LOGIIKAN PERUSKURSSI

Veikko Rantala
Ari Virtanen

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos
Tampereen yliopisto
Kokeilumoniste, elokuu 2003

ESIPUHE

Tämä kokeilumoniste perustuu Tampereen yliopistossa filosofian opetuksen yhteydessä pidettyihin logiikan peruskurssin luentoihin ja harjoituksiin sekä tekijöiden kahteen vanhempaan monisteeseen. Näistä ensimmäinen on *Logiikan peruskurssi* vuodelta 1989 ja toinen *Logiikkaa; teoriaa ja sovelluksia* vuodelta 1997. Teimme jälkimmäisen paljolti edellisen pohjalta, mutta lisäsimme tekstiin runsaasti esimerkkejä ja pyrimme saamaan erityisesti predikaattilogiikan semantiikan esittelyn havainnollisemmaksi. Pitääksemme monisteen laajuuden suurin piirtein entisellään jätimme tällöin todistusteorian lähes kokonaan pois, ja muutimme käytännön syistä myös monisteemme nimeä. Tässä kokeilumonisteessa on todistusteoria otettu jälleen mukaan.

Olemme kirjoittaneet lauselogiikan semantiikkaa koskevan osuuden kokonaan uudelleen ja yhdistäneet vanhojen monisteidemme kolme ensimmäistä lukua yhdeksi luvuksi. Kokeilumonisteessa ei ole joukko-oppia käsittelevää liitettä, sillä uudelleen kirjoitettuna siitä tuli niin laaja, että sitä ei ollut mielekästä sisällyttää tähän kokeilumonisteeseen. Joukko-oppia koskeva liite on verkossa osoitteessa

`http://www.uta.fi/laitokset/mattiet/matematiikka/kurssit/`
`logiikka/liitejoukoista.pdf`.

Myös harjoitustehtävät on jätetty kokeilumonisteesta pois. Tarkoituksemme on nimittäin uudistaa vanhoja tehtäviä ja myös lisätä uusia tehtäviä. *Logiikkaa; teoriaa ja sovelluksia* monisteen harjoitustehtävät löytyvät verkosta osoitteesta

`http://www.uta.fi/laitokset/mattiet/matematiikka/kurssit/`
`logiikka/tehtävät.pdf`

Näitä tehtäviä on hieman muokattu tähän kokeilumonisteeseen tulleiden muutosten vuoksi. On syytä todeta, että harjoitusten läpikäyminen on välttämätöntä logiikan teknisen välineistön ymmärtämiselle ja soveltamiselle. Kirjatenttiin valmistuvien opiskelijoiden kannattaa myös hyödyntää monisteen esimerkkejä: tehtäväannon voi kopioida esimerkin alusta, sen jälkeen voi yrittää ominpäin ratkaista tehtävän ja lopuksi voi tarkistaa oman vastauksen vertailemalla sitä esimerkin vastaukseen.

Tässä kokeilumonisteessa esitellään lause- ja predikaattilogiikan peruskäsitteet siinä laajuudessa, jossa niiden voidaan katsoa kuuluvan filosofian peruskoulutukseen. Varsinaisia matemaattisia todistuksia tässä monisteessa ei ole, mutta moniste antanee hyvät esitiedot myös matemaattisemmille logiikan kursseille. Kokeilumonisteen laajuus on sikäli ongelmallista, että sitä ei ehditä käsitellä kolmen opintoviikon luentokurssilla, vaan joko predikaattilogiikan semantiikan tai todistusteorian esittäminen on lähes kokonaan sivuutettava luennoilla.

Kokeilumonistetta käytettiin ensimmäisen kerran syyslukukaudella 2002. Tämä uusin versio eroaa vain todistusteoriaa käsittelevän luvun osalta siitä. Tähän lukuun on tehty muutama korjaus ja siihen on lisätty predikaattilogiikan todistusteoriaa koskeva osuus.

Monisteen teknisestä toimitustyöstä kiitämme Jarmo Niemelää ja Leena Heikkilää. Monisteen sisältöä koskevista parannusehdotuksista (joita kaikkia emme ole voineet ajan puutteen vuoksi vielä toteuttaa) kiitämme Tommi Vehkavaaraa.

Tampereella ja Helsingissä 3. elokuuta 2003

Veikko Rantala   Ari Virtanen

Nimitämme monistettamme edelleenkin kokeilumonisteeksi, vaikka se onkin jo käytössä kolmatta vuotta. Syksyllä 2006 monisteeseen on tehty lähinnä teknisiä muutoksia.

VR   AV

Sisältö

Luku 1

MITÄ LOGIIKKA ON

Logiikan sanotaan usein olevan tiede, joka tutkii *päätelmiä* eli *argumentteja*. Se koettaa erotella *pätevät* päätelmät *epäpätevistä*. Me osaamme tietenkin tehdä päättelyitä jokapäiväisessä elämässä ilman, että meidän pitäisi opetella logiikkaa. Voidaan kuitenkin kysyä, mitä jokapäiväiseen päättelyyn itse asiassa sisältyy ja millä perustein pätevä päättely voidaan erottaa epäpätevästä päättelystä. Tällaisten kysymysten tarkasteleminen on logiikan tehtäviä.

Loogikoilla on tiettyjä käsityksiä siitä, mitä oikealta päättelyltä on vaadittava, mutta on tärkeää huomata, ettei tästä kuitenkaan ole täydellistä yksimielisyyttä eikä ehkä voikaan olla. Jokapäiväinen päättely on monessa suhteessa enemmän tai vähemmän epämääräistä, joten se voi antaa aihetta moniin eri tulkintoihin. Kun sitä ruvetaan analysoimaan täsmällisin keinoin, joudutaan valitsemaan erilaisista vaihtoehdoista. Jotta loogikko voisi päättelyitä tutkia, on ne esitettävä jossakin kielessä. Tällöin joudutaan yleensä käyttämään sopivia *formaaleja* kieliä. Luonnollisen kielen lauseiden "kääntäminen" logiikan formaalille kielelle ei ole kuitenkaan ongelmatonta.

Nykyaikaisen käsityksen mukaan logiikka on kuitenkin paljon muutakin kuin pätevän päättelyn tutkimista. Se on erilaisten asioiden *eksaktia analyysia*. Eräs tärkeä puoli logiikassa on *totuuden* käsitteen tutkiminen; mitä se tarkoittaa, kun sanotaan, että jokin väittämä on *tosi* tai *epätosi*, tai että se on *yleispätevä*. Yleisemmin, logiikassa tutkitaan erilaisten kielien *lauseiden* (väittämien, väitelauseiden) ja *asiaintilojen* tai *mahdollisten maailmojen* (siis "todellisuuden") välistä suhdetta. Tällöin on kysymyksessä logiikan *semanttinen* puoli.

Logiikkaa on myös luonnehdittu sanomalla, että se on filosofian osa, joka tutkii tiedon *muotoa* eikä sen *sisältöä*. Vaikka tämä ei ehkä tarkkaan ottaen pidäkään paikkaansa, näemme myöhemmin, että esimerkiksi päätelmien pätevyys ei niinkään riipu siinä esiintyvien lauseiden sisällöstä tai siitä, mitä lauseet sanovat maailmasta, vaan pikemminkin niiden muodosta. Kun käytetään formaalia kieltä ja tutkitaan sen lauseita kiinnittämättä huomiota niiden merkitykseen, kyseessä on logiikan *syntaktinen* puoli.

Logiikka on filosofisen analyysin tärkeä väline. Kun tutkitaan jotakin filosofian kannalta tärkeää käsitettä, voidaan yrittää esittää tämä käsite logiikan viitekehyksessä ja tällä tavalla täsmentää sitä. Kun tämä on tehty, voidaan tarkasteltavan käsitteen merkitystä tutkia täsmällisin keinoin. Edellä mainittiin esimerkkinä päättely.

Logiikka on siis *käsiteanalyysin* väline. Silloin kun logiikkaa käytetään filosofisten käsitteiden analyysiin, puhutaan usein *filosofisesta logiikasta*. Logiikan menetelmät ovat suurelta osin matemaattisia, usein vielä formaalimpia kuin perinteisen matematiikan, ja toisaalta logiikkaa käytetään myös matemaattisten käsitteiden analyysiin ja matematiikan perusteiden tutkimiseen ja selventämiseen. Tämä on *matemaattista logiikkaa*. Myös filosofisen logiikan menetelmät ovat usein matemaattisia ja formaaleja. Silloin kun menetelmät ovat formaaleja on logiikka *formaalista* tai *symbolista*. On kuitenkin vaikea tehdä tarkkaa erottelua filosofisen ja matemaattisen logiikan välille. Paitsi matematiikan, myös muiden *tieteiden perusteita*, jopa taiteiden, voidaan tutkia käyttämällä logiikkaa. Tällöin logiikka toimii *metodologisena* välineenä.

Kun logiikkaa käytetään käsiteanalyysiin, herää usein kysymys siitä, onko se sovelias väline tähän tarkoitukseen. Voidaan esimerkiksi kysyä, vastaavatko tällä tavoin saadut tulokset ja käsitteelliset tarkastelut sitä, mitä ajattelemme asioista ”intuitiivisesti”, tai ovatko ne tarkasteltavan tutkimuskohteen kannalta merkityksellisiä. Niinpä on esimerkiksi huomattu, että kun logiikkaa sovelletaan kielitieteessä, siis luonnollisen kielen tutkimiseen, ei riitä, että tutkitaan vain syntaktisia ja semanttisia asioita. Näiden lisäksi täytyy ottaa huomioon kielen käyttäjät, konteksti, jossa kieltä käytetään, ja muut *pragmaattiset tekijät*. Edelleen on huomattu, että tutkittaessa matematiikan tai empiiristen tieteiden perusteita tarvitaan monenlaisia logiikoita; ei ole yhtä ainoaa loogista systeemiä, joka olisi sovelias. Tällaiset huomiot ovat johtaneet logiikan voimakkaaseen kehittymiseen erityisesti viime vuosikymmeninä. Näin erilaiset sovellukset voivat olla kimmokkeena kehitykselle. Toisaalta logiikka, niinkuin matematiikka, on oma tieteenalansa, joka kehittyy myös itsenäisesti, sovelluksista riippumatta.

Tämän kurssin puitteissa käsitellään eräitä edellä mainittuja logiikan piirteitä, mutta monia niistä voidaan vain sivuta. Aloitamme tutkimalla pätevää päättelyä ei-formaalilla tavalla; erityisesti kysymystä, miten päättely, vaikka se sinänsä onkin syntaktinen prosessi, voidaan liittää semanttisiin tarkasteluihin. Sanomme jotakin totuuden käsitteestä ja mahdollisista maailmoista. Tarkastelemme sitten tarkemmin lauselogiikan syntaksia, siis sitä, millaisia hyvin muodostettuja ilmaisuja lauselogiikan kielessä on, esittelemme totuustaulumenetelmän ja tutustumme lauselogiikan semantiikkaan. Sen jälkeen tutkimme predikaattilogiikan syntaksia ja semantiikkaa. Viimeisessä luvussa perehdymme todistusteoriaan. Määrittelemme tällöin täsmällisesti syntaktisesti, millaiset päättelyt ovat päteviä lauselogiikassa. Koetamme lähinnä saada yleiskuvan ns. *klassisen logiikan* periaatteista ja myös jonkinlaisen tuntuman sen formaaleihin menetelmiin. On kuitenkin hyvä pitää mielessä, ettei klassinen logiikka ole ainoa mahdollinen, joskin tavallisesti sitä pidetään ”standardilogiikkana” ja lähtökohtana muiden loogisten periaatteiden tarkastelulle. Erilaisia periaatteita ja logiikoita on kehitetty ja tutkittu metodologisista syistä ja myös siksi, että näkemykset ovat erilaisia.

1.1 Päättely

Päätelmä eli *argumentti* koostuu siitä, että joistakin *oletuksista* eli *premisseistä* seuraa tietty *johtopäätös*. Päätelmä syntyy *päättelyn* tuloksena. Päätelmä voi olla *oikea* eli (*loogisesti*) *pätevä* tai *epäpätevä*. Seuraava päätelmä näyttää pätevältä:

(1.1)	*Sokrates on ihminen.*	
	Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia.	(Premissit)
	Siis: Sokrates on kuolevainen.	(Johtopäätös)

Näemme, että premissit ovat (olivat) *tosia*, samoin johtopäätös. Sen sijaan seuraava päätelmä ei ilmeisestikään ole pätevä:

(1.2) *Sokrates on ihminen.*
Eräät ihmiset ovat kuolevaisia.
Siis: Sokrates ei ole kuolevainen.

Premissit ovat tosia, mutta johtopäätös epätosi. Pätevälle päätelmälle asetetaankin yleisesti seuraava välttämätön ehto:

(1.3) jos premissit ovat tosia, niin johtopäätös on tosi.

Tämä on tärkeä ominaisuus. Pätevä päättely ei sen mukaan johda ”totuuden ulkopuolelle”, mikäli premissit ovat tosia. Sanotaan, että pätevä päättely on *totuuden säilyttävä*. Toisin sanoen jos joku hyväksyy premissit tosiksi ja päättely on pätevä, hänen on hyväksyttävä myös johtopäätös todeksi. Näin ei tietenkään ehkä tapahdu siinä tapauksessa, että hän *ei tiedä*, että päättely on pätevä. Tämä ongelma koskee ns. *episteemistä logiikkaa*.

Ehto (1.3) ei kuitenkaan ole riittävä ehto pätevälle päättelylle, kuten näemme seuraavasta esimerkistä:

(1.4) *Sokrates on ihminen.*
Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia.
Siis: Sokrates on filosofi.

Tässä premissit ovat tosia kuten myös johtopäätös, mutta silti päätelmä on selvästi epäpätevä. Ehto (1.3) onkin vaatimus, joka päätelmän täytyy vähintään toteuttaa, jotta se olisi pätevä. Toisaalta päätelmä voi olla pätevä, vaikka sekä premissit että johtopäätös olisivat epätosia:

(1.5) *Sokrates on suomalainen.*
Kaikki suomalaiset ovat kuolemattomia.
Siis: Sokrates on kuolematon.

Voidaan myös esittää esimerkkejä pätevistä päätelmistä, joissa todesta ja epätodesta premissistä seuraa epätosi johtopäätös tai joissa epätosista premisseistä seuraa tosi johtopäätös. Näemme, ettei kysymyksellä, ovatko premissit tosia vai ei, ole sinänsä merkitystä päätelmän pätevyydelle. Tarkastelemme hieman myöhemmin, mikä on premissien ja johtopäätöksen semanttinen suhde. Pätevää päätelmää voidaan luonnehtia täsmällisin semanttisin keinoin. Tähän asti olemme luottaneet luontaiseen kykyymme erottaa useissa tapauksissa pätevät päätelmät epäpätevistä.

Ennenkuin menemme semanttisiin tarkasteluihin, mainittakoon eräs tärkeä syntaktinen pätevän argumentin ominaisuus. Tarkastelkaamme argumentteja (1.1) ja (1.5) sekä vaikkapa seuraavaa:

(1.6) *Pekka on korppi.*
Kaikki korpit ovat mustia.
Siis: Pekka on musta.

Näillä argumenteilla on selvästi sama *looginen muoto* eli sama *looginen rakenne*, jonka voimme alustavasti esittää seuraavasti:

(1.7)	*a on A.*	(a:lla on ominaisuus A)
	Jokainen A on B.	(Kaikilla, joilla on ominaisuus A, on ominaisuus B)
	Siis: a on B.	(a:lla on ominaisuus B)

Voimme todeta, että päätelmän pätevyys ei niinkään riipu siinä esiintyvien lauseiden aktuaalisesta sisällöstä, vaan niiden loogisesta muodosta. Sijoitettiinpa päättelyssä (1.7) a:n paikalle mikä tahansa nimi ja A:n ja B:n paikalle mitä tahansa ominaisuuksien nimiä, saadaan pätevä päätelmä. Näin tulkittuna ehto (1.7) antaa syntaktisen kriteerin päätelmän pätevyydelle; mutta näemme toisaalta, että tämä on yhteydessä semanttiseen kriteeriin (1.3).

Edellä tarkastellun tapaisia päätelmiä kutsutaan (varsinkin formaalisissa yhteyksissä) myös *deduktioiksi*. Pätevä argumentti, joka on deduktio, on tietyssä mielessä sitova: johtopäätös seuraa *välttämättä* premisseistä. Argumentti, jossa johtopäätös ei seuraa premisseistä välttämättä tai varmuudella, vaan pikemminkin suurella todennäköisyydellä, on *induktiivinen* päätelmä. Niitä emme kuitenkaan tarkastele.

Käytännössä ei päätelmiä useinkaan esitetä täydellisinä. Voimme esimerkiksi päätellä seuraavasti:

(1.8) *Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia.*
Siis: Sokrates on kuolevainen,

tai vain: 'Sokrates on kuolevainen, koska kaikki ihmiset ovat.' Voimme tällöin puhua *käytännöllisestä* tai *jokapäiväisestä* päättelystä. Kysymys käytännöllisen päättelyn loogisesta pätevyydestä voi ratketa, jos löydetään puuttuvat premissit.

1.2 Mahdolliset maailmat

Olemme todenneet, ettei päätelmän pätevyys kovin suuressa määrin riipu premissien aktuaalisesta totuudesta tai epätotuudesta eikä siitä, mikä niiden aktuaalinen tulkinta on. Se riippuu näistä seikoista ainoastaan siinä määrin kuin ehto (1.3) sanoo. Kun tässä yhteydessä puhutaan premissien ”aktuaalisesta totuudesta”, ”aktuaalisesta sisällöstä” tai lyhyesti vain ”totuudesta”, tarkoitetaan sen totuutta tai tulkintaa suhteessa tähän maailmaan tai siihen tilanteeseen tai asiaintilaan, jossa asianomaisella hetkellä olemme tai jota jostakin syystä tarkastelemme. Jos esimerkiksi ollessani tietyssä huoneessa sanon:

(1.9) *Tämän huoneen ovi on kiinni,*

niin *aktuaalinen tilanne* tai *aktuaalinen maailma* muodostuu niistä seikoista, tapahtumista jne., jotka liittyvät asianomaiseen huoneeseen ja siihen seikkaan, että olen siinä huoneessa. Mitä kaikkea täsmällisemmin sanottuna siihen liittyy, on ainakin osittain sopimuksenvarainen asia. Mutta ymmärrämme kuitenkin, mitä aktuaalinen tilanne tai maailma tässä yhteydessä suurinpiirtein tarkoittaa. Kun ajattelemme aktuaalisen maailman tällä tavoin kiinnitetyksi, ymmärrämme myös sen, mitä tarkoitetaan lauseen (1.9) aktuaalisella totuudella tai epätotuudella, ts. sillä, että se on tosi tai epätosi, tai mikä on sen aktuaalinen tulkinta. Tällaisten lauseiden yhteydessä puhutaan usein, esimerkiksi kielitieteessä, siitä *kontekstista* eli *asiayhteydestä*, jossa lause sanotaan.

Samoin, jos tarkastelemme lausetta

(1.10) *Helsinki on Suomen pääkaupunki,*

huomaamme, että se on tosi, siis tosi tässä aktuaalisessa maailmassamme, joka ehkä voidaan intuitiivisesti ajatella ”laajemmaksi” tai ”suuremmaksi” maailmaksi kuin äskeinen. Mitään tarkkoja rajoja maailman koolle kummassakaan tapauksessa ei tarvitse kuitenkaan asettaa, jotta ymmärtäisimme näiden lauseiden merkityksen ja näkisimme, ovatko ne tosia vai eivät. Niinpä voimme esimerkiksi todeta, että tiettyyn historialliseen tilanteeseen nähden (1.10) ei ole tosi.

Osoitamme nyt, että pätevää päätelmää voi luonnehtia siinä esiintyvien lauseiden *merkityksien* avulla, kun ”merkitys” määritellään sopivalla tavalla. Saamme näin päättelylle semanttisen tulkinnan, joskin päättelyä, sikäli kuin sen muodosta on kysymys, voidaankin pitää syntaktisena toimituksena, kuten on jo aikaisemmin todettu. Tarkastelut, jotka koskevat lauseiden merkityksiä eivät ole tärkeitä vain päättelyn kannalta, vaan filosofian ja loogisen semantiikan kannalta yleisemminkin.

Koska siis puhuminen aktuaalisesta totuudesta ei riitä, meidän on aktuaalisen maailman lisäksi tarkasteltava muitakin ns. *mahdollisia maailmoja*, *mahdollisia asiaintiloja* tai *tilanteita*. Voimme kuvitella esimerkiksi sellaisen tilanteen tai maailman, jossa Helsinki ei ole Suomen pääkaupunki eli jossa lause (1.10) on epätosi. Se ei ole tämänhetkinen aktuaalinen maailma, mutta se on jossakin mielessä mahdollinen ja se on jopa ollut tietyssä historian vaiheessa aktuaalinen. Tämän maailmamme tila esimerkiksi vuonna 2020 voisi edustaa mahdollista maailmaa, joka ei ole aktuaalinen mutta tulee aktuaaliseksi eli *aktualisoituu* tai *realisoituu* tuona vuonna. Toisaalta voidaan myös puhua mahdollisista maailmoista, jotka eivät koskaan aktualisoidu; esimerkiksi maailma, jossa on siivekkäitä hevosia, voisi ehkä olla sellainen. Se on mahdollinen jossakin mielessä; se on esimerkiksi *loogisesti mahdollinen* maailma, vaikka se ei olisikaan *fyysisesti*, *biologisesti* tai *fysikaalisesti* mahdollinen. Meillä voi siis olla erilaisia kriteerejä sille, mikä on mahdollista, mikä ei; mutta logiikan yhteydessä tarkastellaan tavallisesti loogista mahdollisuutta (joka sekin on usein suhteessa annettuun logiikkaan).

Siitä, mitä mahdolliset maailmat tarkkaan ottaen ovat, meidän ei tarvitse tässä vaiheessa välittää, vaan riittää ajatella, että mahdollinen maailma on jotakin, jossa sopivan, tarkasteltavan *kielen* lauseet ovat tosia tai epätosia, ts. jossa niillä on *totuusarvo*. Toisaalta sovimme, että nimenomaan *lauseiksi* kutsutaan niitä kielen ilmaisuja, joilla on totuusarvo maailmoissa; lauseet ovat *totuudenkantajia*. Niinpä luonnollisen kielen lauseita tässä merkityksessä ovat indikatiivilauseet ja muut väitelauseet, mutta eivät esimerkiksi kysymyslauseet. Usein luonnollista kieltä käytettäessä konteksti määrää, onko lause väitelause vai ei. Lauseet ovat kielen syntaksiin kuuluvia olioita, kun taas mahdolliset maailmat ja totuusarvot kuuluvat semantiikkaan. Silloin kun tarkastellaan jonkin logiikan *formaalia semantiikkaa*, tarvittava mahdollisen maailman käsite määritellään aina täsmällisesti (matemaattisesti, joukko-opillisesti). Tällaisia joukko-opillisesti konstruoituja mahdollisia maailmoja kutsutaan usein *malleiksi*.

Olettakaamme, että voimme puhua kaikkien maailmojen (mallien) kokoelmasta (luokasta, avaruudesta). Voimme nyt määritellä eräitä tärkeitä semanttisia käsitteitä. Lauseen sanotaan olevan aktuaalisesti tosi, jos se on tosi aktuaalisessa maailmassa; siis jos se on tosi maailmassa, jossa sitä tarkastelemme. Lause on *loogisesti tosi*, jos se on tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa. Vastaavasti lause on *loogisesti epätosi*, jos se on epätosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa. Lause on *kontingentti*, jos se on tosi jossain maailmoissa ja epätosi toisissa. Voimme ajatella lauseen merkityksen määräävän, missä maailmoissa se on tosi ja missä epätosi. Joskus jopa lauseen merkitykseksi määritellään niiden mahdollisten maailmojen, joissa lause on tosi, muodostama kokoelma.

Modaalilogiikan yhteydessä loogisesti tosia lauseita sanotaan usein *välttämättömiksi* ja loogisesti epätosia *mahdottomiksi* lauseiksi. Lausetta, joka on tosi ainakin jossain maailmassa, sanotaan *mahdolliseksi*. Modaalilogiikka on juuri logiikkaa, joka tutkii välttämättömyyden ja mahdollisuuden käsitteitä. Usein siinä käsitteen ”välttämättä tosi” ala katsotaan laajemmaksi kuin käsitteen ”loogisesti tosi”. Tämä tarkoittaa, että kaikkia loogisia totuuksia pidetään välttämättöminä totuuksina, mutta jotkut välttämättä todet lauseet eivät ole loogisesti tosia.

Lause B on lauseen A *looginen seuraus*, jos B on tosi kaikissa niissä maailmoissa, joissa A on tosi. Tämä merkitsee, että A ”sallii” vain osan (tai enintään samat) niistä maailmoista, jotka B sallii. Tässä mielessä voidaan sanoa, että A on ”loogisesti voimakkaampi” kuin B. Intuitiivisesti katsoen tuntuukin luonnolliselta ajatella, että mitä voimakkaamman ehdon lause ilmaisee, sitä ”vähemmän” voi olla maailmoja, joissa se on tosi. Loogisen seurauksen määritelmä yleistetään koskemaan useampia lauseita seuraavasti: lause B on lauseiden A_1, A_2, …, A_n looginen seuraus, jos kaikissa niissä maailmoissa, joissa premissit A_1, A_2, …, A_n ovat tosia, on myös johtopäätös B tosi.

Jotta looginen seuraus, joka on semanttinen käsite, ja pätevä päätelmä, joka on syntaktinen käsite, vastaisivat toisiaan, pitää seuraavan ehdon olla voimassa: annetuista premisseistä voidaan päätellä jokin johtopäätös täsmälleen silloin kuin tämä johtopäätös on näiden premissien looginen seuraus. Voidaan osoittaa, että myöhemmin tarkasteltavien formaalien logiikkojen yhteydessä tämä ehto on voimassa, kun mahdollisten maailmojen avaruutena on kussakin tapauksessa (kutakin logiikkaa vastaten) kaikkien loogisesti mahdollisten maailmojen luokka. Ehtoa ei tietenkään voi osoittaa oikeaksi, ennen kuin siinä esiintyvät käsitteet on tehty täsmällisiksi. Logiikan peruskurssin yhteydessä ehtoa ei todisteta.

Luku 2

LAUSELOGIIKKA

Lauselogiikassa tutkitaan sekä syntaktisella että semanttisella tasolla *loogisia konnektiiveja* ja niiden avulla muodostettuja lauseita sekä myös formaalia päättelyä. Tässä luvussa tarkastelemme *klassisen lauselogiikan* formaalia määrittelyä ja semanttisia kysymyksiä. Viimeisessä luvussa tarkastelemme lauselogiikan todistusteoriaa. On huomattava, että on olemassa lauselogiikoita, joissa syntaktiset tai semanttiset asiat on määritelty eri tavalla kuin klassisessa logiikassa. Pidämme aluksi tarkastelut ei-formaalilla tasolla, ja vasta vähän myöhemmin tutkimme, miten lauselogiikka voidaan formalisoida.

2.1 Loogiset konnektiivit

Loogiset konnektiivit vastaavat tiettyjä luonnollisen kielen ilmaisuja, jotka ovat tärkeitä myös ei-formaalissa matemaattisessa kielessä. Lauselogiikassa konnektiiveille *annetaan* täsmälliset semanttiset merkitykset. On siis huomattava, että merkitykset ovat *sopimusluonteisia*, joskin pyritään noudattelemaan luonnollisen kielen merkityksiä. Ne kuitenkin poikkeavat osittain vastaavista luonnollisen kielen ilmaisujen merkityksistä jo senkin takia, että jälkimmäiset eivät ole täysin yksikäsitteisiä. On myös huomattava, että vain joillakin luonnollisen kielen konnektiiveilla on vastineensa lauselogiikassa.

Klassisen lauselogiikan konnektiivit ovat seuraavat:

nimitys	merkintä (vaihtoehtoinen)		vastine luonnollisessa kielessä
negaatio	$\neg$	$(\sim, -)$	ei (ole niin, että ...)
konjunktio	$\wedge$	$(\&)$	ja
disjunktio	$\vee$		tai
implikaatio	$\rightarrow$	$(\supset, \Rightarrow)$	jos ..., niin ...
ekvivalenssi	$\leftrightarrow$	$(\equiv, \Leftrightarrow)$	jos ja vain jos

Konnektiivien käyttö on seuraavanlainen. Olkoot A ja B lauseita. Niistä muodostetaan konnektiivien avulla *yhdistettyjä lauseita* seuraavasti:

yhdistetty lause	luetaan	nimitys
$\neg A$	ei A	A:n negaatio
$A \wedge B$	A ja B	A:n ja B:n konjunktio (A ja B ovat konjunkteja)
$A \vee B$	A tai B	A:n ja B:n disjunktio (A ja B ovat disjunkteja)
$A \rightarrow B$	jos A, niin B	A:n ja B:n implikaatio (A etulause, B jälkilause)
$A \leftrightarrow B$	A, jos ja vain jos B	A:n ja B:n ekvivalenssi.

Käytämme silloin tällöin lauseeelle samaa nimitystä kuin sen ns. pääkonnektiiville (ks. s. 18). Puhumme siis esimerkiksi implikaatiosta $A \rightarrow B$ sen sijaan, että käyttäisimme tarkempaa, mutta pidempää ilmausta ”implikaatiolause”.

Loogisia konnektiiveja sanotaan *totuusfunktioiksi*. Se tarkoittaa, että kunkin yhdistetyn lauseen totuusarvo määräytyy yksikäsitteisesti sen osalauseiden totuusarvoista (edellinen on siis jälkimmäisten funktio). Tutkimme seuraavaksi, miten totuusarvot määräytyminen voidaan esittää *totuustaulujen* avulla. Käsittelemme ensin kutakin konnektiivia erikseen.

Negaatio

Tarkastellaan lauseita A ja $\neg A$:

$$A\text{: 'Soitan Maijalle';}$$
$$\neg A\text{: 'En soita Maijalle'.}$$

Sovimme, että jos A on tosi jossakin tilanteessa (maailmassa), niin $\neg A$ on tässä tilanteessa epätosi ja kääntäen. Tämä vastaa luonnollisen kielen kieltosanan merkitystä (niissä yhteyksissä, joissa totuuden ja epätotuuden lisäksi ei ole muita vaihtoehtoja). Merkitään lyhyesti t, jos lause on *tosi* (annetussa tilanteessa) ja e, jos se on *epätosi*.

Jos nyt A on mielivaltainen lause, saadaan seuraava yleinen totuustaulu negaatiolle:

A	$\neg A$
t	e
e	t

Konjunktio

Seuraava esimerkki osoittaa, millainen totuusfunktio konjunktio on:

A: 'Soitan Maijalle';
B: 'Menen käymään Maijan luona';
$A \wedge B$: 'Soitan Maijalle ja menen käymään Maijan luona'.

Sovimme, että $A \wedge B$ on tosi (annetussa tilanteessa) täsmälleen silloin kun molemmat konjunktit A ja B ovat tosia. Tämä on se merkitys, joka sanalla ”ja” on suomenkielessä. Jos nyt A ja B merkitsevät mielivaltaisia lauseita, saadaan yleisesti:

A	B	$A \wedge B$
t	t	t
t	e	e
e	t	e
e	e	e

Disjunktio

Kuten näimme, negaatiolle ja konjunktiolle annetaan sama merkitys kuin vastaavilla luonnollisen kielen ilmaisuilla yleensä on. Mutta disjunktion kohdalla joudutaan valitsemaan ja tarkentamaan, sillä sanalla ”tai” on tavallisessa kielenkäytössä kaksi merkitystä. Seuraavat esimerkit osoittavat eron:

(2.1) *Soitan Maijalle tai menen käymään Maijan luona.*

Jos puhuja tekee tämän lupauksen, hän ilmeisesti tarkoittaa, että hän aikoo tehdä toisen mainituista teoista, mutta *ei* molempia, vaikka lause sinänsä ehkä sallisi molemmat. Tällaista ”tai”-sanan tulkintaa sanotaan *eksklusiiviseksi*, ja se on ilmeisesti lähellä ilmaisun ”joko-tai”-merkitystä. Toisaalta, jos haluan esimerkiksi kuulla, mitä tapahtui eilen yliopistolla, ja tiedän, että Maija ja Matti olivat silloin siellä, voin sanoa:

(2.2) *Soitan Maijalle tai Matille,*

eli täydellisemmin: 'Soitan Maijalle tai soitan Matille'. Jos nyt soitan ensin Maijalle, joka ei kaikesta huolimatta tiedäkään, mitä yliopistolla tapahtui, voin soittaa *myös* Matille ja silti katsoa pitäneeni lupaukseni (2.2). Tällainen ”tai”-sanan tulkinta sallii siis molemmat vaihtoehdot, joten sitä voidaan sanoa *inklusiiviseksi*. Klassisessa logiikassa disjunktion merkitys sovitaan inklusiiviseksi. Sovitaan siis, että lauseiden

$$A\text{: 'Soitan Maijalle';}$$
$$B\text{: 'Soitan Matille'}$$

disjunktio

$$A \vee B\text{: 'Soitan Maijalle tai soitan Matille'}$$

on tosi (annetussa tilanteessa) täsmälleen silloin kun ainakin toinen disjunkteista A ja B on tosi. Tämä yleistetään jälleen mielivaltaisille lauseille A ja B:

A	B	$A \vee B$
t	t	t
t	e	t
e	t	t
e	e	e

Implikaatio

Implikaatiota siinä merkityksessä kuin se määritellään klassisessa logiikassa, sanotaan usein myös *materiaaliseksi implikaatioksi*. Luonnollisen kielen ilmaisu 'jos ..., niin' on monimerkityksinen. Se voi esimerkiksi ilmaista seurausrelaatiota tai kausaalista suhdetta:

(2.3) *Jos luku on suurempi kuin nolla, niin se ei ole pienempi kuin nolla.*

(2.4) *Jos vettä kuumennetaan, niin se höyrystyy.*

Itse asiassa nämä ilmaisevat eräänlaista vahvaa yhteyttä etu- ja jälkilauseiden välillä. Jos edellinen on tosi, niin siitä jossakin mielessä *seuraa*, että jälkimmäinenkin on tosi. Lauselogiikan materiaalinen implikaatio ei ilmaise seurausrelaatiota, joskin se on yhteydessä siihen, kuten myöhemmin näemme. Se tarkoittaa vain, että jos etulause on tosi, niin jälkilausekin on tosi; ei, että jälkimmäisen totuus seuraisi edellisen totuudesta. Hyväksymme siis esimerkiksi seuraavanlaiset implikaatiot:

(2.5) *Jos Maa on litteä, niin Mars on planeetta.*

(2.6) *Jos Maa on litteä, niin Kuukin on.*

Näiden kummankin etulause on epätosi, mutta ne itse katsotaan tosiksi. Luonnollisessa kielessä ei tällaisesta ole mitään yksikäsitteistä sopimusta. Tarkastellaan vielä seuraavaa esimerkkiä:

(2.7) *Jos vappuna on lunta katolla, niin sitä on maassakin.*

Tämä *ei ota kantaa* siihen tapaukseen, että jonakin vappuna ei ole lunta katolla. Mutta klassisessa logiikassa *sovitaan*, että tällaisessa tilanteessa (maailmassa) (2.7) on *tosi*. Sen sijaan jo tavallisessa kielenkäytössä (2.7) olisi epätosi, jos sen etulause olisikin jonakin vappuna tosi, mutta jälkilause epätosi. Sovitaan siis, että lauseiden

$$A\text{: 'Vappuna on lunta katolla';}$$
$$B\text{: 'Sitä (ts. lunta) on maassakin'}$$

implikaatio

$$A \to B\text{: 'Jos vappuna on lunta katolla, niin sitä on maassakin'}$$

on epätosi (annetussa tilanteessa) vain kun A on tosi mutta B epätosi. Jos tämä yleistetään, saadaan implikaatiolle seuraava totuustaulu:

A	B	$A \to B$
t	t	t
t	e	e
e	t	t
e	e	t

Jos se tuntuu erikoiselta, että implikaatio määritellään tällä tavoin, niin että esimerkiksi lauseet (2.5) ja (2.6) ovat tosia, niin todettakoon, että matematiikassa sillä on tämä sama merkitys. Edelleen, se antaa implikaatiolle tietyn yhteyden päättelyyn, kuten myöhemmin näemme. Voisimme ehkä lauseista (2.5) ja (2.6) sanoa, että ne ovat "triviaalisti tosia".

Ekvivalenssi

Ilmaisu 'A, jos ja vain jos B' merkitsee samaa kuin 'Jos A, niin B, ja jos B, niin A'. Tämä tekee ko. ekvivalenssin todeksi täsmälleen niissä tapauksissa, että A:lla ja B:llä on sama totuusarvo:

A	B	$A \leftrightarrow B$
t	t	t
t	e	e
e	t	e
e	e	t

Totuusehdot ja mahdolliset maailmat

Totuustaulu edustaa kaikkia mahdollisia annetun lauseen totuusarvojakaumia. Teemme nyt seuraavan sopimuksen: jos mahdollinen maailma (tilanne) w noudattaa yllä olevien totuustaulujen mukaisia totuusehtoja konnektiiveille, sitä sanotaan *klassiseksi*.

Jos siis w on klassinen mahdollinen maailma, niin jokainen atomilause p on joko tosi tai epätosi maailmassa w ja

1. $\neg A$ on tosi maailmassa w, jos ja vain jos A on epätosi maailmassa w;

2. $A \wedge B$ on tosi maailmassa w, jos ja vain jos A ja B ovat tosia maailmassa w.

3. $A \vee B$ on tosi maailmassa w jos ja vain jos ainakin toinen lauseista A ja B on tosi maailmassa w;

4. $A \to B$ on tosi maailmassa w jos ja vain jos ei pidä paikkaansa että A on tosi ja B epätosi maailmassa w;

5. $A \leftrightarrow B$ on tosi maailmassa w jos ja vain jos sekä A että B ovat molemmat tosia tai molemmat epätosia maailmassa w.

Esimerkki 1. Oletetaan, että p ja q ovat tosia maailmassa w. Tällöin disjunktio $p \vee q$ on tosi maailmassa w ja negaatio $\neg p$ on epätosi maailmassa w. Siis implikaatio $p \vee q \to \neg p$ on epätosi maailmassa w.

Annamme seuraavaksi esimerkin maailmasta, jossa implikaatio $p \vee q \to \neg p$ on tosi. Implikaation totuusehtojen mukaan se on tosi, jos etulause on epätosi tai jälkilause tosi. Kun siis esimerkiksi $\neg p$ on tosi maailmassa w' eli kun p on epätosi maailmassa w', niin implikaatio $p \vee q \to \neg p$ on tosi maailmassa w'.

Esimerkki 2. Tutkimme, millaisessa maailmassa w implikaatio $p \vee q \to p$ on epätosi. Implikaation totuusehtojen mukaisesti etulauseen $p \vee q$ pitää olla tosi ja jälkilauseen p epätosi maailmassa w. Siis maailman w pitää olla sellainen, että q on siinä tosi, mutta p epätosi.

Esimerkki 3. Onko olemassa sellaista maailmaa, jossa lause $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ on epätosi? Jos $p \wedge q$ on tosi jossain maailmassa w, niin sekä p että q ovat siinä tosia. Tässä tapauksessa siis myös lause $q \wedge p$ on tosi maailmassa w. Jos $p \wedge q$ on epätosi jossain maailmassa w, niin ainakin toinen lauseista p ja q on epätosi maailmassa w, jolloin myös $q \wedge p$ on epätosi maailmassa w.

Jokaisessa maailmassa siis lauseiden $p \wedge q$ ja $q \wedge p$ totuusarvot ovat samoja. Ei ole siis olemassa sellaista maailmaa, jossa ekvivalenssi $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ olisi epätosi.

2.2 Lauselogiikan syntaksi

Logiikassa pyritään määrittelemään täysin yksikäsitteisesti tarvittavat syntaktiset ja semanttiset käsitteet. Tähän päästään esimerkiksi formalisoimalla tarkasteltavan logiikan syntaksi ja määrittelemällä semanttiset käsitteet käyttäen joukko-opillista ja muuta matemaattista kieltä.

Tutkimme nyt, miten lauselogiikan syntaksi formalisoidaan. Tarkoituksena on antaa sellainen määritelmä ”lauseelle”, että periaatteessa voidaan annetusta merkkijonosta mekaanisesti todeta, onko se lauselogiikan lause vai ei. (”Lauseen” tilalla käytetään tässä yhteydessä myös nimitystä ”kaava”. Noudatamme käytäntöä, että semanttisissa tarkasteluissa puhumme enimmäkseen lauseista, mutta syntaktisissa kaavoista.) Tämä edellyttää ensiksikin, että sovitaan, mitkä ovat ne syntaktiset merkit, joita saadaan käyttää, ja toiseksi, miten näitä merkkejä voidaan yhdistellä. Näin siirrymme vielä yhden askeleen eksaktimpaan suuntaan.

Sekä syntaktiset että semanttiset tarkastelut yksinkertaistuvat usein, jos valitaan *peruskonnektiivit*, joiden avulla muut konnektiivit voidaan määritellä. Peruskonnektiiveiksi voidaan ottaa negaatio yhdessä disjunktion, konjunktion tai implikaation kanssa. On myös mahdollista ottaa käyttöön kokonaan uusia konnektiiveja ja määritellä tutut konnektiivit näiden avulla. Käytämme tässä kuitenkin kaikkia edellä esiteltyjä konnektiiveja.

Perussymbolit

Ensimmäinen askel formalisoinnissa on valita käytettävät perusmerkit, joista muut ilmaisut rakennetaan. Ne ovat *perussymboleja (primitiivisymboleja)*, ja ne muodostavat *sanaston* eli *aakkoston*. Perussymboleita on tietenkin myös luonnollisessa kielessä, mutta formaalikielessä ne on tarkemmin rajattu. Sovimme, että perussymbolit ovat seuraavat:

p_1, p_2, p_3, ...	lausemuuttujat
$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$	konnektiivit
(,)	sulut.

Lausemuuttujia kutsutaan myös *atomilauseiksi*. Myös nimitystä ”atomikaava” ja ”propositiosymboli” käytetään. Niitä on siis ääretön määrä (tavallisesti ajatellaan, että niitä on ns. numeroituvasti ääretön määrä). Merkitään niiden joukkoa kirjaimella L:

$$L = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}.$$

Lausemuuttujiksi voidaan tietenkin valita toisiakin symboleita, jolloin saadaan ikäänkuin eri kieliä.

Perussymbolit kuuluvat *objektikieleen* eli siihen formaalikieleen, jota tarkastelemme; samoin kohta määriteltävät kaavat eli lauseet. Koska joudumme *puhumaan* näistä objektikielen ilmaisuista, meillä on oltava sopiva *metakieli*, jossa niihin voidaan viitata, ts. kieli, jossa niistä voidaan puhua. Sovimme, että kirjaimet p, q, r, ... ovat metakieleen kuuluvia *metavariaabeleita*, jotka viittaavat lausemuuttujiin ja kirjaimet A, B, C, ... metavariaabeleita, jotka viittaavat mielivaltaisiin kaavoihin. Konnektiivit ja sulut viittaavat itseensä.

Kaavat

Seuraavaksi määritellään, mitä tarkoitetaan *kaavalla* eli *lauseella*. Tämä tapahtuu ns. kaavanmuodostussääntöjen avulla. Kaavat määritellään *induktiivisesti* eli sopivalla tavalla askeleittain. Kukin määritelmän askel, paitsi ensimmäinen, määrittelee kaavan yksinkertaisempien kaavojen avulla.

Kaavanmuodostussäännöt:

1. Lausemuuttujat ovat kaavoja.
2. Jos A on kaava, niin $\neg A$ on kaava.
3. Jos A ja B ovat kaavoja, niin $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ ja $(A \leftrightarrow B)$ ovat kaavoja
4. Muita kaavoja ei ole.

Tämä merkitsee, että jokainen kaava rakennetaan lausemuuttujista konnektiivien ja sulkujen avulla. Kaavassa $\neg A$ (huomaa, ettei tässä käytetä sulkeita) negaation $\neg$ *ala* on kaava A. Negaation alaan kuuluu siis sitä välittömästi seuraava lausemuuttuja tai sulkeiden sisällä oleva lause.

Esimerkki 4. Merkkijono $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow \neg\neg p_5)$ on kaava. Tämä nähdään osoittamalla, miten se muodostetaan vaiheittain atomikaavoista: p_1 ja p_2 ovat lausemuuttujina kaavoja, joten $(p_1 \rightarrow p_2)$ on kaava. Samoin $\neg p_5$ on kaava. Täten $\neg\neg p_5$ on kaava. Koska siis $(p_1 \rightarrow p_2)$ ja $\neg\neg p_5$ ovat kaavoja, niin $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow \neg\neg p_5)$ on kaava.

Esimerkki 5. Merkkijono $p_1 \wedge \wedge p_3$ ei selvästikään ole kaava. Tarkasti ottaen myöskään merkkijonot $p_1 \wedge p_2$ ja $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ eivät ole kaavoja (miksi?).

Rakennettaessa vaiheittain kaavaa lausemuuttujista lähtien jokaisessa vaiheessa käytetään yhtä konnektiivia. Viimeiseksi käytettyä konnektiivia kutsutaan kaavan *pääkonnektiiviksi*. Usein lauseita käsiteltäessä on ensin löydettävä pääkonnektiivi.

Esimerkki 6. Kaavan $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow \neg\neg p_5)$ pääkonnektiivi on ekvivalenssi $\leftrightarrow$, kaavan $(p_1 \rightarrow p_2)$ implikaatio $\rightarrow$ ja kaavan $\neg\neg p_5$ pääkonnektiivi on negaatio $\neg$.

Sulkujen poistaminen

Voidaan sopia, että kaavassa uloimmat sulut jätetään pois. Sulkeiden määrää voidaan vähentää myös sopimalla, miten kukin konnektiivi vaikuttaa kompleksisessa lauseessa, eli mikä on sen *(vaikutus)ala*. Tämä on analogista aritmetiikassa määriteltävän "oikean laskujärjestyksen" kanssa. Sovitaan, että

1. negaatiolla on pienin (vaikutus)ala;
2. konjunktiolla ja disjunktiolla on pienempi ala kuin implikaatiolla ja ekvivalenssilla.

Uloimpien sulkujen lisäksi jätetään pois sellaiset sulut, jotka eivät vaikuta konnektiivien alaan, kun eri konnektiivien aloilla on se keskinäinen järjestys joka on edellä esitetty.

Esimerkki 7. $((\neg A \vee B) \rightarrow C)$ lyhentyy muotoon $\neg A \vee B \rightarrow C$, koska disjunktion ala on suppeampi kuin implikaation.

Esimerkki 8. $(\neg A \vee (B \rightarrow C))$ lyhentyy muotoon $\neg A \vee (B \rightarrow C)$. Jäljellä olevaa sulkuparia ei voi poistaa.

Esimerkki 9. $((A \vee B) \wedge C)$ lyhentyy muotoon $(A \vee B) \wedge C$. Jäljellä olevaa sulkuparia ei voi poistaa, koska disjunktio ja konjunktio ovat samanarvoisia.

Esimerkki 10. Kaavassa $\neg(A \wedge B)$ olevaa sulkuparia ei voi poistaa, koska negaation ala on sitä välittömästi seuraava kaava.

Ellei sekaannusta aiheudu, käytetään usein merkintää $A \wedge B \wedge C$ kaavojen $(A \wedge B) \wedge C$ ja $A \wedge (B \wedge C)$ asemesta; niillä on samat totuustaulut. Vastaavasti voidaan merkitä $A \vee B \vee C$.

Kun on sovittu metavariaabelien käytöstä ja "tarpeettomien" sulkujen poistamisesta, niin voimme sanoa ilman sekaannusta, että kaikki näin saatavat ilmaisut *ovat* kaavoja, vaikka ne tarkasti ottaen vain viittaavat kaavoihin (siis tiettyihin objektikielen merkkiyhdelmiin). Ne eivät itse asiassa ole kaavoja, koska ne eivät kuulu objektikieleen. Esim. metakielen ilmaisu $p \vee q \to r$ viittaa objektikielen kaavoihin, jotka ovat muotoa $((p \vee q) \to r)$, ts. jotka saadaan tästä sijoittamalla p:n, q:n ja r:n paikalle mielivaltaisia lausemuuttujia. Analoginen sopimus vallitsee esimerkiksi matematiikassa, kun käytetään kirjaimia viittaamaan lukuihin, mutta kuitenkin sanotaan näistä kirjaimista, että ne ovat *lukuja*. Kun olemme tämän seikan todenneet, emme kiinnitä jatkossa siihen huomiota, ellei erikoisesti tule tarvetta. Tällainen on tyypillinen menettely eksakteissa menetelmissä. Sen jälkeen kun on sovittu, miten asiat pitää tarkasti esittää, voidaan tästä tarkkuudesta tinkiä, *ellei* sekaannusta aiheudu ja jos näin saadaan tarkastelut yksinkertaisemmiksi. On kuitenkin tärkeää tietää, miten periaatteessa voidaan tarpeen vaatiessa palata tarkkaan ilmaisuun. Logiikassa on lisäksi erittäin tärkeää huomata objektikielen ja metakielen ero. Kaikki keskustelu objektikielestä käydään metakielessä.

Merkinnät $\Rightarrow$ ja $\Leftrightarrow$

Ilmaukset 'jos ..., niin ...' ja '...jos ja vain jos ...' esiintyvät niin usein matemaattisissa teksteissä, että niille on otettu käyttöön omat merkinnät. Periaatteessa näille ilmauksille voisi hyvinkin käyttää merkintöinä implikaatiota $\to$ ja ekvivalenssia $\leftrightarrow$, mutta matematiikassa on yleisempää käyttää "kaksoisnuolia" $\Rightarrow$ ja $\Leftrightarrow$. Logiikan tutkimisen näkökulmasta tämä on sikäli hyvä ratkaisu, että nyt voidaan "yksinkertaisia" nuolia käyttää logiikan objektikielessä ja kaksoisnuolia metakielessä. Voimme siis käyttää metakielessä sellaisia ilmauksia kuin esimerkiksi "lause A on epätosi $\Rightarrow$ lause $A \to B$ on tosi" ja "$A \leftrightarrow B$ on tosi täsmälleen silloin kun on voimassa: A on tosi $\Leftrightarrow$ B on tosi." (Luettavuuden kannalta jälkimmäisessä ilmauksessa ei ilmausta "täsmälleen silloin kun" kannata korvata kaksoisnuolella $\Leftrightarrow$, vaikka niillä onkin sama merkitys.) Joskus ilmauksen "jos ja vain jos" ja kaksoisnuolen $\Leftrightarrow$ sijasta käytetään myös ilmausta "joss" (englanniksi "iff").

Rakennepuu

Jokaisella kaavalla A on *rakennepuu* $T(A)$, joka vastaa kaavaa muodostettaessa käytettyjä lauseenmuodostussääntöjä. Kaavan rakennepuu voidaan määritellä *rekursiivisesti* eli *induktiivisesti* seuraavasti:

$$T(p_i) = \qquad p_i$$

$$T(\neg B) = \qquad \begin{array}{c} \neg B \\ | \\ T(B) \end{array}$$

$$T(B \circ C) = \qquad \begin{array}{c} B \circ C \\ / \backslash \\ T(B) \quad T(C) \end{array}$$

Viimeisessä kohdassa $\circ$ voi olla mikä tahansa konnektiiveista $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$.

Rekursiivisen määritelmän idea on, että siinä esiintyviä sääntöjä sovelletaan toistuvasti, kunnes päädytään sellaiseen tilanteeseen, jossa ei enää tehdä mitään. Kaavan A rakennepuussa $T(A)$ muodostaa kaava A puun *rungon* ja kaavassa A esiintyvät lausemuuttujat (joille ei tehdä mitään) puun *lehdet*. Vaikka yllä oleva määritelmä saattaakin vaikuttaa vaikeatajuiselta, niin kyseessä on varsin yksinkertainen asia, kuten seuraavat esimerkit osoittavat.

Esimerkki 11. Muodostetaan esimerkeissä 7–10 olleiden kaavojen rakennepuut:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg A \vee B \rightarrow C & \\
 & /\backslash & \\
\neg A \vee B & & C \\
/\backslash & & \\
\neg A \quad B & & \\
| & & \\
A & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \neg A \vee (B \rightarrow C) & \\
 & /\backslash & \\
\neg A & & B \rightarrow C \\
| & & /\backslash \\
A & & B \quad C
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & (A \vee B) \wedge C & \\
 & /\backslash & \\
A \vee B & & C \\
/\backslash & & \\
A \quad B & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\neg (A \wedge B) \\
| \\
A \wedge B \\
/\backslash \\
A \quad B
\end{array}
$$

Esimerkki 12. Kaavan (vrt. esimerkki 4) $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow \neg\neg p_5)$ rakennepuu on:

$$
\begin{array}{ccc}
 & (p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow \neg\neg p_5 & \\
 & /\backslash & \\
p_1 \rightarrow p_2 & & \neg\neg p_5 \\
/\backslash & & | \\
p_1 \quad p_2 & & \neg p_5 \\
 & & | \\
 & & p_5
\end{array}
$$

2.3 Totuustaulumenetelmä

Luonnollisen kielen lauseet, varsinkin kompleksiset, ovat usein monimerkityksisiä. Logiikassa kuitenkin pyritään yksiselitteisyyteen. Tarkastelemme nyt, miten konnektiiveja voidaan käyttää kompleksisten lauseiden muodostamiseen ja miten tällaisten lauseiden totuusarvoja ”lasketaan”.

Olettakaamme, että joku sanoo seuraavasti:

(2.8) *Matkustan Helsinkiin ja käyn Maijan luona tai menen elokuviin.*

Tämä ei ole yksiselitteinen lause. Puhuja voi tarkoittaa toista seuraavista mahdollisuuksista:

(2.9) *Matkustan Helsinkiin ja käyn siellä Maijan luona tai menen siellä elokuviin;*

(2.10) *Matkustan Helsinkiin ja käyn siellä Maijan luona; tai menen elokuviin (esim. Tampereella).*

Jos luonnollisessa kielessä käytettäisiin sulkeita samaan tapaan kuin matematiikassa, saisimme nämä eri merkitykset esiin myös seuraavasti:

(2.11) *Matkustan Helsinkiin ja (käyn Maijan luona tai menen elokuviin)*;

(2.12) *(Matkustan Helsinkiin ja käyn Maijan luona) tai menen elokuviin.*

Näillä lauseilla on selvästi eri merkitys. Niitä voidaan tutkia lähemmin *kääntämällä* ne lauselogiikan kieleen. Tällöin meidän on ajateltava, että "ja" ja "tai" voidaan kääntää vastaaviksi loogisiksi konnektiiveiksi. Oletetaan lisäksi, että ylläolevat lauseet voidaan rakentaa konnektiivien avulla atomilauseista. Merkitään nyt seuraavasti:

p: 'Matkustan Helsinkiin';
q: 'Käyn Maijan luona';
r: 'Menen elokuviin'.

Tällöin lauseiden (2.11) ja (2.12) käännökset olisivat:

$$(2.11)\colon p \wedge (q \vee r)$$
$$(2.12)\colon (p \wedge q) \vee r.$$

Näillä on eri totuustaulut, kuten kohta näemme. Tarkastelemme ensin kuitenkin muutaman yksinkertaisemman lauseen totuustauluja.

Totuustaulujen muodostamista sanotaan *totuustaulumenetelmäksi*. Tällöin tarkastellaan kaikkia annetussa lauseessa esiintyvien atomilauseiden *totuusarvojakaumia*. Seuraavissa esimerkeissä on esitelty erilaisia tapoja tehdä totuustaulu.

Esimerkki 13. $\neg p \wedge q$:

p	q	$\neg p$	q	$\neg p \wedge q$
t	t	e	t	e
t	e	e	e	e
e	t	t	t	t
e	e	t	e	e

Huomaa, että yllä q:n sarake on toistettu vain sen takia, että voidaan lukea vasemmalta oikealle, kun määrätään lauseen $\neg p \wedge q$ totuusarvot. Toistaminen ei siis ole välttämätöntä. Totuusarvojakaumia on 2^2 kappaletta.

Esimerkki 14. $\neg(p \land q)$:

p	q	$p \land q$	$\neg(p \land q)$
t	t	t	e
t	e	e	t
e	t	e	t
e	e	e	t

Nopeampi tapa tehdä totuustaulu on kirjoittaa tarkasteltava lause vain kerran ja merkitä lasketut totuusarvot aina vastaavan konnektiivin alle. Esimerkiksi tutkittaessa lausetta $\neg(p \land q)$ otetaan lähtötilanteeksi taulukko, jossa on merkitty atomilauseiden alle niiden totuusarvojakauma. Tämän jälkeen lasketaan lauseen $p \land q$ totuusarvo siihen ja lopuksi lauseen $\neg(p \land q)$ totuusarvo, jolloin saadaan seuraava totuustaulu:

p	q	$\neg$	$(p \land q)$
t	t	$\boldsymbol{e}$	t
t	e	$\boldsymbol{t}$	e
e	t	$\boldsymbol{t}$	e
e	e	$\boldsymbol{t}$	e
1	1	**3**	2

Tässä pystyrivit on numeroitu siinä järjestyksessä, missä ne on tehty. Viimeiseksi saatu pystyrivi on syytä merkitä jollain tavalla (esimerkiksi kehystämällä, alleviivaamalla tai lihavoimalla).

Esimerkki 15. $(\neg p \to \neg p) \lor q$:

p	q	$(\neg$	p	$\to$	$\neg$	$p)$	$\lor$	q
t	t	e	t	t	e	t	$\boldsymbol{t}$	t
t	e	e	t	t	e	t	$\boldsymbol{t}$	e
e	t	t	e	t	t	e	$\boldsymbol{t}$	t
e	e	t	e	t	t	e	$\boldsymbol{t}$	e
1	1	2	1	4	3	1	**5**	1

Tässä on toistettu atomilauseiden totuusarvojakaumat. Tämä ei tietenkään ole välttämätöntä. Huomaa, että tämän lauseen totuusarvo on aina t.

Totuustaulussa voidaan jättää pois myös vasemmanpuoleiset atomilauseita vastaavat pystyrivit. Tällöin on kuitenkin muistettava merkitä useamman kerran esiintyvän atomilauseen alle aina sama totuusarvojakauma.

Esimerkki 16. $\neg p \to \neg p \lor q$:

$\neg$	p	$\to$	$\neg$	p	$\lor$	q
e	t	$\boldsymbol{t}$	e	t	t	t
e	t	$\boldsymbol{t}$	e	t	e	e
t	e	$\boldsymbol{t}$	t	e	t	t
t	e	$\boldsymbol{t}$	t	e	t	e
2	1	**5**	3	1	4	1

Tämänkin lauseen totuusarvo on aina t.

Lopuksi teemme lauseiden (2.11) ja (2.12) totuustaulut:

Esimerkki 17. $p \wedge (q \vee r)$:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
t	t	t	t	t
t	t	e	t	t
t	e	t	t	t
t	e	e	e	e
e	t	t	t	e
e	t	e	t	e
e	e	t	t	e
e	e	e	e	e

Totuusarvojakaumia on nyt 2^3 kappaletta.

Esimerkki 18. $(p \wedge q) \vee r$:

p	q	r	$p \wedge q$	r	$(p \wedge q) \vee r$
t	t	t	t	t	t
t	t	e	t	e	t
t	e	t	e	t	t
t	e	e	e	e	e
e	t	t	e	t	t
e	t	e	e	e	e
e	e	t	e	t	t
e	e	e	e	e	e

Näemme, että esimerkeissä 17 ja 18 olevilla lauseilla on eri totuustaulut, joten lauseilla (2.11) ja (2.12) on myös totuusarvojen valossa eri merkitys.

Tautologia

Huomasimme, että esimerkeissä 15 ja 16 lause saa aina totuusarvon t (tosi) riippumatta siitä, miten totuusarvot jakautuvat atomilauseiden kesken. Tällaiset lauseet ovat *tautologioita*.

Tekemällä totuustaulut huomataan myös, että esimerkiksi lauseet $p_1 \vee \neg p_1$ ja $\neg(p_1 \wedge \neg p_1)$ ovat tautologioita. Jos tässä atomilauseen p_1 paikalle sijoitetaan mikä tahansa lause (vaikka kompleksinen), niin saatu lause on edelleen tautologia. Totuustaulumenetelmää voi soveltaa myös suoraan tapauksiin, joissa atomilauseiden totuusjakaumien sijasta tutkitaankin mielivaltaisten lauseiden totuusjakaumia.

Esimerkki 19. Olkoon A mielivaltainen lause. Osoitetaan lause $A \vee \neg A$ tautologiaksi. Tehdään tavalliseen tapaan totuustaulu.

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
t	e	t
e	t	t

Totuustaulusta nähdään, että lause $A \vee \neg A$ saa aina totuusarvon t. Tässä tutkittiin siis tapauksia, että A:lla on totuusarvo t tai e. On tietenkin mahdollista, että jokin tietty lause A ei voi saada kuin vain toisen näistä totuusarvoista (A voisi olla vaikkapa $p_1 \vee \neg p_1$!). Oleellista kuitenkin on, että A:lla ei voi olla missään tapauksessa mitään muita totuusarvoja kuin t ja e.

Esimerkki 20. Osoitetaan, että lause $B = \neg((p \to q \vee r) \wedge \neg(p \to q \vee r))$ on tautologia. Kun merkitään $A = (p \to q \vee r)$, niin huomataan lauseen olevan muotoa $\neg(A \wedge \neg A)$. Tämä on tautologia:

$\neg(A \wedge \neg A)$
$\boldsymbol{t}$ t e e t
$\boldsymbol{t}$ e e t e
4 1 3 2 1

Siis myös alkuperäinen lause B on tautologia. Lauseen B voi tietenkin osoittaa suoraan tautologiaksi, mutta tällöin periaatteessa pitäisi totuustaulussa olla atomilauseiden p, q ja r eri totuusarvoja vastaavat 8 vaakariviä.

Esimerkin 19 tautologiaa kutsutaan kolmannen poissuljetun laiksi ja esimerkin 20 poissuljetun ristiriidan laiksi. Alla on esitetty nämä ja muutama muu tautologia ja niille käytetty nimitys.

T_1	$A \leftrightarrow A$	identiteetin laki
T_2	$\neg\neg A \leftrightarrow A$	kaksinkertaisen kiellon laki
T_3	$\neg(A \wedge \neg A)$	poissuljetun ristiriidan laki
T_4	$A \vee \neg A$	poissuljetun kolmannen laki
T_5	$A \wedge A \leftrightarrow A$	idempotenssilait
T_6	$A \vee A \leftrightarrow A$	
T_7	$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$	vaihdantalait
T_8	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$	
T_9	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	de Morganin säännöt
T_{10}	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	
T_{11}	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	kontrapositio
T_{12}	$(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	liitäntälait
T_{13}	$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	
T_{14}	$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	osittelulait
T_{15}	$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	

Esimerkki 21. Todistetaan tautologiaksi T_{11}

A	B	$(A \to B)$	$\leftrightarrow$	$(\neg B$	$\to$	$\neg A)$
t	t	t	$\boldsymbol{t}$	e	t	e
t	e	e	$\boldsymbol{t}$	t	e	e
e	t	t	$\boldsymbol{t}$	e	t	t
e	e	t	$\boldsymbol{t}$	t	t	t

Esimerkki 22. Todistetaan tautologiaksi T_{14}

A	B	C	$A \land$	$(B \lor C)$	$\leftrightarrow$	$(A \land B)$	$\lor$	$(A \land C)$
t	t	t	t	t	$\boldsymbol{t}$	t	t	t
t	t	e	t	t	$\boldsymbol{t}$	t	t	e
t	e	t	t	t	$\boldsymbol{t}$	e	t	t
t	e	e	e	e	$\boldsymbol{t}$	e	e	e
e	t	t	e	t	$\boldsymbol{t}$	e	e	e
e	t	e	e	t	$\boldsymbol{t}$	e	e	e
e	e	t	e	t	$\boldsymbol{t}$	e	e	e
e	e	e	e	e	$\boldsymbol{t}$	e	e	e

Usein osoitettaessa jotakin lausetta tautologiaksi (tai yleensä tehtäessä totuustaulua) ei kaikkiin kohtiin aina tarvitse laskea totuusarvoa. Alla on tästä esimerkki (myös edellä olleita esimerkkejä voi tehdä lyhyemmin).

Esimerkki 23. Todistetaan tautologiaksi $p \to ((q \to r) \to p)$.

p	q	r	p	$\to$	$((q \to r)$	$\to$	$p)$
t	t	t		$\boldsymbol{t}$		t	t
t	t	e		$\boldsymbol{t}$		t	t
t	e	t		$\boldsymbol{t}$		t	t
t	e	e		$\boldsymbol{t}$		t	t
e	t	t	e	$\boldsymbol{t}$			
e	t	e	e	$\boldsymbol{t}$			
e	e	t	e	$\boldsymbol{t}$			
e	e	e	e	$\boldsymbol{t}$			

Sen osoittamiseksi, että jokin lause ei ole tautologia, ei tarvitse tietenkään tehdä koko totuustaulua, vaan riittää esittää jokin vaakarivi, jolla lauseen totuusarvo on e.

Esimerkki 24. Liitäntälaki ei päde implikaatiolle, sillä lause

$$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \to B) \to C)$$

ei ole tautologia:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(A & \to & (B & \to & C)) & \leftrightarrow & ((A & \to & B) & \to & C) \\
e & t & e & t & e & \boldsymbol{e} & e & t & e & e & e \\
1 & 3 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{6} & 1 & 4 & 1 & 5 & 1
\end{array}$$

2.4 Lauselogiikan semantiikkaa

Tutustumme nyt tarkemmin eräisiin lauselogiikan semanttisiin käsitteisiin. Noudatamme sivulla 15 tekemäämme sopimusta, että mahdolliset maailmat ovat klassisia, jolloin siis konnektiiveilla on totuustaulujen mukaiset merkitykset. Lauselogiikassa tarkastellaan atomilauseiden ja mahdollisten maailmojen tai tilanteiden suhdetta vain totuusarvojen kannalta, joten maailmojen sisäisestä rakenteesta ei välitetä.

Riittää, kun voidaan sopia atomilauseiden totuusarvoista; kompleksisten lauseiden totuusarvot määräytyvät tämän jälkeen konnektiiveille antamamme merkityksen perusteella. Lauselogiikassa mahdollinen maailma voidaankin esittää yksikäsitteisesti luettelemalla kyseisessä maailmassa todet atomilauseet. Lauselogiikan semantiikassa on tapana kutsua mahdollisia maailmoja *malleiksi*. Maailmoille käytimme merkintöjä w, w_1 jne., mutta malleille käytetään yleensä merkintöjä M, M_1, jne.[1] Sovimme, että atomilauseiden totuusarvot ovat riippumattomia toisistaan, joten kun meillä on annettuna jokin (äärellinen tai ääretön) joukko atomilauseita, niin voimme olettaa, että on olemassa sellainen malli, jossa ovat tosia nämä ja vain nämä atomilauseet.

Oletamme siis atomilauseiden totuusarvot mallissa M on annetuiksi. Yhdistettyjen lauseiden totuusmääritelmän esitämme induktiivisesti noudattaen sitä järjestystä, jonka mukaisesti lauseen (eli kaavan) käsite määriteltiin. Se vastaa sivulla 15 antamaamme määritelmää; esitystapa on vain formaalimpi ja maailmojen sijasta puhumme malleista. Jos A on *tosi mallissa* M, merkitsemme $M \vDash A$. Merkintä $M \nvDash A$ tarkoittaa sitä, että lause A on epätosi mallissa M.

Totuus mallissa

1. $M \vDash \neg A \Leftrightarrow M \nvDash A$.
2. $M \vDash A \wedge B \Leftrightarrow M \vDash A$ ja $M \vDash B$.
3. $M \vDash A \vee B \Leftrightarrow M \vDash A$ tai $M \vDash B$.
4. $M \vDash A \rightarrow B \Leftrightarrow M \nvDash A$ tai $M \vDash B$.
5. $M \vDash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow$ joko $M \vDash A$ ja $M \vDash B$ tai $M \nvDash A$ ja $M \nvDash B$.

Näiden totuusehtojen nojalla voimme todeta mielivaltaisesta lauseesta, onko se tosi vai epätosi annetussa mallissa lähtemällä atomilauseiden totuusarvoista ja käyttämällä ehtoja askel askeleelta. Se on lauselogiikan erityispiirre, jota vastaavaa piirrettä ei ole kaikilla logiikoilla, kuten esimerkiksi myöhemmin tutkittavalla predikaattilogiikalla.

Esimerkki 25. Olkoon M sellainen malli, jossa atomilause q on tosi ja atomilause p epätosi: $M \vDash q$ ja $M \nvDash p$. Koska $M \nvDash p$, niin $M \vDash \neg p$, ja täten $M \vDash \neg p \wedge q$ eli lause $\neg p \wedge q$ on tosi mallissa M.

Lause $p \vee \neg q$ on epätosi mallissa M: Oletuksen mukaan $M \nvDash p$. Koska $M \vDash q$, niin $M \nvDash \neg q$. Täten $M \nvDash p \vee \neg q$.

[1] Modaaliseen lauselogiikkaan perehtynyt lukija huomannee, että modaalilogiikassa mahdollinen maailma w vastaa tällaista lauselogiikan mallia ja että modaalilogiikan malli M on yhden tai useamman lauselogiikan mallin (siis mahdollisten maailmojen) kokoelma.

Lauseen malli

Sanomme, että malli M on *lauseen A malli*, jos A on tosi M:ssä (siis $M \vDash A$) ja että se on *lausejoukon* $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ *malli*, jos se on jokaisen tähän joukkoon kuuluvan lauseen A_i malli.

Jokainen lause A jakaa lauselogiikan mallit kahteen eri luokkaan: niihin, joissa A on tosi, ja niihin, joissa A on epätosi (jompikumpi luokista saattaa olla kuitenkin tyhjä). Edelliset ovat lauseen A malleja, jälkimmäiset lauseen $\neg A$ malleja.

Esimerkki 26. Tarkastelemme, millaisia lauseen $A = p \wedge q \rightarrow r$ mallit ovat. Ensinnäkin, jos $M \nvDash p$ tai $M \nvDash q$, niin $M \nvDash p \wedge q$, ja täten implikaation totuusehdon perusteella $M \vDash A$. Jos $M \vDash r$, niin tällöinkin implikaation totuusehdon perusteella $M \vDash A$.

M on siis lauseen A malli, jos mallissa M on atomilause r tosi tai ainakin toinen atomilauseista p ja q epätosi. Tällaisia malleja on ääretön määrä. Kaikki muut mallit (siis mallit, joissa p sekä q ovat tosia ja r epätosi) ovat lauseen $\neg A$ malleja. Myös näitä malleja on ääretön määrä.

Yhdistettyjen lauseiden totuusarvot malleissa määräytyvät konnektiivien totuustauluja vastaavalla tavalla. Totuustaulussa tarkastellaan aina vain äärellistä määrää atomilauseita, mutta malleissa kaikille lausemuuttujille annetaan jokin totuusarvo. On kuitenkin ilmeistä, että jos jokin atomilause r ei esiinny tarkasteltavassa lauseessa A, niin atomilauseen r totuusarvolla mallissa M ei ole merkitystä sen suhteen, mikä lauseen A totuusarvo mallissa M on.[2] Lauseen totuusarvo mallissa voidaankin selvittää myös muodostamalla totuustaulun vaakarivi, jossa atomilauseella p on totuusarvo t, jos $M \vDash p$, ja totuusarvo e, jos $M \nvDash p$.

Esimerkki 27. Olkoon M malli, jossa atomilause q on tosi ja muut atomilauseet epätosia. Lause

$$\neg((p \vee q) \wedge \neg(\neg p \rightarrow r))$$

on epätosi mallissa M:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\neg & ((p & \vee & q) & \wedge & \neg(& \neg & p & \rightarrow & r)) \\
\boldsymbol{e} & e & t & t & t & t & t & e & e & e \\
\mathbf{7} & 1 & 2 & 1 & 6 & 5 & 3 & 1 & 4 & 1
\end{array}$$

Tämä sama totuustaulun vaakarivi osoittaa, että lause $\neg((p \vee q) \wedge \neg(\neg p \rightarrow r))$ on epätosi kaikissa sellaisissa malleissa, joissa q on tosi ja p epätosi.

Toteutuva, kumoutuva lause

Määrittelemme, että lause A on *toteutuva*, jos sillä on malli, ja *kumoutuva*, jos sen negaatiolla $\neg A$ on malli. Toteutuva lause on siis tosi ja kumoutuva epätosi ainakin yhdessä mallissa.

[2] Voimme muotoilla tämän väitteen seuraavasti: jos lauseessa A esiintyy vain atomilauseet q_1, q_2, $\ldots$, q_k, niin kaikissa malleissa M', joissa näillä atomilauseilla on samat totuusarvot kuin mallissa M, on myös lauseella A sama totuusarvo kuin mallissa M. Tämä väite voidaan todistaa täsmällisesti todistustekniikalla, jota kutsutaan *induktioksi lauseen pituuden suhteen*. Emme kuitenkaan tällä peruskurssilla esitä tätä todistustekniikka, ja sivuutammekin todistuksen.

Esimerkki 28. Olkoon $A = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$. Kun malli M on esimerkiksi sellainen, että $M \nvDash p$ ja $M \vDash q$, niin $M \vDash \neg p \wedge q$ ja täten $M \vDash A$. Lause A on siis toteutuva. Osoitamme, että se on myös kumoutuva: Olkoon M malli, jossa kaikki atomilauseet ovat epätosia. Koska $M \nvDash p$ ja $M \nvDash q$, niin $M \nvDash \neg p \wedge q$, $M \nvDash p \wedge q$ ja $M \nvDash p \wedge \neg q$, jolloin myös $M \nvDash A$.

Lausetta, joka on sekä toteutuva että kumoutuva, kutsutaan *kontingentiksi*.

2.4.1 Validisuus

Määrittelemme, että lauselogiikan lause A on *loogisesti tosi* eli *validi*, jos se on tosi kaikissa lauselogiikan malleissa. Merkitsemme tällöin $\vDash A$. Jos lause A on epätosi kaikissa lauselogiikan malleissa, niin sanomme, että A on *loogisesti epätosi*. Merkintä $\nvDash A$ tarkoittaa, että lause A ei ole loogisesti tosi; ei sitä, että lause A olisi loogisesti epätosi.

Näistä määritelmistä seuraa, että jos A on loogisesti tosi, niin kaikki lauselogiikan mallit ovat A:n malleja, ja jos A on loogisesti epätosi, niin A:lla ei ole yhtään mallia. Voimme myös todeta, että lause on loogisesti tosi, jos ja vain jos se ei ole kumoutuva, ja loogisesti epätosi, jos ja vain jos se ei ole toteutuva.

Esimerkki 29. Lause $A = p \rightarrow (q \wedge r \rightarrow p)$ on loogisesti tosi. Jos nimittäin M on malli, niin joko (1) $M \vDash p$ tai (2) $M \nvDash p$. Tapauksessa (2) saadaan suoraan implikaation totuusehdon perusteella $M \vDash p \rightarrow (q \wedge r \rightarrow p)$. Tapauksessa (1) $M \vDash q \wedge r \rightarrow p$ ja tällöin $M \vDash p \rightarrow (q \wedge r \rightarrow p)$. Olipa siis M mikä tahansa malli, niin $M \vDash A$. Täten $\vDash A$.

Lause voidaan osoittaa loogisesti todeksi myös ns. *epäsuoralla todistuksella*. Edellisen esimerkin tapauksessa voidaan tehdä *vastaoletus*: A ei ole loogisesti tosi. Tällöin siis A ei ole tosi jokaisessa mallissa. Vastaoletuksen perusteella siis on olemassa sellainen malli M, että $M \nvDash A$. Tällöin on oltava $M \vDash p$ ja $M \nvDash q \wedge r \rightarrow p$. Jälkimmäisestä seuraa, että $M \vDash q \wedge r$ ja $M \nvDash p$. Mutta tässä on ristiriita: ei voi olla olemassa sellaista mallia, että $M \vDash p$ ja $M \nvDash p$. Vastaoletus on siis väärä ja lause A on loogisesti tosi.

Esimerkki 30. Lause $B = p \wedge \neg q \wedge (p \leftrightarrow q)$ on loogisesti epätosi. Osoitamme tämän tekemällä vastaoletuksen, että lauseella B on jokin malli M. Vastaoletuksen perusteella on siis olemassa sellainen malli M, että $M \vDash p$, $M \vDash \neg q$ ja $M \vDash p \leftrightarrow q$. Koska $M \vDash \neg q$, niin $M \nvDash q$. Mutta koska $M \vDash p$ ja $M \vDash p \leftrightarrow q$, niin on oltava $M \vDash q$, jossa on ristiriita. Vastaoletus on siis väärä, eikä lauseella B ole malleja. Se on siis loogisesti epätosi.

Esimerkki 31. Osoitimme edellä, että lause $A = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ on sekä toteutuva että kumoutuva. Se ei siis ole loogisesti tosi eikä loogisesti epätosi.

Osoitettaessa lauseita valideiksi kannattaa joskus hyödyntää alkuperäisen totuusmääritelmän kanssa yhtäpitäviä ehtoja

$$
\begin{aligned}
M \not\models \neg A &\Leftrightarrow M \models A, \\
M \not\models A \vee B &\Leftrightarrow M \not\models A \text{ ja } M \not\models B, \\
M \not\models A \to B &\Leftrightarrow M \models A \text{ ja } M \not\models B.
\end{aligned}
$$

Esimerkki 32. Osoitamme poissuljetun ristiriidan lain $\neg(A \wedge \neg A)$ validiksi. Olkoon M lauselogiikan malli. Nyt $M \not\models \neg(A \wedge \neg A)$, jos ja vain jos $M \models A \wedge \neg A$. Mutta tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $M \models A$ ja $M \models \neg A$ eli että $M \models A$ ja $M \not\models A$, joka on mahdotonta. Siis lause $\neg(A \wedge \neg A)$ on tosi jokaisessa mallissa ja $\models \neg(A \wedge \neg A)$.

Esimerkki 33. Tarkastelemme seuraavaksi poissuljetun kolmannen lakia $A \vee \neg A$. Olkoon M lauselogiikan malli. Nyt $M \not\models A \vee \neg A$, jos ja vain jos $M \not\models A$ ja $M \not\models \neg A$. Tällöin siis $M \not\models A$ ja $M \models A$, mikä on mahdotonta. Siis $M \models A \vee \neg A$, ja täten $\models A \vee \neg A$.

Esimerkki 34. Osoitamme, että lause $A \to B \vee A$ on validi. Teemme vastaoletuksen, että on olemassa sellainen malli M, että $M \not\models A \to B \vee A$. Vastaoletuksen perusteella $M \models A$ ja $M \not\models B \vee A$, joka on mahdotonta. Siis vastaoletus on väärä ja $\models A \to B \vee A$.

2.4.2 Validisuuden ja tautologisuuden suhde

Lause $A = p \wedge q \to q$ on validi. Jos nimittäin olisi $M \not\models A$, niin $M \models p \wedge q$ ja $M \not\models q$, joka on mahdotonta. Voimme osoittaa tämän lauseen validiksi myös "mekaanisemmalla" tavalla. Kun M on lauselogiikan malli ja olemme kiinnostuneet vain lauseiden p ja q totuusarvoista, niin on neljä eri mahdollisuutta:

(1) $M \models p$ ja $M \models q$,

(2) $M \models p$ ja $M \not\models q$,

(3) $M \not\models p$ ja $M \models q$,

(4) $M \not\models p$ ja $M \not\models q$.

Voimme suoraviivaisesti todeta, että kaikissa tapauksissa

$$M \models p \wedge q \to q.$$

On ilmeistä, että yllä luetellut neljä mahdollisuutta vastaavat lauseen A totuustaulun

p	q	$p \wedge q \to q$
t	t	t
t	e	t
e	t	t
e	e	t

vaakarivejä. Atomilauseet p ja q jakavat lauselogiikan mallit neljään eri luokkaan ehtojen (1)–(4) mukaisesti. Esimerkiksi ehtoa (1) vastaavassa luokassa ovat kaikki ne mallit, joissa atomilauseet p ja q ovat tosia. Kaikissa tämän luokan malleissa lauseen A totuusarvo on sama kuin totuustaulun sillä vaakarivillä, jolla p:n ja q:n totuusarvo on t (tässä siis ensimmäinen vaakarivi). Vastaavasti muiden ehtojen mukaiset mallien luokat vastaavat totuustaulun muita vaakarivejä.

Yleisesti, jos tarkastelemme lausetta A, jossa esiintyy k atomilausetta, niin on 2^k erilaista mahdollisuutta, mitkä näiden k:n atomilauseen totuusarvot ovat jossain mallissa M, ja lauseen A totuusarvo mallissa M on sama kuin lauseen A saama totuusarvo sen totuustaulun sillä vaakarivillä, jossa lauseessa A esiintyvällä atomilauseilla on samat totuusarvot kuin mallissa M. Tämän vastaavuuden perusteella saamme seuraavan tuloksen:

lauselogiikan lause A on tautologia, jos ja vain jos se on validi.

Jos siis tehtävämme on osoittaa jokin lause A validiksi, niin voimme tehdä tämän totuustaulumenetelmällä osoittamalla lauseen A olevan tautologia. Yleensä yksinkertaisin tapa osoittaa lause loogisesti todeksi onkin käyttää totuustaulumenetelmää. Usein mallien avulla tapahtuva tarkastelu on kuitenkin lyhyempi (tosin yhtä lyhyeen esitykseen päästään jättämällä merkitsemättä totuustauluun ”tarpeettomat” totuusarvot eli siis sellaiset totuusarvot, joilla ei ole merkitystä tarkasteltavan lauseen totuusarvolle).

Esimerkki 35. Olkoon tehtävänä osoittaa lause E tautologiaksi, kun

$$E = A \to ((B \leftrightarrow C) \to D),$$

missä $A = \neg r \wedge p \wedge q$, $B = \neg u \wedge (r \wedge p)$, $C = (\neg q \wedge t)$ ja $D = p \vee (s \to u)$.

Jos tehtävän haluaa ratkaista totuustaulumenetelmällä, niin pitää tehdä totuustaulukko, jossa on $2^6 = 64$ vaakariviä. Paljon kätevämpää onkin tarkastella malleja: Olkoon M lauselogiikan malli. Jos $M \nvDash p$, niin $M \nvDash A$ ja täten implikaation totuusehtojen perusteella $M \vDash E$. Jos $M \vDash p$, niin $M \vDash D$. Tällöin $M \vDash (B \leftrightarrow C) \to D$ ja täten $M \vDash E$. Koska lause E on loogisesti tosi, niin se on myös tautologia.

2.4.3 Looginen seuraus

Määrittelemme, että

> B on lauseiden A_1, A_2, ..., A_n *looginen seuraus*, jos jokainen lauseiden A_1, A_2, ..., A_n malli on myös lauseen B malli.

Tällöin merkitään $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B$. Lauseita A_1, A_2, ..., A_n voidaan kutsua tässä yhteydessä premisseiksi eli oletuksiksi ja lausetta B johtopäätökseksi. Näitä nimityksiä käytetään erityisesti todistusteorian yhteydessä. Jos lause B ei ole lauseiden A_1, A_2, ... looginen seuraus, niin merkitään $A_1, A_2, \ldots \nvDash B$.

Esimerkki 36. Todistetaan muutama tärkeä looginen seuraus.

Modus ponendo ponens: $p \to q, p \vDash q$.

Todistus. Olkoon M sellainen malli, että $M \vDash p \to q$ ja $M \vDash p$. Tästä seuraa välittömästi, että $M \vDash q$. Näin on osoitettu, että jokainen lauseiden p ja $p \to q$ malli on myös lauseen q malli.

Modus (tollendo) tollens: $p \to q, \neg q \vDash \neg p$.

Todistus. Olkoon M sellainen malli, että $M \vDash p \to q$ ja $M \vDash \neg q$. Koska siis $M \vDash p \to q$ ja $M \nvDash q$, niin on oltava $M \nvDash p$. Siis $M \vDash \neg p$.

Hypoteettinen syllogismi: $p \to q, q \to r \vDash p \to r$

Todistus. Olkoon $M \vDash p \to q$ ja $M \vDash q \to r$. Jos $M \nvDash p$, niin $M \vDash p \to r$. Tarkastellaan sitten tapausta $M \vDash p$. Koska $M \vDash p \to q$, niin $M \vDash q$. Edelleen $M \vDash r$, sillä $M \vDash q \to r$. Siis tässäkin tapauksessa $M \vDash p \to r$.

Kun halutaan todistaa looginen seuraus $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B$, niin suorassa todistuksessa (jota edellisessä esimerkissä käytettiin) oletetaan, että malli M on sellainen, että $M \vDash A_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Tämän jälkeen osoitetaan, että $M \vDash B$. Voidaan käyttää myös epäsuoraa todistusta, jolloin tehdään vastaoletus $A_1, A_2, \ldots, A_n \nvDash B$ eli että on olemassa sellainen malli M, että $M \vDash A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mutta $M \nvDash B$, ja pyritään tämän jälkeen johtamaan ristiriita.

Esimerkki 37. Osoitetaan suoralla todistuksella, että

$$p, p \to q, q \to r, r \to s \vDash s.$$

Olkoon M sellainen malli, että (1) $M \vDash p$, (2) $M \vDash p \to q$, (3) $M \vDash q \to r$ ja (4) $M \vDash r \to s$. Kohtien (1) ja (2) perusteella $M \vDash q$. Täten kohdan (3) perusteella $M \vDash r$, jolloin kohdan (4) perusteella $M \vDash s$.

Esimerkki 38. Osoitetaan epäsuoralla todistuksella, että

$$p \to q, q \to r, r \to s \vDash p \to s.$$

Tehdään vastaoletus: on olemassa sellainen malli M, että $M \vDash p \to q$, $M \vDash q \to r$ ja $M \vDash r \to s$, mutta $M \nvDash p \to s$. Jälkimmäisen väitteen perusteella $M \vDash p$ ja $M \nvDash s$. Toisaalta tällöin vastaavasti kuin edellisessä esimerkissä saadaan, että $M \vDash s$ ja tässä on ristiriita.

Tarkastelemme seuraavaksi validisuuden ja loogisen seurauksen välistä suhdetta yksinkertaisen esimerkin avulla. Oletetaan, että $A, B \vDash C$. Jos siis $M \vDash A$ ja $M \vDash B$ niin $M \vDash C$. Tällöin myös $M \vDash A \wedge B \to C$. Toisaalta jos edes toinen lauseista A ja B on epätosi mallissa M, niin $M \nvDash A \wedge B$ ja tällöinkin implikaation totuusehtojen perusteella $M \vDash A \wedge B \to C$. Jos siis C on lauseiden A ja B looginen seuraus, niin implikaatio $A \wedge B \to C$ on validi.

Kääntäen, jos implikaatio $A \wedge B \to C$ on validi, niin ei ole olemassa sellaista mallia M, että $M \vDash A \wedge B$ ja $M \nvDash C$. Jos siis $M \vDash A$ ja $M \vDash B$, niin $M \vDash C$. Mutta tämä tarkoittaa samaa kuin että $A, B \vDash C$.

Yllä oleva esimerkki osoittaa, että $A, B \vDash C$, jos ja vain jos $A \wedge B \to C$ on validi. Yleisemmin lause B on lauseiden $A_1, A_2, \dots, A_n$ looginen seuraus, jos ja vain jos implikaatio $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \to B$ on validi.

Koska lause $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \to B$ on validi, jos ja vain jos se on tautologia, niin totuustaulumenetelmää voidaan soveltaa myös loogisen seurauksen osoittamiseen sellaisissa tapauksissa, joissa oletuksia on äärellinen määrä. Esimerkin 36 loogiset seuraukset olisi voitu todistaa myös osoittamalla lauseet

$$
\begin{aligned}
&(p \to q) \wedge p \to q, \\
&(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p, \\
&(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)
\end{aligned}
$$

totuustaululla tautologioiksi.

Jos jollain totuustaulun vaakarivillä yksikin lauseista A_1, A_2, $\dots$, A_n saa totuusarvon e, niin implikaatio $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \to B$ saa totuusarvon t. Tutkittaessa loogisia seurauksia totuustaulun avulla riittää siis rajoittua tutkimaan niitä vaakarivejä, joilla premissit A_1, A_2, $\dots$, A_n saavat totuusarvon t. Esimerkiksi tutkittaessa totuustaulun avulla hypoteettista syllogismia

$$p \to q, q \to r \vDash p \to r$$

ei tarvitse yksityiskohtaisesti tarkastella vaakarivejä, joissa p on tosi ja q epätosi (niissä $p \to q$ on epätosi), eikä vaakarivejä, joissa q on tosi ja r epätosi (niissä $q \to r$ on epätosi).

$$A = (p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	A
t	t	t	t	t	t	t
t	t	e		$\boldsymbol{e}$		t
t	e	t	$\boldsymbol{e}$			t
t	e	e	$\boldsymbol{e}$			t
e	t	t	t	t	t	t
e	t	e		$\boldsymbol{e}$		t
e	e	t	t	t	t	t
e	e	e	t	t	t	t

Myös vastaoletukseen perustuvaa tapaa todistaa looginen seuraus voidaan soveltaa totuustaulumenetelmään. Nyt rajoitutaan tarkastelemaan niitä totuustaulun vaakarivejä, joissa johtopäätös on epätosi, ja pyritään osoittamaan, että kaikki premissit eivät ole näillä vaakariveillä tosia. Hypoteettisen syllogismin yhteydessä voisi siis tarkastella vain niitä kahta vaakarivia, joilla p on tosi ja r epätosi (sillä vain niissä johtopäätös $p \to r$ on epätosi).

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	A
t	t	t			$\boldsymbol{t}$	t
t	t	e	t	e	e	t
t	e	t			$\boldsymbol{t}$	t
t	e	e	e	t	e	t
e	t	t			$\boldsymbol{t}$	t
e	t	e			$\boldsymbol{t}$	t
e	e	t			$\boldsymbol{t}$	t
e	e	e			$\boldsymbol{t}$	t

Osoitettaessa, että $A_1, A_2, \ldots, A_n \not\models B$ riittää antaa esimerkki sellaisesta mallista M, jossa premissit ovat tosia, mutta johtopäätös epätosi. Totuustaulumenetelmää käyttäen riittää siis löytää yksi vaakarivi, jolla lauseilla A_1, A_2, $\ldots$, A_n on totuusarvo t ja lauseella B totuusarvo e.

Esimerkki 39. Olkoon M sellainen malli, jossa q on tosi, mutta r epätosi. Tällöin $M \models r \to p$, $M \models p \to q$ ja $M \not\models q \to r$, joten $r \to p,\ p \to q \not\models q \to r$.

Samaan tulokseen päädytään lauseen $A = (r \to p) \wedge (p \to q) \to (q \to r)$ totuustaulun vaakarivin

p	q	r	$r \to p$	$p \to q$	$q \to r$	A
t	t	e	t	t	e	e

tai

p	q	r	$r \to p$	$p \to q$	$q \to r$	A
e	t	e	t	t	e	e

perusteella.

Loogisen seurauksen määritelmä yleistyy myös tilanteisiin, joissa premissejä on ääretön määrä. Lause B on lauseiden A_1, A_2, A_3, $\ldots$ looginen seuraus, jos jokainen lauseiden A_1, A_2, A_3, $\ldots$ malli on myös lauseen B malli. Tutkittaessa äärettömän lausejoukon S loogisia seurauksia ei voi suoraan soveltaa totuustaulumenetelmää, sillä tavallisessa lauselogiikassa ei sallita äärettömiä konjunktioita. Voidaan kuitenkin todistaa, että $S \models B$, jos ja vain jos on olemassa sellainen joukon S äärellinen osajoukko $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, että $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \models B$ eli että $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \to B$ on tautologia.

Esimerkki 40. Osoitamme, että $p_1, \neg p_2, p_3, \neg p_4, \ldots \models p_1 \wedge p_{101} \wedge p_{1001}$. Olkoon M lauseiden p_1, $\neg p_2$, p_3, $\neg p_4$, $\ldots$ malli (näitä malleja on itse asiassa vain yksi). Tällöin siis $M \models p_i$ aina, kun i on pariton. Erityisesti $M \models p_1$, $M \models p_{101}$ ja $M \models p_{1001}$, joten $M \models p_1 \wedge p_{101} \wedge p_{1001}$.

Helposti nähdään, että niillä premisseinä olevilla atomilauseilla, jotka eivät esiinny johtopäätöksessä $p_1 \wedge p_{101} \wedge p_{1001}$, ei ole merkitystä. Itse asiassa on voimassa

$$p_1, p_{101}, p_{1001} \models p_1 \wedge p_{101} \wedge p_{1001}.$$

2.4.4 Looginen ekvivalenttisuus

Lauselogiikan lauseet A ja B ovat *loogisesti ekvivalentteja*, jos niillä on samat mallit. Tällöin merkitään $A \equiv B$. Siis $A \equiv B$, jos ja vain jos kaikki lauselogiikan mallit M toteuttavat ehdon $M \vDash A \Leftrightarrow M \vDash B$.

Esimerkki 41. Olkoon M malli. Tällöin

$$\begin{aligned} & M \vDash \neg(p \to \neg q) \\ \Leftrightarrow\ & M \nvDash p \to \neg q \\ \Leftrightarrow\ & M \vDash p \text{ ja } M \nvDash \neg q \\ \Leftrightarrow\ & M \vDash p \text{ ja } M \vDash q \\ \Leftrightarrow\ & M \vDash p \wedge q. \end{aligned}$$

Lauseet $\neg(p \to \neg q)$ ja $p \wedge q$ ovat siis loogisesti ekvivalentit: $\neg(p \to \neg q) \equiv p \wedge q$.

Määritelmän mukaan lauseet A ja B ovat loogisesti ekvivalentit, jos ja vain jos $M \vDash A \Leftrightarrow M \vDash B$ aina, kun M on malli. Tämä tarkoittaa siis sitä, että jokaisessa mallissa M joko $M \vDash A$ ja $M \vDash B$ tai $M \nvDash A$ ja $M \nvDash B$. Mutta tämä ehto on yhtäpitävä sen kanssa, että jokaisessa mallissa $M \vDash A \leftrightarrow B$. Onkin voimassa

> Lauseet A ja B ovat loogisesti ekvivalentit eli $A \equiv B$, jos ja vain jos ekvivalenssi $A \leftrightarrow B$ on validi.

Todistettaessa lauseita A ja B loogisesti ekvivalentiksi ei riitä tarkastella ekvivalenssin $A \leftrightarrow B$ totuusarvoa joissakin malleissa, vaan on osoitettava tämän ekvivalenssin olevan tosi kaikissa malleissa.

Esimerkki 42. Olkoon p ja q tosia mallissa M. Tällöin siis $M \vDash p$ ja $M \vDash p \wedge q$, joten $M \vDash p \leftrightarrow p \wedge q$. Ekvivalenssi $p \leftrightarrow p \wedge q$ on siis tosi mallissa M, mutta tämä ei osoita sitä, että lauseet p ja $p \wedge q$ olisivat loogisesti ekvivalentit.

Ne eivät olekaan loogisesti ekvivalentteja. Kun nimittäin malli M' on sellainen, että p on siinä tosi, mutta q epätosi, niin $M' \nvDash p \leftrightarrow p \wedge q$.

Osoitettaessa lauseita A ja B loogisesti ekvivalenteiksi kannattaa tarkastelut useimmiten jakaa kahteen osaan. Ensin osoitetaan, että $M \vDash A \Rightarrow M \vDash B$ aina, kun M on mielivaltainen malli. Tässä itse asiassa osoitetaan, että B on A:n looginen seuraus. Tämän jälkeen todistetaan käänteinen väite $M \vDash B \Rightarrow M \vDash A$ eli että A on B:n looginen seuraus.

Tuloksista $M \vDash A \Rightarrow M \vDash B$ ja $M \vDash B \Rightarrow M \vDash A$ seuraa, että $M \vDash A \Leftrightarrow M \vDash B$. Koska M on tässä mielivaltainen lauselogiikan malli, niin näin saadaan todistettua lauseet A ja B loogisesti ekvivalentiksi. Tarvittaessa voimme soveltaa logiikkaa ”metatasolla” ja todistaa esimerkiksi väitteen $M \vDash B \Rightarrow M \vDash A$ sijasta sen kanssa yhtäpitävä väite $M \nvDash A \Rightarrow M \nvDash B$.

Esimerkki 43. Osoitamme, että $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$. Olkoon M lauselogiikan malli. Oletetaan ensin, että $M \vDash \neg(A \wedge B)$. Siis $M \nvDash A \wedge B$, joten $M \nvDash A$ tai $M \nvDash B$. Siis $M \vDash \neg A$ tai $M \vDash \neg B$. Täten $M \vDash \neg A \vee \neg B$.

Oletetaan sitten, että $M \models \neg A \lor \neg B$. Siis $M \models \neg A$ tai $M \models \neg B$ eli $M \not\models A$ tai $M \not\models B$. Siis $M \not\models A \land B$ eli $M \models \neg(A \land B)$ Olemme näin osoittaneet, että $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$.

Esimerkin alkuosasta näemme, että $\neg(A \land B) \models \neg A \lor \neg B$, ja loppuosasta, että $\neg A \lor \neg B \models \neg(A \land B)$. Loppuosan päättelyn voimme tehdä myös seuraavasti: Oletetaan, että $M \not\models \neg(A \land B)$. Siis $M \models A \land B$ eli $M \models A$ ja $M \models B$. Täten $M \not\models \neg A$ ja $M \not\models \neg B$. Tästä seuraa, että $M \not\models \neg A \lor \neg B$.

Koska ekvivalenssi $A \leftrightarrow B$ on validi, jos ja vain jos se on tautologia, niin voimme totuustaulumenetelmällä osoittaa kahden lauseen olevan loogisesti ekvivalentit. Esimerkiksi sivulla 24 esitetyt tautologiat T_2 ja T_5–T_{15} vastaavat seuraavia loogisia ekvivalenttisuuksia:

$\neg\neg A \equiv A$	kaksinkertaisen kiellon laki
$A \land A \equiv A$	idempotenssilait
$A \lor A \equiv A$	
$A \land B \equiv B \land A$	vaihdantalait
$A \lor B \equiv B \lor A$	
$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$	de Morganin säännöt
$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$	
$(A \to B) \equiv (\neg B \to \neg A)$	kontrapositio
$(A \land B) \land C \equiv A \land (B \land C)$	liitäntälait
$(A \lor B) \lor C \equiv A \lor (B \lor C)$	
$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$	osittelulait
$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$	

Tarkastelimme esimerkissä 43 toista de Morganin sääntöä. Seuraavassa esimerkissä tarkastelemme osittelulakia mallien avulla.

Esimerkki 44. Osoitamme, että lauseet $A \land (B \lor C)$ ja $(A \land B) \lor (A \land C)$ ovat loogisesti ekvivalentit. Oletetaan, että $M \models A \land (B \lor C)$. Siis $M \models A$ ja $M \models B \lor C$. Koska siis $M \models B$ tai $M \models C$, niin $M \models A \land B$ tai $M \models A \land C$. Täten $M \models (A \land B) \lor (A \land C)$.

Oletetaan kääntäen, että $M \models (A \land B) \lor (A \land C)$. Siis (1) $M \models A \land B$ tai (2) $M \models A \land C$. Tapauksessa (1) $M \models A$ ja $M \models B$, josta seuraa, että $M \models B \lor C$ ja edelleen $M \models A \land (B \lor C)$. Tapauksessa (2) $M \models A$ ja $M \models C$, joten tällöinkin $M \models B \lor C$ ja $M \models A \land (B \lor C)$.

Muita tärkeitä loogisia ekvivalenttisuuksia ovat

$A \to B \equiv \neg A \lor B$	implikaation ja disjunktion yhteys
$A \to B \equiv \neg(A \land \neg B)$	implikaation ja konjunktion yhteys
$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \land (B \to A)$	ekvivalenssin ja implikaation yhteys

Jätämme näiden loogisten ekvivalenttisuuksien todistamisen harjoitustehtäväksi.

Yhteensopivat ja yhteensopimattomat lauseet

Sanomme, että lauseet A ja B ovat *yhteensopimattomia*, ellei niillä ole yhteisiä malleja. Lauseet A ja B ovat *yhteensopivia*, jos niillä on yhteisiä malleja.

Esimerkki 45. Koska olemme olettaneet atomilauseiden totuusarvot riippumattomiksi toisistaan, niin atomilauseet p ja q ovat aina yhteensopivia eli on olemassa sellainen lauselogiikan malli M, että $M \vDash p$ ja $M \vDash q$. Nämä lauseet eivät tietenkään ole loogisesti ekvivalentteja; myös esimerkiksi p ja $\neg q$ ovat yhteensopivia.

Esimerkki 46. Lauseet $p \wedge q$ ja $\neg(p \to q)$ ovat yhteensopimattomia. Osoitetaan tämä tekemällä vastaoletus: on olemassa sellainen malli M, että $M \vDash p \wedge q$ ja $M \vDash \neg(p \to q)$. Tällöin siis $M \nvDash p \to q$. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, koska $M \vDash p \wedge q$ ja täten $M \vDash q$. Vastaoletus on siis väärä, ja lauseet ovat yhteensopimattomia.

Ristiriitaisuus

Lauseiden yhteensopivuuden ja yhteensopimattomuuden käsitteet voidaan määritellä myös useammalle kuin kahdelle lauseelle. Lauseiden A_1, A_2, ... sanotaan olevan yhteensopivat, jos lausejoukolla $\{A_1, A_2, \ldots\}$ on malli eli jos on olemassa sellainen lauselogiikan malli, että $M \vDash A_1$, $M \vDash A_2$ jne. Muussa tapauksessa ne ovat yhteensopimattomat. Erityisesti todistusteoriassa yhteensopivien lauseiden muodostamaa joukkoa kutsutaan *ristiriidattomaksi* eli *konsistentiksi* ja yhteensopimattomien *ristiriitaiseksi* eli *inkonsistentiksi*.

Jos lauseet A_1, A_2, ..., A_n ovat yhteensopivat, niin määritelmän mukaan niillä on malli. Mutta tämä tarkoittaa samaa kuin että konjunktio $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ on toteutuva. Jos lauseet A_1, A_2, ..., A_n ovat yhteensopimattomat, niin myöskään konjunktiolla $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ ei ole mallia. Mutta tällöin jokainen lauselogiikan malli on negaation $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n)$ malli. Kun tarkastelemme äärellistä määrää lauseita, niin on siis voimassa seuraava tulos:

> Lauseet ovat yhteensopivia, jos ja vain jos niiden konjunktio on toteutuva.
>
> Lauseet ovat yhteensopimattomat, jos ja vain jos niiden konjunktio on loogisesti epätosi.

Esimerkki 47. Lause $A \wedge \neg A$ on loogisesti epätosi, ja lauseet A ja $\neg A$ ovat yhteensopimattomat. Voimme myös sanoa, että lausejoukko $\{A, \neg A\}$ on ristiriitainen. Joskus myös lausetta $A \wedge \neg A$ kutsutaan ristiriitaiseksi.

Yhteensopimattomuus ja looginen seuraus

Jos $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B$, niin ei ole olemassa sellaista mallia M, että $M \vDash A_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) ja $M \nvDash B$. Tämä tarkoittaa samaa kuin, että lauseet A_1, A_2, ..., A_n, $\neg B$ ovat yhteensopimattomat. Tämä tulos voidaan esittää myös seuraavasti:

$A_1, A_2, \ldots, A_n \nvDash B$, jos ja vain jos A_1, A_2, ..., A_n, $\neg B$ ovat yhteensopivat.

Jos lauseet A ja B ovat ovat yhteensopimattomia, niin triviaalisti myös lauseet A, B ja $\neg C$ ovat yhteensopimattomat ja täten $A, B \vDash C$. Yleistäen voidaan todeta, että yhteensopimattomista premisseistä seuraa loogisesti mitä tahansa. Tämä voidaan sanoa myös seuraavasti: kaikki lauseet ovat ristiriitaisen lausejoukon loogisia seurauksia.

Esimerkki 48. Hieman paradoksaalisesti $p, q, \neg q \vDash \neg p$. Tämä seuraa siitä, että lauseet q ja $\neg q$ ovat yhteensopimattomia, joten olipa C mikä tahansa lause, niin $p, q, \neg q \vDash C$.

2.4.5 Ratkeavuus

Esitämme vielä yhteenvedon siitä, miten totuustaulumenetelmällä voidaan tutkia lauselogiikan semantiikkaa. Todettakoon, että totuustaulumenetelmää ei ainakaan sellaisenaan voi soveltaa esimerkiksi predikaattilogiikkaan, ja alla olevat tulokset koskevat siis vain lauselogiikkaa. Lauseen totuustaululla tarkoitamme sen totuustaulun viimeisenä muodostettavaa pystyriviä. Määritelmän mukaan lause on tautologia, jos sen totuustaulussa esiintyy vain totuusarvo t. Määrittelemme, että lause on *kontradiktio*, jos sen totuustaulussa esiintyy vain totuusarvo e. Lause A on siis kontradiktio, jos ja vain jos sen negaatio $\neg A$ on tautologia.

Lause on toteutuva, jos ja vain jos se ei ole kontradiktio.

Lause on kumoutuva, jos ja vain jos se ei ole tautologia.

Lause on loogisesti tosi, jos ja vain jos se on tautologia.

Lause on loogisesti epätosi, jos ja vain jos se on kontradiktio.

A ja B ovat loogisesti ekvivalentteja, jos ja vain jos $A \leftrightarrow B$ on tautologia.

A ja B ovat yhteensopivia, jos ja vain jos $A \wedge B$ ei ole kontradiktio.

A ja B ovat yhteensopimattomia, jos ja vain jos $A \wedge B$ on kontradiktio.

Lause A on lauseiden A_1, A_2, $\ldots$, A_n looginen seuraus, jos ja vain jos lause $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow A$ on tautologia.

Lauselogiikan sanotaan olevan *ratkeava*. Tämä tarkoittaa, että mielivaltaisesta lauselogiikan lauseesta voidaan periaatteessa todeta, onko se loogisesti tosi vai ei, onko se annetun lauseen looginen seuraus vai ei, onko se loogisesti epätosi vai ei jne. Ratkeavuus ei pidä paikkaansa logiikoille yleensä. Emme todista lauselogiikan ratkeavuutta peruskurssilla, mutta on helppo vakuuttua siitä, että totuustaulumenetelmä antaa *ratkaisumenetelmän* mainittujen seikkojen selville saamiseksi. Pystymme periaatteessa aina totuustaulumenetelmällä selvittämään, onko esimerkiksi annettu lause A tautologia vai ei, ja vastaus tähän kysymykseen antaa vastauksen myös siihen, onko A loogisesti tosi vai ei. Eri asia on, että jos lauseessa A on riittävän monta atomilausetta, niin mikään olemassa oleva tietokone ei pysty missään järjellisessä ajassa laskemaan lauseen A totuustaulua. Ratkeavuuteen riittää se, että periaatteessa on olemassa mekaaninen ratkaisumenetelmä.

Esimerkki 49. Olkoon $A_n = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$ ja $B_n = \neg p_1 \vee A_n$. Näemme välittömästi, että lause B_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ on tautologia.

Olettakaamme, että olisimme ohjelmoineet tietokoneen selvittämään täydellisellä totuustaulumenetelmällä kysymyksen siitä, onko annettu lause tautologia vai ei, ja että käytössämme olisi supertietokone, jonka tehokkuus olisi 2,2 Tflop/s eli $2{,}2 \cdot 10^{12}$ liukulukuoperaatiota sekunnissa (tieteen tietotekniikan keskus CSC on ottamassa tällaistä konetta käyttöön Suomessa vuoden 2002 aikana). Jos nyt voisi yksinkertaistaen ajatella, että totuustaulun yhden vaakarivin laskeminen vastaisi vain yhtä ainoata liukulukuoperaatiota riippumatta siitä, kuinka monta konnektiivia ja atomilausetta tutkittavassa lauseessa on, niin lauseen B_{47} 2^{47}-vaakarivisen totuustaulun laskeminen kestäisi vain hieman yli minuutin. Uuden atomilauseen mukaanotto kuitenkin kaksinkertaistaa tarvittavan laskuajan. Lauseen B_{60} totuustaulu vie aikaa kuusi päivää, vuosi ei riitä lauseelle B_{66} ja lauseen B_{76} kohdalla ylittyy jo tuhannen vuoden raja.

2.4.6 Sovelluksia luonnolliseen kieleen

Loogisen seurauksen käsite ja muut tässä esiintyneet semanttiset käsitteet sellaisena kuin ne on edellä määritelty koskevat formaalia lauselogiikkaa. Voimme kuitenkin ajatella, että jos on mahdollista kääntää joitakin luonnollisen kielen lauseita lauselogiikan kielelle, niin näitä käsitteitä voidaan soveltaa myös niihin. Kysymys luonnollisen kielen ilmaisujen esittämisestä formaalissa logiikassa on sekä filosofisesti että loogisessa mielessä vaikea, eikä siitä voida tässä yleisesti keskustella.

Esimerkki 50. Olkoon p: 'sataa lunta', q: 'on helle'. Lauselogiikan malleja koskevan sopimuksen perusteella lauseet p ja q ovat yhteensopivia. "Todellisuudessa" ei kuitenkaan koskaan voi helteellä sataa lunta. Voimmekin sanoa, että käsitteiden 'sataa lunta' ja 'helle' merkitykset ovat sellaisia, että jos sataa lunta, ei ole helle, ja jos on helle, niin ei sada lunta. (Näiden käsitteiden merkityksen lisäksi tämä määräytyy tietenkin myös luonnontieteellisistä tosiasioista.) Lauseet p, q, $p \to \neg q$ ja $q \to \neg p$ ovat lauselogiikassakin yhteensopimattomat ja lause $\neg(p \wedge q \wedge (p \to \neg q) \wedge q \to \neg p)$ on tautologia.

Esimerkki 51. Tarkastellaan lausetta 'sataa tai ei sada'. Olkoon p: 'sataa', jolloin tämän lauseen käännökseksi saadaan $p \vee \neg p$, joka on tautologia. Lause $p \vee \neg p$ on siis loogisesti tosi. Ensi tuntumalta sellainen säätilanne, jossa ei voisi totuudenmukaisesti väittää, että sataa tai ei sada, tuntuukin varsin oudolta.

Lauseen 'sataa ja ei sada' käännökseksi saadaan $p \wedge \neg p$. Sen totuustaulussa esiintyy vain totuusarvo e ja se on loogisesti epätosi. Jos ajatellaan sellaista tilanne, jossa ajankohtana t_0 sataa ja sade sitten vähitellen loppuu, niin että myöhemmin ajankohtana t_1 ei sada ollenkaan, niin ehkä jonain ajankohtana ajankohtien t_0 ja t_1 välillä olisimme valmiit sanomaan: 'nyt sataa ja ei sada' eli olisimme sitä mieltä, että sekä lause 'sataa' että lause 'ei sada' olisivat kummatkin tosia. Joku voisi tällaisessa tilanteessa olla myös sitä mieltä, että näillä lauseilla ei olisi totuusarvoa kyseisessä tilanteessa. Olisiko silloin kyse tilanteessa, jossa ei ole niin, että sataa tai ei sada?

Esimerkki 52. Olkoon p: 'sataa', q: 'käytän sateenvarjoa'. Lauseet 'jos sataa, käytän sateenvarjoa' ja 'jos en käytä sateenvarjoa, niin ei sada' formalisoidaan silloin lauseiksi $p \to q$ ja $\neg q \to \neg p$. Kontraposition periaatteen mukaisesti ne ovat loogisesti ekvivalentit. Lauselogiikan näkökulmasta niiden merkitys on siis sama. Luonnollisessa kielessä edellinen lause tuntuu kuitenkin luontevammalta kuin jälkimmäinen, joka tuntuu antavan ymmärtää, että puhuja pystyisi jotenkin sateenvarjonsa käytöllä vaikuttamaan säähän.

Tarkoittaako henkilö, joka sanoo käyttävänsä sateenvarjoa, jos sataa, myös sitä, että jos ei sada, niin hän ei käytä sateenvarjoa? Näin voi olla, mutta lauselogiikassa lauseet $p \to q$ ja $\neg p \to \neg q$ eivät ole loogisesti ekvivalentteja.

Esimerkki 53. Tutkitaan lauselogiikan avulla seuraavaa päättelyä

$$\begin{array}{l} \textit{Jos sataa, emme mene ulos.} \\ \textit{Menemme ulos.} \\ \hline \textit{Siis: Ei sada.} \end{array}$$

Olkoon p: 'sataa', q: 'menemme ulos'. Päättely on tällöin muotoa

$$\begin{array}{c} p \to \neg q \\ q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Se on pätevä, sillä jos $M \models p \to \neg q$ ja $M \models q$, niin $M \models \neg p$. Sen että $(p \to \neg q) \wedge q \models \neg p$ voi osoittaa myös esimerkiksi tutkimalla totuustaulumenetelmällä lausetta $(p \to \neg q) \wedge q \to \neg p$ ja toteamalla, että se on tautologia.

Päättely

$$\begin{array}{l} \textit{Jos sataa, emme mene ulos.} \\ \textit{Emme mene ulos.} \\ \hline \textit{Siis: Sataa.} \end{array}$$

sen sijaan ei ole pätevä. Sen formalisointi on

$$\begin{array}{c} p \to \neg q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

Kun malli M on sellainen, että $M \not\models p$ ja $M \not\models q$, niin $M \models p \to \neg q$, $M \models \neg q$ ja $M \not\models p$. Päättelyn voi todeta pätemättömäksi myös osoittamalla, että lause $(p \to \neg q) \wedge \neg q \to p$ ei ole tautologia.

Esimerkki 54. Olkoon p: 'Virkaan valitaan Matti', q: 'Virkaan valitaan Maija'.

Päättely

$$\begin{array}{l} \textit{Virkaan valitaan Matti tai Maija.} \\ \textit{Virkaan valitaan Matti.} \\ \hline \textit{Siis: Virkaan ei valita Maijaa.} \end{array}$$

ei ole pätevä, jos se formalisoidaan seuraavasti:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \\ \hline \neg q \end{array}$$

On kuitenkin luontevaa ajatella lauseessa 'virkaan valitaan Matti tai Maija' disjunktio eksklusiiviseksi. Tällöin formalisointi olisikin

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \\ p \\ \hline \neg q \end{array}$$

ja tämä on pätevä päättely.

Esimerkki 55. Olkoon p: 'Pekka maksaa monisteesta 10 euroa', r: 'Pekalla on riittävästi rahaa', m: 'Pekka saa monisteen itselleen'.

Päättely

Jos Pekalla on riittävästi rahaa, hän maksaa opintomonisteesta 10 euroa.
Pekka saa opintomonisteen itselleen, jos hän maksaa siitä 10 euroa.
Pekalla ei ole riittävästi rahaa.

Siis: Pekka ei saa opintomonistetta itselleen.

ei ole pätevä, jos se formalisoidaan seuraavasti:

$$\begin{array}{c} r \rightarrow p \\ p \rightarrow m \\ \neg r \\ \hline \neg m \end{array}$$

sillä premissit ovat tosia, mutta johtopäätös epätosi esimerkiksi mallissa, jossa kaikki muut atomilauseet paitsi m ovat epätosia.

Yleensä kuitenkin tulkitaan sen kaltaisen ilmauksen kuin 'Pekka saa opintomonisteen itselleen, jos hän maksaa siitä 10 euroa' tarkoittavan, että Pekka saa monisteen, jos ja vain jos hän maksaa siitä vaaditun hinnan. On myöskin ilmeistä, että jos Pekka maksaa opintomonisteesta 10 euroa, niin hänellä on riittävästi rahaa. Päättely voitaisiinkin formalisoida seuraavasti:

$$\begin{array}{c} r \leftrightarrow p \\ m \leftrightarrow p \\ \neg r \\ \hline \neg m \end{array}$$

Tämä päättely on pätevä.

Esimerkki 56. Onko päättely

Pekka saa opintomonisteen itselleen, jos hän maksaa siitä.
Pekalla ei ole riittävästi rahaa.
Pekka onnistuu varastamaan opintomonisteen.

Pekka saa opintomonisteen itselleen.

pätevä? Suoraviivaisesti formalisoituna se ei ole pätevä, mutta kaiketi emme sanoisi varastamisen onnistuneen, jos Pekka ei saisi monistetta haltuunsa.

On vaikea vetää raja sille, kuinka paljon luonnollisessa kielessä esitettyjen päättelyjen premissejä pitää ja saa muokata ”sopivan” formalisoinnin muodostamiseksi. Logiikan harjoituksissa ja tenteissä voi huoleti noudattaa sellaista menettelyä, että kääntää luonnollisen kielen lauseet ”kirjaimellisesti” formaalille kielelle mitään lisäämättä tai poisjättämättä. Tilanne on kuitenkin eri, jos halutaan soveltaa logiikkaa todellisten päättelyiden tutkimiseen.

Esimerkki 57. Tarkastellaan päättelyä

$$\begin{array}{l} \textit{Jos teoria } T \textit{ on tosi, niin tehtäessä koe } K \textit{ saadaan tulos } R. \\ \textit{Tehtäessä koe } K \textit{ saadaan tulos } R. \\ \hline \textit{Siis: Teoria } T \textit{ on tosi.} \end{array}$$

Olkoon t: 'Teoria T on tosi' ja k: 'Tehtäessä koe K saadaan tulos R'. Tällöin päättely formalisoidaan seuraavasti

$$\begin{array}{c} t \to k \\ k \\ \hline t \end{array}$$

Se ei ole pätevä päättely. Tämä on myös intuition mukaista, sillä pelkkä yksittäinen koe ei voi osoittaa jotain teoriaa todeksi.

Onko sitten päättely

$$\begin{array}{l} \textit{Jos teoria } T \textit{ on tosi, niin tehtäessä koe } K \textit{ saadaan tulos } R. \\ \textit{Tehtäessä koe } K \textit{ ei saada tulosta } R. \\ \hline \textit{Siis: Teoria } T \textit{ ei ole tosi.} \end{array}$$

pätevä? Formalisointi on nyt

$$\begin{array}{c} t \to k \\ \neg k \\ \hline \neg t \end{array}$$

ja tämä on pätevä päättely. Mutta katsotaanko todellakin jokin teoria epätodeksi, jos yksi siihen liittyvä koe epäonnistuu? Näin ei tapahdu ainakaan silloin, jos teoriaa on jo riittävästi onnistuneesti testattu tai on muita painavia syitä uskoa siihen. Osoittaako tämä esimerkki sitten logiikan hyödyttömäksi? Päinvastoin, sillä voimme soveltaa logiikkaa tilanteen analysointiin. Formalisoituna siis yllä oleva päättely oli pätevä, mutta emme kuitenkaan hyväksy johtopäätöstä. Päättelyn premissit eivät siis olekaan formalisoinnin mukaisia. Teoria T saattaa hyvinkin ennustaa täsmälleen kokeen K tuloksen, mutta varsinaisessa koeasetelmassa saattaa tapahtua monenlaisia virheitä. Voi olla myös niin, että kokeen tuloksen tulkinta on hankalaa ja edellyttää jo sinänsä joidenkin muiden teorioiden kuin T olettamista. Kyse on siis siitä, että premissin 'Jos teoria T on tosi, niin tehtäessä koe K saadaan tulos R' sijasta pitäisi olla jokin sellainen premissi kuin 'Jos teoria T on tosi ja eräät taustaoletukset O ovat voimassa, niin tehtäessä koe K saadaan tulos R' (konkreettisessa tapauksessa pitäisi tietenkin tarkentaa, mitä nämä ”eräät taustaoletukset” ovat). Kun merkitään o: ’eräät taustaoletukset O ovat voimassa’, niin saadaan ”oikea” formalisointi

$$\begin{array}{c} t \wedge o \rightarrow k \\ \neg k \\ \hline \neg t \end{array}$$

ja tämä päättely ei ole enää muodollisestikaan pätevä.

Luku 3

PREDIKAATTILOGIIKKA

Lauselogiikan keinoin ei voida tarkastella sellaisten lauseiden rakennetta, jotka sisältävät (sulkeiden lisäksi) muita loogisia symboleita kuin konnektiiveja. Vain sitä voidaan tutkia, millaisia lauseita on muodostettavissa konnektiivien avulla. Esimerkiksi sivulla 6 esitettyä päättelyä (1.1) ei voida käsitellä lauselogiikan keinoin. Tämän argumentin toinen premissi sisältää ilmaisun *kaikki*, joka on luonnollisen kielen *kvanttori*. Luonnollinen kieli sisältää muitakin kvanttoreita, kuten esim. (keskenään samaa merkitsevät) *jotkin, eräät, on olemassa* lauseissa 'Jotkin (eräät) kissat ovat pitkäikäisiä'; 'On olemassa pitkäikäisiä kissoja.' Seuraavat lauseet sisältävät myös kvanttoreita: '*Melkein kaikki* kissat ovat lyhytikäisiä'; '*Harvat* kissat ovat pitkäikäisiä.' Näemme lisäksi, että nämä esimerkkilauseet, samoin kuin argumentissa (1.1) esiintyvät lauseet sisältävät ilmaisuja, joissa olioilla sanotaan olevan tiettyjä ominaisuuksia. Tällaisiakaan ilmaisuja ei voida analysoida lauselogiikassa. Predikaattilogiikassa voidaan tarkastella formaalisti joitakin tällaisista mutkikkaammista lauserakenteista.

3.1 Predikaatit, vakiot ja muuttujat

Predikaattilogiikassa tutkitaan niin sanottujen *universaalikvanttorin* ja *eksistenssikvanttorin* formaalisia ominaisuuksia ja tulkintaa. Ne vastaavat (täsmennetyssä formaalissa mielessä) luonnollisen kielen kvanttoreita 'kaikki' ja 'on olemassa'. Myös konnektiivit sisältyvät predikaattilogiikkaan. Edelleen siinä tarkastellaan *predikaattisymboleita*; ne vastaavat luonnollisen kielen predikaatteja eli sellaisia ilmaisuja, jotka viittaavat ominaisuuksiin ja relaatioihin, kuten 'kuolevainen', 'suurempi kuin', jne; sekä *yksilövakioita*, jotka vastaavat yksilöiden nimiä, sellaisia kuin 'Maija', 'kaksi' (luku), jne. Predikaattilogiikan kieleen voidaan ottaa mukaan myös *identiteettisymboli* vastaamaan ilmaisua 'on sama kuin' sekä *funktiosymboleita* kuvaamaan funktioita. Funktiosymboleita emme kuitenkaan tässä käsittele.

Tutkimme aluksi esimerkkien avulla, miten mainitunlaisten symbolien avulla voidaan formalisoida eräitä luonnollisen kielen ilmaisuja ja matemaattisia ilmaisuja; toisin sanoen, miten jälkimmäisiä voidaan *kääntää* formaalikielelle. Näin tutustumme alustavasti predikaattilogiikan kieleen ja sen tulkintaan. Myöhemmin määrittelemme predikaattilogiikan syntaksin ja semantiikan täsmällisesti.

Esimerkki 58. Tarkastellaan seuraavaa luonnollisen kielen lausetta:

Sokrates on kuolevainen.

Olkoon K *yksipaikkainen* predikaattisymboli, joka asetetaan käännöksessä vastaamaan predikaattilogiikan kielessä luonnollisen kielen ilmaisua 'kuolevainen' — siis joka formaalikielessä viittaa ominaisuuteen, että jokin tai joku on kuolevainen — ja olkoon a yksilövakio, joka vastaa nimeä 'Sokrates'. Tällöin lause käännetään lyhyesti seuraavaan muotoon:

$$K(a).$$

Esimerkki 59. *Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia.* Tämä voidaan ensin kirjoittaa muotoon 'Kaikista olioista x pitää paikkansa, että jos x on ihminen, niin x on kuolevainen' eli lyhyemmin:

Kaikille x, jos x on ihminen, niin x on kuolevainen.

Otamme siis käyttöön *yksilövariaabelin* eli *yksilömuuttujan* x. Jos nyt I ja K ovat predikaattisymboleita ja $\forall$ universaalikvanttori, merkitsemme seuraavasti:

$I(x)$: 'x on ihminen'
$K(x)$: 'x on kuolevainen'
$\forall x$: 'Kaikille x, ...'.

Tällöin annettu lause voidaan kääntää muotoon:

$$\forall x(I(x) \to K(x)).$$

Esimerkki 60. *On olemassa kuolevainen ihminen.* Tämä merkitsee tietenkin samaa kuin esim. 'On kuolevaisia ihmisiä' ja 'Joku ihminen on kuolevainen'. Kirjoitetaan se muotoon 'on olemassa sellainen olio x, että x on kuolevainen ja x on ihminen' eli lyhyemmin:

On olemassa x siten, että x on kuolevainen ja x on ihminen.

Jos $\exists$ on eksistenssikvanttori, merkitsemme:

$\exists x$: 'On olemassa x siten, että ...'

joten annettu lause kääntyy muotoon:

$$\exists x(K(x) \wedge I(x)).$$

Esimerkki 61. *On olemassa ihminen, joka ei ole kuolevainen.* Tämän lauseen käännös on seuraava:

$$\exists x(I(x) \wedge \neg K(x)).$$

Esimerkki 62. *Matti on Maijan sukulainen.* Tarvitsemme nyt *kaksipaikkaisen* predikaattisymbolin, joka asetetaan vastaamaan relaatiota 'olla sukulainen' sekä kaksi yksilövakiota. Olkoot nämä S, a, b, missä a vastaa käännöksessä nimeä 'Matti' ja b nimeä 'Maija'. Tällöin lause kääntyy muotoon:

$$S(a, b).$$

Esimerkki 63. *Matilla on sukulainen.* Tämä voidaan kirjoittaa muotoon:

On olemassa x siten, että x on Matin sukulainen,

jonka käännös on edellisen esimerkin sopimusten nojalla

$$\exists x S(x, a).$$

Esimerkki 64. *Jokainen ihminen on jonkun (ihmisen) sukulainen.* Muotoillaan tämä ensin käyttämällä variaabeleita:

> *Kaikille x, jos x on ihminen, niin on olemassa y siten, että y on ihminen ja x on y:n sukulainen.*

Tämä taas kääntyy seuraavaan formaaliin muotoon, kun käytetään edellä tehtyjä sopimuksia:

$$\forall x\big(I(x) \to \exists y(I(y) \wedge S(x, y))\big).$$

Esimerkki 65. Sukulaisuus on *symmetrinen* relaatio eli *Kaikille x ja y, jos x on y:n sukulainen, niin y on x:n sukulainen.* Tämän käännös on edellisten sopimusten mukaisesti

$$\forall x \forall y(S(x, y) \to S(y, x)).$$

Esimerkki 66. Sukulaisuus ei ole *transitiivinen* relaatio eli *ei ole niin, että kaikille x, y ja z, jos x on y:n sukulainen ja y on z:n sukulainen, niin x on z:n sukulainen.* Tämän käännös on

$$\neg \forall x \forall y \forall z(S(x, y) \wedge S(y, z) \to S(x, z)).$$

Esimerkki 67. Oletetaan, että reaalifunktio f on kaikkialla määritelty. Tällöin sen jatkuvuus voidaan määritellä seuraavasti: f on *jatkuva* pisteessä a jos ja vain jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ aina, kun $|x - a| < \delta$. Se osa määritelmää, jonka avulla jotakin määritellään (tässä ekvivalenssin oikea puoli) on määritelmän *definiens*, ja se osa, joka määritellään, on *definiendum.* Jatkuvuuden määritelmän *definiens* voidaan kirjoittaa kvanttoreita ja konnektiiveja käyttämällä seuraavaan muotoon:

$$\forall \varepsilon\big(\varepsilon > 0 \to \exists \delta\big(\delta > 0 \wedge \forall x(|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\big)\big).$$

Tämä voidaan esittää hieman lyhyemmin, jos korvataan $\forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \to \ldots)$ ilmaisulla $\forall \varepsilon > 0 \ldots$ ja $\exists \delta(\delta > 0 \wedge \ldots)$ ilmaisulla $\exists \delta > 0 \ldots$. Näitä *sidottuja* kvanttoreita käyttämällä voidaan äskeinen kirjoittaa muotoon:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x(|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Lauseessa esiintyvä kvanttorijono on muotoa $\forall \exists \forall$. Tällainen universaali- ja eksistenssikvanttorin esiintymien vuorottelu aiheuttaa ilmaisuihin kompleksisuutta, joka voi vaikeuttaa niiden ymmärtämistä.

Esimerkki 68. *Kaikki pitkät eivät ole paksuja.* Tämä voidaan myös sanoa: 'Kaikki, jotka ovat pitkiä, eivät ole paksuja.' Tällä lauseella on kaksi merkitystä, jotka saadaan esiin formalisoimalla. Merkitään:

$$P(x)\text{: '}x\text{ on pitkä'}$$
$$Q(x)\text{: '}x\text{ on paksu'.}$$

Kaksi käännöstä ovat tällöin seuraavat:

$$\forall x(P(x) \to \neg Q(x));$$
$$\neg\forall x(P(x) \to Q(x)).$$

Esimerkki 69. *Kahden reaaliluvun välissä on aina kolmas.* Merkitään:

$$R(x)\text{: '}x\text{ on reaaliluku'}$$
$$S(x, y)\text{: '}x\text{ on pienempi kuin }y\text{'.}$$

Annetun lauseen käännös on tällöin seuraava:

$$\forall x\forall y(R(x) \wedge R(y) \wedge S(x, y) \to \exists z(R(z) \wedge S(x, z) \wedge S(z, y))).$$

Käyttämällä tavanomaisempia matemaattisia merkintöjä ja sidottuja muuttujia, voimme myös kirjoittaa:

$$\forall x \in \mathbf{R}\, \forall y \in \mathbf{R}\, (x < y \to \exists z \in \mathbf{R}\, (x < z \wedge z < y)).$$

Esimerkki 70. *Kahden pisteen välissä on aina kolmas piste.* Merkitään:

$$P(x)\text{: '}x\text{ on piste'}$$
$$B(x, y, z)\text{: '}y\text{ on }x\text{:n ja }z\text{:n välissä'.}$$

Käännös on nyt

$$\forall x\forall y(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg\, x = y \to \exists z(P(z) \wedge B(x, z, y))).$$

Tässä $\neg\, x = y$ merkitsee samaa kuin $\neg(x = y)$ eli $x \neq y$. Tehtävässä on oletettu, että relaatio B soveltuu vain tapauksiin, missä x, y, z ovat eri pisteitä. Jos ajatellaan, että kvantifioidaan vain pisteiden "yli", ts. ettei universumissa tai maailmassa, jota tarkastellaan, ole muita olioita kuin pisteitä, lause voidaan kirjoittaa lyhyesti näin:

$$\forall x\forall y(\neg\, x = y \to \exists z B(x, z, y)).$$

Esimerkki 71. Tarkastellaan vielä lopuksi, miten lukumääriä voidaan ilmaista predikaattilogiikassa. Käännetään lauseet

a) *Maijalla on ainakin yksi veli*
b) *Maijalla on ainakin kaksi veljeä*
c) *Maijalla on korkeintaan yksi veli*
d) *Maijalla on korkeintaan kaksi veljeä*

käyttämällä yksipaikkaista predikaattisymbolia

$$V(x)\text{: 'x on Maijan veli'.}$$

Tällöin käännöksiksi saadaan

a) $\exists x V(x)$
b) $\exists x \exists y (V(x) \wedge V(y) \wedge \neg\, x = y)$
c) $\forall x \forall y (V(x) \wedge V(y) \to x = y)$
d) $\forall x \forall y \forall z (V(x) \wedge V(y) \wedge V(z) \to x = y \vee x = z \vee y = z)$

Kohdassa b) ei voi käyttää käännöstä $\exists x \exists y (V(x) \wedge V(y))$, sillä muuttujat x ja y voivat aivan hyvin viitata samaan henkilöön, ja täten tämä lause ilmaisee vain, että Maijalla on ainakin yksi veli.

3.2 Predikaattilogiikan syntaksi

Kuten olemme edellä nähneet, predikaattilogiikan syntaksi on paljon kompleksisempi kuin lauselogiikan. Yleinen syntaksien formalisoinnin perusajatus on meille kuitenkin tuttua lauselogiikasta.

Perussymbolit

Olemme edellä jo tutustuneet alustavasti siihen, millaisia perussymboleita predikaattilogiikassa käytetään. Määrittelemme ne nyt formaalisti. Predikaattilogiikan perussymbolit ovat seuraavat:

$x_1, x_2, x_3, \ldots$	(yksilö)muuttujat (variaabelit)
$c_1, c_2, c_3, \ldots$	(yksilö)vakiot
$P_1^n, P_2^n, \ldots \ (n = 1, 2, \ldots)$	predikaattisymbolit
$=$	identiteettisymboli
$\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$	konnektiivit
$\forall$	universaalikvanttori
$\exists$	eksistenssikvanttori
(,)	sulut.

Nämä ovat jälleen objektikielen symboleita. Eri predikaattilogiikan systeemeissä muuttujia, vakioita ja predikaattisymboleita voi olla eri määrä ja ne voivat olla erilaisia. Kussakin tapauksessa nämä symbolit ja siis myös niiden lukumäärät ovat eksplisiittisesti esitettävä. Niinpä ylläolevassa luettelossa oletetaan, että ne arvot, joita indeksit i ja n voivat saada, ovat tarkasti määrätyt. Predikaattilogiikat voivatkin erota toisistaan tässä suhteessa ja konnektiivien valinnassa, sekä myös siinä suhteessa, sisältävätkö ne identiteettisymbolia vai eivät. Muuten ne ovat perussyntaksiltaan ja semantiikaltaan samanlaisia, ts. noudattavat samoja periaatteita. Puhumme yleisesti vain "predikaattilogiikasta", kun kiinnitämme huomiota näihin yleisiin periaatteisiin kiinnittämättä huomiota symbolien valintoihin.

Variaabeleita on aina ääretön määrä, vakioita ja predikaattisymboleita voi olla äärellinen tai ääretön määrä. Ne voivat puuttua kokonaan, jos tarvitaan vain identiteettisymbolia. Identiteettisymboli voidaan joskus jättää pois. Oletamme tämän peruskurssin puitteissa, että vakioita on tarpeellinen määrä, jotta saamme eräät semanttiset tarkastelut yksinkertaisemmiksi. Usein otetaan logiikkaan predikaattisymbolien lisäksi tai sijasta *funktiosymboleita*, jotka tietenkin edustavat funktioita; mutta jätämme ne tässä yksinkertaisuuden vuoksi pois.

Predikaattisymbolissa oleva yläindeksi osoittaa sen *paikkaluvun*:

P_i^n on *n-paikkainen* predikaattisymboli.

Tarkastelemme kohta, mitä se merkitsee. Sanomme, että muuttujat, identiteettisymboli, konnektiivit, kvanttorit ja sulut ovat *loogisia symboleita*; ne tulkitaan aina samalla tavalla. Näistä muut paitsi muuttujat ovat *loogisia vakioita*. Sen sijaan predikaattisymbolit ja vakiot ovat *ei-loogisia vakioita*; usein sanotaan, että ne muodostavat predikaattilogiikan *kielen* eli (ei-loogisen) *sanaston* eli *(ei-loogisen) aakkoston*:

$$L = \{P_1^1, P_2^1, \ldots, P_1^2, \ldots, c_1, c_2, \ldots\}.$$

Kieli vaihtelee, kun predikaattilogiikkaa käytetään eri tarkoituksiin. On huomattava, että sana ”kieli” tässä yhteydessä tarkoittaa sanastoa eikä kieltä tavallisessa merkityksessä.

Perussymbolit kuuluvat predikaattilogiikan objektikieleen. Käytämme jälleen metavariaabeleita:

x, y, z, ...	viittaavat muuttujiin;
P, Q, R, ...	viittaavat predikaattisymboleihin;
a, b, c, ...	viittaavat yksilövakioihin;
loogiset vakiot	viittaavat itseensä.

Käytämme edelleen kirjaimia A, B, C, ... merkitsemään kaavoja; kaavat määritellään kohta. (Matemaattisessa logiikassa on ehkä tavallisempaa merkitä niitä kreikkalaisilla kirjaimilla φ, ψ, σ, ...)

Termit, atomikaavat

Ennen kuin voimme määritellä predikaattilogiikan ”kaavan”, tarvitsemme eräitä muita käsitteitä.

Termit:

1. Muuttujat ja vakiot ovat termejä.
2. Muita termejä ei ole.

Termit ovat toisin sanoen niitä perussymboleita, jotka tulkitaan yksilöiksi. Seuraavaksi määritellään, mitä predikaattilogiikassa tarkoitetaan atomikaavoilla. Siinäkin ne ovat sellaisia kaavoja, joita ei voi enää hajoittaa ”pienemmiksi” kaavoiksi.

Atomikaavat:

1. Jos P on n-paikkainen predikaattisymboli ja t_1, …, t_n ovat termejä, niin $P(t_1, \ldots, t_n)$ on atomikaava.
2. Jos t_1 ja t_2 ovat termejä, niin $t_1 = t_2$ on atomikaava.
3. Muita atomikaavoja ei ole.

Kaavat

Kielen L kaavat määritellään jälleen induktiivisesti, joskin askeleita on nyt enemmän kuin lauselogiikassa.

Kaavanmuodostussäännöt:

1. Atomikaavat ovat kaavoja.
2. Jos A on kaava, niin $\neg A$ on kaava.
3. Jos A ja B ovat kaavoja, niin $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ ja $(A \leftrightarrow B)$ ovat kaavoja
4. Jos A on kaava ja x muuttuja, niin $\forall x A$ ja $\exists x A$ ovat kaavoja.
5. Muita kaavoja ei ole.

On huomattava, että kohta 4 sallii sellaisetkin tätä muotoa olevat kaavat, joissa ko. variaabelia ei esiinny lainkaan kaavassa A; kuten esim. kaavat $\forall x \forall y P(y)$ ja $\forall x P(a)$. Tällöin tietysti tämä kvanttori on tarpeeton.

Seuraava askel on sopia *sulkujen poistamisesta*. Se tapahtuu muutoin kuten lauselogiikassa, mutta meidän on nyt otettava huomioon kvanttorit. Usein sanomme kvanttoreiksi myös ilmaisuja, jotka ovat muotoa $\forall x$ tai $\exists x$, vaikka tarkkaan ottaen vain $\forall$ ja $\exists$ ovat kvanttoreita. Tällöin voimme sanoa, että kvanttorit käyttäytyvät sulkujen poistamisessa kuten negaatio: kvanttorin *ala* on yhtä suppea kuin negaatiollakin, siis kvanttoria *välittömästi seuraava kaava*.

Esimerkki 72. Kaavassa $\forall x\big(\neg P(x) \to \exists x Q(x) \wedge P(x)\big)$ ensimmäisen kvanttorin ala on suluissa oleva kaava, jälkimmäisen ala $Q(x)$. Tämä kaava siis eroaa esim. kaavasta $\forall x \neg P(x) \to \exists x(Q(x) \wedge P(x))$, jossa edellisen kvanttorin ala on $\neg P(x)$ ja jälkimmäisen $Q(x) \wedge P(x)$.

Vastaavaan tapaan kuin lauselogiikassa voidaan muodostaa kaavan A rakennepuu $T(A)$. Atomikaavat muodostavat nyt puun lehdet ja kvanttorit aiheuttavat seuraavat lisäsäännöt:

$$T(\forall x B) = \quad \begin{array}{c} \forall x B \\ | \\ T(B) \end{array}$$

$$T(\exists x B) = \quad \begin{array}{c} \exists x B \\ | \\ T(B) \end{array}$$

Esimerkki 73. Kaavan $\forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y)$ rakennepuu on seuraava:

$$\begin{array}{l}
\forall x\, \forall y\, (\, R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y\,) \\
\quad | \\
\quad \forall y\, (\, R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y\,) \\
\qquad\quad | \\
\qquad\quad R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad /\backslash \\
\qquad\quad R(x,y) \wedge R(y,x) \qquad x = y \\
\qquad\qquad\qquad /\backslash \\
\qquad\quad R(x,y) \qquad R(y,x)
\end{array}$$

Seuraavassa esimerkissä havainnollistetaan kvanttorien alaa.

Esimerkki 74. Kaavojen $\forall x P(x) \to \exists y P(y)$ ja $\forall x (P(x) \to \exists y P(y))$ rakennepuut ovat seuraavat:

$$\begin{array}{c}
\forall x P(x) \to \exists y P(y) \\
/\backslash \\
\begin{array}{cc} \forall x P(x) & \exists y P(y) \\ | & | \\ P(x) & P(y) \end{array}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\forall x\, (P(x) \to \exists y P(y)) \\
| \\
P(x) \to \exists y P(y) \\
/\backslash \\
\begin{array}{cc} P(x) & \exists y P(y) \\ & | \\ & P(y) \end{array}
\end{array}$$

Kaavojen muuntaminen

Lauselogiikan yhteydessä on jo käytetty merkintää '$A \equiv B$' sille, että A ja B ovat loogisesti ekvivalentit. Otetaan tämä merkintä käyttöön myös predikaattilogiikassa. Käsitettä "loogisesti ekvivalentit" ei ole tosin vielä määritelty täsmällisesti predikaattilogiikan yhteydessä, mutta intuitiivisesti $A \equiv B$ tarkoittaa, että A ja B ovat tosia täsmälleen samoissa tilanteissa.

Lauselogiikassa $A \equiv B$, jos ja vain jos $A \leftrightarrow B$ on tautologia. Useimmissa sivulla 24 esitellyissä tautologioissa pääkonnektiivi oli ekvivalenssi. Tällainen muotoa $A \leftrightarrow B$ oleva tautologia osoittaa siis lauseet A ja B loogisesti ekvivalenteiksi. Esimerkiksi tautologioiden T_2, T_9, T_{10} ja T_{11} perusteella

$$\begin{gathered}
\neg\neg A \equiv A, \\
\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \\
\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B, \\
(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A).
\end{gathered}$$

Muita kaavojen muuntamisen kannalta tärkeitä tuloksia ovat seuraavat:

$$\begin{gathered}
A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B), \\
A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B.
\end{gathered}$$

Yleistetään seuraavaksi tautologian käsite predikaattilogiikalle: Oletetaan, että A on sellainen lauselogiikan tautologia, jossa esiintyvät vain atomilauseet q_1, q_2, $\ldots$, q_n. Olkoot B_1, B_2, $\ldots$, B_n joitain predikaattilogiikan kaavoja. Korvataan lauseessa A kaikki atomilauseen q_i esiintymät kaavalla B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Näin saadun predikaattilogiikan kaavan sanotaan olevan tautologia.

Esimerkki 75. Seuraavat kaavat ovat tautologioita:

$$\begin{gathered}
P(x) \vee \neg P(x), \quad \neg\neg P(x) \leftrightarrow P(x), \\
\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y) \leftrightarrow \forall y Q(y) \wedge \forall x P(x), \\
\forall x \forall y (P(x) \vee R(x, y)) \rightarrow \exists x Q(x) \vee \forall x \forall y (P(x) \vee R(x, y)).
\end{gathered}$$

Jos esimerkiksi viimeisen kaavan tautologisuutta ei huomaa heti, niin kannattaa merkitä $A = \forall x \forall y (P(x) \vee R(x, y))$ ja $B = \exists x Q(x)$, jolloin kaavan nähdään olevan muotoa $A \rightarrow B \vee A$.

Esimerkki 76. Seuraavat (loogisesti todet) kaavat eivät ole tautologioita:

$$\forall x P(x) \rightarrow P(c), \quad \forall x (P(x) \vee \neg P(x)), \quad \exists y P(y) \rightarrow \exists x P(x).$$

Predikaattilogiikassa on voimassa

jos $A \leftrightarrow B$ on tautologia, niin $A \equiv B$,

mutta on kuitenkin mahdollista, että $A \equiv B$, vaikka $A \leftrightarrow B$ ei olekaan tautologia. Esimerkiksi

$$\exists x A \equiv \neg \forall x \neg A, \tag{1}$$

$$\forall x A \equiv \neg \exists x \neg A. \tag{2}$$

Seuraavat tulokset ovat ilmeisiä:

$$\begin{aligned}
&A \equiv A, \\
&\text{jos } A \equiv B, \text{ niin } B \equiv A, \\
&\text{jos } A \equiv B \text{ ja } B \equiv C, \text{ niin } A \equiv C.
\end{aligned}$$

Kaava A_0 voidaan muuntaa loogisesti ekvivalenttiin muotoon A_n muodostamalla jokin "ketju" $A_0 \equiv A_1 \equiv A_2 \equiv \cdots \equiv A_n$, jossa jokainen välivaihe $A_i \equiv A_{i+1}$ perustellaan esimerkiksi eksistenssi- ja universaalikvanttoreita koskevien tuloksien (1) ja (2) avulla, osoittamalla $A_i \leftrightarrow A_{i+1}$ tautologiaksi tai toteamalla, että $A_i \equiv A_{i+1}$ on jo aiemmin johdettu. Lisäksi voidaan käyttää seuraavaa tärkeätä ekstensionaalisuusperiaatetta:

> Olkoon $A = A(\ldots B \ldots)$ kaava, jonka alikaavana esiintyy B, ja $A' = A(\ldots C \ldots)$ kaava, joka saadaan kaavasta A korvaamalla kaavan B esiintymä(t) kaavalla C. Tällöin jos $B \equiv C$, niin $A \equiv A'$.

Esimerkki 77.

$$\begin{aligned} \neg\neg\neg\forall x\exists y R(x,y) &\equiv \neg\forall x\exists y R(x,y) \\ &\equiv \neg\neg\exists x\neg\exists y R(x,y) \\ &\equiv \exists x\neg\exists y R(x,y) \\ &\equiv \exists x\neg\neg\forall y\neg R(x,y) \\ &\equiv \exists x\forall y\neg R(x,y). \end{aligned}$$

Yllä olevan esimerkin tulos voidaan johtaa nopeammin käyttämällä seuraavia muistisääntöjä:

$$\begin{aligned} \neg\forall x A &\equiv \exists x\neg A \\ \neg\exists x A &\equiv \forall x\neg A \end{aligned}$$

Sanallisesti nämä säännöt voi ilmaista seuraavasti:

> negaatiomerkin voi siirtää kvanttorin yli, jos samalla muuttaa kvanttorin toiseksi kvanttoriksi.

Esimerkki 78.

$$\neg\forall x\forall y\exists z\forall u R(x,y,z,u) \equiv \exists x\exists y\forall z\exists u\neg R(x,y,z,u).$$

Esimerkki 79.

$$\begin{aligned} \neg\exists x\forall y\neg\exists z\neg(P(x,y) \to Q(y,z)) &\equiv \forall x\neg\forall y\neg\exists z\neg(P(x,y) \to Q(y,z) \\ &\equiv \forall x\exists y\exists z\neg(P(x,y) \to Q(y,z)) \\ &\equiv \forall x\exists y\exists z\neg(\neg P(x,y) \vee Q(y,z)) \\ &\equiv \forall x\exists y\exists z(\neg\neg P(x,y) \wedge \neg Q(y,z)) \\ &\equiv \forall x\exists y\exists z(P(x,y) \wedge \neg Q(y,z)). \end{aligned}$$

Näin on saatu alkuperäinen kaava muotoon, jossa esim. negaatiomerkki esiintyy vain atomikaavojen edessä. Lopullinen kaava on myöskin yksinkertaisempi.

Seuraavan esimerkin tulokset ovat tärkeitä käännettäessä luonnollisen kielen lauseita predikaattilogiikan kielelle.

Esimerkki 80.

$$\begin{aligned}\neg\forall x(P(x) \to Q(x)) &\equiv \exists x\neg(P(x) \to Q(x)) \\ &\equiv \exists x\neg\neg(P(x) \land \neg Q(x)) \\ &\equiv \exists x(P(x) \land \neg Q(x)),\end{aligned}$$

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x\neg(P(x) \land \neg Q(x)),$$

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x(\neg P(x) \lor Q(x)).$$

Jos $A \equiv B$ ja B on loogisesti tosi (eli tosi kaikissa mahdollisissa tilanteissa), niin myöskin A on loogisesti tosi. Jos siis halutaan osoittaa jokin lause A loogisesti todeksi, niin voidaan ensin yrittää sieventää sitä.

Esimerkki 81. Lause

$$A = \neg\exists x\forall y\neg R(x,y) \to \forall x\neg\forall y(R(x,y) \to \neg R(x,y))$$

on loogisesti tosi, sillä

$$\begin{aligned}A &\equiv \forall x\exists y\neg\neg R(x,y) \to \forall x\neg\forall y(R(x,y) \to \neg R(x,y)) \\ &\equiv \forall x\exists y R(x,y) \to \forall x\neg\forall y(\neg R(x,y) \lor \neg R(x,y)) \\ &\equiv \forall x\exists y R(x,y) \to \forall x\neg\forall y\neg R(x,y) \\ &\equiv \forall x\exists y R(x,y) \to \forall x\exists y R(x,y).\end{aligned}$$

Huomaa, että esimerkiksi tuloksia

$$\begin{aligned}\exists y\forall x P(x) &\equiv \forall x P(x), \\ \forall x(P(x) \land Q(x)) &\equiv \forall x P(x) \land \forall x Q(x), \\ \exists x(P(x) \lor Q(x)) &\equiv \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)\end{aligned}$$

ei voi johtaa yllä esitetyillä menetelmillä, vaan ne pitää perustella esimerkiksi semanttisesti.

Sidotut ja vapaat variaabelit

Jos sanomme: 'Kaikki ovet ovat lukittuja', eli:

(3.1) *Kaikille x, jos x on ovi, niin x on lukittu,*

niin esitämme jotakin, jolla on totuusarvo jokaisessa tilanteessa tai maailmassa, johon se soveltuu. Sen sijaan, jos sanomme:

(3.2) *x on lukittu,*

ei tällä ilmaisulla ole missään tilanteessa totuusarvoa, sillä x on muuttuja, eikä siis ole sovittu, mihin se viittaa. Mutta seuraavalla ilmaisulla on jälleen totuusarvo, jos symboli a on yksilövakio, joka viittaa tiettyyn oveen:

(3.3) *a on lukittu.*

Sanommekin, että (3.1) ja (3.3) ovat *lauseita*. Sen sijaan (3.2) ei ole lause, vaan, kuten usein sanotaan, *lausefunktio*: se saa arvoikseen lauseita, kun x:n paikalle sijoitetaan yksilövakioita. Edelleen sanotaan, että (3.2) sisältää *vapaan* variaabelin, mutta ko. lauseet eivät. Tarkastelemme nyt edellä esitetyn syntaksin puitteissa näitä asioita täsmällisemmin.

Samalla tavalla kuin sanomme arkikielessä, että jokin kirjain esiintyy sanassa tai sana lauseessa, sanomme logiikassa, että variaabeli *esiintyy* kaavassa tai että kaava esiintyy toisessa kaavassa. Puhumme myös variaabelin tai kaavan *esiintymästä* kaavassa. Voimme nyt määritellä seuraavasti:

> *Sidottu ja vapaa variaabeli*
> Variaabelin x esiintymä kaavassa A on *sidottu* jos tämä esiintymä on kvanttorin $\forall x$ tai kvanttorin $\exists x$ alassa kaavassa A. Muussa tapauksessa tämä esiintymä on *vapaa*.

Sanomme myös vähän epämääräisemmin, että x *esiintyy* sidottuna (vapaana) tai *on* sidottu (vapaa) kaavassa.

Esimerkki 82. Kaavassa $\forall x \neg(P(x, y) \wedge \exists y Q(y))$ x esiintyy vain sidottuna; sen sijaan y:n ensimmäinen esiintymä on vapaa, jälkimmäinen sidottu.

Esimerkki 83. Kaavassa $\exists x(\exists y P(x, y) \to Q(x))$ esiintyy vain sidottuja muuttujia.

Voimme nyt määritellä, mikä lause on.

> *Lause*
> Kaava A on *lause* jos ja vain jos siinä esiintyy vain sidottuja variaabeleita.

Lausetta sanotaan myös *suljetuksi kaavaksi*; vastaavasti kaavaa, joka ei ole lause, *avoimeksi*. Esimerkin 83 kaava on lause. Yleisesti käytetään seuraavia merkintöjä. Jos kaavassa A esiintyvät vapaina *korkeintaan* variaabelit x_1, …, x_n, voidaan merkitä: $A(x_1, \ldots, x_n)$. Jos näiden variaabelien paikalle *sijoitetaan* vastaavasti yksilövakiot a_1, …, a_n, merkitään: $A(a_1, \ldots, a_n)$.

3.3 Predikaattilogiikan semantiikkaa

Tiedämme jo lauselogiikasta, miten konnektiivit tulkitaan. Tiedämme myös edellä esitetyistä esimerkeistä, että kvanttoreilla on samantapainen merkitys kuin luonnollisen kielen vastaavilla kvanttoreilla, ja että predikaattisymbolit merkitsevät (intuitiivisesti katsoen) ominaisuuksia ja relaatioita sekä yksilövakiot yksilöitä. Edellä olevissa formalisointi-esimerkeissämme käytimme predikaattisymboleita vastaamaan sellaisia ilmaisuja kuin 'ihminen', 'sukulainen', 'välissä', jne. Ne ilmaisevat relaatioita, jotka vallitsevat joidenkin yksilöiden välillä. Toinen niistä on ns. *kaksipaikkainen* relaatio, sillä se voi vallita kahden yksilön välillä: Pekka on Kallen sukulainen. Viimeksimainittu on *kolmipaikkainen*: piste on kahden muun välissä. Ensin mainittu ilmaisee ominaisuutta, jota voidaan pitää relaation erikoistapauksena, *yksipaikkaisena* relaationa. Paikkaluvulla ei teoreettisesti katsoen ole mitään ylärajaa, kunhan se on äärellinen. Predikaattilogiikan semantiikassa nämä ideat tehdään täsmällisiksi. Ennen semantiikan formaalia esittelyä tarkastelemme kuitenkin vielä paria esimerkkiä.

Esimerkki 84. Oheisen kuvan esittämässä tilanteessa ovat tosia seuraavat lauseet:

$\forall x(\mathit{Ympyrä}(x) \to \mathit{Valkoinen}(x))$
(Kaikki ympyrät ovat valkoisia)

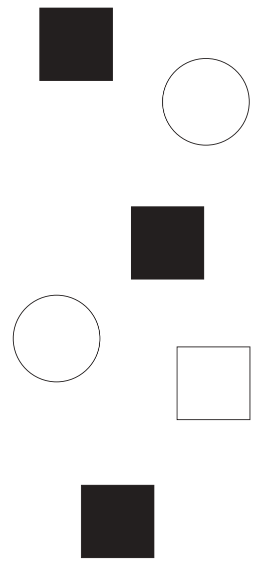
$\forall x(\mathit{Musta}(x) \to \mathit{Neliö}(x))$
(Kaikki mustat kuviot ovat neliöitä)

$\forall x(\mathit{Neliö}(x) \to \mathit{Valkoinen}(x) \vee \mathit{Musta}(x))$
(Neliöt ovat valkoisia tai mustia)

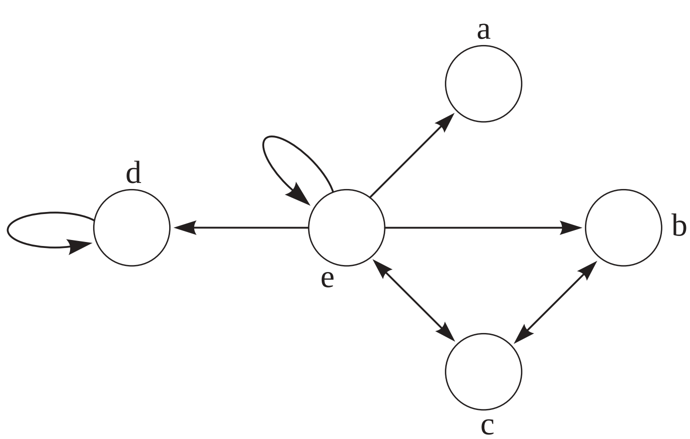
$\forall x \neg(\mathit{Valkoinen}(x) \wedge \mathit{Musta}(x))$
(Mikään kuvio ei ole sekä valkoinen että musta)

$\exists x(\mathit{Neliö}(x) \wedge \mathit{Valkoinen}(x))$
(jokin neliö on valkoinen)

$\neg\exists x(\mathit{Ympyrä}(x) \wedge \mathit{Musta}(x))$
(ei ole mustaa ympyrää)



Esimerkki 85. Tarkastellaan alla olevaa *digraafia* (myös nimityksiä *suunnattu graafi* ja *suhteikko* käytetään). Siinä esiintyy *solmuja* (eli *pisteitä* ja niitä yhdistäviä nuolia. Nuolet voivat olla yksi- tai kaksisuuntaisia. Myös silmukoita voi esiintyä.



Tässä digraafissa ovat tosia mm. seuraavat lauseet:

$\mathit{Nuoli}(e,d)$, $\neg \mathit{Nuoli}(d,e)$, $\mathit{Nuoli}(d,d)$, $\neg \mathit{Nuoli}(a,a)$, $\mathit{Nuoli}(e,c) \wedge \mathit{Nuoli}(c,e)$,
$\neg \forall x \exists y\, \mathit{Nuoli}(x,y)$ (kaikista solmuista ei lähde nuolta) ja
$\exists x \forall y\, \mathit{Nuoli}(x,y)$ (on olemassa sellainen solmu, josta lähtee nuoli kaikkiin muihin).

Edellä olleissa esimerkeissä esiintyneiden predikaattisymbolien *Musta*, *Ympyrä*, *Nuoli* jne. tulkinta on intuitiivisesti selvä, eikä näiden esimerkkien kohdalla ole erityisen mielekästä olettaa, että ne tulkittaisiinkin jotenkin eri tavalla. Yleensä kuitenkin logiikassa predikaattisymbolien tulkinta on vapaasti valittavissa. Alamme seuraavaksi tutkimaan tätä. Tutkimme aluksi ”konkreettista” tapausta, jossa tulkinta ei ole sinänsä täysin vapaata, vaan sen ajatellaan vastaavan ”aktuaalista” tilannetta.

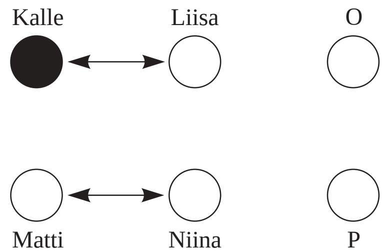
Tulkinta ja malli

Oletetaan, että talossa asuu kuusi henkilöä: Kalle, Liisa, Matti, Niina ja kaksi muuta. Heillä on kullakin monia ominaisuuksia, ja heidän välillään vallitsee monenlaisia relaatioita. Mutta tällaisia yhteisöjä tarkastellaan aina jostakin näkökulmasta; ei ole mielekästä ajatella, että voisimme ottaa huomioon kaikki mahdolliset relaatiot heidän välillään ja yhteisön ulkopuolelle. Tarkastellaankin nyt vain *filosofian opiskelija*-ominaisuutta sekä *rakastamis*-relaatiota tässä yhteisössä; edellinen on yksipaikkainen, jälkimmäinen kaksipaikkainen. Merkitkööt o ja p henkilöitä, joiden nimeä ei ole ilmoitettu. (Ellei sekaannusta synny, merkitsemme joukkojen alkioita joskus samoilla kirjaimilla kuin yksilövakioita metakielessä.) Tutkimamme perusjoukko on tällöin

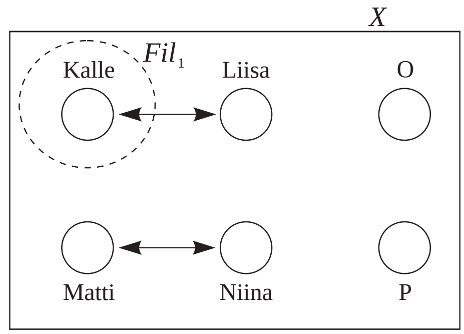
$$X = \{\mathit{Kalle}, \mathit{Liisa}, \mathit{Matti}, \mathit{Niina}, o, p\}.$$

Mainittua ko. yhteisössä vallitsevaa relaatiota voidaan havainnollistaa vastaavanlaisilla digraafeilla kuin edellä. Sen solmut esittävät talossa asuvia henkilöitä. Kun s ja t merkitsevät mielivaltaisia yhteisön jäseniä, niin piirretään nuoli s:stä t:hen, jos s rakastaa t:tä; jos tämän lisäksi t rakastaa s:ää, niin s:n ja t:n välille voidaan piirtää kaksoisnuoli. Jos s rakastaa itseään, voidaan s:n kohdalle piirtää silmukka. Yhteisössä vallitsevaa ominaisuutta taas voi havainnollistaa esimerkiksi tummentamalla niitä henkilöitä esittävät solmut, joilla on tämä ominaisuus. Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää myös samanlaista esitystä kuin Venn-diagrammeissa (ks. joukko-oppia käsittelevää liitettä).

Esimerkiksi tilannetta, jossa vain Kalle opiskelee filosofiaa ja Kalle ja Liisa rakastavat toisiaan samoin kuin Matti ja Niina, voidaan havainnollistaa seuraavilla kuvioilla.



1. tulkinta
Rak$_1$, *Fil*$_1$



Joukko-opillisesti tätä tilannetta voidaan tarkastella seuraavasti. Ominaisuutta 'olla filosofian opiskelija' vastaa joukko Fil_1, joka muodostuu yhteisön niistä henkilöistä, jotka opiskelevat filosofiaa:

$$Fil_1 = \{\, s \mid s \text{ opiskelee filosofiaa} \,\}.$$

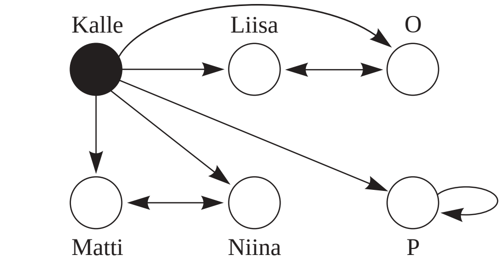
Relaatiota 'rakastaa' ei voi esittää luettelemalla pelkästään yhteisön yksittäisiä jäseniä, vaan sitä vastaa *järjestettyjen parien* $\langle s, t\rangle$ muodostama joukko Rak_1:

$$Rak_1 = \{\, \langle s, t\rangle \mid s \text{ rakastaa } t\text{:tä} \,\}.$$

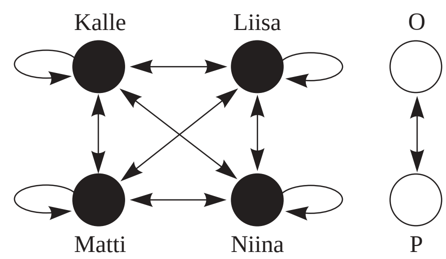
Tässä on huomattava, että pari $\langle s, t\rangle$ on eri kuin pari $\langle t, s\rangle$. Tällä tavoin menettelemällä edellä ollut tilanne voidaan joukko-opillisesti esittää seuraavasti:

$$\begin{aligned} Fil_1 &= \{\mathit{Kalle}\}, \\ Rak_1 &= \{\langle \mathit{Kalle,Liisa}\rangle, \langle \mathit{Liisa,Kalle}\rangle, \langle \mathit{Matti,Niina}\rangle, \langle \mathit{Niina,Matti}\rangle\}. \end{aligned}$$

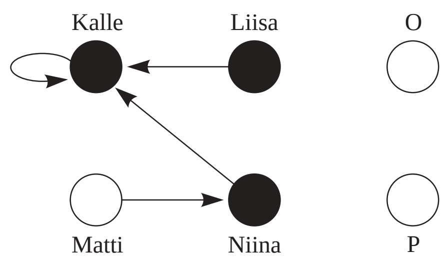
Yllä esitelty tilanne on vain yksi mahdollinen. Voimme vaikkapa ajatella, että ajan mittaan olosuhteet muuttuvat. Tällöin saamme esimerkiksi seuraavia mahdollisuuksia, joista eräät ovat hyvin "traagisia":



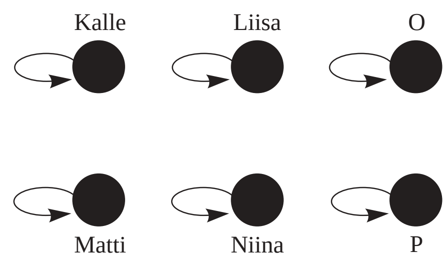
2. tulkinta
Rak$_2$, *Fil*$_2$



3. tulkinta
Rak$_3$, *Fil*$_3$



4. tulkinta
Rak$_4$, *Fil*$_4$



5. tulkinta
Rak$_5$, *Fil*$_5$

Alla on esimerkkejä siitä, miten näihin tilanteisiin liittyviä asioita voi esittää joukko-opillisesti.

$$\begin{aligned}
Fil_4 &= \{\mathit{Kalle,Liisa,Niina}\},\\
Fil_5 &= X,\\
Rak_4 &= \{\langle \mathit{Kalle,Kalle}\rangle, \langle \mathit{Liisa,Kalle}\rangle, \langle \mathit{Niina,Kalle}\rangle, \langle \mathit{Matti,Niina}\rangle\},\\
Rak_5 &= \{\ \langle s, s\rangle \mid s \in X\ \}.
\end{aligned}$$

Tutkitaan nyt edellä olevan esimerkin valossa, mitä predikaattilogiikassa tarkoitetaan mallilla. Tarkastellaan perusjoukkoa

$$X = \{\mathit{Kalle,Liisa,Matti,Niina}, o, p\},$$

jota voidaan kutsua myös mallin *universumiksi*, sekä esimerkiksi ominaisuutta Fil_1 ja relaatiota Rak_1 joukossa X. Kysymme aluksi, millaisessa kielessä voimme *puhua* näistä. Ominaisuutta Fil_1 varten tarvitsemme yksipaikkaisen predikaattisymbolin; olkoon se F. Vastaavasti relaatiota Rak_1 varten tarvitsemme kaksipaikkaisen predikaattisymbolin; olkoon se R. Jos haluamme lisäksi puhua Kallesta, Liisasta, Matista ja Niinasta, tarvitsemme heitä vastaamaan yksilövakioita; olkoot ne k, l, m, n. Nämä symbolit ovat objektikielen symboleita. (Olisimme voineet käyttää näitä samoja merkintöjä jo perusjoukonkin yhteydessä. Samoin on tavallisempaa käyttää esimerkiksi relaatiolle Rak_1 merkintää 'R_1'. Olemme tässä halunneet kuitenkin havainnollisuuden vuoksi tehdä selvän eron objekti- ja metakielen välille.) Emme ota kieleen enempää symboleita kuin tarvitsemme. Tarvitsemamme kieli L on siis seuraava:

$$L = \{F, R, k, l, m, n\}.$$

Voimme myös ilmaista vastaavuuden käänteisesti: kieli L on *tulkittu joukossa* X siten, että predikaattisymboli F on tulkittu joukoksi Fil_1, R on tulkittu relaatioksi Rak_1 ja vakiot k, l, m, n "yksilöiksi" *Kalle*, *Liisa*, *Matti*, *Niina* (tässä järjestyksessä). Tämä merkitsee, että on olemassa sellainen funktio V_1 joukolta L, että:

$$V_1(F) = Fil_1,$$
$$V_1(R) = Rak_1,$$
$$V_1(k) = \textit{Kalle},\ V_1(l) = \textit{Liisa},\ V_1(m) = \textit{Matti},\ V_1(n) = \textit{Niina}.$$

Sanomme, että järjestetty pari

$$M_1 = \langle X, V_1 \rangle$$

on kielen L *malli*. Mallissa annetaan siis sekä perusjoukko että kielen tulkinta tässä joukossa.

Seuraavaksi yleistämme mallin käsitteen mielivaltaiselle kielelle ja sen jälkeen esitämme täsmällisen määritelmän totuudelle mallissa.

Predikaattilogiikan malli

Olkoon L predikaattilogiikan kieli. *Kielen L malli* on pari $M = \langle X, V \rangle$, jossa X on ei-tyhjä joukko ja V on sellainen funktio kieleltä L, että

$V(P_i^1)$ on joukon X osajoukko, jos $P_i^1 \in L$ on yksipaikkainen predikaattisymboli;

$V(P_i^2)$ on kaksipaikkainen relaatio eli joukon $\{\, \langle v_1, v_2 \rangle \mid v_1, v_2 \in X \,\}$ osajoukko, jos $P_i^2 \in L$ on kaksipaikkainen predikaattisymboli;

$V(P_i^n)$ on n-paikkainen relaatio joukossa X (ks. joukko-oppia käsittelevää liitettä), jos $P_i^n \in L$ on n-paikkainen predikaattisymboli;

$V(c_i)$ on joukon X alkio, jos $c_i \in L$ on yksilövakio.

Käyttämällä joukko-opillisia merkintöjä tämä voidaan lyhyesti ilmaista seuraavasti:

$$V(c_i) \in X,$$
$$V(P_i^1) \subseteq X,$$
$$V(P_i^2) \subseteq X \times X,$$
$$\vdots$$
$$V(P_i^n) \subseteq X^n.$$

Joukko X on mallin *universumi*, ja X:n alkiot ovat mallin *yksilöitä*. Funktio V on kielen L *tulkintafunktio* joukossa X. Tulkintafunktion arvot ovat vastaavien symbolien *tulkintoja*.

Esimerkki 86. Olkoon kieli $L = \{P\}$, jossa P on yksipaikkainen predikaatti. Kielen L malleja ovat esimerkiksi

$$M_1 = \langle X_1, V_1 \rangle,\ \text{jossa } X_1 = \{a, b, c, d, e\},\ V_1(P) = \{a, e\},$$
$$M_2 = \langle X_2, V_2 \rangle,\ \text{jossa } X_2 = \{0, 1, 2, 3\},\ V_2(P) = \{0, 2\},$$
$$M_3 = \langle X_3, V_3 \rangle,\ \text{jossa } X_3 = \{0, 1, 2, \ldots\},\ V_3(P) = \{0, 2, 4, \ldots\}.$$

Esimerkki 87. Olkoon kieli $L = \{R, a, b\}$, jossa a ja b ovat yksilövakioita ja R kaksipaikkainen predikaattisymboli. Tarkastellaan kielen L sellaisia malleja, joissa X on luonnollisten lukujen joukko $\mathbf{N}$ $(= \{0, 1, 2, 3, \ldots\})$. Mahdollisia tulkintoja V_i ovat esimerkiksi seuraavat:

$$\begin{aligned}
&V_1(a) = 0,\ V_1(b) = 1,\ V_1(R) = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\},\\
&V_2(a) = 0,\ V_2(b) = 1,\ V_2(R) = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \ldots\},\\
&V_3(a) = 2,\ V_3(b) = 1,\ V_3(R) = \{\, \langle v_1, v_2\rangle \mid v_1 < v_2 \,\},\\
&V_4(a) = 3,\ V_4(b) = 3,\ V_4(R) = \{\, \langle v_1, v_2\rangle \mid v_1 \leq v_2 \,\}.
\end{aligned}$$

Totuus mallissa

Nyt kun meillä on käytettävissämme mallin käsite voimme määritellä, mitä tarkoitetaan sillä, että lause on *tosi mallissa*. Tarkastellaan jälleen eo. "yhteisö"-esimerkkiä ja erityisesti lauseita

$$A = F(k), \quad B = R(k,l), \quad C = \exists x R(l,x), \quad D = \forall x F(x), \quad E = \forall x R(x,x).$$

1. tulkinta. Tulkinnassa V_1 (jossa siis $V_1(F) = Fil_1$ ja $V_1(R) = Rak_1$; ks. sivulla 57 olevaa kuviota) lause A on tosi, koska $V_1(k) = Kalle$ ja $Kalle \in V_1(F)$ (eli tulkinnassa V_1 Kalle opiskelee filosofiaa). Lause B on tosi, koska $\langle V_1(k), V_1(l)\rangle \in V_1(R)$ (eli tulkinnassa V_1 Kalle rakastaa Liisaa). Lause C:kin on tosi. Tämä seuraa jo siitä, että lause $R(l,k)$ on tosi (tulkinnassa V_1 on siis olemassa sellainen henkilö, jota Liisa rakastaa; nimittäin Liisa rakastaa Kallea). Toisaalta lauseet D ja E ovat epätosia tulkinnassa V_1. Edellisen epätotuus seuraa esim. lauseen $F(l)$ epätotuudesta, jälkimmäisen epätotuus esim. lauseen $R(k,k)$ epätotuudesta (tulkinnassa V_1 siis ei ole niin, että kaikki opiskelevat filosofiaa, mm. Liisa ei opiskele filosofiaa; ei ole myöskään niin, että kaikki rakastavat itseään, esim. Kalle ei rakasta itseään).

2. tulkinta. (Sivu 58.) Tarkasteltavien lauseiden totuusarvot ovat tulkinnassa V_2 samat kuin tulkinnassa V_1. Lauseen C totuus ei kuitenkaan nyt seuraa lauseen $R(l,k)$ totuudesta, sillä tämähän lause on tulkinnassa V_2 epätosi. Mutta joka tapauksessa on olemassa sellainen henkilö (mallin universumin alkio o), jota Liisa rakastaa. Käytettävissä olevassa kielessä ei vain ole vakiota, joka viittaisi tähän Liisan rakastamaan henkilöön. Menettelemme jatkossa siten, että tällaisissa totuustarkasteluissa laajennamme käytettävää kieltä siten, että jokaiselle mallin universumin alkiolle on käytettävissä nimi. Tällä tavalla menetellen voimme sanoa: "Koska $R(l,o)$ on tosi tulkinnassa V_2, niin lause $\exists x R(l,x)$ on tosi tässä tulkinnassa" (huomaa, että lause $R(l,o)$ ei ole alkuperäisen kielen L lause).

3. tulkinta. Myös tulkinnassa V_3 tarkasteltavien lauseiden totuusarvot ovat samoja kuin edellä. Perustelut vain ovat osittain erilaiset. Lause D on epätosi, koska esim. $F(o)$ on epätosi, ja lause E on epätosi, koska esim. $R(p,p)$ on epätosi (käytämme siis nyt laajennettua kieltä).

4. tulkinta. Tulkinnassa V_4 lauseet A ja C ovat tosia, loput epätosia.

5. tulkinta. Tulkinnassa V_5 ainoastaan lause B on epätosi. Esimerkiksi lause A on tosi, koska lauseet $F(Kalle)$, $F(Liisa)$, $F(Matti)$, $F(Niina)$, $F(o)$, $F(p)$ ovat tosia eli $F(v)$ on aina tosi, kun $v \in X$. Lause C on tosi, koska lause $R(l, l)$ on tosi (tulkinnassa V_5 on siis olemassa sellainen henkilö, jota Liisa rakastaa, Liisa nimittäin rakastaa itseään).

Yllä olevien tarkastelujen pohjalta on ilmeistä, että on samantekevää, mitä sidottuja variaabeleita lauseissa käytetään. Selvästikin esimerkiksi lauseiden $\forall x F(x)$, $\forall y F(y)$ ja $\forall z F(z)$ totuusarvot ovat samat jokaisessa tulkinnassa; ne ovat keskenään loogisesti ekvivalentteja.

Lisäksi on huomattava, että on olemassa lauseita, joiden totuus ei tunnu riippuvan käytetystä tulkinnasta. Esimerkiksi seuraavat lauseet ovat tosia jokaisessa tulkinnassa V_i, $(i = 1, 2, \ldots, 5)$:

$$\forall x F(x) \rightarrow F(k),\ F(k) \vee \neg F(k),\ R(l, k) \rightarrow \exists x R(l, x).$$

Itse asiassa ei ole mahdollista keksiä sellaista tulkintaa, jossa nämä lauseet olisivat epätosia; ne ovatkin loogisesti tosia.

Määrittelemme seuraavaksi muodollisesti totuuden mallissa *lauseille* induktiivisesti noudatellen kaavan määritelmää. Kvanttorien käsittelyn teemme helpommaksi laajentamalla ensin annettua objektikieltä antamalla *jokaiselle* mallin yksilölle nimi. Menettelemme (jälleen yksinkertaisuuden vuoksi) poikkeuksellisesti siten, että jokaisen yksilön metakielinen nimi otetaan myös objektikieleen sen nimeksi. Kuten edellä on sovittu, merkintä $A(x)$ tarkoittaa kaavaa, jossa ei esiinny vapaana muita muuttujia kuin ehkä x, ja jos a on vakio, niin merkintä $A(a)$ tarkoittaa lausetta, joka saadaan kaavasta $A(x)$ korvaamalla jokainen x:n vapaa esiintymä a:lla. Merkitsemme kuten aikaisemmin $M \vDash A$, jos A on *tosi* mallissa M, ja $M \nvDash A$, jos A ei ole tosi mallissa M eli jos A on *epätosi* tässä mallissa.

Totuus mallissa:

Olkoon $M = \langle X, V \rangle$ kielen L malli. Olkoon L' kieli, joka on saatu kielestä L lisäämällä siihen uusi yksilövakio v jokaista $v \in X$ kohti, ja $M' = \langle X, V' \rangle$ kielen L' malli siten, että V' on muuten sama kuin V, mutta lisäksi $V'(v) = v$ kaikille $v \in X$ (tässä on oletettava, että jos $v \in X$ ja vakio v esiintyy jo kielessä L, niin on oltava $V(v) = v$).

Tällöin kielen L' lauseen A totuus mallissa M' määritellään seuraavasti:

$M' \vDash a = b \Leftrightarrow V'(a) = V'(b)$,

$M' \vDash P(a) \Leftrightarrow V'(a) \in V'(P)$,

$M' \vDash R(a, b) \Leftrightarrow \langle V'(a), V'(b) \rangle \in V'(R)$,

$M' \vDash P_i^n(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \langle V'(a_1), \ldots, V'(a_n) \rangle \in V'(P_i^n)$,

$M' \vDash \neg A \Leftrightarrow M' \nvDash A$,

$M' \vDash A \wedge B \Leftrightarrow M' \vDash A$ ja $M' \vDash B$,

$M' \vDash A \vee B \Leftrightarrow M' \vDash A$ tai $M' \vDash B$,

$M' \vDash A \rightarrow B \Leftrightarrow M' \nvDash A$ tai $M' \vDash B$,

$M' \vDash A \leftrightarrow B \Leftrightarrow$ joko $M' \vDash A$ ja $M' \vDash B$ tai $M' \nvDash A$ ja $M' \nvDash B$,

$M' \vDash \forall x A(x) \Leftrightarrow M' \vDash A(v)$ kaikille $v \in X$,

$M' \vDash \exists x A(x) \Leftrightarrow M' \vDash A(v)$ jollekin $v \in X$.

Olkoon nyt A kielen L lause. Tällöin $M \vDash A$, jos $M' \vDash A$.

Tämä määritelmä on varsin pitkä. Konnektiiveja koskevat kohdat ovat kuitenkin jo tuttuja lauselogiikasta. Määritelmän lopussa on huomattava, että jos A on kielen L lause, niin se on aina myös laajennetun kielen L' lause. Määritelmän neljäs kohta on merkitty sulkuihin, koska tässä monisteessa tarkastelemme lähinnä vain yksi- ja kaksipaikkaisia predikaatteja. Määritelmässä esiintyvät vakiot a, b voivat viitata sekä alkuperäisen kielen L että laajennetun kielen L' vakioihin. Jos esimerkiksi a on kielen L vakio, niin $V'(a) = V(a)$. Jos sattuu olemaan niin, että $a \in X$ ja $b \in X$, niin $V'(a) = a$ ja $V'(b) = b$ (mutta $V(a)$ ja $V(b)$ ei ole välttämättä määritelty) ja määritelmän kolme ensimmäistä kohtaa voidaan ilmaista lyhyemmin:

$$
\begin{aligned}
&M \vDash a = b \Leftrightarrow a = b,\\
&M \vDash P(a) \Leftrightarrow a \in V'(P),\\
&M \vDash R(a, b) \Leftrightarrow \langle a, b\rangle \in V'(R).
\end{aligned}
$$

Näistä ensimmäinen saattaa vaikuttaa hieman omituiselta. Itse asiassa siinä esiintyvällä symbolilla '=' on kaksi merkitystä: vasemmalla puolella se edustaa objektikielen kaksipaikkaista predikaattia, joka aina tulkitaan *identtisyys*-relaatioksi; oikealla puolella se on metakielen lyhennysmerkintä, joka voitaisiin korvata esimerkiksi ilmaisulla 'ovat samoja' (usein käytetään objektikielessä symbolin '=' tilalla jotain siitä eroavaa, mutta kuitenkin riittävän samankaltaista symbolia).

Esimerkki 88. Tarkastellaan esimerkissä 86 ollutta kieltä ja mallia $M_1 = \langle X_1, V_1\rangle$, jossa $X_1 = \{a, b, c, d, e\}$ ja $V_1(P) = \{a, e\}$.

Lause $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$ on tosi mallissa M_1. Tämä nähdään seuraavasti:

Lisätään kieleen $L = \{P\}$ yksilövakiot a, b, c, d, e ja tarkastellaan mallia $M_1' = \langle X, V_1'\rangle$, jossa $V_1'(P) = V_1(P) = \{a, e\}$, $V_1'(a) = a$, $V_1'(b) = b$, $V_1'(c) = c$, $V_1'(d) = d$, $V_1'(e) = e$.

Koska $V_1'(a) = a \in V_1'(P)$, niin $M_1' \vDash P(a)$. Täten $M_1' \vDash \exists x P(x)$. Koska $V_1'(b) = b \notin V_1'(P)$, niin $M_1' \nvDash P(b)$ ja täten $M_1' \vDash \neg P(b)$. Tästä seuraa, että $M_1' \vDash \exists x \neg P(x)$.

Yhdistämällä yllä saadut tulokset saadaan, että

$$M_1' \vDash \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x).$$

Koska tämä lause on myös alkuperäisen kielen $\{P\}$ lause, niin se on tosi myös mallissa M_1.

Vaikka yllä olevan esimerkin tulos onkin ilmeinen, niin sen täsmällinen esittäminen määritelmien mukaisesti on aika pitkä. Jatkossa emme enää eksplisiittisesti mainitse kielen laajennusta, vaan oletamme laajennuksen jo tehdyksi alkuperäisen mallin yhteydessä. Emme myös välttämättä mainitse "itsestään selviä" perusteluja.

Esimerkki 89. Tarkastellaan esimerkin 86 mallia $M_3 = \langle X_3, V_3\rangle$, jossa $X_3 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ja $V_3(P) = \{0, 2, 4, \ldots\}$.

Voimme päätellä lyhyesti:

$$M_3 \vDash \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x),$$

sillä esimerkiksi $M_3 \vDash P(0)$ ja $M_3 \vDash \neg P(1)$.

Esimerkki 90. Tarkastellaan lauseen

$$A = \forall x \forall y \forall z \big(P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \to x = y \vee x = z \vee y = z\big)$$

totuutta esimerkin 86 mallissa M_3.

Mallissa M_3 lause A on epätosi. Koska nimittäin $V_3(P) = \{0, 2, 4, \ldots\}$, niin $M_3 \vDash P(0)$, $M_3 \vDash P(2)$ ja $M_3 \vDash P(4)$ ja täten $M_3 \vDash P(0) \wedge P(2) \wedge P(4)$. Mutta $0 \neq 2$, $0 \neq 4$ ja $2 \neq 4$, joten $M_3 \nvDash 0 = 2 \vee 0 = 4 \vee 2 = 4$. Siis $M_3 \nvDash P(0) \wedge P(2) \wedge P(4) \to 0 = 2 \vee 0 = 4 \vee 2 = 4$ ja täten myös $M_3 \nvDash A$. (Pohdittavaksi: millaisissa malleissa lause A on tosi?)

Esimerkki 91. Olkoon kieli $L = \{R\}$, jossa R on 2-paikkainen predikaattisymboli. Tarkastellaan tämän kielen mallia $M = \langle \mathbf{N}, V \rangle$, jossa

$$V(R) = \{\, \langle s, t \rangle \mid s < t \,\}.$$

Lause $\forall x \exists y R(x, y)$ on tosi tässä mallissa. Tätä ei voi kuitenkaan todeta edes periaatteessa luettelemalla kaikkia muotoa $R(s, t)$ olevia lauseita ja tutkimalla niiden totuutta. Tarvitaan seuraavanlainen yleinen perustelu:

Olkoon $k \in \mathbf{N}$ mielivaltainen. Valitaan $l = k + 1 \in \mathbf{N}$. Tällöin $k < l$ ja siis $M \vDash R(k, l)$. On siis olemassa (ainakin) yksi sellainen luku l, että $M \vDash R(k, l)$, joten $M \vDash \exists y R(k, y)$. Tässä k on mielivaltainen, joten $M \vDash \exists y R(k, y)$ jokaiselle $k \in \mathbf{N}$. On siis voimassa

$$M \vDash \forall x \exists y R(x, y).$$

Edellinen esimerkki havainnollistaa periaatteellisia vaikeuksia, mitä lauseiden totuuden tarkastelussa tulee vastaan, kun mallin universumi on ääretön. Ei ole olemassa mitään mekaanista ratkaisumenetelmää, jonka avulla aina pystyttäisiin selvittämään minkä tahansa lauseen totuus mallissa, jonka universumi on ääretön. Matematiikassa on esimerkiksi luonnollisia lukuja koskevia väitteitä, joiden totuutta ei ole vieläkään selvitetty tai joiden totuus on ratkennut vasta vuosia, joskus jopa vuosisatoja kestäneen tutkimuksen tuloksena.

Looginen totuus

Mitä tarkoitetaan sillä, että annetun kielen L lause on *loogisesti tosi, toteutuva*, jne. määritellään samaan tapaan kuin ennenkin, mutta nyt suhteutettuna kielen L kaikkien mallien luokkaan. Nämä käsitteet on jo esitelty mahdollisia maailmoja käsittelevässä luvussa ja uudelleen lauselogiikan yhteydessä, joten tässä tyydymme vain kertaamaan kaikkein tärkeimmät määritelmät. Oletamme, että on annettu jokin kieli L ja että määritelmissä esiintyvät lauseet A, B, A_1, A_2, jne. ovat sen lauseita. Kun M on jokin tämän kielen L malli, niin sanomme lyhyesti, että M on L-malli.

> Lause A on *loogisesti tosi* (merkitään $\vDash A$), jos $M \vDash A$ aina, kun M on L-malli.
>
> Lause A on *toteutuva*, jos on olemassa sellainen L-malli M, että $M \vDash A$.

Lause A on *kumoutuva*, jos on olemassa sellainen L-malli M, että $M \not\models A$.

Lauseet A ja B ovat *loogisesti ekvivalentteja* (merkitään $A \equiv B$), jos aina, kun M on L-malli, niin $M \models A \Leftrightarrow M \models B$.

A on lauseiden A_1, A_2, ... *looginen seuraus*, jos aina, kun M on sellainen L-malli, että $M \models A_1$, $M \models A_2$, ..., niin $M \models A$.

Joskus nimityksen "loogisesti tosi" tilalla käytetään myös nimitystä *validi*. Lause on loogisesti tosi, jos ja vain jos se ei ole kumoutuva. Lause, joka ei ole toteutuva, on loogisesti epätosi; myös nimitystä "ristiriitainen lause" voi käyttää, vaikka tämä nimitys on paremmin syntaksiin liittyvä. Samoin voidaan loogisen seurauksen $A_1, A_2, \ldots \models A$ yhteydessä sanoa, että lauseet A_1, A_2, ... ovat premissejä ja A johtopäätös, vaikka myös nämä käsitteet ovat paremminkin todistusteoreettisia (ja siis syntaksiin liittyviä). Predikaattilogiikassakin on voimassa

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models A \Leftrightarrow \models A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to A.$$

Toisin kuin lauselogiikassa, ei ole kuitenkaan olemassa ratkaisumenetelmää, jonka avulla voitaisiin mielivaltaisista predikaattilogiikan lauseista päätellä, ovatko ne loogisesti tosia, toteutuvia jne. Vain kyllin yksinkertaisten lauseiden ollessa kysymyksessä tämä voidaan tehdä. On esimerkiksi ilmeistä, että jokainen predikaattilogiikan lause, joka on tautologia, on myös loogisesti tosi. Kysymys tautologisuudesta taas voidaan ratkaista täysin mekaanisesti soveltamalla totuustaulumenetelmää. Alla on kuitenkin muutama esimerkki, joita ei voi ratkaista tällä menetelmällä.

Kun halutaan osoittaa, että joku kielen L lause on loogisesti tosi, niin on tutkittava mielivaltaista L-mallia.

Esimerkki 92. Lause $\forall x P(x) \to P(c)$ on loogisesti tosi. Osoitetaan tämä tutkimalla mielivaltaista mallia: Olkoon $M = \langle X, V\rangle$ kielen $L = \{c, P\}$ malli ja olkoon $V(c) = c'$. Jos $M \not\models \forall x P(x)$, niin $M \models \forall x P(x) \to P(c)$. Jos taas $M \models \forall x P(x)$, niin aina kun $v \in X$, niin $v \in V(P)$. Erityisesti $c' \in V(P)$ ja täten $M \models P(c)$. Tässäkin tapauksessa siis $M \models \forall x P(x) \to P(c)$.

Tutkittaessa lauseen A toteutuvuutta (vast. kumoutuvuutta) riittää löytää yksi malli, jossa lause A on tosi (vast. epätosi). Erityisesti osoitettaessa, että jokin lause ei ole loogisesti tosi, riittää löytää malli, jossa tutkittava lause on epätosi.

Esimerkki 93. Olkoon $L = \{R\}$, jossa R on kaksipaikkainen predikaattisymboli. Kielen L lause

$$\forall x \exists y R(x, y) \to \exists y R(y, y)$$

on sekä toteutuva että kumoutuva.

Tämä nähdään esimerkiksi tutkimalla malleja $M_1 = \langle \mathbf{N}, V_1\rangle$, jossa $V_1(R) = \{\, \langle x, y\rangle \mid x < y \,\}$, ja $M_2 = \langle \mathbf{N}, V_2\rangle$, jossa $V_2(R) = \{\, \langle x, y\rangle \mid x \leq y \,\}$.

Mallissa $M_1 \models \forall x \exists y R(x, y)$, mutta $M_1 \not\models \exists y R(y, y)$, sillä kun k on luonnollinen luku, niin aina esimerkiksi $k < k + 1$, mutta ei ole olemassa sellaista luonnollista lukua l, että $l < l$. Tässä mallissa siis

$$M_1 \not\models \forall x \exists y R(x, y) \to \exists y R(y, y).$$

Mallissa $M_2 \models R(0,0)$, joten $M_2 \models \exists y R(y,y)$. (Itse asiassa jopa $M_2 \models \forall y R(y,y)$.) Tässä mallissa siis

$$M_2 \models \forall x \exists y R(x,y) \to \exists y R(y,y).$$

Loogisen ekvivalenttisuuden osoittaminen semanttisesti vaatii mielivaltaisen mallin tutkimista. Toisaalta voi myös käyttää aikaisemmin esitettyä syntaktista lähestymistapaa. Alla olevan esimerkin tulosta käytettiin tämän menettelyn yhteydessä annettuna tuloksena (intuitiivisesti sitä tietenkin pystyttiin jo silloin perustelemaan).

Esimerkki 94. Olkoon $A(x)$ jokin kielen L-kaava, jossa ei esiinny vapaana muita muuttujia kuin x. Tällöin $\forall x A(x) \equiv \neg\exists x \neg A(x)$. Osoitetaan tämä tutkimalla mielivaltaista L mallia $M = \langle X, V \rangle$:

Oletetaan ensin, että $M \models \forall x A(x)$. Tällöin siis $M \models A(v)$ jokaiselle $v \in X$. Ei ole siis olemassa sellaista $v \in X$, että $M \not\models A(v)$, eli sellaista $v \in X$, että $M \models \neg A(v)$. Siis $M \not\models \exists x \neg A(x)$, ja täten $M \models \neg\exists x \neg A(x)$.

Oletetaan seuraavaksi, että $M \not\models \forall x A(x)$. Ei ole siis niin, että $M \models A(v)$ jokaiselle $v \in X$. On siis olemassa ainakin yksi sellainen $v \in X$, että $M \not\models A(v)$. Tämä tarkoittaa sitä, että $M \models \neg A(v)$ jollekin $v \in X$. Täten siis $M \models \exists x \neg A(x)$ ja $M \not\models \neg\exists x \neg A(x)$.

Edellä on osoitettu, että jokaisessa L-mallissa M

$$M \models \forall x A(x) \Leftrightarrow M \models \neg\exists x \neg A(x).$$

Lauseet $\forall x A(x)$ ja $\neg\exists x \neg A(x)$ ovat siis loogisesti ekvivalentteja.

Jos haluataan osoittaa, että jotkin lauseet A ja B eivät ole loogisesti ekvivalentteja, niin riittää löytää yksi malli, jossa toinen lauseista on tosi, toinen epätosi.

Esimerkki 95. Lauseet $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ ja $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ eivät ole loogisesti ekvivalentteja. Kun nimittäin $M = \langle X, V \rangle$, jossa $X = \{1,2,3,4\}$, $V(P) = \{1,2\}$ ja $V(Q) = \{3,4\}$, niin $M \models \forall x(P(x) \vee Q(x))$, mutta $M \not\models \forall x P(x)$ ja $M \not\models \forall x Q(x)$, joten $M \not\models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.

Lopuksi tarkastelemme vielä paria esimerkkiä loogisesta seurauksesta.

Esimerkki 96. Osoitetaan, että

$$I(a),\ \forall x(I(x) \to K(x)) \models K(a).$$

Olkoon $M = \langle X, V \rangle$ sellainen kielen $L = \{I, K, a\}$ malli, että $M \models I(a)$ ja $M \models \forall x(I(x) \to K(x))$. Jälkimmäisestä seuraa, että jokaiselle $v \in X$ pätee $M \models I(v) \to K(v)$. Olkoon $V(a) = a' \in X$. Siis $M \models I(a')$ ja toisaalta $M \models I(a') \to K(a')$. Täten $M \models K(a')$, josta seuraa, että $M \models K(a)$.

Loogisen seurauksen osoittaminen edellyttää kaikkien sellaisten mallien tutkimista, joissa premissit ovat tosia. Jos taas halutaan osoittaa, että premisseistä ei seuraa loogisesti johtopäätös, niin riittää löytää sellainen malli, jossa premissit ovat tosia, mutta johtopäätös epätosi.

Esimerkki 97. Osoitetaan, että päättelyn

$$\begin{array}{l} \textit{Jotkut filosofit ovat myös loogikkoja} \\ \underline{\textit{Jotkut loogikot ovat myös matemaatikkoja}} \\ \textit{Siis: jotkut filosofit ovat myös matemaatikkoja} \end{array}$$

johtopäätös ei ole premissien looginen seuraus. Aktuaalisessa maailmassa sekä premissit että johtopäätös ovat tosia, joten täytyy tutkia jotain sopivaa keksittyä mallia. Formalisoidaan ensin tämä päättely tavalliseen tapaan:

$$\begin{array}{c} \exists x(F(x) \land L(x)) \\ \underline{\exists x(L(x) \land M(x))} \\ \exists x(F(x) \land M(x)) \end{array}$$

Olkoon $M = \langle X, V \rangle$, jossa

$$\begin{aligned} X &= \{\textit{Gödel, Leibniz, Newton, Russell}\}, \\ V(F) &= \{\textit{Leibniz, Russell}\}, \\ V(L) &= \{\textit{Gödel, Russell}\}, \\ V(M) &= \{\textit{Gödel, Newton}\}. \end{aligned}$$

(Aktuaalisesti tietenkin esim. Leibniz oli sekä filosofi, matemaatikko että loogikko, mutta mallien konstruoimisessa saa luonnollisesti käyttää vapaasti mielikuvitusta.)

Tässä mallissa $M \vDash \exists x(F(x) \land L(x))$, sillä $M \vDash F(\textit{Russell}) \land L(\textit{Russell})$, ja $M \vDash \exists x(L(x) \land M(x))$, sillä $M \vDash L(\textit{Gödel}) \land M(\textit{Gödel})$. Koska joukoissa $V(F)$ ja $V(M)$ ei ole yhteisiä alkioita, niin $M \nvDash \exists x(F(x) \land M(x))$. On siis voimassa

$$\exists x(F(x) \land L(x)),\ \exists x(L(x) \land M(x)) \nvDash \exists x(F(x) \land M(x)).$$

Jos tässä esitetty käännös predikaattilogiikan kielelle hyväksytään, niin näin on osoitettu, että myös alkuperäisen luonnollisessa kielessä esitetyn päättelyn johtopäätös ei ole premissien seuraus.

Luku 4

TODISTUSTEORIAA

Lause- ja predikaattilogiikan semantiikassa määritellään kaavan B olevan kaavojen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ looginen seuraus, jos jokainen kaavojen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ malli on myös kaavan B malli. Tällöin voidaan myös sanoa, että *johtopäätös* B on pääteltävissä *premisseistä* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Päättelyn käsite on ensisijaisesti kuitenkin syntaktinen käsite. Kun kielen syntaksi on tarkasti määritelty, voidaan myös määritellä täsmällisesti, mitä pätevällä päättelyllä tarkoitetaan.

Todistusteoriassa annetaan joukko *aksioomia* ja *päättelysääntöjä*, joiden avulla annetuista premisseistä *dedusoidaan* eli *johdetaan* johtopäätöksiä. Aksioomat ovat kielen yksittäisiä kaavoja tai ns. *aksioomaskeemoja*. Päättelysäännöt kertovat, miten jo päätellyistä kaavoista voidaan päätellä uusia kaavoja. *Deduktio* on sellainen jono kaavoja, jossa jonon kaavat ovat aksioomia, päättelyn premissejä tai pääteltävissä jonkin päättelysäännön avulla jonon aikaisemmista kaavoista. Oleellista on, että aksioomat ja päättelysäännöt on luonnehdittu syntaktisesti: aksioomat ovat tietynlaisia merkkijonoja ja päättelysäännöt kertovat, miten merkkijonoja käsittelemällä voidaan muodostaa uusia merkkijonoja. Vastaavanlaisesti kuin lause- ja predikaattilogiikan kielen syntaksissa luonnehditaan, millaiset merkkijonot ovat kyseisen kielen hyvin muodostettuja ilmaisuja eli kaavoja, niin voidaan myös luonnehtia syntaktisesti, millaiset merkkijonojen jonot ovat deduktioita. Sillä, mitä nämä merkkijonot tarkoittavat tai mikä niiden totuusarvo on, ei ole syntaktisesta näkökulmasta merkitystä, mutta jotta päättelyt olisivat myös semanttisesti mielekkäitä, aksioomien pitää olla loogisesti tosia kaavoja ja päättelysääntöjen totuuden säilyttäviä.

Formaalin päättelyn esittämiseksi on kehitetty useita erilaisia *päättelysysteemejä*. Niissä on erotettavissa kaksi eri lähestymistapaa: *luonnollisen päättelyn systeemit* ja *aksiomaattinen menetelmä*. Luonnollinen päättely vastaa nimensä mukaisesti enemmän sitä, mitä päättelyllä voitaisiin arkipäiväisessä elämässä ja matematiikassa tarkoittaa. Siinä annetaan useita päättelysääntöjä, muttei yleensä ollenkaan aksioomia. Aksiomaattisessa menetelmässä sen sijaan annetaan joukko aksioomia ja vain muutama päättelysääntö. Tämän menetelmän avulla voidaan helpommin kuin luonnollisen päättelyn systeemeissä tehdä eräitä teoreettisia tarkasteluja, mutta toisaalta aktuaalisten päättelyiden keksiminen on vaikeampaa. Tarkastelemme seuraavaksi hieman tarkemmin tässä esiteltyjä käsitteitä.

Aksioomat

Aksioomat voivat olla yksittäisiä kielen kaavoja. Vaihtoehtoisesti aksioomat voidaan esittää aksioomaskeemoina käyttämällä niissä objektikielen atomikaavojen sijasta metavariaabeleja. Kun aksioomaskeemassa jokainen metavariaabeli korvataan järjestelmällisesti objektikielen kaavalla, saadaan (objektikieleen kuuluva) aksioomaskeeman *instanssi*.

Esimerkki 98. Jos esimerkiksi lauselogiikan aksioomaskeemaksi asetetaan

$$A \wedge B \to A,$$

niin sen instansseja ovat kaikki tätä muotoa olevat kaavat, kuten

$$\begin{gathered} p_1 \wedge p_2 \to p_1, \\ \neg p_1 \wedge p_2 \to \neg p_1, \\ p_{100} \wedge p_{100} \to p_{100}, \\ (p_1 \vee p_2) \wedge \neg p_2 \to p_1 \vee p_2. \end{gathered}$$

Aksioomaskeema $A \wedge B \to A$ vastaa siis oikeastaan ääretöntä aksioomajoukkoa

$$\{\, A \wedge B \to A \mid A,\ B \text{ ovat lauselogiikan kaavoja} \,\}.$$

Aksioomien joukon edellytetään yleensä olevan *rekursiivinen* eli vaaditaan, että on oltava ”mekaaninen” ratkaisumenetelmä sen selvittämiseksi, onko mielivaltainen annettu kaava aksiooma (tai aksioomaskeeman instanssi) vai ei. Erityisesti jos aksioomia on vain äärellinen määrä, niin tämä ehto on aina voimassa. Tilanne on sama myös aksioomaskeemojen suhteen, sillä vaikka yhtä aksioomaskeemaa vastaakin ääretön määrä aksioomia, niin voimme aina selvittää esimerkiksi rakennepuulla, onko annettu kaava samaa muotoa kuin aksioomaskeema. Ääretön joukko kaavoja voi olla kuitenkin sellainen, ettei ole mahdollista jokaisen kaavan kohdalla ratkaista kysymystä siitä, kuuluko se tähän joukkoon vai ei. Esimerkiksi ääretön kaavajoukko

$$\{\, A \mid A \text{ on predikaattilogiikan loogisesti tosi kaava} \,\}$$

ei ole rekursiivinen joukko; kukaan ei koskaan (ei edes missään ei-aktuaalisessa, ”matemaattisesti mahdollisessa” maailmassa) tule ohjelmoimaan sellaista tietokoneohjelmaa, joka saadessaan syötteenä predikaattilogiikan kaavan *aina* tulostaa (äärellisen, mutta rajoittamattoman ajan jälkeen) vastauksen kysymykseen, onko tuo kaava loogisesti tosi vai ei.

Päättelysäännöt

Päättelysäännöt ilmaisevat yleensä, miten tietyistä skeemoista voidaan päätellä tietty skeema. Jos jonkin päättelysäännön mukaan skeemoista A_1, A_2, …, A_n voidaan päätellä skeema B, niin kyseinen päättelysääntö voidaan esittää seuraavanlaisilla tavoilla:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline B \end{array}, \qquad \frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}, \qquad A_1, A_2, \ldots, A_n/B.$$

Esimerkki 99. Olemme jo tutustuneet päättelysääntöön *Modus ponens*

$$(MP) \qquad \begin{array}{c} A \\ A \to B \\ \hline B \end{array}.$$

Tämän päättelysäännön mukaan esimerkiksi kaavoista $\neg p_1 \wedge p_2$ sekä $(\neg p_1 \wedge p_2) \to (p_2 \vee p_3)$ voidaan päätellä kaava $(p_2 \vee p_3)$.

Esimerkki 100. Erityisesti sellaisissa aksiomaattisissa systeemeissä, joissa ei käytetä aksioomaskeemoja, vaan aksioomat ovat yksittäisiä kaavoja, tarvitaan yhtenä päättelysääntönä *universaalia substituutiosääntöä*

$$(US) \qquad \frac{A}{A[p/B]}.$$

Merkintä $A[p/B]$ tarkoittaa kaavaa, joka saadaan kaavasta A korvaamalla siinä jokainen lausemuuttujan p esiintymä kaavalla B. Päättelysäännön (US) avulla esimerkiksi aksioomasta $p_1 \wedge p_2 \to p_1$ voidaan päätellä $\neg p_1 \wedge p_2 \to \neg p_1$ (p_1 korvattu kaavalla $\neg p_1$), $p_{100} \wedge p_{100} \to p_{100}$ (sekä p_1 että p_2 korvattu kaavalla p_{100}) ja ylipäätään mikä tahansa kaava $A \wedge B \to A$ (p_1 on korvattu kaavalla A ja p_2 kaavalla B).[1]

Samoin kuin aksioomien joukon, niin myös päättelysääntöjen joukon ja yksittäisen päättelysäännön edellytetään olevan rekursiivisia eli kun on annettu kaavat A_1, A_2, …, A_n ja B, niin on oltava mahdollista ratkaista kysymys siitä, onko olemassa päättelysääntöä $A_1, A_2, \ldots, A_n/B$.

Deduktio

Olkoon päättelysysteemin aksioomat (mahdollisesti aksioomaskeemoina) ja päättelysäännöt annettu. Kaavajono $B_1, \ldots, B_m$ on kaavan B *deduktio* kaavoista $A_1, \ldots, A_n$ kyseisessä päättelysysteemissä, jos kaavajonon viimeinen kaava $B_m = B$ ja jokainen kaavajonon kaava B_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) on

(1) jokin aksiooma (jonkin aksioomaskeeman instanssi),

(2) jokin kaavoista $A_1, \ldots, A_n$ tai

[1] On siis makuasia, käyttääkö esimerkiksi aksioomaskeemaa $A \wedge B \to A$ vai aksioomaa $p_1 \wedge p_2 \to p_1$ yhdessä päättelysäännön (US) kanssa. Tässä monisteessa valitsemme aksioomaskeemojen käytön, sillä näin deduktion määritelmä on hieman yksinkertaisempi.

(3) pääteltävissä jonkin päättelysäännön avulla sitä edeltävistä jonon kaavoista.

Kaavat $A_1, \ldots, A_n$ ovat tämän deduktion *oletuksia* eli *premissejä*. Jos on olemassa kaavan B deduktio oletuksista $A_1, \ldots, A_n$, niin B on *dedusoitavissa* eli *johdettavissa* näistä kaavoista. Tällöin merkitään

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B.$$

Voimme sanoa myös, että B on *pääteltävissä* kaavoista $A_1, \ldots, A_n$. Periaatteessa tässä pitäisi merkki "$\vdash$" suhteuttaa käytettävissä olevaan päättelysysteemiin ainakin silloin, jos tarkastellaan useita päättelysysteemejä samanaikaisesti. Jos deduktion oletukset kuuluvat joukkoon S, niin sitä kutsutaan *deduktioksi kaavajoukosta S*. Tällöin merkitään $S \vdash B$. Merkinnät $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ ja $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash B$ tarkoittavat siis samaa. Sillä, missä järjestyksessä premissit ovat, ei ole merkitystä, joten joukkomerkinnän käyttö on oikeutettua.

Kaavan B sanomme olevan *teoreeman*, jos kaava B voidaan johtaa niin, ettei B riipu mistään premisseistä. Tällöin merkitsemme $\vdash B$. Voimme myös sanoa, että teoreema on kaava, joka on dedusoitavissa tyhjästä joukosta.

Esimerkki 101. Oletetaan, että käytössä on aksiooma(skeema) $A \wedge B \to A$ ja päättelysääntö (MP). Tällöin kaavajono

$$A \wedge B,\ A \wedge B \to A,\ A,\ A \to C,\ C$$

osoittaa, että premisseistä $A \wedge B$ ja $A \to C$ voidaan päätellä johtopäätös C. Jonon alussa on premissistä $A \wedge B$ ja aksioomasta $A \wedge B \to A$ säännön (MP) avulla johdettu kaava A. Siitä ja premissistä $A \to C$ on sitten jonon loppuosassa johdettu säännön (MP) avulla C.

Esimerkki 102. Mikä tahansa premisseistä voidaan päätellä:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A_i \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Deduktio on tässä tapauksessa triviaalisti yhden kaavan, nimittäin kaavan A_i itsensä, muodostama jono.

Esimerkki 103. Olkoon kaavajono $B_1, B_2, \ldots, B_m$ kaavan B_m deduktio kaavoista D, B ja A. Määritelmän mukaan sama jono kelpaa myös kaavan B_m deduktioksi kaavoista A, B, C, ja D, sillä premissien järjestyksellä ei ole väliä ja "turhien" oletusten (tässä C) lisääminen ei mitätöi johtopäätöksiä.

Päättelyiden äärellisyys

Päättelyt eli kaavajonot, jotka toteuttavat deduktiolle asetetut ehdot, ovat aina äärellisiä. Premissejä voi kyllä olla ääretön määrä, mutta aktuaalisessa todistuksessa voidaan käyttää niistä vain äärellistä määrää. Tämä huomio voidaan muotoilla seuraavasti: jos kaava A on johdettavissa äärettömästä kaavajoukosta S, niin on olemassa sellainen äärellinen joukko joukkoon S kuuluvia kaavoja, josta A voidaan johtaa.

Mitään kiinteää ylärajaa deduktion pituudelle ei voida kuitenkaan antaa, vaan deduktiot voivat olla mielivaltaisen pitkiä. Koska päättelyt ovat äärellisiä ja aksioomien ja päättelysäännöt edellytetään olevan rekursiivisia, niin syntaktisten päättelyiden pätevyys voidaan aina tarkistaa mekaanisesti. Ainakin periaatteessa voidaan vaikkapa laatia tietokoneohjelma, joka saa syötteenä kaavajonon $B_1, B_2, \ldots, B_m$ ja tulostaa vastaukseksi sen, onko tämä jono kaavan B_m deduktio kaavajoukosta S vai ei. Sen sijaan semanttiset perustelut sille, onko jokin kaava joidenkin toisten kaavojen looginen seuraus, eivät ole tällä tavoin mekaanisesti tarkistettavissa predikaattilogiikassa (lauselogiikassa kuitenkin esimerkiksi täydellisellä totuustaululla esitetty perustelu on mekaanisesti tarkistettavissa). Logiikan syntaktinen ja semanttinen tarkastelu eroavat tässä suhteessa huomattavasti toisistaan.

On olemassa useita erilaisia päättelysysteemeitä, mutta johdettavuuden käsite on siinä mielessä yleispätevä, että jokaisessa (klassisessa) lause- ja predikaattilogiikan päättelysysteemissä annetuista premisseistä voidaan johtaa täsmälleen samat johtopäätökset. Erityisesti jokaisessa päättelysysteemissä on johdettavissa täsmälleen samat teoreemat. Tarkastelemme seuraavaksi kysymystä siitä, millaisia teoreemoja ja annettujen premissien johtopäätöksiä näissä klassisissa systeemeissä voidaan johtaa. Saamme näin yhteyden logiikan semantiikan ja syntaksin (todistusteorian) välille.

4.1 Luotettavuus ja täydellisyys

Totesimme jo edellä, että pätevä päättely säilyttää totuuden: Aina, kun premissit ovat tosia, johtopäätöskin on tosi. Tämä merkitsee, että

$$\text{jos } A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B, \text{ niin } A_1, A_2, \ldots, A_n \models B.$$

Kun tämä ehto on voimassa, niin sanotaan päättelysysteemin olevan *luotettava* (myös ilmaisuja *eheä* ja *korrekti* käytetään). Päättelyiden pätevyyttä voikin aina koettaa arvioida semanttisesti tarkastelemalla, onko johtopäätös tosi, jos premissit ovat. Kun luotettavuuden lisäksi on voimassa myös käänteinen väite

$$\text{jos } A_1, A_2, \ldots, A_n \models B, \text{ niin } A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B,$$

niin päättelysysteemiä kutsutaan *täydelliseksi*. Päättelysysteemi on siis tällöin siinä mielessä täydellinen, että kaikki premissien loogiset seuraukset ovat myös johdettavissa tämän systeemin avulla näistä premisseistä.

Nimitystä "täydellisyystulos" käytetään usein tulokselle, joka ilmaisee sekä luotettavuuden että täydellisyyden. Täydellisyystuloksen perusteella siis (klassisessa) päättelysysteemissä on annetuista premisseistä dedusoitavissa kaikki näiden premissien loogiset seuraukset ja vain ne.

Erikoistapauksena täydellisyystuloksesta saadaan

$$\models B, \text{ jos ja vain jos } \vdash B.$$

Päättelysysteemien teoreemojen joukko on siis sama kuin loogisesti tosien kaavojen joukko. Lauselogiikassa kaava on loogisesti tosi, jos ja vain jos se on tautologia, joten täydellisen lauselogiikan päättelysysteemin teoreemoja ovat kaikki tautologiat ja vain ne. Kaikissa (klassisissa) lauselogiikan päättelysysteemeissä on esimerkiksi todistettavissa kaava $A \vee \neg A$ teoreemaksi, mutta mikä varsinainen aktuaalinen todistus on, riippuu käytetystä systeemistä. Jossain systeemissä voi kaava $A \vee \neg A$ olla aksioomana, jossain toisessa systeemissä sen johtaminen voi edellyttää varsin pitkääkin deduktiota.

Täydellisyystulos on esimerkki *metateoreemasta*. Niitä ei todisteta suorittamalla varsinaisia syntaktisia todistuksia, vaan yleisemmällä päättelyllä. Esittelemme myöhemmin muutaman muun metatuloksen. Yleensä nämä tulokset pätevät kaikkiin päättelysysteemeihin, mutta niiden todistukset (jotka ovat siis matemaattisia todistuksia systeemistä, eivät systeemin syntaktisia todistuksia) ovat ainakin jossakin määrin erilaisia eri systeemeille.

4.2 Luonnollinen päättely lauselogiikassa

Olemme jo tutustuneet päättelysääntöön *modus (ponendo) ponensiin.* Kutsumme sitä luonnollisen päättelyn systeemissämme *implikaation eliminoinniksi* ja käytämme sille merkintää ($\to E$):

$$(\to E) \qquad \frac{\begin{array}{c} A \\ A \to B \end{array}}{B}\,.$$

Sääntö ($\to E$) on totuuden säilyttävä, niin kuin pitääkin. On ilmeistä, että viivan yläpuolella olevien kaavojen järjestyksellä ei ole merkitystä, ja voisimme yhtä hyvin esittää tämän säännön seuraavasti:

$$(\to E) \qquad \frac{\begin{array}{c} A \to B \\ A \end{array}}{B}\,.$$

Sääntöä ($\to E$) soveltaessamme pidämmekin premissien järjestystä epäoleellisena

Esimerkki 104. Tarkastelkaamme nyt argumenttia, jossa tätä sääntöä käytetään. Samalla tuomme esille, miten deduktio järjestetään luonnollisen päättelyn järjestelmässä. Osoitetaan, että

$$A,\, A \to B,\, B \to C \vdash C.$$

Asetamme deduktiossa esiintyvät kaavat allekkain ja numeroimme jokaisen vaakarivin. Premissit asetetaan vaakarivin yläpuolelle. Sovellettaessa jotain päättelysääntöä mainitaan kyseisen säännön lisäksi ne vaakarivit, joiden kaavoihin sääntöä on sovellettu.

$$\begin{array}{r|ll}
(1) & A & \text{premissi} \\
(2) & A \to B & \text{premissi} \\
(3) & B \to C & \text{premissi} \\
\cline{2-2}
(4) & B & 1,\,2,\,\to E \\
(5) & C & 3,\,4,\,\to E.
\end{array}$$

Neljännen vaakarivin oikealla puolella oleva merkintä ”1, 2, $\to E$” tarkoittaa siis sitä, että on sovellettu implikaation eliminointia $\to E$ ensimmäisen vaakarivin kaavaan A ja toisen vaakarivin kaavaan $A \to B$.

Esimerkin 104 deduktio voidaan järjestää myös toisella tavalla. Varsinkin pitkät deduktiot saadaan havainnollisemmiksi, jos oletus toistetaan kesken deduktion sitä käytettäessä. Tämä on ilmeisen oikeutettua, ja voidaankin esittää seuraava ns. *iteraatiosääntö*:

(R) Oletus voidaan toistaa kesken deduktion.

Seuraava esimerkki valaisee iteraatiosäännön käyttöä:

Esimerkki 105. Esimerkissä 104 olevan deduktion kolmas oletus voidaan ottaa mukaan kesken todistuksen:

$$
\begin{array}{l|ll}
(1) & A & \\
(2) & A \to B & \\
(3) & B \to C & \\
\cline{2-2}
(4) & B & 1,\ 2,\ {\to}E \\
(5) & B \to C & 3,\ R \\
(6) & C & 3,\ 4,\ {\to}E.
\end{array}
$$

Tarkastelemme seuraavaksi *konjunktion eliminointia*:

$$(\wedge E) \qquad \frac{A \wedge B}{A}, \qquad \frac{A \wedge B}{B}.$$

Tämä on myös ilmeinen sääntö. On helppo tarkistaa, että se on totuuden säilyttävä.

Esimerkki 106. Deduktiossa $A \wedge B,\ A \to (B \to C) \vdash C$ joudutaan käyttämään sekä implikaation että konjunktion eliminointia:

$$
\begin{array}{l|ll}
(1) & A \wedge B & \\
(2) & A \to (B \to C) & \\
\cline{2-2}
(3) & A & 1,\ \wedge E \\
(4) & B \to C & 2,\ 3,\ {\to}E \\
(5) & B & 1,\ \wedge E \\
(6) & C & 4,\ 5,\ {\to}E.
\end{array}
$$

Toinen konjunktioon liittyvä sääntö on yhtä ilmeinen. Sitä sanotaan *konjunktion tuonniksi (mukaanotoksi)*:

$$(\wedge T) \qquad \frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}.$$

Myöskään tämän säännön yhteydessä ei premissien järjestyksellä ole merkitystä. On selvää, että jos A ja B ovat tosia, niin myös $A \wedge B$ on tosi.

Esimerkki 107. $A \wedge B \vdash B \wedge A$.

$$
\begin{array}{l|ll}
(1) & A \wedge B & \\
\cline{2-2}
(2) & A & 1,\ \wedge E \\
(3) & B & 1,\ \wedge E \\
(4) & B \wedge A & 2,\ 3,\ \wedge T.
\end{array}
$$

Esimerkki 108. $A \wedge B,\ A \to C \vdash A \wedge C$.

$$
\begin{array}{r|ll}
(1) & A \wedge B & \\
(2) & A \to C & \\
\hline
(3) & A & 1,\ \wedge E \\
(4) & C & 2,\ 3,\ \to E \\
(5) & A \wedge C & 3,\ 4,\ \wedge T.
\end{array}
$$

Negaatiotakin vastaa kaksi sääntöä, *negaation eliminointi*

$$
(\neg E) \qquad \frac{\neg\neg A}{A}
$$

ja *negaation tuonti*, jonka esittelemme vasta myöhemmin tutustuttuamme alitodistuksen käsitteeseen.

Esimerkki 109. $A \wedge (\neg\neg B \wedge C) \vdash A \wedge (B \wedge C)$.

$$
\begin{array}{r|ll}
(1) & A \wedge (\neg\neg B \wedge C) & \\
\hline
(2) & \neg\neg B \wedge C & 1,\ \wedge E \\
(3) & \neg\neg B & 2,\ \wedge E \\
(4) & B & 3,\ \neg E \\
(5) & C & 2,\ \wedge E \\
(6) & B \wedge C & 4,\ 5,\ \wedge T \\
(7) & A & 1,\ \wedge E \\
(8) & A \wedge (B \wedge C) & 6,\ 7,\ \wedge T.
\end{array}
$$

Disjunktion tuonti on yksinkertainen ja ilmeinen sääntö:

$$
(\vee T) \qquad \frac{A}{A \vee B}\,, \qquad \frac{B}{A \vee B}\,.
$$

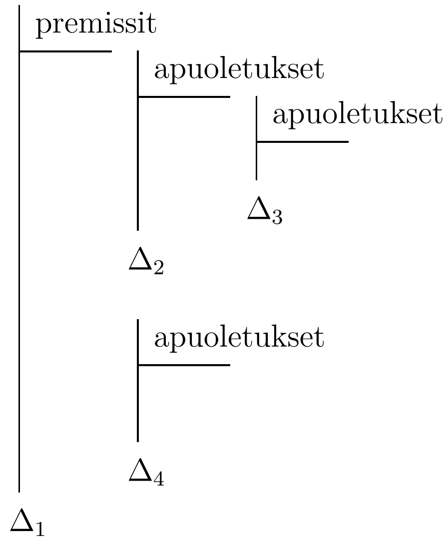
Triviaalisti edellä esitellyt päättelysäännöt $\neg E$ ja $\vee T$ säilyttävät totuuden.

Esimerkki 110. $A \wedge B \vdash A \vee B$.

$$
\begin{array}{r|ll}
(1) & A \wedge B & \\
\hline
(2) & A & 1,\ \wedge E \\
(3) & A \vee B & 2,\ \vee T.
\end{array}
$$

Säännön *disjunktion eliminointi* yhteydessä tarvitaan alideduktion (alitodistuksen) käsitettä. *Alideduktiolla* tarkoitetaan varsinaisen deduktion sisällä olevaa deduktiota. Sen premissejä kutsutaan *apuoletuksiksi*. Alideduktiossa käytetään aivan samoja päättelysääntöjä kuin varsinaisessakin deduktiossa. Siinä voidaan toistaa myös varsinaisen deduktion premissejä.

Deduktio voi sisältää useita alideduktioita, ja alideduktiot voivat puolestaan sisältää omia alideduktioita:



Yllä Δ_2 ja Δ_4 ovat deduktion Δ_1 alideduktioita ja Δ_3 on deduktion Δ_2 alideduktio. Jos deduktio Δ'' on deduktion Δ' alideduktio ja Δ' on deduktion Δ alideduktio, niin deduktion Δ'' katsotaan olevan myös deduktion Δ alideduktio. Täten myös Δ_3 on deduktion Δ_1 alideduktio.

On ilmeistä, että iteraatiosääntö voidaan esittää seuraavassa yleisemmässä muodossa:

(R) Deduktiossa aiemmin esiintyvä kaava, joka ei sisälly loppuunvietyyn alideduktioon, voidaan toistaa.

Esimerkiksi yllä alideduktiossa Δ_3 voi toistaa minkä tahansa deduktiossa Δ_1 tai Δ_2 aikaisemmin esiintyneen kaavan. Deduktiossa Δ_2 ei voi kuitenkaan toistaa kaavoja, jotka esiintyvät pelkästään deduktiossa Δ_3. Vastaavasti alideduktiossa Δ_4 ei voi toistaa alideduktiossa Δ_2 esiintyvää kaavaa (paitsi jos se sattumalta esiintyy myös sen ulkopuolella deduktiossa Δ_1.)

Tulkitsemme jokaisen deduktion itsensä alideduktioksi,[2] joten tämä yleistetty iteraatiosääntö sisältää myös tapauksen, jossa deduktiossa toistetaan siinä aikaisemmin esiintyneitä kaavoja.

Kaavojen toistaminen usein selkeyttää deduktioita. Jos halutaan lyhentää deduktioita, niin sääntöä (R) voi myös soveltaa niin, että jos alideduktion rivillä i saa sen perusteella toistaa kaavan A, niin rivillä i saa suoraankin soveltaa päättelysääntöä kaavaan A.

[2] Joukko-oppiin perehtynyt lukija huomannee, että relaatio 'x on y:n alideduktio' on refleksiivinen ja transitiivinen relaatio.

Esimerkki 111.

(1)	C	
(2)	$\quad A$	apuoletus
(3)	$\quad C$	1, R
(4)	$\quad A \wedge C$	2, 3, $\wedge T$
(5)	$\quad B$	apuoletus
(6)	$\quad B \wedge C$	1, 5, $\wedge T$

Rivit 2, 3 ja 4 muodostavat (loppuunviedyn) alideduktion, jossa oletuksena on kaava A. Tässä alideduktiossa on toistettu 3. rivillä kaava C, joka esiintyy deduktiossa aikaisemmin.

Rivien 5 ja 6 muodostamassa alideduktiossa voisi rivillä 6 toistaa kaavan C, mutta deduktiota on lyhennetty soveltamalla päättelysääntöä $\wedge T$ suoraan siihen. Tässä alideduktiossa ei voi toistaa rivien 2, 3 ja 4 muodostamassa alideduktiossa esiintyviä kaavoja A ja $A \wedge C$.

Alideduktioiden hyödyllisyys tulee esiin käytettäessä sellaisia päättelysääntöjä kuin esimerkiksi seuraavaksi esiteltävä disjunktion elimointi, jolla voidaan päätellä kaavoja alideduktioista niiden ulkopuolelle.

Disjunktion eliminointi on seuraava sääntö:

$$(\vee E) \qquad \begin{array}{|l} A \vee B \\ \hline \qquad \begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ C \end{array} \quad \text{apuoletus} \\ \\ \qquad \begin{array}{|l} B \\ \hline \vdots \\ C \end{array} \quad \text{apuoletus} \\ C \end{array}$$

Tämä sääntö voidaan tulkita seuraavasti: jos sekä oletuksesta A että oletuksesta B voidaan päätellä C, niin disjunktiosta $A \vee B$ voidaan päätellä C. Voimme esittää tämän lyhyesti seuraavasti:

$$\text{jos } A \vdash C \text{ ja } B \vdash C, \text{ niin } A \vee B \vdash C.$$

Kun osoitetaan, että $A \vdash C$, niin C riippuu apuoletuksesta A. Vastaavasti osoitettaessa $B \vdash C$ se riippuu apuoletuksesta B. Mutta näiden alideduktioiden ulkopuolella C ei riipu näistä apuoletuksista, vaan vain oletuksista, joista disjunktio $A \vee B$ riippuu.

Helposti voidaan todeta, että disjunktion eliminointisääntö säilyttää totuuden. On vain huomattava, että nyt oletus, että apuoletuksesta A (vastaavasti B) voidaan päätellä C, tarkoittaa sitä, että jos A on tosi (vastaavasti B on tosi), niin C on tosi. Jos siis $A \vee B$ on tosi eli A tai B on tosi, niin myös C on tosi. (Yksinkertaisuuden vuoksi emme ole tässä tarkastelleet tilannetta, jossa C riippuu muistakin oletuksista kuin $A \vee B$, A ja B.) Lyhyesti voimme esittää totuuden säilymisen seuraavasti:

$$\text{jos } A \vDash C \text{ ja } B \vDash C, \text{ niin } A \vee B \vDash C.$$

Esimerkki 112. $A \vee B \vdash B \vee A$. (Huomaa, millä tavoin viimeisellä rivillä viitataan alideduktioihin.)

(1)	$A \vee B$		premissi
(2)		A	apuoletus
(3)		$B \vee A$	2, $\vee T$
(4)		B	apuoletus
(5)		$B \vee A$	4, $\vee T$
(6)	$B \vee A$		1, 2–3, 4–5, $\vee E$.

Esimerkki 113. (Vrt. esim. 111.) $A \vee B, C \wedge D \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge D)$.

(1)	$A \vee B$		premissi
(2)	$C \wedge D$		premissi
(3)	C		2, $\wedge E$
(4)	D		2, $\wedge E$
(5)		A	apuoletus
(6)		$A \wedge C$	3, 5, $\wedge T$
(7)		$(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$	6, $\vee T$
(8)		B	apuoletus
(9)		$B \wedge D$	4, 8, $\wedge T$
(10)		$(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$	9, $\vee T$
(11)	$(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$		1, 5–7, 8–10, $\vee E$.

Johdettu teoreema $(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$ riippuu vain premisseistä $A \vee B$ ja $C \wedge D$. Helposti nähdään, että jos nämä premissit ovat tosia, niin myös johtopäätös on $(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$ tosi.

Myös seuraavien sääntöjen avulla voidaan johtaa kaavoja, jotka ovat alideduktioiden ulkopuolella eli eivät riipu niissä tehdyistä apuoletuksista. Näitä sääntöjä voidaan soveltaa myös varsinaiseen deduktioon, jolloin saadaan johdettua teoreemoja. Ensimmäinen on *implikaation tuonti*:

$$(\to T) \qquad \begin{array}{|l} \quad \begin{array}{|l} A \quad \text{apuoletus} \\ \hline \vdots \\ B \end{array} \\ A \to B \end{array}$$

Tämän säännön merkitys on seuraava: jos kaavasta A ja mahdollisesti muista oletuksista voidaan johtaa B, niin voidaan päätellä implikaatio $A \to B$. Tämä implikaatio ei riipu A:sta, mutta riippuu muista oletuksista, joista B riippuu. Tämäkin sääntö säilyttää totuuden: Jos A on epätosi, niin implikaatio $A \to B$ on triviaalisti tosi. Jos A ja muut oletukset, joista B riippuvat, ovat tosia, niin siitä, että apuoletuksesta A

voidaan päätellä B, seuraa, että B ja täten koko implikaatio $A \to B$ on tosi. Erityisesti jos B ei riipu muista oletuksista kuin apuoletuksesta A, niin implikaatio $A \to B$ on aina tosi (siis se on loogisesti tosi).

Esimerkki 114. $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$.

$$\begin{array}{r|l|ll}
(1) & A \to B & & \\
(2) & B \to C & & \\ \cline{2-2}
(3) & & A & \text{apuoletus} \\ \cline{3-3}
(4) & & A \to B & 1,\ R \\
(5) & & B & 3,\ 4,\ {\to}E \\
(6) & & B \to C & 2,\ R \\
(7) & & C & 5,\ 6,\ {\to}E \\
(8) & A \to C & & 3\text{–}7,\ {\to}T.
\end{array}$$

Myös sääntöä $\to T$ soveltaessamme viittaamme koko alitodistukseen, jonka perusteella implikaatio päätellään.

Esimerkki 115. Osoitamme, että $A \wedge B \to A$ on teoreema, ts. että $\vdash A \wedge B \to A$.

$$\begin{array}{r|l|ll}
(1) & & A \wedge B & \text{apuoletus} \\ \cline{3-3}
(2) & & A & 1,\ \wedge E \\
(3) & A \wedge B \to A & & 1\text{–}2,\ {\to}T.
\end{array}$$

Viimeisen rivin kaava $A \wedge B \to A$ ei riipu mistään oletuksesta eli sitä ei ole johdettu mistään premisseistä. Näin täytyy ollakin, jotta se olisi teoreema.

Implikaation tuonnin lisäksi *negaation tuonti* on sääntö, jolla voidaan johtaa apuoletuksista riippumattomia kaavoja:

$$(\neg T) \qquad \begin{array}{|l|l}
 & A \\ \cline{2-2}
 & \vdots \\
 & B \wedge \neg B \\
\neg A &
\end{array}$$

Sääntöä sanotaan myös *epäsuoraksi todistukseksi* (*reductio ad absurdum*), ja se voidaan tulkita seuraavasti: jos on todistettava $\neg A$, oletetaan A (vastaoletus) ja johdetaan tästä ja mahdollisesti muista oletuksista ristiriita $B \wedge \neg B$. Tämäkin sääntö säilyttää totuuden. Ristiriitahan on aina epätosi. Jos siis teemme oletuksen, että

$$\text{jos } A \text{ on tosi, niin } B \wedge \neg B \text{ on tosi}$$

eli oletamme, että kaikki alideduktiossa $A \vdash B \wedge \neg B$ käytetyt päättelysäännöt ovat totuuden säilyttäviä, niin voimme päätellä, että A on epätosi ja täten $\neg A$ on tosi. Oletuksesta, että alideduktiossa totuus säilyy, seuraa siis, että totuus säilyy myös viimeisessä askeleessa negaation tuontisääntöä sovellettaessa.

Esimerkki 116. Negaation eliminointisääntöä $\neg\neg A \vdash A$ voisi kutsua myös kaksoisnegaation eliminoinniksi. Johdamme nyt "kaksoisnegaation tuontisäännön" $A \vdash \neg\neg A$.

(1)	A	
(2)	$\quad \neg A$	vastaoletus
(3)	$\quad A$	1, R
(4)	$\quad A \wedge \neg A$	2, 3, $\wedge T$
(5)	$\neg\neg A$	2–4, $\neg T$.

Seuraavan esimerkin tuloksella voidaan oikeuttaa päättelysääntö, jolle käytetään nimitystä *Modus tollens* (vrt. 31).

Esimerkki 117. $A \to B, \neg B \vdash \neg A$.

(1)	$A \to B$	
(2)	$\neg B$	
(3)	$\quad A$	vastaoletus
(4)	$\quad A \to B$	1, R
(5)	$\quad B$	3, 4, $\to E$
(6)	$\quad \neg B$	2, R
(7)	$\quad B \wedge \neg B$	5, 6, $\wedge T$
(8)	$\neg A$	3–7, $\neg T$

Osoitamme seuraavaksi kolmannen poissuljetun lain luonnollisen päättelyn teoreemaksi.

Esimerkki 118. $\vdash A \vee \neg A$.

(1)	$\quad \neg(A \vee \neg A)$	vastaoletus
(2)	$\quad\quad A$	apuoletus
(3)	$\quad\quad A \vee \neg A$	2, $\vee T$
(4)	$\quad\quad \neg(A \vee \neg A)$	1, R
(5)	$\quad\quad (A \vee \neg A) \wedge \neg(A \vee \neg A)$	3, 4, $\wedge T$
(6)	$\quad \neg A$	2–5, $\neg T$
(7)	$\quad A \vee \neg A$	6, $\vee T$
(8)	$\quad (A \vee \neg A) \wedge \neg(A \vee \neg A)$	1, 7, $\wedge T$
(9)	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	1–8, $\neg T$
(10)	$A \vee \neg A$	9, $\neg E$.

Kaava $\neg A$ 6. rivillä ei riipu 2. rivin apuoletuksesta A, mutta riippuu 1. rivin vastaoletuksesta $\neg(A \vee \neg A)$. Viimeisen rivin kaava ei riipu mistään, joten se on teoreema (sama koskee myös 9. rivin kaavaa).

Ekvivalenssia koskevat seuraavat *eliminointi-* ja *tuontisäännöt*:

$$(\leftrightarrow E) \qquad \frac{\begin{array}{c} A \\ A \leftrightarrow B \end{array}}{B}, \qquad \frac{\begin{array}{c} B \\ A \leftrightarrow B \end{array}}{A},$$

$$(\leftrightarrow T) \qquad \frac{\begin{array}{c} A \to B \\ B \to A \end{array}}{A \leftrightarrow B}.$$

Seuraavassa esimerkissä osoitamme, että ekvivalenssissa voidaan kaavojen järjestys vaihtaa.

Esimerkki 119. $A \leftrightarrow B \vdash B \leftrightarrow A$.

(1)	$A \leftrightarrow B$		
(2)		B	apuoletus
(3)		$A \leftrightarrow B$	1, R
(4)		A	2, 3, $\leftrightarrow E$
(5)	$B \to A$		2–4, $\to T$
(6)		A	apuoletus
(7)		$A \leftrightarrow B$	1, R
(8)		B	6, 7, $\leftrightarrow E$
(9)	$A \to B$		6–8, $\to T$
(10)	$B \leftrightarrow A$		5, 9, $\leftrightarrow T$.

Edellä on esitetty luonnollisen päättelyn *peruspäättelysäännöt*. Deduktio voidaan usein esittää lyhennetyssä muodossa, jos käytetään hyväksi *johdettuja päättelysääntöjä*, joiden käytön voi oikeuttaa seuraavalla *deduktion tuontisäännöllä*:

($\vdash$) Jos kaava B on aikaisemmin johdettu premisseistä $A_1, \ldots, A_n$, niin kaavoista $A_1, \ldots, A_n$ voidaan suoraan päätellä B.

Tämä sääntö sisältää myös tapauksen, jossa premissejä ei ole ollenkaan: aikaisemmin johdettu teoreema voidaan tuoda deduktioon. Säännön käyttö edellyttää, että mukaan otettava deduktio on aikaisemmin suoritettu. Tämä sulkee pois sen mahdollisuuden, että jollakin muulla keinolla kuin dedusoimalla (esimerkiksi totuustaulumenetelmällä) saataisiin selville jonkin teoreeman tai (annettujen premissien) johtopäätöksen olemassaolo, ja tätä tietoa sitten käytettäisiin päättelyssä. Vain aikaisempia syntaktisia päättelyitä saadaan käyttää *aktuaalisten deduktioiden* lyhentämiseksi. Tällä rajauksella päättelysäännön ($\vdash$) oikeutus on ilmeinen.

Deduktion tuontisäännössä on kyse oikeastaan vain siitä, että kerran tehtyä ja "julkisesti" esitettyä deduktiota ei tarvitse joka kerta esittää uudelleen. Aina, kun esittää jonkin deduktion, niin voi käyttää sitä vastaavaa tulosta johdettuna päättelysääntönä kaikissa niissä tilanteissa, joissa tuo alkuperäinen deduktio on nähtävissä. Johdettuja päättelysääntöjä voi myös systemaattisesti johtaa ja muodostaa niistä eräänlaisen "kaavakokoelman", jonka sääntöjä saa käyttää, vaikka ei välttämättä olisikaan heti mahdollista katsoa, millainen alkuperäinen johto on. Lisäämmekin pari tällaista johdettua sääntöä käytettävissä olevien sääntöjen joukkoon: Esimerkin 116 perusteella on käytettävissä kaksoisnegaation tuonti

$$(\neg\neg T) \qquad \frac{A}{\neg\neg A}$$

ja esimerkin 117 perusteella päättelysääntö *Modus tollens*

$$(MT) \qquad \frac{\begin{array}{c} A \to B \\ \neg B \end{array}}{\neg A}.$$

Johdetut päättelysäännöt ovat oikeastaan metateoreemoja. Sen avulla deduktioita voidaan lyhentää välttämällä toistoa. Deduktiota voi lyhentää myös soveltamalla seuraavaa deduktioiden yhdistämistä koskevaa metateoreemaa: jos $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ja $B_1, B_2, \ldots, B_m \vdash C$, niin $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash C$. Tämä tulos voidaan todistaa jo deduktion yleisen määritelmän pohjalta. Kuten jo olemme todenneet, tällaisten tulosten todistukset eivät ole syntaktisia todistuksia tai deduktioita edellä esitetyssä mielessä, vaan ne ovat "metaloogisia" todistuksia, jotka koskevat syntaktisia deduktioita. Todistamme tässä esimerkkeinä metateoreemoista vielä yhden johdetun päättelysäännön. Myöhemmin tutkimme vielä ristiriitaisuuden käsitettä ja luonnollisen päättelyn täydellisyyttä.

Deduktioteoreema. *Jos* $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n \vdash B$, *niin* $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \to B$.

Todistus. Oletuksen mukaan $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, ja koska premissien järjestyksellä ei ole merkitystä, niin tällöin on olemassa deduktio Δ:

$$
\begin{array}{c|l}
\Delta & A_n \\
 & A_1 \\
 & \vdots \\
 & \underline{A_{n-1}} \\
 & \vdots \\
 & B
\end{array}
$$

Johdon $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \to B$ saamme täten seuraavasti:

$$
\begin{array}{r|ll}
(1) & A_1 & \\
 & \vdots & \\
(n-1) & \underline{A_{n-1}} & \\
 & & \begin{array}{c|ll}
 \Delta & \underline{A_n} & \text{(apuoletus)} \\
 & A_1 & 1,\ R \\
 & \vdots & \\
 & A_{n-1} & n-1,\ R \\
 & \vdots & \\
 & B &
 \end{array} \\
 & A_n \to B & \qquad\qquad \to T.
\end{array}
$$

$\square$

Esimerkki 120. Päättelysäännön *Modus tollens* perusteella $A \to B, \neg B \vdash \neg A$. Deduktioteoreeman perusteella $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$. Vaihtamalla tässä A:n tilalle $\neg B$ ja B:n tilalle $\neg A$ saadaan

$$\neg B \to \neg A \vdash \neg\neg A \to \neg\neg B.$$

Osoitamme käyttämällä tätä tulosta hyväksi, että $\neg B \to \neg A \vdash A \to B$:

(1)	$\neg B \to \neg A$	
(2)	$\neg\neg A \to \neg\neg B$	1, $(\vdash)$
(3)	$\quad A$	apuoletus
(4)	$\quad \neg\neg A$	3, $\neg\neg T$
(5)	$\quad \neg\neg A \to \neg\neg B$	2, R
(6)	$\quad \neg\neg B$	4, 5, $\to E$
(7)	$\quad B$	6, $\neg E$
(8)	$A \to B$	3–7, $\to T$.

Esimerkki 121. Deduktioteoreeman perusteella tuloksesta $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ seuraa teoreema $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ ja tuloksesta $\neg B \to \neg A \vdash A \to B$ teoreema $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$. Yhdistämällä nämä teoreemat ekvivalenssin tuonnilla saadaan kontrapositiota vastaava teoreema $\vdash (A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$.

Seuraavat kaksi esimerkkiä valaisevat johdettujen päättelysääntöjen käyttöä deduktioissa.

Esimerkki 122. Osoitetaan, että $\neg A \vee B \vdash A \to B$ osoittamalla ensin, että $\neg A \vdash A \to B$ ja sitten, että $B \vdash A \to B$.

$\neg A \vdash A \to B$:

(1)	$\neg A$	
(2)	$\quad A$	apuoletus
(3)	$\quad\quad \neg B$	vastaoletus
(4)	$\quad\quad A$	2, R
(5)	$\quad\quad \neg A$	1, R
(6)	$\quad\quad A \wedge \neg A$	4, 5, $\wedge T$
(7)	$\quad \neg\neg B$	3–6, $\neg T$
(8)	$\quad B$	7, $\neg E$
(9)	$A \to B$	2–8, $\to T$.

$B \vdash A \to B$:

(1)	B	
(2)	$\quad A$	apuoletus
(3)	$\quad B$	1, R
(4)	$A \to B$	2–3, $\to T$.

$\neg A \vee B \vdash A \to B$:

(1)	$\neg A \vee B$	
(2)	$\quad \neg A$	apuoletus
(3)	$\quad A \to B$	2, $(\vdash)$
(4)	$\quad B$	apuoletus
(5)	$\quad A \to B$	4, $(\vdash)$
(6)	$A \to B$	1, 2–3, 4–5, $\vee E$.

Esimerkki 123. $A, \neg A \vee B \vdash B$.

$$
\begin{array}{r|ll}
(1) & A & \\
(2) & \neg A \vee B & \\ \cline{2-2}
(3) & A \to B & \quad 2, (\vdash) \text{ Esim. } 122 \\
(4) & B & \quad 1, 3, \to E.
\end{array}
$$

Esitämme vielä yhteenvedon luonnollisen päättelyn päättelysäännöistä ja muista periaatteista:

Luonnollinen päättely (yhteenveto)

Yleistä

Deduktioon sisältyvän päätelmän premissejä voidaan käyttää missä järjestyksessä tahansa.

(*Iteraatiosääntö* R)

> Deduktiossa aiemmin esiintyvä kaava, joka ei sisälly loppuunviety yn alideduktioon, voidaan toistaa.

Peruspäättelysäännöt

$(\neg E)$

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

$(\neg T)$

$$
\begin{array}{|l}
\begin{array}{|l}
A \\ \hline
\vdots \\
B \wedge \neg B
\end{array} \\
\neg A
\end{array}
$$

$(\wedge E)$

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

$(\wedge T)$

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

(∨E)

$$
\begin{array}{|l}
A \lor B \\ \hline
\quad \begin{array}{|l}
A \\ \hline
\vdots \\
C
\end{array} \quad \text{apuoletus} \\
\\
\quad \begin{array}{|l}
B \\ \hline
\vdots \\
C
\end{array} \quad \text{apuoletus} \\
C
\end{array}
$$

(∨T)

$$
\frac{A}{A \lor B} \qquad\qquad \frac{B}{A \lor B}
$$

(→E)

$$
\frac{\begin{array}{c} A \\ A \to B \end{array}}{B}
$$

(→T)

$$
\begin{array}{|l}
\quad \begin{array}{|l}
A \\ \hline
\vdots \\
B
\end{array} \quad \text{apuoletus} \\
A \to B
\end{array}
$$

(↔E)

$$
\frac{\begin{array}{c} A \\ A \leftrightarrow B \end{array}}{B} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c} B \\ A \leftrightarrow B \end{array}}{A}
$$

(↔T)

$$
\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ B \to A \end{array}}{A \leftrightarrow B}
$$

Johdetut päättelysäännöt

(Deduktioteoreema) Jos $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n \vdash B$, niin $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \to B$.

($\vdash$) Tilanneissa, joissa kaavan B deduktio premisseistä A_1, …, A_n on jo kerran esitetty, voi kaavoista A_1, …, A_n suoraan päätellä B:n toistamatta deduktiota.

Säännön ($\vdash$) erikoistapauksia

(Nämä vapaasti käytettävissä.)

$(\neg\neg T)$
$$\frac{A}{\neg\neg A}$$

(MT)
$$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ \neg B \end{array}}{\neg A} \qquad (Modus\ tollens)$$

Luotettavuus ja täydellisyys

Olemme edellä todenneet yksittäisten päättelysääntöjen yhteydessä, että ne ovat totuuden säilyttäviä. Tämän perusteella on helppo todistaa edellä esittämämme luonnollisen päättelyn systeemin luotettavuus. Luotettavuus tarkoittaa siis sitä, että jos kaava A on johdettavissa lausejoukosta S, niin kaava A on myös kaavajoukon S looginen seuraus:

$$\text{jos } S \vdash A, \text{ niin } S \vDash A.$$

Tässä ”$\vdash$” tarkoittaa johdettavuutta edellä esitetyssä luonnollisen päättelyn systeemissä. Tässä systeemissä tapahtuva päättely on täten totuuden säilyttävää: jos kaavajoukon S kaavat ovat tosia jossain mallissa M, niin myös johdettu kaava A on tosi mallissa M. Erityisesti jokainen teoreema eli tyhjästä kaavajoukosta johdettavissa oleva kaava on loogisesti tosi. Emme tässä kuitenkaan todista tätä luonnollisen päättelyn systeemin luotettavuutta yleisesti, vaan tyydymme tarkastelemaan esimerkkiä, joka havainnollistaa yleisen todistuksen ideaa.

Esimerkki 124. Osoitamme ensin, että $A \to (B \wedge C), \neg\neg A \vdash B \vee D$.

$$\begin{array}{r|ll}
(1) & A \to (B \wedge C) & \\
(2) & \neg\neg A & \\
\hline
(3) & A & 2, \neg E \\
(4) & B \wedge C & 1, 3, \to E \\
(5) & B & 4, \wedge E \\
(6) & B \vee D & 5, \vee T.
\end{array}$$

Luonnollisen päättelyn systeemin luotettavuuden perusteella

$$A \to (B \wedge C), \neg\neg A \vDash B \vee D.$$

Todistamme tämän tässä erikoistapauksessa tavalla, mikä jäljittelee yleistä luotettavuustuloksen todistustapaa.

Olkoon M sellainen malli, että

(1) $$M \vDash A \to (B \wedge C)$$

ja

$$(2) \qquad M \vDash \neg\neg A.$$

Kohdan (2) perusteella $M \nvDash \neg A$, ja saamme tästä, että

$$(3) \qquad M \vDash A.$$

Kohtien (1) ja (3) perusteella

$$(4) \qquad M \vDash B \wedge C.$$

Täten konjunktion totuusehtojen perusteella

$$(5) \qquad M \vDash B,$$

ja disjunktion totuusehtojen perusteella

$$(6) \qquad M \vDash B \vee D.$$

Olemme näin todistaneet, että $A \to (B \wedge C), \neg\neg A \vDash B \vee D$.

Luonnollisen päättelyn systeemi on myös täydellinen:

$$\text{jos } S \vDash A, \text{ niin } S \vdash A.$$

Erityisesti jokainen loogisesti tosi kaava on johdettavissa tyhjästä kaavajoukosta eli jokainen loogisesti tosi kaava on luonnollisen päättelyn systeemin teoreema. Täydellisyyden todistaminen on huomattavasti monimutkaisempaa kuin luotettavuuden todistaminen. Yhdistämällä luotettavuus- ja täydellisyystulokset saamme seuraavan tuloksen.

Täydellisyysteoreema. *Olkoon S kaavajoukko, A kaava ja tarkoittakoon "$\vdash$" johdettavuutta luonnollisen päättelyn systeemissä. Tällöin*

$$S \vdash A, \text{ jos ja vain jos } S \vDash A.$$

Erityisesti

$$\vdash A, \text{ jos ja vain jos } \vDash A.$$

Täydellisyysteoreeman merkitys on ilmeinen, koska se antaa meille keinon siirtyä todistusteoreettisista tarkasteluista semanttisiin ja päinvastoin. Tarkastelemme paria esimerkkiä tästä.

Esimerkki 125. Koska kaava

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

(distribuutiolaki) on tautologia, niin se on myös loogisesti tosi:

$$\vDash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Täydellisyysteoreeman perusteella tiedämme siis, että

$$\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Täydellisyysteoreema ei kuitenkaan anna mitään vihjettä siitä, miten tämän teoreeman aktuaalinen johtaminen tapahtuisi.

Esimerkki 126. Kaava

$$\big((A \to B) \to C\big) \leftrightarrow \big(A \to (B \to C)\big)$$

ei ole tautologia. Täydellisyysteoreeman perusteella tiedämme, ettei tämä kaava ole myöskään luonnollisen päättelyn systeemin teoreema.

4.3 Ristiriitaisuus

Kun käytettävissä on deduktion käsite, niin voidaan määritellä täsmällisesti, mitä tarkoitetaan *ristiriitaisuudella*:

> Kaavajoukko S on ristiriitainen, jos ja vain jos on olemassa sellainen kaava A, että joukosta S voidaan johtaa sekä kaava A että $\neg A$.

Ristiriitaisuus voidaan määritellä muullakin tavalla. Voidaan nimittäin todistaa, että lause- ja predikaattilogiikan päättelysysteemeissä seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(1) on olemassa sellainen kaava A, että $S \vdash A$ ja $S \vdash \neg A$,

(2) on olemassa sellainen kaava A, että $S \vdash A \wedge \neg A$,

(3) kaavajoukosta S voidaan johtaa mikä tahansa kaava.

Jälkimmäisen ehdon mukainen määritelmä soveltuu ristiriitaisuuden yleiseksi määritelmäksi. Sitä voidaan näet soveltaa myös sellaisiin loogisiin systeemeihin, joissa ei käytetä negaatiota, sekä sellaisiin, jotka perustuvat ajatukseen, ettei muotoa A ja ei-A olevaa väittämää ole aina katsottava intuitiivisesti ”ristiriitaiseksi”. Tällaisia ei-klassisia logiikoita on kehitelty, mutta tässä niitä ei voi käsitellä.

Osoitamme nyt ehdot (1), (2) ja (3) yhtäpitäviksi luonnollisen päättelyn systeemissä. Ensinnäkin voimme todeta, että ehdosta (3) seuraa triviaalisti sekä ehto (1) että ehto (2). Deduktio

(1)	$A \wedge \neg A$		
(2)		$\neg B$	vastaoletus
(3)		$A \wedge \neg A$	1, R
(4)	$\neg\neg B$		2–3, $\neg T$
(5)	B		4, $\neg E$

osoittaa, että kaavasta $A \wedge \neg A$ voidaan johtaa mielivaltainen kaava B. Ehdosta (2) seuraa siis deduktioiden yhdistämissäännön perusteella ehto (3) ja täten myös (1).

Osoitamme vielä, että ehdosta (1) seuraavat ehdot (2) ja (3). Olkoon S sellainen kaavajoukko, että $S \vdash A$ ja $S \vdash \neg A$. Tällöin konjunktion tuonnilla saadaan $S \vdash A \wedge \neg A$. Kun B on mielivaltainen kaava, niin $A \wedge \neg A \vdash B$, joten yhdistämällä deduktiot saadaan, että $S \vdash B$. Kaikki edellä mainitut kolme ehtoa ovat siis yhtäpitäviä.

Ristiriidan käsite sellaisena kuin se on edellä määritelty koskee vain formaalia lauselogiikkaa. Voimme kuitenkin ajatella, että jos jotkin luonnollisen kielen lauseet voidaan kääntää lauselogiikan kielelle niin, että niiden looginen muoto tulee esille, niin tätä käsitettä voidaan soveltaa myös niihin.

Esimerkki 127. Osoitetaan, että seuraavien lauseiden muodostama joukko on ristiriitainen esittämällä lauseet ensin lauselogiikan kielessä:

Jos sataa, niin kastun.
Sataa.
Jos kastun, niin en käytä sateenvarjoa.
Käytän sateenvarjoa.

Merkitkööt A, B ja C vastaavasti lauseita 'Sataa', 'Kastun' ja 'Käytän sateenvarjoa'; tällöin yllä olevat lauseet kääntyvät kaavoiksi $A \to B$, A, $B \to \neg C$, C. Osoitetaan nyt, että

$$A \to B,\ A,\ B \to \neg C,\ C \vdash C \wedge \neg C.$$

$$\begin{array}{r|ll}
(1) & A \to B & \\
(2) & A & \\
(3) & B \to \neg C & \\
(4) & C & \\
\hline
(5) & B & 1,\ 2,\ \to E \\
(6) & \neg C & 3,\ 5,\ \to E \\
(7) & C \wedge \neg C & 4,\ 6,\ \wedge T.
\end{array}$$

Täydellisyystuloksen perusteella $S \vdash A \wedge \neg A$, jos ja vain jos $S \models A \wedge \neg A$. Koska kaava $A \wedge \neg A$ ei ole tosi missään mallissa, niin tästä voidaan päätellä, että ristiriitaisella kaavajoukolla ei ole mallia eli että sen kaavat ovat yhteensopimattomat. Erityisesti äärellisessä tapauksessa saadaan seuraava tulos.

Kaavajoukko $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ on ristiriitainen, jos ja vain jos kaava $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ on loogisesti epätosi.

Esimerkki 128. Osoitimme edellä kaavajoukon $S = \{A \to B,\ A,\ B \to \neg C,\ C\}$ ristiriitaiseksi. Tiedämme tämän perusteella, että kaava

$$A \wedge C \wedge (A \to B) \wedge (B \to \neg C)$$

on loogisesti epätosi ja että kaavajoukolla S ei ole mallia. Nämä väitteet voi todentaa helposti myös suoraan (ensimmäisen esimerkiksi totuustaulumenetelmällä, toisen esimerkiksi tekemällä vastaoletuksen, että kaavajoukolla S olisi malli M).

Seuraavaksi laajennamme luonnollisen päättelyn systeemiä niin, että saamme luotettavan ja täydellisen päättelysysteemin predikaattilogiikalle. Annamme sitä ennen kuitenkin esimerkin siitä, miten lauselogiikan todistusteoriaa voidaan käsitellä aksiomaattisella menetelmällä.

4.4 Lauselogiikan aksiomatisointi

Seuraavassa esittelemme lauselogiikan aksiomatisoinnin PM, joka läheisesti muistuttaa A. N. Whiteheadin ja B. Russellin teoksessaan *Principia Mathematica* esittämää aksiomatisointia:

Aksioomat:

(Ax_1) $\qquad (A \vee A) \to A,$

(Ax_2) $\qquad B \to (A \vee B),$

(Ax_3) $\qquad (A \vee B) \to (B \vee A),$

(Ax_4) $\qquad (B \to C) \to \big((A \vee B) \to (A \vee C)\big).$

Päättelysäännöt:

$$(MP) \qquad \frac{A,\ A \to B}{B}$$

Tässä aksiomatisoinnissa on valittu peruskonnektiiveiksi *negaatio* ja *disjunktio* ja muut konnektiivit määritellään niiden avulla tavalliseen tapaan (esimerkiksi implikaation $A \to B$ määritelmä on $\neg A \vee B$).

Esimerkki 129. Aksioomaskeeman Ax_2 eräs instanssi on kaava $A \to A \vee A$.

Esimerkki 130. Sijoittamalla aksioomaskeemaan Ax_4 kaavan A tilalle $\neg C$, kaavan B tilalle A ja kaavan C tilalle B saadaan skeema $(A \to B) \to \big((\neg C \vee A) \to (\neg C \vee B)\big)$ eli skeema

$$(Ax_4^*) \qquad (A \to B) \to \big((C \to A) \to (C \to B)\big).$$

Siitä on edelleen saatavissa (A:n tilalle $A \vee A$, B:n ja C:n tilalle A) skeema

$$(A \vee A \to A) \to \big((A \to A \vee A) \to (A \to A)\big).$$

Näemme, että aksioomat ovat yksinkertaisia tautologioita. Tunnetusti päättelysääntö (MP) säilyttää totuuden. Whitehead ja Russell eivät käyttäneet aksioomaskeemoja, vaan heidän aksioomat olivat vastaavia yksittäisiä kaavoja. He implisiittisesti olettivat universaalin substituutiosäännön (US) olevan käytettävissä (tätä sääntöä oikeastaan käytetään silloinkin, kun korvaamme aksioomaskeemoissa kaavoja toisilla kaavoilla). Alunperin he esittivät aksioomaksi myös kaavaa

$$(p \vee (q \vee r)) \to (q \vee (p \vee r)),$$

mutta myöhemmin osoittautui, että se ei ole riippumaton muista aksioomista, vaan on johdettavissa niistä. Se on siis jo yllä olevan systeemin teoreema, joten sitä on turha asettaa aksioomaksi. Annamme muutaman esimerkin aktuaalisista deduktioista tässä systeemissä. Käytämme merkintää $\vdash_{\mathrm{PM}}$ korostaaksemme, että kyse on juuri tästä erityisestä aksiomatisoinnista.

Esimerkki 131. Osoitetaan, että

$$A \to B,\ C \to A \vdash_{\mathrm{PM}} C \to B$$

eli että kaava $C \to B$ on johdettavissa oletuksista $A \to B$ ja $C \to A$. Deduktio on siis asianmukaiset ehdot toteuttava kaavajono, mutta nytkin selvyyden vuoksi asetamme jonon kaavat allekkain:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & A \to B & \text{oletus} \\
(2) & C \to A & \text{oletus} \\
(3) & (A \to B) \to \big((C \to A) \to (C \to B)\big) & Ax_4^* \\
(4) & (C \to A) \to (C \to B) & 1, 3, MP \\
(5) & C \to B & 2, 4, MP.
\end{array}
$$

Johdettu kaava on tietenkin johdettavissa jokaisesta kaavajoukosta, johon yllä olevan deduktion oletukset kuuluvat.

Esimerkki 132. $\vdash A \to A$. Seuraava kaavajono on kaavan $A \to A$ todistus, joten tämä kaava on teoreema:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & A \vee A \to A & Ax_1 \\
(2) & A \to A \vee A & Ax_2 \text{ (ks. esim. 129)} \\
(3) & (A \vee A \to A) \to \big((A \to A \vee A) \to (A \to A)\big) & Ax_4^* \text{ (ks. esim. 130)} \\
(4) & (A \to A \vee A) \to (A \to A) & 1, 3, MP \\
(5) & A \to A & 2, 4, MP.
\end{array}
$$

Esimerkki 133. Seuraava kaavajono on kaavan $A \vee \neg A$ todistus aksioomasysteemissä PM:

$$
\begin{array}{rll}
(1) & (B \to C) \to \big((A \vee B) \to (A \vee C)\big) & Ax_4 \\
(2) & ((A \vee A) \to A) \to \big((\neg A \vee (A \vee A)) \to (\neg A \vee A)\big) & 1, US \\
(3) & (A \vee A) \to A & Ax_1 \\
(4) & \neg A \vee (A \vee A) \to (\neg A \vee A) & 2, 3, MP \\
(5) & B \to (A \vee B) & Ax_2 \\
(6) & A \to (A \vee A) & 5, US \\
(7) & \neg A \vee (A \vee A) & 6, \to \text{määritelmä} \\
(8) & \neg A \vee A & 7, 4, MP \\
(9) & (A \vee B) \to (B \vee A) & Ax_3 \\
(10) & (\neg A \vee A) \to (A \vee \neg A) & 9, US \\
(11) & A \vee \neg A & 8, 10, MP
\end{array}
$$

Tässä merkintä ”i, US” viittaa universaaliin substituutiosääntöön ja tarkoittaa sitä, että kyseessä on i:nnen vaakarivillä esitetyn aksioomaskeeman instanssi.

Aksioomasysteemille PM voidaan todistaa täydellisyys:

$$\vdash_{\text{PM}} B, \text{ jos ja vain jos } B \text{ on loogisesti tosi.}$$

Lisäämällä aksioomasysteemiin PM muutama predikaattilogiikkaa koskeva aksiooma ja päättelysääntö (ks. s. 94.) saadaan myös predikaattilogiikalle tällainen täydellinen aksioomasysteemi.

4.5 Luonnollinen päättely predikaattilogiikassa

Predikaattilogiikan luonnollisen päättelyn systeemiin voimme ottaa mukaan kaikki lauselogiikan yhteydessä esitetyt päättelysäännöt. Tällöin tietenkin ajatellaan päättelysäännöissä esiintyvät kaavat predikaattilogiikan kaavoiksi. Näin saatava systeemi on luotettava, mutta ei ole täydellinen. Esimerkiksi kaava $\forall x P(x) \to P(c)$ on selvästi loogisesti tosi, mutta on ilmeistä, ettei sitä voi osoittaa teoreemaksi pelkästään lauselogiikan päättelysääntöjen avulla. Tarkastelemme nyt, miten lauselogiikan yhteydessä annettua luonnollisen päättelyn systeemiä on laajennettava, jotta saataisiin luotettava ja täydellinen predikaattilogiikan päättelysysteemi.

Aloitamme identiteetin tuontisäännöllä ($=T$) ja eliminointisäännöllä ($=E$).

($=T$) $$\frac{}{t = t}$$ t on termi.

($=E$) $$\frac{\begin{array}{c} A \\ t = t' \end{array}}{A'}$$ A' on kaava, joka saadaan kaavasta A korvaamalla yksi tai useampi t:n vapaa esiintymä termillä t' siten, että t' ei tule sidotuksi sijoituksessa.

Koska identiteetin tuontisääntö sallii kaavan $t = t$ päättelemisen tyhjästä premissijoukosta, niin kaavaa $t = t$ voidaan pitää luonnollisen päättelyn systeemin aksioomana.

Esimerkki 134. $a = b \vdash P(a, a, a) \to P(b, a, b)$.

$$\begin{array}{l|lll}
(1) & a = b & & \\
\hline
(2) & & \vert\ P(a,a,a) & \\
(3) & & \vert\ a = b & 1,\ R \\
(4) & & \vert\ P(b,a,b) & 2{,}3,\ =E \\
(5) & P(a,a,a) \to P(b,a,b) & & 2\text{–}4,\ \to T.
\end{array}$$

Esimerkki 135. $a = b \vdash b = a$.

$$\begin{array}{l|ll}
(1) & a = b & \\
\hline
(2) & a = a & =T \\
(3) & b = a & 1,\ 2,\ =E.
\end{array}$$

Esimerkki 136. $a = b,\ b = c \vdash a = c$.

$$\begin{array}{l|lll}
(1) & a = b & & \\
(2) & b = c & & \\
\hline
(3) & & \vert\ a = b & 1,\ R \\
(4) & & \vert\ a = b & 3,\ R \\
(5) & a = b \to a = b & & 3\text{–}4,\ \to T \\
(6) & a = b \to a = c & & 2,\ 5,\ =E \\
(7) & a = c & & 1,\ 6,\ \to E.
\end{array}$$

Identiteetin eliminointisäännössä saa korvata vain vapaita esiintymiä. Vaikka olisikin $x = y$, niin emme voi kaavasta $\forall x R(x, y)$ päätellä kaavaa $\forall x R(y, y)$. Korvaava termi ei myöskään saa tulla sidotuksi. Jos $x = y$ ja $\forall y P(x)$, niin emme voi kuitenkaan päätellä, että $\forall y P(y)$. Tarkastelemme vielä tarkemmin sijoituksen käsitettä ennen muiden päättelysääntöjen esittämistä.

Olkoon A predikaattilogiikan kaava. Merkinnällä ”$A(x/t)$” tarkoitamme kaavaa, joka saadaan *sijoittamalla* kaavassa A jokaisen x:n *vapaan* esiintymän paikalle termi t. Mikäli t ei joudu kaavassa $A(x/t)$ sidotuksi, sanomme sijoituksen olevan *sallittu*. On selvää, että jos t on sama kuin x tai t on yksilövakio, niin sijoitus on aina sallittu. Sallitun sijoituksen erikoistapaus on se, ettei A:ssa ole x:n vapaita esiintymiä lainkaan, jolloin sijoitus on ”tyhjä”. Tällöin tietenkin $A(x/t)$ on A itse.

Esimerkki 137. Olkoon $A = \forall y(P(x, y) \to Q(x))$. Sijoitetaan ensin x:n paikalle z, jolloin saadaan: $A(x/z) = \forall y(P(z, y) \to Q(z))$. Tämä on sallittu sijoitus (oletamme, että eri metavariaabelit viittaavat eri muuttujiin). Sen sijaan sijoitus, jossa x:n paikalle sijoitetaan y, ei ole sallittu: $A(x/y) = \forall y(P(y, y) \to Q(y))$. Voidaan nähdä, että tällä kaavalla on selvästikin eri merkitys kuin alkuperäisellä.

Identiteetin eliminointisääntö sallii, että vain osa esiintymistä korvataan. Kaikki esiintymätkin voidaan korvata ja säännön erikoistapaus on

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ t = t' \end{array}}{A(t/t')},$$

jossa sijoituksen on oltava sallittu.

Universaalikvanttorin eliminointisääntö on seuraava:

$$(\forall E) \qquad \frac{\forall x A}{A(x/t)}, \qquad \text{kun sijoitus on sallittu.}$$

Tämä sääntö ei salli sitä, että vain osa esiintymistä korvattaisiin.

Esimerkki 138. Osoitamme, että $\vdash \forall x P(x) \to P(c)$:

$$\begin{array}{l|lll}
(1) & & \forall x P(x) & \\
(2) & & P(c) & 1, \forall E \\
(3) & \forall x P(x) \to P(c) & & 1\text{–}2, \to T.
\end{array}$$

Vakio c ei voi koskaan tulla sidotuksi sijoituksessa $A(x/c)$, joten edellisen esimerkin deduktion 2. rivillä on päättelysääntöä $\forall E$ sovellettu oikein. Jos ei edellytettäisi sijoituksen olevan sallittu, niin saisimme esimerkiksi seuraavan ”todistuksen”:

$$\begin{array}{l|lll}
(1) & & \forall x \exists y R(x, y) & \\
(2) & & \exists y R(y, y) & 1, \forall E \ \textbf{virheellisesti} \\
(3) & \forall x \exists y R(x, y) \to \exists y R(y, y) & & 1\text{–}2, \to T.
\end{array}$$

Kaava $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y P(y, y)$ ei ole loogisesti tosi, eikä päättelysääntö $(\forall E)$ olisi ilman lisärajoitusta luotettava.

Universaalikvanttorin tuontisääntö ($\forall T$) on seuraava:

$$
(\forall T) \qquad \frac{A}{\forall xA} \qquad \text{Rajoitus: } x \text{ ei ole vapaa missään oletuksessa, josta } A \text{ riippuu.}
$$

Seuraavassa esimerkissä käytämme sekä päättelysääntöä ($\forall E$) että ($\forall T$).

Esimerkki 139. $\forall xP(x) \to \forall yP(y)$.

$$
\begin{array}{r|l}
(1) & \quad \begin{array}{|l} \forall xP(x) \\ \hline P(y) \\ \forall yP(y) \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ 1, \forall E \text{ (sij. sallittu)} \\ 2, \forall T \ (y \text{ ei vapaa oletuksessa } (1)) \end{array} \\
(4) & \forall xP(x) \to \forall yP(y) \qquad 1\text{–}3, \to T.
\end{array}
$$

Seuraava esimerkki havainnollistaa säännön ($\forall T$) käyttämiselle asetetun rajoituksen tarpeellisuutta.

Esimerkki 140.

$$
\begin{array}{r|ll}
(1) & \quad \begin{array}{|l} P(x) \\ \hline \forall xP(x) \end{array} & \begin{array}{l} \\ 1, \forall T \ \textbf{virheellisesti} \end{array} \\
(3) & P(x) \to \forall xP(x) & 1\text{–}2, \to T \\
(4) & \forall x(P(x) \to \forall xP(x)) & 3, \forall T \\
(5) & P(c) \to \forall xP(x) & 4, \forall E \text{ (sij. } A(x/c) \text{ sallittu).}
\end{array}
$$

Kaava $P(c) \to \forall xP(x)$ ei ole kuitenkaan loogisesti tosi.

Sääntöä ($\forall T$) sovellettiin yllä virheellisesti alitodistuksessa, koska kaava $P(x)$, johon sääntöä sovellettiin, oli apuoletus, jossa x on vapaana. Sen sijaan varsinaisessa todistuksessa sääntöä ($\forall T$) sovellettiin oikein. Ei nimittäin edes ole mitään oletusta, mistä kaava $P(x) \to \forall xP(x)$ riippuu.

Tarkastelemme vielä kahta esimerkkiä säännön ($\forall T$) soveltamisesta, joista toisessa sääntöä käytetään oikein, toisessa virheellisesti.

Esimerkki 141. $\forall xP(x) \land Q(c) \vdash \forall x(P(x) \land Q(c))$.

$$
\begin{array}{r|ll}
(1) & \forall xP(x) \land Q(c) & \\
\hline
(2) & \forall xP(x) & 1, \land E \\
(3) & P(x) & 2, \forall E \\
(4) & Q(c) & 1, \land E \\
(5) & P(x) \land Q(c) & 3, 4, \land T \\
(6) & \forall x(P(x) \land Q(c)) & 5, \forall T.
\end{array}
$$

Selvästi on myös voimassa $\forall xP(x) \land Q(c) \vDash \forall x(P(x) \land Q(c))$.

Esimerkki 142. Säännön ($\forall T$) virheellinen käyttö.

(1)	$P(x)$	
(2)	$Q(c)$	
(3)	$P(x)$	1, R
(4)	$P(x) \wedge Q(c)$	2, 3, $\wedge T$
(5)	$\forall x(P(x) \wedge Q(c))$	4, $\forall T$ **virheellisesti**
(6)	$Q(c) \to \forall x(P(x) \wedge Q(c))$	2–5, $\to T$
(7)	$P(x) \to \big(Q(c) \to \forall x(P(x) \wedge Q(c))\big)$	1–6, $\to T$
(8)	$\forall x\Big(P(x) \to \big(Q(c) \to \forall x(P(x) \wedge Q(c))\big)\Big)$	7, $\forall T$
(9)	$P(c) \to \big(Q(c) \to \forall x(P(x) \wedge Q(c))\big)$	8, $\forall E$.

Näin saatu kaava ei selvästikään ole loogisesti tosi.

Sääntöä ($\forall T$) sovellettiin alitodistuksessa väärin, sillä vaikka x ei olekaan vapaa toisen rivin apuoletuksessa $Q(c)$, niin kaavan $P(x) \wedge Q(c)$ johtamisessa on käytetty kolmannella rivillä ensimmäisen rivin apuoletusta $P(x)$, jossa x on vapaa.

Predikaattilogiikan aksiomatisoinnista

Eräs predikaattilogiikan aksiomatisointi saadaan, kun lauselogiikan aksiomatisointiin lisätään päättelysääntö ($\forall T$) ja aksioomat

(Ax_5)	$\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$	edellyttäen, että x ei esiinny vapaana kaavassa A,
(Ax_6)	$\forall x A \to A(x/t)$,	sijoituksen oltava sallittu,
(Ax_7)	$x = x$,	
(Ax_8)	$x = y \to A \to A'$,	A ja A' kuten säännössä ($=E$).

Luonnollisen päättelyn systeemissä aksiooma (Ax_6) saadaan johdettua sääntöjen ($\forall E$) ja ($\to T$) avulla, (Ax_7) seuraa suoraan säännöstä ($=T$) ja (Ax_8) säännöistä ($=E$) ja ($\to T$). Osoitamme, että myös (Ax_5) on luonnollisen päättelyn systeemin teoreema.

Esimerkki 143. Oletetaan, että x ei esiinny vapaana kaavassa A. Tällöin $\vdash \forall x(A \to$

$B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$:

$$
\begin{array}{l|l|l|ll}
(1) & & \forall x(A \rightarrow B) & & \\ \cline{3-3}
(2) & & & \multicolumn{1}{|l}{A} & \\ \cline{4-4}
(3) & & & \multicolumn{1}{|l}{\forall x(A \rightarrow B)} & 1,\ R \\
(4) & & & \multicolumn{1}{|l}{A \rightarrow B} & 3,\ \forall E \\
(5) & & & \multicolumn{1}{|l}{B} & 2,\ 4,\ \rightarrow E \\
(6) & & & \multicolumn{1}{|l}{\forall x B} & 5,\ \forall T\ (x \text{ ei ole vapaa } A\text{:ssa eikä} \\
 & & & \multicolumn{1}{|l}{} & \qquad \text{kaavassa } \forall x(A \rightarrow B)) \\
(7) & & A \rightarrow \forall x B & & 2\text{–}6,\ \rightarrow T \\
(8) & \multicolumn{3}{l}{\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)} & 1\text{–}7,\ \rightarrow T.
\end{array}
$$

Eksistenssikvanttori

Myös eksistenssikvanttorille voidaan esittää omat päättelysäännöt. Koska määritelmän perusteella ”$\exists x A$” merkitsee samaa kuin ”$\neg \forall x \neg A$”, niin nämä päättelysäännöt itse asiassa sisältyvät jo aikaisempiin sääntöihin. Tarkastelemme tätä seuraavissa esimerkeissä.

Esimerkki 144. $P(c) \vdash \exists x P(x)$.

$$
\begin{array}{l|lll}
(1) & P(c) & & \\ \cline{2-2}
(2) & & \multicolumn{1}{|l}{\neg \exists x P(x)} & \text{vastaoletus} \\ \cline{3-3}
(3) & & \multicolumn{1}{|l}{\neg\neg \forall x \neg P(x)} & 2,\ \exists \text{ määritelmä} \\
(4) & & \multicolumn{1}{|l}{\forall x \neg P(x)} & 3,\ \neg E \\
(5) & & \multicolumn{1}{|l}{\neg P(c)} & 4,\ \forall E \\
(6) & & \multicolumn{1}{|l}{P(c)} & 1,\ R \\
(7) & & \multicolumn{1}{|l}{P(c) \wedge \neg P(c)} & 5,\ 6,\ \wedge T \\
(8) & \neg\neg \exists x P(x) & & 2\text{–}7,\ \neg T \\
(9) & \exists x P(x) & & 8,\ \neg E.
\end{array}
$$

Seuraavassa esimerkissä käytämme hyväksi kontraposition periaatetta eli periaatetta $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$.

Esimerkki 145. $\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$:

(1)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	
(2)	$\exists x P(x)$	
(3)	$\quad \neg \exists x Q(x)$	vastaoletus
(4)	$\quad \forall x \neg Q(x)$	3, $\exists$ määritelmä, $\neg E$
(5)	$\quad \neg Q(x)$	4, $\forall E$
(6)	$\quad \forall x(P(x) \to Q(x))$	1, R
(7)	$\quad P(x) \to Q(x)$	6, $\forall E$
(8)	$\quad \neg Q(x) \to \neg P(x)$	7, kontrapositio
(9)	$\quad \neg P(x)$	5, 8, $\to E$
(10)	$\quad \forall x \neg P(x)$	9, $\forall T$
(11)	$\quad \exists x P(x)$	2, R
(12)	$\quad \neg \forall x \neg P(x)$	11, $\exists$ määritelmä
(13)	$\quad \forall x \neg P(x) \wedge \neg \forall x \neg P(x)$	10, 12, $\wedge T$.
(14)	$\neg\neg \exists x Q(x)$	3–13, $\neg T$
(15)	$\exists x Q(x)$	14, $\neg E$.

Deduktion tuontisääntö ja deduktioteoreema ovat voimassa myös predikaattilogiikassa. Useita todistuksia voidaan lyhentää käyttämällä näitä sääntöjä.

Esimerkki 146. Esimerkin 145 mukaan

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x).$$

Deduktioteoreemaa kahdesti soveltamalla saamme, että

$$\vdash \forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x)).$$

Täydellisyysteoreema

Muotoiltaessa predikaattilogiikan täydellisyysteoreemaa on huomattava, että oletukset ja niistä johdetut kaavat voivat sisältää vapaita variaabeleita. Tällaisella kaavalla ei ole totuusarvoa mallissa. Sovimmekin, että vapaita variaabeleita sisältävä kaava on tosi mallissa M, jos sen universaalisulkeuma on tosi mallissa M. Kaavan A universaalisulkeumalla tarkoitamme kaavaa, joka saadaan kaavasta A sitomalla sen vapaat variaabelit universaalikvanttoreilla. Jos siis kaavassa A esiintyy vapaana variaabelit x_1, x_2, $\ldots$, x_n, niin sen universaalisulkeuma on kaava $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A$. Voimme nyt esittää *predikaattilogiikan täydellisyysteoreeman* seuraavasti:

$$S \vdash A, \text{ jos ja vain jos } S \vDash A$$

ja erityisesti

$$\vdash A, \text{ jos ja vain jos } \vDash A.$$

Esimerkki 147. Kaava $R(x, y) \to R(x, y)$ on luonnollisen päättelyn systeemin teoreema, ja sen universaalisulkeuma

$$\forall x \forall y \big(R(x, y) \to R(x, y)\big)$$

on loogisesti tosi kaava.

KIRJALLISUUTTA

J. Allwood & L–G. Andersson & Ö. Dahl, *Logiikka ja kieli.* Yliopistopaino, Helsinki, 1988.

R. Bradley & N. Swartz, *Possible Worlds.* Basil Blackwell Ltd, Oxford, 1979.

S. Guttenplan, *The Languages of Logic.* Basil Blackwell Ltd, Oxford, 1987.

E. J. Lemmon, *Beginning Logic.* Thomas Nelson (Printers) Ltd, London, 1969.

J. Merikoski & A. Virtanen & P. Koivisto, *Diskreetti matematiikka I.* Tampereen yliopisto, matemaattisten tieteiden laitos, B 42, 1994.

S. Miettinen, *Logiikan peruskurssi.* 2. uudistettu painos. Oy Gaudeamus Ab, Helsinki, 1993.

W. H. Newton–Smith, *Logic.* Routledge & Kegan Paul, London, 1985.

I. Niiniluoto, *Johdatus tieteenfilosofiaan.* Kustannusosakeyhtiö Otava, Helsinki, 1980.

I. Niiniluoto, *Tieteellinen päättely ja selittäminen.* Kustannusosakeyhtiö Otava, Helsinki, 1983.

V. Rantala & A. Virtanen, *Logiikan peruskurssi.* Tampereen yliopisto, matemaattisten tieteiden laitos, A 208, 1989.

V. Rantala & A. Virtanen, *Logiikkaa: teoriaa ja sovelluksia.* Tampereen yliopisto, matemaattisten tieteiden laitos, B 43, 1997.

H. Salminen & J. Väänänen, *Johdatus logiikkaan.* Oy Gaudeamus Ab, Helsinki, 1992.

J. Talja, *Logiikan peruskurssi.* Supreum r.y., 1981.

G. H. von Wright, *Logiikka, filosofia ja kieli.* Kustannusosakeyhtiö Otava, Helsinki, 1975.

HAKEMISTO