfismos com destino comum;
- As classes de equivalência determinadas por esta relação de equivalência são os sub-objetos de a;
- Notação: $[f]$.

14 Objetos Inicial e Terminal

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto 0 é *inicial* se e somente se para qualquer $b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ existe um único $f \in \mathcal{C}[0, b]$.

Observações:

- O típico exemplo de objeto inicial é $\emptyset$ (conjunto vazio) em **Set**, pois a função vazia (ou seja, a função cujo grafo é vazio) é a única seta com origem em $\emptyset$;
- Deve-se observar que a função vazia, tendo como domínio $\emptyset$, é total (como **Set** exige) por *vacuidade*;
- Inicialidade é a mais simples noção *universal* em Teoria das Categorias, já que é dada pela existência e unicidade de morfismos satisfazendo certas propriedades;
- *Universalidade* é um conceito fundamental em Teoria das Categorias.

Teorema 2 *Se* 0 *e* $0'$ *são dois objetos iniciais da categoria* $\mathcal{C}$*, então eles são isomórficos (em outras palavras: o objeto inicial é único a não ser por isomorfismos).*

Prova: Sejam $i : 0 \to 0'$ *e* $j : 0' \to 0$ *dois morfismos dados pela inicialidade de* 0 *e* $0'$*. Então,* $j \circ i : 0 \to 0$*, mas também* $\mathrm{id}_0 : 0 \to 0$*. Pela inicialidade de* 0 *só pode existir um morfismo em* $\mathcal{C}[0, 0]$*, então* $j \circ i = \mathrm{id}_0$*. Da mesma forma, pela inicialidade de* $0'$*,* $i \circ j = \mathrm{id}_{0'}$*.*

- Podemos usar *dualidade* para definir um novo conceito e provar novas propriedades;
- Seja $P(c)$ a propriedade "para qualquer $b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ existe um único f tal que $\mathrm{dom}(f) = c$ e $\mathrm{cod}(f) = b$";
- Pela definição, c é inicial se e somente se $P(c)$ vale;
- O enunciado dual de $P(c)$, $P^{op}(c)$, é "para qualquer $b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ existe um único f tal que $\mathrm{dom}(f) = b$ e $\mathrm{cod}(f) = c$";

- Conceitos duais são usualmente chamados usando-se o prefixo "co-";
- Assim, $P^{op}(c)$ define co-inicialidade, e o objeto que a satisfaz é o objeto *co-inicial* (também conhecido como *terminal*);
- Notação: 1 ou t e o morfismo único que tem como origem um objeto a e como destino t é denotado por $!a : a \rightarrow t$.

Observações:

- Qualquer conjunto unitário $\{*\}$ (que possui apenas um elemento) é terminal em **Set**;
- Na categoria **2** um elemento é inicial e o outro é terminal;
- Se c é inicial em $\mathcal{C}$ então é terminal em $\mathcal{C}^{op}$ e vice-versa.

Teorema 3 *Se* 1 *e* $1'$ *são dois objetos terminais na categoria* $\mathcal{C}$*, então eles são isomórficos.*

Prova: Pela dualidade e pelo Teorema 2.

Observações:

- Um objeto pode ser inicial e terminal ao mesmo tempo, neste caso é chamado de objeto *zero*;
- Em **Set**, um morfismo do conjunto unitário para um conjunto A define os elementos de A;
- Em uma categoria $\mathcal{C}$ qualquer, uma seta de um objeto terminal t para um objeto a é usualmente chamada de *elemento* ou *ponto* de a;

- Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. $t \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ é um *gerador* se e somente se para todos $a, b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ e todos $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, temos $f \neq g \Rightarrow \exists h \in \mathcal{C}[t, a]\ f \circ h \neq g \circ h$;
- $\mathcal{C}$ tem *suficientes pontos* (ou é *bem pontuada*), se existe um gerador t que é terminal na categoria dada;
- Ou seja, a categoria tem suficientes pontos quando as setas com origem no objeto terminal permitem discriminar entre morfismos, de forma similar que para os elementos de **Set**.

15 Produto e Coproduto Categorial

- O produto categorial é uma generalização estrutural da noção de produto cartesiano;
- Dados dois conjuntos A e B, seu produto cartesiano é:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

- Associado com este conjunto existem dois mapeamentos especiais $p_A : A \times B \to A$ e $p_B : A \times B \to B$, chamados *projeções*, tal que para todo $(x, y) \in A \times B$, $p_A((x, y)) = x$ e $p_B((x, y)) = y$;
- Sejam $f : C \to A$ e $g : C \to B$, então $< f, g >: C \to A \times B$, e $< f, g > (c) =< f(c), g(c) >$ para todo $c \in C$;
- Seja $c \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$. Definimos a operação $<, >_c: \mathcal{C}[c, a] \times \mathcal{C}[c, b] \to \mathcal{C}[c, a \times b]$ como acima descrito.

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $a, b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$. O *produto categorial* de a e b é um objeto $a \times b$ junto com dois morfismos $p_a : a \times b \to a$ e $p_b : a \times b \to b$ tal que, dado um $c \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$, para qualquer $f \in \mathcal{C}[c, a]$ e $g \in \mathcal{C}[c, b]$, existe exatamente um $h \in \mathcal{C}[c, a \times b]$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

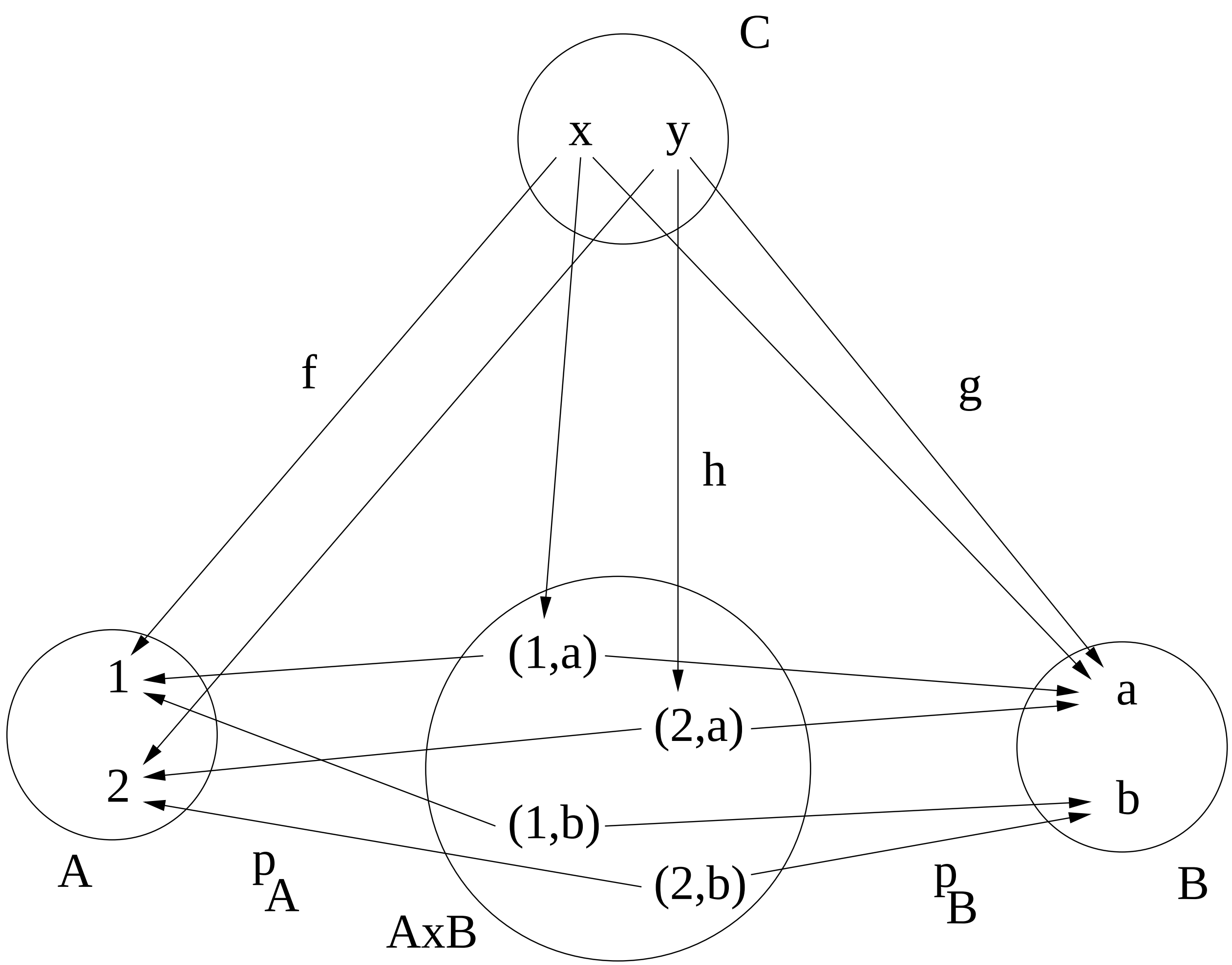
$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b \end{tikzcd}$$

Observação: c é chamado de *pré-produto*.

Exemplos: Em **Set**, sejam $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b\}$ e $C = \{x,y\}$. Então $A \times B = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b)\}$ e h é o único morfismo que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Definimos f, g e h de acordo com a seguinte ilustração:



Na categoria **2**,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop above, "\mathrm{id}_0"] \arrow[r, "{(0,1)}"'] & 1 \arrow[loop above, "\mathrm{id}_1"] \end{tikzcd}$$

$0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, "\mathrm{id}_0"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_0"] \arrow[dr, "{(0,1)}"] & \\ 0 & 0 \times 1 \arrow[l, "\mathrm{id}_0"] \arrow[r, "{(0,1)}"'] & 1 \end{tikzcd}$$

Em **Set**, $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$:

$$\begin{tikzcd}
 & \emptyset \arrow[dl, "\mathrm{id}_\emptyset"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_\emptyset"] \arrow[dr, "f"] & \\
\emptyset & \emptyset \times A \arrow[l, "\mathrm{id}_\emptyset"] \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Teorema 4 *Em uma categoria, o produto, se existir, é único a não ser por isomorfismos.*

Prova: Seja $a \otimes b$ *um produto alternativo com projeções* q_a *e* q_b*, então* $< q_a, q_b > \circ < p_a, p_b >$ *é o morfismo único que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{tikzcd}
& a \times b \arrow[dl, "p_a"'] \arrow[d, "<p_a,p_b>"] \arrow[dr, "p_b"] & \\
a & a \otimes b \arrow[l, "q_a"'] \arrow[r, "q_b"] \arrow[d, "<q_a,q_b>"] & b \\
& a \times b \arrow[ul, "p_a"] \arrow[ur, "p_b"'] &
\end{tikzcd}$$

Logo, $< q_a, q_b > \circ < p_a, p_b >= \mathrm{id}_{a\times b}$ *e, por simetria,* $< p_a, p_b > \circ < q_a, q_b >= \mathrm{id}_{a\otimes b}$.

Morfismo produto: Sejam $f : a \to c$ e $g : b \to d$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & a \times b \arrow[l, "p_a"'] \arrow[r, "p_b"] \arrow[d, "f \times g"] & b \arrow[d, "g"] \\
c & c \times d \arrow[l, "p_c"] \arrow[r, "p_d"'] & d
\end{tikzcd}$$

Observações:

- $f \times g$ é único já que $a \times b$ é um pré-produto de $c \times d$;
- Dizemos que $f \times g$ é univocamente induzido por f e g;
- Exemplo em **Set**: Definimos $(f \times g)((x, y)) = (f(x), g(y))$ tal que $x \in A$ e $y \in B$.

- Uma categoria $\mathcal{C}$ é *cartesiana* ($\mathcal{C}$ é CC) se e somente se:
    1. Contém um objeto terminal t;
    2. Todo par $a, b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ tem um produto categorial $(a \times b, p_{a,b,1} : a \times b \to a, p_{a,b,2} : a \times b \to b)$;
- Exemplos: **Set**, **Top** e **Grp**;
- Uma categoria cartesiana interessante em teoria da computabilidade é a categoria **EN** dos *conjuntos enumeráveis*;

- Objetos de **EN** são pares $\underline{a} = (a, e_a)$, onde a é um conjunto contável e $e_a : \mathbb{N} \to a$ é um mapeamento dos elementos de a (uma *enumeração* de a);
- $f \in \mathbf{EN}[\underline{a}, \underline{b}]$ se e somente se, para alguma função (total) recursiva f', o seguinte diagrama comuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "e_a"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "e_b"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}
$$

- Dizemos que f' *representa* f;

- O produto pode ser facilmente obtido por qualquer *bijeção efetiva* $[,] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;
- Um conjunto enumerável de interesse é $\underline{\mathrm{PR}} = (\mathrm{PR}, \phi)$, das funções parciais recursivas com números de Gödel $\phi : \mathbb{N} \to \mathrm{PR}$, e $\mathbf{EN}[\underline{\mathrm{PR}}, \underline{\mathrm{PR}}]$ são exatamente os funcionais recursivos de segunda ordem.

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $a, b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$. O *coproduto* de a e b é um objeto $a + b$ junto com dois morfismos $q_a : a \to a + b$ e $q_b : b \to a + b$ tal que, dado um $c \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$, para qualquer $f \in \mathcal{C}[a, b]$ e $g \in \mathcal{C}[b, c]$, existe exatamente um $h \in \mathcal{C}[a + b, c]$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
 & c & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "q_a"'] & a + b \arrow[u, "h"'] & b \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "q_b"]
\end{tikzcd}$$

Observações:

- O coproduto é o conceito dual do produto;
- No coproduto $a + b$, os morfismos q_a e q_b são chamados de *inclusões* ;
- Por dualidade, o coproduto é único (a não ser por isomorfismos);
- Em **Set** o coproduto é a *união disjunta*.

16 Cálculo Lambda

- Simplifica e flexibiliza a representação de funções;
- Facilita as operações de currying e uncurrying.

Expressão-λ (ou *termo*-λ):

1. Uma variável é uma expressão-λ;
2. Se M é uma expressão-λ e x é uma variável, então $\lambda x M$ é uma expressão-$lambda$, interpretada como "uma função com argumento x";
3. Se F e A são expressões-λ, então (FA) é uma expressão-λ, interpretada como "F aplicado ao argumento A";
4. Nada mais é expressão-λ.

Exemplos:

1. $\lambda x \overbrace{x}^{M}$;

2. $(\overbrace{\lambda xx}^{F} \underbrace{(yz)}_{A})$;

3. $(\overbrace{\lambda x \underbrace{(xx)}_{M}}^{F} \overbrace{y}^{A})$;

4. $(\underbrace{\lambda xx}_{F} \underbrace{\lambda xx}_{A})$;

5. $\lambda x \underbrace{\lambda y(xy)}_{M}$.

Ocorrência de variável *livre* e *limitada*:

- Se uma ocorrência de uma variável x está no escopo de um λx, então sua ocorrência é dita *limitada*, caso contrário é dita *livre*;
- Exemplo:

$$(x\lambda x\lambda y(xy))$$

Primeira ocorrência de x é livre, a segunda é limitada.

Substituição uniforme:

- $M[x \leftarrow A]$ denota a substituição uniforme de todas as ocorrências *livres* de x por A;
- Exemplo:

$$(x\lambda x\lambda y(xy))[x \leftarrow \lambda zz] = (\lambda zz\lambda x\lambda y(xy))$$

Abstração-λ $M \Rightarrow \lambda x M$;

Aplicação-λ $(\lambda x M A) \Rightarrow M[x \leftarrow A]$.

$$\underbrace{(\lambda x M A)}_{\text{redex}} \Rightarrow \underbrace{M[x \leftarrow A]}_{\text{contractum}}$$

- Uma *forma normal* é uma expressão-λ na qual não se pode efetuar uma aplicação-λ;
- Uma sequência de aplicações-λ até a obtenção de uma forma normal é chamada de *redução*.

Exemplos de reduções:

1. $(\lambda x x \lambda x x) \Rightarrow \lambda x x$;
2. $((\lambda x \lambda y (x y) \lambda x x) x) \Rightarrow (\lambda y (\lambda x x y) x) \Rightarrow (\lambda x x x) \Rightarrow x$;
3. $(\lambda x (x x) \lambda x (x x)) \Rightarrow (\lambda x (x x) \lambda x (x x))$ (irredutível);
4. $(\lambda x y z) \Rightarrow y$ (jogar fora alguma coisa).

Currying:

- Ocorre quando da aplicação de um termo-λ em que existem menos argumentos que variáveis limitadas;

$$(\lambda x \lambda y(xy)z) \Rightarrow \lambda y(zy)$$

- Ou seja, $f(x, y)$, fixando um x qualquer, resulta em uma função de y.

Representando aritmética:

```
if A then B else C
```

$$T \equiv \lambda x \lambda y x$$

$$((Ta)b) \equiv ((\lambda x \lambda y x a)b) \Rightarrow (\lambda y a b) \Rightarrow a$$

$$F \equiv \lambda x \lambda y y$$

$$((Fa)b) \equiv ((\lambda x \lambda y y a)b) \Rightarrow (\lambda y y b) \Rightarrow b$$

Observação: T e F são *abreviaturas*.

Podemos usar F e T como seletores de elementos de listas (if-then-else aninhados):

- $T \equiv \lambda x \lambda y x$ (primeiro elemento da lista);
- $FT \equiv \lambda x \lambda y(y \lambda x \lambda y x) \equiv \lambda x \lambda y(yT)$ (segundo elemento da lista);
- $F^2 T \equiv \lambda x \lambda y(y \lambda x \lambda y(y \lambda x \lambda y x)) \equiv \lambda x \lambda y(yFT)$ (terceiro elemento da lista);
- $F^{i+1} T \equiv \lambda x \lambda y(y F^i T)$ (o $(i+2)$-ésimo elemento).

$$\langle \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \rangle$$

- $\langle \phi_0 \rangle \equiv \lambda x((x\phi_0)\psi)$ (ψ é o terminador de lista);
- $\langle \phi_0, \phi_1 \rangle \equiv \lambda x((x\phi_0)\lambda x((x\phi_1)\psi)) \equiv \lambda x((x\phi_0)\, \langle \phi_1 \rangle)$;
- $\langle \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \rangle \equiv \lambda x((x\phi_0)\, \langle \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \rangle)$.

Obtendo o primeiro elemento de uma lista:

$$\begin{aligned}(\langle\phi_0\rangle\, T) &\equiv (\lambda x((x\phi_0)\psi)\lambda x\lambda y x) \Rightarrow ((\lambda x\lambda y x\phi_0)\psi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\lambda y\phi_0\psi) \Rightarrow \phi_0\end{aligned}$$

Obtendo o segundo elemento de uma lista:

$$
\begin{aligned}
&(\langle \phi_0, \phi_1, \phi_2 \rangle\, FT) \equiv \\
&\equiv (\lambda x((x\phi_0)\lambda x((x\phi_1)\lambda x((x\phi_2)\psi)))\, \underbrace{\lambda x \lambda y(y \lambda x \lambda y x)}) \Rightarrow \\
&\Rightarrow ((\lambda x \lambda y(y \lambda x \lambda y x)\ \underbrace{\phi_0}\ )\lambda x((x\phi_1)\lambda x((x\phi_2)\psi))) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\lambda y(y \lambda x \lambda y x)\, \underbrace{\lambda x((x\phi_1)\lambda x((x\phi_2)\psi))}) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\lambda x((x\phi_1)\lambda x((x\phi_2)\psi))\, \underbrace{\lambda x \lambda y x}) \Rightarrow \\
&\Rightarrow ((\lambda x \lambda y x\ \underbrace{\phi_1}\ )\lambda x((x\phi_2)\psi)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\lambda y \phi_1\, \underbrace{\lambda x((x\phi_2)\psi)}) \Rightarrow \phi_1
\end{aligned}
$$

Representando números: $0 \equiv T$, $1 \equiv FT$, $2 \equiv FFT$, …, $i \equiv F^iT$.

$$\mathrm{suc} \equiv \lambda z\lambda x\lambda y(yz)$$

$$(\mathrm{suc}1) \equiv (\lambda z\lambda x\lambda y(yz)\lambda x\lambda y(y\lambda x\lambda yx)) \Rightarrow$$
$$\lambda x\lambda y(y\,\underbrace{\lambda x\lambda y(y\,\underbrace{\lambda x\lambda yx}_{T}}_{FT}) \equiv FFT \equiv 2$$

Observações:

- Esta definição conduz a possibilidade de definir soma, subtração, multiplicação, etc.
- Neste caso, podemos definir abreviaturas para $+$, $-$, $\times$, etc.
- Assim, ocorre equivalência entre o cálculo-λ e a máquina de Turing (funções parciais recursivas).

Cálculo-λ tipado:

- Cada variável tem um tipo associado e a construção dos termos obedece a certas "regras de tipagem";
- Motivação: Paradoxo de Russel (teoria dos conjuntos) e tipos de linguagens de programação.

Tipos e construtores de termos:

Tipos atômicos $A, B, C, \ldots$;

Tipos não-atômicos

- se α e β são tipos, então $\alpha \to \beta$ é um tipo (funcional);
- se α e β são tipos, então $\alpha \times \beta$ é um tipo (produto cartesiano, record);

Termos

- se x é variável do tipo ψ, então $x : \psi$ é um termo do tipo ψ;
- se x é variável do tipo ψ e t é termo do tipo ϕ, então $\lambda x t : \psi \to \phi$ é um termo do tipo $\psi \to \phi$;
- se t_1 e t_2 são termos do tipo $\psi \to \phi$ e ψ respectivamente, então $\mathrm{App}(t_1, t_2) : \phi$ é um termo do tipo ϕ (aplicação);

- se t_1 e t_2 são termos do tipo ψ e ϕ respectivamente, então $(t_1, t_2) : \psi \times \phi$ é um termo do tipo $\psi \times \phi$ (produto cartesiano);
- se $t : \psi \times \phi$ é um termo do tipo $\psi \times \phi$, então $\pi_1(t) : \psi$ e $\pi_2(t) : \phi$ são termos do tipo ψ e ϕ respectivamente (projeções).

Reduções no cálculo-λ tipado:

$$\pi_1((t_1, t_2)) : \psi \Rightarrow t_1 : \psi$$

$$\pi_2((t_1, t_2)) : \phi \Rightarrow t_2 : \phi$$

$$\mathrm{App}(\lambda x t_1, t_2) : \phi \Rightarrow t_1[x \leftarrow t_2] : \phi$$

Observações:

- O cálculo-λ tipado corresponde às funções (totais) recursivas, pois a introdução dos tipos impede que a função fique indefinida (não há loop infinito);
- Ao representar o cálculo-λ tipado em Teoria das Categorias:
  - Tipos são objetos de uma categoria $\mathcal{C}$;
  - Termos são morfismos;
  - Problema: como representar a aplicação-λ?
    Resposta: objeto exponencial.

17 Objeto Exponencial

- A conexão entre Teoria das Categorias e Teoria da Computabilidade, como “teorias de funções”, exige interpretar funções como morfismos, identificando tipos como $A \times B \to C$ e $A \to (B \to C)$ (currying e uncurrying);
- O produto não é suficiente para isto;
- Precisamos então representar funções de mais alta ordem (funcionais), como “morfismos entre morfismos”, mas isto não é possível;

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria cartesiana, e $a, b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$. O *objeto exponencial* de a e b é b^a junto com o morfismo $\mathrm{eval}_{a,b} : b^a \times a \to b$ (mapeamento de avaliação), e para cada objeto c uma operação $\Lambda_c : \mathcal{C}[c \times a, b] \to \mathcal{C}[c, b^a]$ tal que, para todos os morfismos $f : c \times a \to b$ e $h : c \to b^a$, as seguintes equações valem:

1. $\mathrm{eval}_{a,b} \circ (\Lambda_c(f) \times \mathrm{id}_a) = f$;
2. $\Lambda_c(\mathrm{eval}_{a,b} \circ (h \times \mathrm{id}_a)) = h$.

Os conceitos centrais da definição são:

Currying/Uncurrying $f : c \times a \to b$ intercambiado com $h : c \to b^a$, onde b^a é o espaço de funções $a \to b$;

Existência de eval $\mathrm{eval}_{a,b} : b^a \times a \to b$ equivale a avaliar $f(x)$, onde $f : a \to b$ e $x \in a$.

Observações:

- $\Lambda : \mathcal{C}[c \times a, b] \to \mathcal{C}[c, b^a]$ é uma bijeção;
- $\Lambda^{-1} : \mathcal{C}[c, b^a] \to \mathcal{C}[c \times a, b]$ é tal que $\Lambda^{-1} : h \mapsto \mathrm{eval}_{a,b} \circ (h \times \mathrm{id}_a)$;
- Se $\Lambda : \mathcal{C}[c \times a, b] \to \mathcal{C}[c, b^a]$ é uma bijeção e (1) da definição vale, então (2) é necessariamente verdadeiro;
- Seja $h \in \mathcal{C}[c, b^a]$ e tomemos $f \in \mathcal{C}[c \times a, b]$ tal que $h = \Lambda(f)$, então $\Lambda(\mathrm{eval}_{a,b} \circ (h \times \mathrm{id}_a)) = \Lambda(\mathrm{eval}_{a,b} \circ (\Lambda(f) \times \mathrm{id}_a)) = \Lambda(f) = h$.

Definição alternativa: Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria cartesiana e $a, b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$. O *objeto exponencial* de a para b é um objeto b^a junto com um morfismo $\mathrm{eval}_{a,b} : b^a \times a \to b$, tal que para todos os morfismos $f : c \times a \to b$, existe um e somente um $h : c \to b^a$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "h"'] & c \times a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h\times\mathrm{id}"'] & b \\ b^a & b^a \times a \arrow[ur, "\mathrm{eval_{a,b}}"'] & \end{tikzcd}$$

Observações:

- A definição de objeto exponencial sugere que b^a "representa" $\mathcal{C}[a, b]$;
- $\mathcal{C}[t, b^a] \cong \mathcal{C}[t \times a, b] \cong \mathcal{C}[a, b]$;
- Em **Set**, podemos dizer que a cardinalidade de B^A é m^n, onde m é a cardinalidade de B e n é a cardinalidade de A. Por exemplo, se $A = \emptyset$ então $n = 0$ e $m^n = 1$. O que resulta no morfismo único h em $C \xrightarrow{h} B^A$, já que, neste caso, B^A é objeto terminal;

- Em **Set** o objeto exponencial de A e B é o conjunto das f tal que f é função de A para B;

- $B^A = \mathbf{Set}[A, B]$;

- $\mathrm{eval} : B^A \times A \to B$ é dado pela regra $\mathrm{eval}((f, x)) = f(x)$;

- $\Lambda : \mathbf{Set}[C \times A, B] \to \mathbf{Set}[C, B^A]$ leva cada função $f : C \times A \to B$ na função $\Lambda(f) : C \to B^A$ definida por $\Lambda(f)(c) = \lambda a f(c, a)$, onde $\lambda a f(c, a) \in B^A = \mathbf{Set}[A, B]$ é a função que leva $a \in A$ para $f(c, a) \in B$;

- Observe-se que se $a < b$ via (i, j) então a retração é um sub-objeto de b;

- Podemos estar interessados em categorias em que vale $a^a < a$, mas isto é impossível em **Set** pelo Teorema de Cantor, já que a cardinalidade de a^a é maior que a de a, desde que $a \neq \{*\}$.

Relação com Teoria da Computabilidade:

- Seja $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \mathrm{PR}$ uma enumeração de Gödel aceitável das funções parciais recursivas. Ou seja, dada uma função parcial recursiva f qualquer, então existe um i tal que $\phi_i = f$;
- Seja $[,] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção efetiva;
- Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função binária parcial recursiva se e somente se $\exists f' \in \mathrm{PR}\ f(x, y) = f'([x, y])$;

- Assim, f é parcial recursiva se e somente se $\exists s \in \mathrm{PR}\ \phi_{s(x)}(y) = f(x, y)$. Então, f é computável se e somente se cada argumento e a função $x \mapsto f(x, \_)$ é computável;

- Isto significa que computacionalmente f está em $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se e somente se $x \mapsto f(x, \_)$ está em $\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$;

- Similarmente, na categoria cartesiana $\mathcal{C}$ vamos supor, para qualquer $f : c \times a \to b$, a existência de um morfismo que faz o mesmo que s em $x \mapsto f(x, \_)$ na teoria da recursão. Este morfismo é o h.

$\mathcal{C}$ é uma *categoria cartesiana fechada* (CCC) se e somente se:

1. $\mathcal{C}$ é cartesiana;
2. Para cada par $a, b \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ existe um exponencial.

- Exemplo: **Set**;
- Contra-exemplo: **EN**. Basta ver que $\mathbf{EN}[\underline{\mathbb{N}}, \underline{\mathbb{N}}] = R$, onde R são as funções (totais) recursivas. Então, eval seria a função universal para R, o que é um absurdo.

Teorema 5 *Seja $\mathcal{C}$ uma CCC, então* $a^{b\times c} \cong (a^b)^c$.

Teorema 6 *Seja $\mathcal{C}$ uma CCC. Se $a < a'$ via $(\mathrm{in}_a : a \to a', \mathrm{out}_a : a' \to a)$ e $b < b'$ via $(\mathrm{in}_b : b \to b', \mathrm{out}_b : b' \to b)$, então $b^a < b'^{a'}$ via $(\Lambda(\mathrm{in}_b \circ \mathrm{eval} \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{out}_a)) : b^a \to b'^{a'}, \Lambda(\mathrm{out}_b \circ \mathrm{eval} \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{in}_a)) : b'^{a'} \to b^a)$.*

Prova:

$$\Lambda(\mathrm{out}_b \circ \mathrm{eval} \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{in}_a)) \circ \Lambda(\mathrm{in}_b \circ \mathrm{eval} \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{out}_a)) =$$

$$\Lambda(\mathrm{out}_b \circ \mathrm{eval} \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{in}_a) \circ \Lambda(\mathrm{in}_b \circ \mathrm{eval} \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{out}_a)) \times \mathrm{id}) =$$

$$\Lambda(\mathrm{out}_b \circ \mathrm{eval} \circ \Lambda(\mathrm{in}_b \circ \mathrm{eval} \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{out}_a)) \times \mathrm{id} \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{in}_a)) =$$

$$\Lambda(\mathrm{out}_b \circ (\mathrm{in}_b \circ \mathrm{eval} \circ \mathrm{id} \times \mathrm{out}_a) \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{in}_a)) =$$

$$\Lambda(\mathrm{eval} \circ \mathrm{id} \times (\mathrm{out}_a \circ \mathrm{in}_a)) = \Lambda(\mathrm{eval} \circ \mathrm{id} \times \mathrm{id}) = \mathrm{id}$$

Seja $\mathcal{C}$ uma CCC. Um objeto V de $\mathcal{C}$ é *reflexivo* se e somente se $V^V < V$.

Teorema 7 *Sejam $\mathcal{C}$ uma CCC e V um objeto reflexivo. Então $t < V$ e $V \times V < V$.*

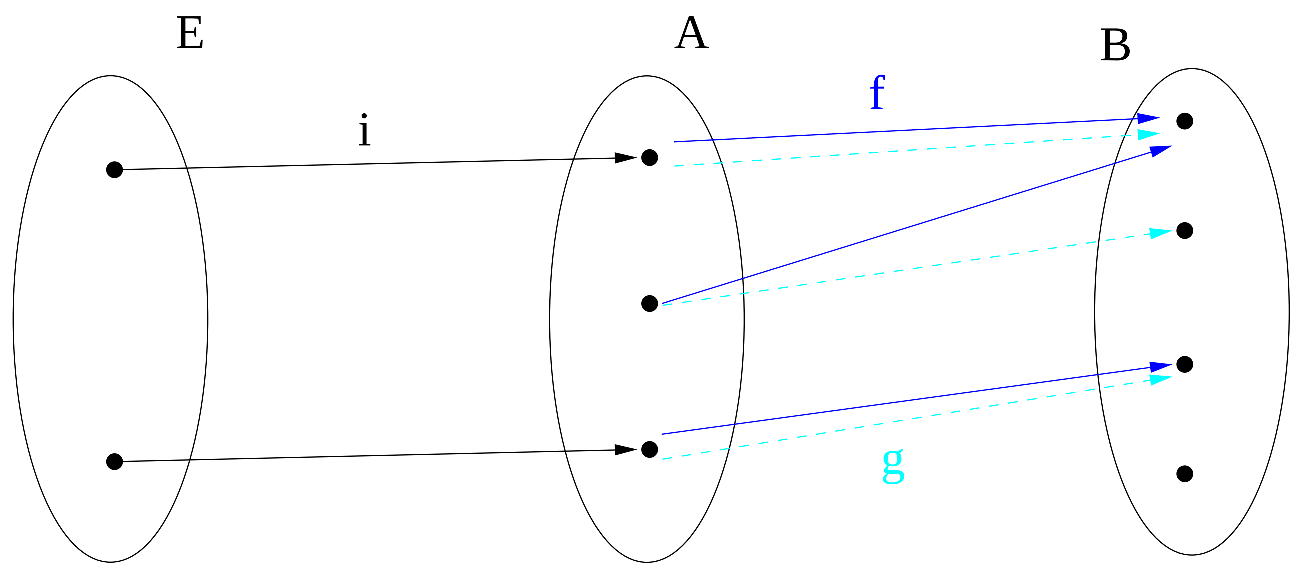
Prova: Seja $(\mathrm{in} : V^V \to V, \mathrm{out} : V \to V^V)$ *o par de retração entre V e V^V. Para provar $t < V$ basta provar a existência de um morfismo de t para V. Seja* $p_1 : t \times V \to V$ *uma projeção, então* $\Lambda(p_1) : t \to V^V$ *e* $\mathrm{in} \circ \Lambda(p_1) : t \to V$.

Para provar $V \times V < V$ devemos provar $V \times V < V^V$ e $V \times V < V$ segue por composição (prova completa mostrada no livro).

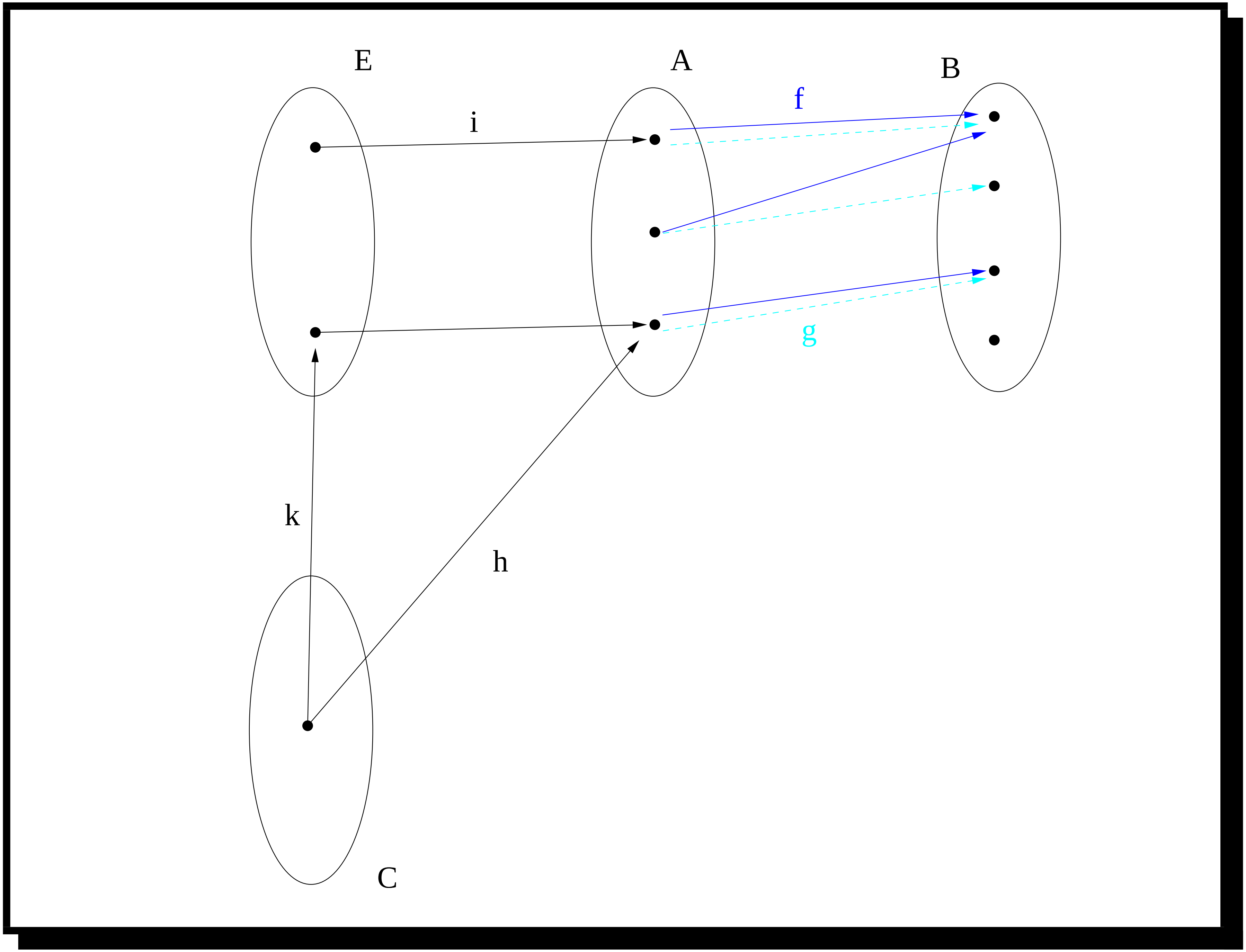
18 Equalizador, Produto Fibrado e Soma Amalgamada

- Sejam $f, g : A \to B$ um par de funções "paralelas" em **Set**. O subconjunto $E \subseteq A$ no qual f e g coincidem é chamado *equalizador* de f e g;

- Na linguagem de categorias, E deve ser representado por um sub-objeto, como uma seta mono $i : E \to A$ e i deve satisfazer $f \circ i = g \circ i$;



- Para garantir que i represente o sub-objeto "maximal" devemos adicionalmente exigir que se $h : C \to A$ é outra função tal que $f \circ h = g \circ h$, então h "fatora" de forma única por meio de i, ou seja, existe apenas um $k : C \to E$ tal que $h = i \circ k$.


E
A
B
i
f
g
k
h
C

Dado um par de morfismos $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$, um *equalizador* de f e g é um par (e, i), $e \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ e $i \in \mathcal{C}[e, a]$ tal que:

1. $f \circ i = g \circ i$;
2. Para todo $h \in \mathcal{C}[c, a]$, $f \circ h = g \circ h$ implica que existe um único $k \in \mathcal{C}[c, e]$ tal que $i \circ k = h$.

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\ c \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Observação: Chamamos h de *pré-equalizador*.

O conceito dual de equalizador é o *co-equalizador* (basta inverter as setas).

Teorema 8 *Todo equalizador é mono.*

Prova: *Seja* $i : e \to a$ *um equalizador de* $f, g : a \to b$. *Assim,* $f \circ i = g \circ i$. *Sejam* $j, l : c \to e$ *tal que* $i \circ j = i \circ l$ *(hipótese). Desde que* $f \circ (i \circ j) = (f \circ i) \circ j = (g \circ i) \circ j = g \circ (i \circ j)$ *então* $i \circ j$ *é um pré-equalizador de* f *e* g *e existe um único* $k : c \to e$ *tal que* $i \circ j = i \circ k$. *Assim,* $j = k = l$.

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\ c \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "i \circ j"'] & & \end{tikzcd}$$

Teorema 9 *Todo equalizador epi é iso.*

Prova: Seja $i : e \to a$ *um equalizador de* $f, g : a \to b$*. Como* i *é epi e* $f \circ i = g \circ i$*, então* $f = g$*. Logo, a identidade* id_a *equaliza* f *e* g *(é um pré-equalizador) e existe um único* $k : a \to e$ *tal que* $\mathrm{id}_a = i \circ k$*. Além disto,* $i \circ k \circ i = \mathrm{id}_a \circ i = i = i \circ \mathrm{id}_e$ *e desde que* i *é mono (pelo Teorema 8) então* $k \circ i = \mathrm{id}_e$*.*

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, "f=g"] & b \\ a \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_a"'] & & \end{tikzcd}$$

- Queremos generalizar os equalizadores para morfismos com diferentes origens;
- Este conceito se chama *produto fibrado* (*pullback*);
- O produto fibrado é uma das noções mais poderosas de Teoria das Categorias.

Dadas duas setas $f : b \rightarrow a$ e $g : c \rightarrow a$ com destino comum a, o *produto fibrado* de (f, g) é um objeto $b \times_a c$ e duas setas $p : b \times_a c \rightarrow b$ e $q : b \times_a c \rightarrow c$ tal que:

1. $f \circ p = g \circ q$, onde $f \circ p, g \circ q : b \times_a c \rightarrow a$;
2. Para qualquer outra tripla $(d, h : d \rightarrow b, k : d \rightarrow c)$ tal que $g \circ k = f \circ h$, existe uma única seta $< h, k >_a: d \rightarrow b \times_a c$ tal que $p\circ < h, k >_a= h$ e $q\circ < h, k >_a= k$.

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[dr, "{<h,k>_a}"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& b \times_a c \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & c \arrow[d, "g"] \\
& b \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd}
$$

Observações:

- O "quadrado" de baixo é chamado de "quadrado do produto fibrado" ("pullback square");
- Note a semelhança entre o produto fibrado e o produto;
- Na verdade, o produto é um caso particular de produto fibrado;

- Observe que os subscritos "a" indicam dependência de $b \times_a c$ e $< h, k >_a$ sobre f e g, mas os subscritos não são opcionais pois a notação deve indicar quando se trata de um produto fibrado;

- Exemplo de produto fibrado em **Set**: o produto fibrado de $(f : B \rightarrow A, g : C \rightarrow A)$ é $(\{(x, y) | x \in B, y \in C, f(x) = g(y)\}, p_1, p_2)$, onde $p_1((x, y)) = x$ e $p_2((x, y)) = y$.

O conceito dual de produto fibrado é a *soma amalgamada* (*pushout*).

Teorema 10 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto terminal t. Se $\mathcal{C}$ tem produtos fibrados para todo par de setas, então $\mathcal{C}$ também tem produtos para todo par de objetos.*

Prova: (esboço) Dados $a, b \in \mathcal{C}$, seja $(a \times b, p_1 : a \times b \to a, p_2 : a \times b \to b)$ um produto fibrado de $(!a : a \to t, !b : b \to t)$. É fácil verificar que este é um produto.

Teorema 11 *Se uma categoria $\mathcal{C}$ tem produtos fibrados para todo par de setas e tem objeto terminal, então tem um equalizador para todo par de setas.*

Prova: Sejam $f, g : a \to b$. *Seja* $(c, \mathrm{fst} : c \to a, \mathrm{snd} : c \to a)$ *um produto fibrado de* $(< f, \mathrm{id}_a >: a \to b \times a, < g, \mathrm{id}_a >: a \to b \times a)$. *Então o equalizador de* f, g *é* $(c, \mathrm{fst} = \mathrm{snd})$. *Pois,* $f \circ \mathrm{fst} = p_1 \circ < f \circ \mathrm{fst}, \mathrm{fst} >= p_1 \circ < f, \mathrm{id}_a > \circ \mathrm{fst} = p_1 \circ < g, \mathrm{id}_a > \circ \mathrm{snd} = p_1 \circ < g \circ \mathrm{snd}, \mathrm{snd} >= g \circ \mathrm{snd}$. *Além disto, para qualquer* $(c', h : c' \to a)$ *tal que* $f \circ h = g \circ h$, *também* $< f, \mathrm{id}_a > \circ h =< g, \mathrm{id}_a > \circ h$, *e por definição de produto fibrado, existe um único* $k : c' \to c$ *tal que* $\mathrm{fst} \circ k = h$.

Lema 1 *(Lema do Produto Fibrado - Pullback Lemma - PBL) Se um diagrama da forma:*

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[d] \\ \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \end{tikzcd}$$

comuta, então:

1. *Se os dois quadrados menores são produtos fibrados, então o retângulo externo é um produto fibrado;*
2. *Se o retângulo externo e o quadrado a direita são produtos fibrados, então o quadrado a esquerda é um produto fibrado.*

Teorema 12 *Se o quadrado:*

$$
\begin{tikzcd}
b \times_a c \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & c \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd}
$$

é um produto fibrado e g é mono, então p também é mono.

Observações:

- Esta última propriedade sugere uma generalização de uma construção conjunto-teorética;
- Se $f : A \to B$ é uma função e $C \subseteq B$, então a imagem inversa de C sob f, denotada por $f^{-1}(C)$ é o subconjunto de A definido como $f^{-1}(C) = \{x | x \in A, f(x) \in C\}$. É fácil mostrar que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(C) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\mathrm{in}'"] & C \arrow[d, "\mathrm{in}"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

é um quadrado de produto fibrado em **Set**.

19 Morfismos Parciais

- Aplicar Teoria das Categorias no contexto de Teoria da Computabilidade;
- Neste contexto, a noção de parcialidade aparece naturalmente pois programas de computador podem eventualmente não terminar;

- Uma função parcial $f : A \to B$ com campo de definição $D \subseteq A$ pode ser representada por um par de funções totais $(i : D \to A, h : D \to B)$, onde i é uma injeção e h é a restrição de f para D.

Dados uma categoria $\mathcal{C}$ e dois objetos a e b, um *mapeamento parcial* $[m, h] : a \to b$ é uma classe de equivalência de pares $(m : d \to a, h : d \to b)$, onde m é mono, com respeito a seguinte relação R:
$(m : d \to a, h : d \to b)R(m' : d' \to a, h' : d' \to b)$ se e somente se existir $k : d' \to d$, k iso, $m' = m \circ k$ e $h' = h \circ k$.

- Desejamos definir a categoria $\mathbf{p}\mathcal{C}$, de mapeamentos parciais sobre $\mathcal{C}$;
- Um problema é definir as composições;
- Se $\mathcal{C}$ tem produtos fibrados para todo par de setas, podemos resolver o problema;

- Dados $(n : e \longrightarrow b, k : e \longrightarrow c)$ e $(m : d \longrightarrow a, h : d \longrightarrow b)$;
- Defina $[n, k] \circ [m, h] : a \longrightarrow c$ a classe de equivalência determinada pelos lados mais externos do seguinte diagrama, ou seja, $(m \circ n' : d \times_b e \longrightarrow a, k \circ h' : d \times_b e \longrightarrow c)$, onde o quadrado é um produto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
d \times_b e \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "n'"'] & e \arrow[r, "k"] \arrow[d, "n"] & c \\
d \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "m"'] & b & \\
a & &
\end{tikzcd}$$

- Pelo Teorema 12, como n é mono, n' também o é.

Exemplo em **Set**:

- Supomos $D \subseteq A$ e $E \subseteq B$ e tomamos $m : D \to A$ e $n : E \to B$ como as injeções canônicas;
- Então, $D \times_B E = \{(x, y)|x \in D, y \in E, h(x) = n(y)\} = \{(x, y)|x \in D, y \in E, h(x) = y\} \cong \{x|x \in D, h(x) \in E\}$, ou seja, o campo de definição da função composta;
- Concluimos que, para todo $x \in \{x|x \in D, h(x) \in E\}$, temos $k(h'(x)) = k(h(x))$, como era necessário.