Capítulo 1

Proporcionalidade e Funções Afins

Em seu livro “Elementos de Álgebra”, publicado em São Petersburgo em 1770, o grande matemático Leonardo Euler propõe o seguinte problema:

> Uma lebre está 50 pulos à frente de um cachorro, o qual dá 3 pulos no tempo que ela leva para dar 4. Sabendo que 2 pulos do cachorro valem 3 da lebre, quantos pulos ele deve dar para pegá-la?

Este é um exemplo de questão que se refere a proporcionalidade, assunto que exporemos a seguir.

1 Proporcionalidade

Diz-se que duas grandezas são *proporcionais* quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

1) Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.

2) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado, etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nas condições acima, a correspondência $x \mapsto y$ chama-se uma *proporcionalidade*.

Exemplo 1. Sejam x o volume e y o peso de uma porção de um líquido homogêneo. A correspondência $x \mapsto y$ cumpre claramente as duas condições acima, logo o volume é proporcional ao peso.

Exemplo 2. Sejam r e s retas paralelas. Dado qualquer retângulo que tenha dois lados contidos nessas retas, chamemos de x o comprimento de um desses lados e z a área do retângulo.

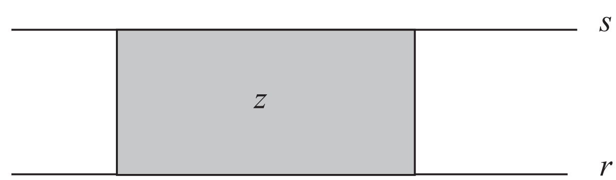

Figura 1

A correspondência $x \mapsto z$ é uma proporcionalidade. Ou seja: quando a altura de um retângulo é fixada, sua área z é proporcional à base x.

Com efeito, em primeiro lugar, se $x < x'$ então a área z' do retângulo de base x' é igual à área z do retângulo de base x mais a área de um retângulo de base $x' - x$, logo $z < z'$.

Em segundo lugar, um retângulo de base $n \cdot x$ pode ser expresso como reunião de n retângulos justapostos de base x (e mesma área z) logo sua área é $n \cdot z$.

Observação. A afirmação contida no Exemplo 2 é uma conseqüência imediata da fórmula que exprime a área de um retângulo como o produto da base pela altura. Esta é, entretanto, uma justificativa a posteriori. Não é conveniente usá-la no presente contexto pois, na verdade, o primeiro passo da dedução daquela fórmula é a verificação da proporcionalidade acima.

Exemplo 3. Consideremos no plano um ângulo $A\widehat{O}B$ e uma reta r que não é paralela ao lado OA nem a OB (Figura 2). Dado qualquer segmento de reta de comprimento x, contido em OA, as paralelas a r traçadas por suas extremidades determinam sobre o lado OB um segmento de comprimento y.

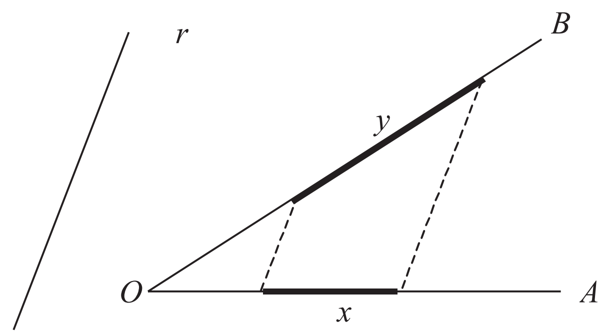

Figura 2

Afirmamos que a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade.

Antes de justificar esta afirmação devemos mostrar que o comprimento y depende apenas do comprimento x mas não da posição do segmento tomado sobre o lado OA. (Isto significa que a correspondência $x \mapsto y$ está bem definida.)

Ora, se tomarmos sobre o lado OA dois segmentos de mesmo comprimento x então na Figura 3, onde MN e $M'N'$ são paralelos a OA, os triângulos MNP e $M'N'P'$ têm, cada um, um lado de mesmo comprimento x, compreendido entre dois ângulos $\widehat{M} = \widehat{M'}$ e $\widehat{N} = \widehat{N}'$. Logo são triângulos congruentes e daí $\overline{MP} = \overline{M'P'} = y$.

A partir desta observação inicial, sempre que tivermos $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$, se quisermos comparar y com y' podemos supor que x e x' são medidas de segmentos com origem no vértice O. Então fica claro que se $x < x' \Rightarrow y < y'$ e que $x' = n \cdot x \Rightarrow y' = n \cdot y$, como mostra a Figura 4 (onde $n = 3$).

Exemplo 4. Investindo uma quantia x numa caderneta de poupança, após o decurso de um mês obtém-se um montante y. A correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade: o que se recebe no fim do mês é proporcional ao que se aplicou. Com efeito, é claro que aplicando-se mais recebe-se mais e investindo-se uma quantia n vezes maior do que x, pode-se considerar essa operação como n investimentos iguais a x, logo o que se recebe é $n \cdot y$.

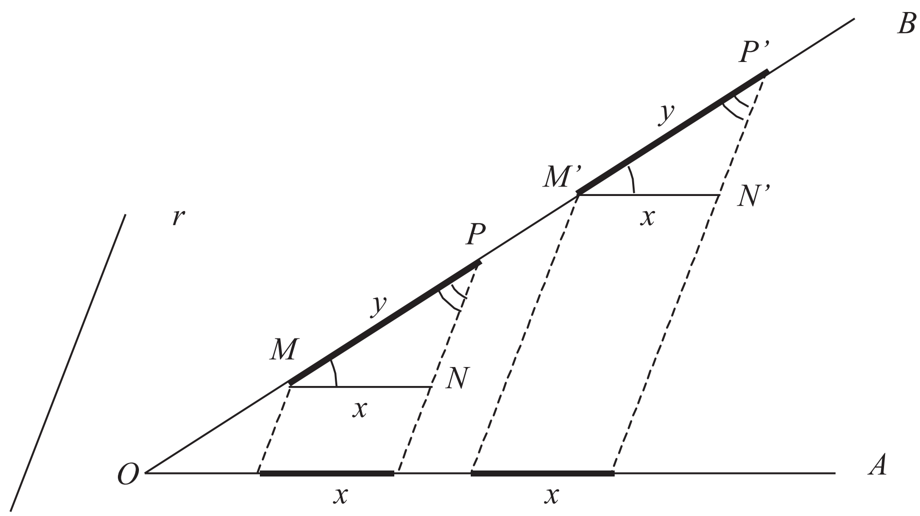

Figura 3

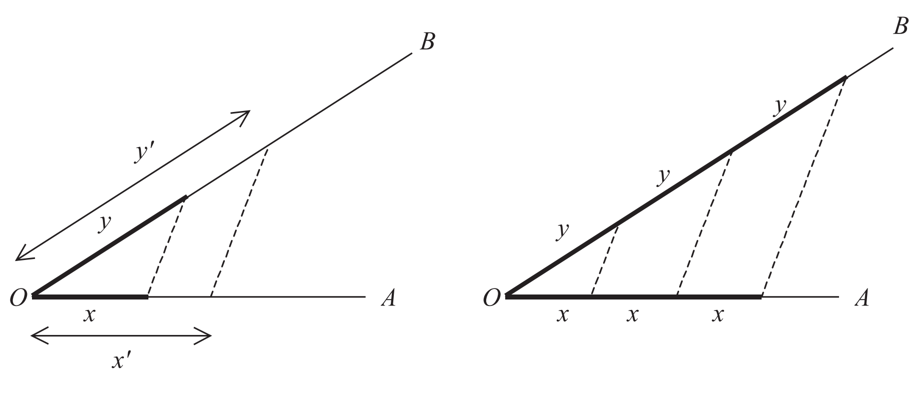

Figura 4

Observação. Se uma quantia fixa gera, após um mês de investimento, um retorno y, não é verdade que após n meses essa mesma quantia gere o retorno $n \cdot y$, mesmo que a taxa de juros permaneça constante. Pois ao final de cada mês é como se tivesse sido aplicada novamente uma quantia maior, igual à existente no mês anterior mais os juros correspondentes. Assim o retorno (num período fixo) é proporcional ao capital inicial mas não é proporcional ao tempo de investimento.

Esta observação mostra que a propriedade "quanto maior for x, maior será y" não assegura a proporcionalidade entre x e y. Outro exemplo disto é a correspondência $x \mapsto y$, onde x é o lado de um quadrado e y é sua área.

Diante dos exemplos anteriores, podemos formular a definição matemática de proporcionalidade, onde as grandezas são substituídas por números reais, que são suas medidas.

Estamos considerando apenas grandezas que têm medida positiva, logo o modelo matemático da proporcionalidade leva em consideração apenas números reais positivos.

Uma proporcionalidade (numérica) é uma função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:

1) f é uma função crescente, isto é $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}^+$.
2) Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(nx) = n \cdot f(x)$.

Numa proporcionalidade a propriedade 2), acima admitida apenas quando $n \in \mathbb{N}$, vale para um número real positivo qualquer. Este é o conteúdo do

Teorema Fundamental da Proporcionalidade.
Se $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é uma função crescente tal que* $f(nx) = n \cdot f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$ *e todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $f(cx) = c \cdot f(x)$ *para quaisquer* x *e* c *em* $\mathbb{R}^+$.

A demonstração do teorema acima está no Apêndice 1 na pág. 16. Ver também os seguintes livros, publicados pela S.B.M.: "Meu

Professor de Matemática", pág. 129, e "A Matemática do Ensino Médio, vol. 1", pág. 94.

Na prática, é bem mais fácil mostrar que $f(nx) = n \cdot f(x)$ para $n \in \mathbb{N}$ do que verificar que $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$. (Pense em $c = \sqrt{2}$ ou $c = \pi$.) Por outro lado, o fato de que uma proporcionalidade f satisfaz esta igualdade para qualquer número real positivo c tem importantes conseqüências, como veremos agora.

Corolário. *Se* $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é uma proporcionalidade então tem-se, para todo* $x > 0$, $f(x) = ax$, *onde* $a = f(1)$.

Com efeito, pelo Teorema Fundamental, para quaisquer $x, c \in \mathbb{R}^+$, vale $f(xc) = x \cdot f(c) = f(c) \cdot x$. Em particular, tomando $c = 1$, obtemos $f(x) = a \cdot x$, onde $a = f(1)$.

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante, chama-se uma *função linear*. Quando $a > 0$, a função linear $f(x) = ax$ transforma um número real positivo x no número positivo ax, logo define, por restrição, uma proporcionalidade $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Acabamos de ver que, reciprocamente, toda proporcionalidade é a restrição de uma função linear a $\mathbb{R}^+$. O coeficiente a chama-se o *fator de proporcionalidade*.

Esta última observação nos permite concluir que se $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade então, para quaisquer x_1, x_2 com $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, tem-se $y_1/x_1 = y_2/x_2$. Com efeito, ambos esses quocientes são iguais ao fator de proporcionalidade a. A igualdade $y_1/x_1 = y_2/x_2$ chama-se uma *proporção*.

Chama-se *regra de três* ao problema que consiste em, conhecendo três dos números x_1, y_1, x_2, y_2, determinar o quarto.

Há duas maneiras tradicionais de resolver esse problema. Suponhamos dados x_1, y_1 e x_2. O quarto elemento da proporção será chamado y. Então deve ser $y_1/x_1 = y/x_2$, donde se tira $y = x_2 y_1/x_1$. Esta é uma forma de resolver a regra de três.

O outro método de resolver a regra de três chama-se "redução à unidade". Sabendo que $f(x_1) = y_1$, ou seja, $ax_1 = y_1$, obtemos $a = y_1/x_1$ e daí vem o valor do termo y que falta na proporção $y_1/x_1 = y/x_2$: $y = f(x_2) = ax_2 = y_1 x_2/x_1$. O nome "redução à unidade" provém do fato de que $a = f(1)$ é o valor de $f(x)$ quando $x = 1$.

Deve-se ressaltar enfaticamente que a regra de três, proveniente da proporção $y_1/x_1 = y/x_2$, só pode ser legitimamente empregada quando se tem uma proporcionalidade f, sendo $y_1 = f(x_1)$ e $y = f(x_2)$.

Outra observação a ser feita é que, em diversas situações onde se usa a proporcionalidade (ou a regra de três), o fator de proporcionalidade a é irrelevante e/ou complicado de se obter.

No Exemplo 1, o fator de proporcionalidade $a =$ peso / volume, chamado a *densidade* do líquido (ou, mais precisamente, o *peso específico*), é um conceito útil. Assim, peso = densidade $\times$ volume.

No Exemplo 3, o fator de proporcionalidade não tem a menor importância. (Por acaso ele é o quociente dos senos dos ângulos que a reta r forma com os lados OA e OB, mas esta informação é uma mera curiosidade.)

No Exemplo 4, é costume escrever o fator de proporcionalidade sob a forma $a = 1 + i$, portanto tem-se $y = (1 + i)x$. O número i chama-se o *juro*. Se o investimento inicial x for mantido durante n mêses e os juros se mantiverem fixos, tem-se ao final do n-ésimo mês $y = (1 + i)^n x$.

Quanto ao Exemplo 2, ele nos diz que a área z de um retângulo de altura fixa y (= distância entre as paralelas r e s) é proporcional à base x, logo $z = A \cdot x$, onde o fator de proporcionalidade A é a área do retângulo de mesma altura y e base 1. Mas é claro que o que vale para a base vale também para a altura. Logo, a área A de um retângulo de base 1 e altura y é proporcional a y, ou seja, $A = B \cdot y$, onde B é a área do retângulo de base 1 e altura 1. Ora, este é o quadrado unitário logo, por definição, $B = 1$. Assim $A = y$ e a área z do retângulo de base x e altura y é dada por $z = xy$. (Veja o livro "Medida e Forma em Geometria", pág. 17.)

Existe também a noção de proporcionalidade inversa. Diz-se que duas grandezas são *inversamente proporcionais* quando existe uma correspondência $x \mapsto y$ que associa a cada valor x de uma delas um valor bem definido y da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

1) Quanto maior for x, menor será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x' \Rightarrow y' < y$.
2) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dividido por dois, por três, etc. Em linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto y/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, dizer que y é inversamente proporcional a x equivale a dizer que y é proporcional a $1/x$. Segue-se então do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que se y é inversamente proporcional a x então tem-se $y = a/x$, onde o fator de proporcionalidade a é o valor de y que corresponde a $x = 1$.

Exemplo 5. Entre os retângulos de base x, altura y e área igual a 1, tem-se y inversamente proporcional a x, com $y = 1/x$.

2 Grandeza proporcional a várias outras

Em muitas situações tem-se uma grandeza z, de tal modo relacionada com outras, digamos x, y, u, v, w, que a cada escolha de valores para estas últimas corresponde um valor bem determinado para z. Então z chama-se uma *função* das variáveis x, y, u, v, w e escreve-se $z = f(x, y, u, v, w)$.

Nestas condições, diz-se que z é (diretamente) *proporcional* a x quando:

1) Para quaisquer valores fixados de y, u, v, w, a grandeza z é uma função crescente de x, isto é, a desigualdade $x < x'$ implica $f(x, y, u, v, w) < f(x', y, u, v, w)$.
2) Para $n \in \mathbb{N}$ e x, y, u, v, w quaisquer tem-se $f(nx, y, u, v, w) = n \cdot f(x, y, u, v, w)$.

Analogamente, diz-se que z é *inversamente proporcional* a x quando:

1') Para quaisquer valores fixados de y, u, v e w, a grandeza z é uma função decrescente de x, isto é, a desigualdade $x < x'$ implica $f(x, y, u, v, w) > f(x', y, u, v, w)$.

2') Para $n \in \mathbb{N}$ e x, y, u, v, w quaisquer tem-se $f(nx, y, u, v, w) = \frac{1}{n} \cdot f(x, y, u, v, w)$.

Segue-se do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que as propriedades 2) e 2') acima valem para $c > 0$ real qualquer em lugar de $n \in \mathbb{N}$. Isto tem a seguinte conseqüência:

> Se $z = f(x, y, u, v, w)$ é (diretamente) proporcional a x e y e inversamente proporcional a u, v e w então, tomando-se $a = f(1, 1, 1, 1)$, tem-se
>
> $$f(x, y, u, v, w) = a \cdot \frac{x \cdot y}{u \cdot v \cdot w} \cdot$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x, y, u, v, w) &= f(x \cdot 1, y, u, v, w) = x \cdot f(1, y, u, v, w) \\ &= xy \cdot f(1, 1, u, v, w) = \frac{xy}{u} \cdot f(1, 1, 1, v, w) \\ &= \frac{xy}{uv} \cdot f(1, 1, 1, 1, w) = \frac{xy}{uvw} \cdot f(1, 1, 1, 1, 1) \\ &= a \cdot \frac{xy}{uvw} \cdot \end{aligned}$$

Exemplo 6. A lei da gravitação universal, de Newton, afirma que dois corpos, de massas m e m' respectivamente, situados a uma distância d um do outro, se atraem segundo uma força cuja intensidade F é proporcional a essas massas e inversamente proporcional ao quadrado d^2 da distância entre eles. Resulta do acima exposto que $F = c \cdot \frac{mm'}{d^2}$, onde a constante c depende do sistema de unidades utilizado.

Exemplo 7. A noção de grandeza proporcional a várias outras permite deduzir a fórmula do volume de um bloco retangular. O volume de um sólido geométrico X, que se escreve $\text{vol}(X)$, é um número real com as seguintes propriedades:

1) Se o sólido X está contido propriamente no sólido X' então $\text{vol}(X) < \text{vol}(X')$.

2) Se o sólido Y é a reunião de dois sólidos adjacentes X e X' então $\text{vol}(Y) = \text{vol}(X) + \text{vol}(X')$.

Dessas duas propriedades do volume, e da definição de proporcionalidade acima dada, resulta que se X é um bloco retangular cujas arestas medem x, y e z respectivamente então o volume de X é proporcional a x, y e z. Portanto $\text{vol}(X) = a \cdot xyz$, onde a é o volume do bloco retangular cujas três arestas medem 1. Mas tal bloco é o cubo de aresta 1 e, por definição, seu volume é igual a 1. Logo $\text{vol}(X) = xyz$.

3 Funções afins

Exemplo 8. As escalas termométricas assinalam valores positivos e negativos. Elas se baseiam na altura de uma coluna de mercúrio, a qual aumenta ou diminui conforme a temperatura sobe ou desce. Na escala Celsius, o valor 0 corresponde à temperatura em que o gelo começa a fundir-se e o valor 100 assinala a temperatura em que a água entra em ebulição (à pressão do nível do mar). Na escala Fahrenheit esses valores são 32 e 212 respectivamente. Assim, $0°\text{C} = 32°\text{F}$ e $100°\text{C} = 212°\text{F}$. Os demais valores na escala Celsius são marcados dividindo-se o intervalo entre aquelas duas temperaturas em 100 partes de igual comprimento e, na escala Fahrenheit, em 180 partes também de comprimentos iguais. Usando-se esses comprimentos em cada caso, as escalas são estendidas para assinalarem valores de temperaturas superiores à da ebulição da água e inferiores à da fusão do gelo. Isso requer o uso de números negativos. Pergunta-se: em que temperatura as escalas Celsius e Fahrenheit assinalam o mesmo valor? Qual a temperatura Celsius que é a metade do valor correspondente em graus Fahrenheit?

O exemplo acima ilustra uma situação em que se emprega a função afim, conforme veremos a seguir.

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, o valor $f(x)$ é dado por uma expressão do tipo $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes.

Exemplo 9. Uma corrida de táxi custa a reais por km rodado mais uma taxa fixa de b reais, chamada a "bandeirada". Então o preço de uma corrida de x km é $f(x) = ax + b$ reais.

Numa função afim $f(x) = ax + b$, o número $b = f(0)$ chama-se o *valor inicial* e o coeficiente $a = f(1) - f(0)$ é chamado a *taxa de variação* de f. O motivo para esta denominação é que, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, tem-se $a = [f(x + h) - f(x)]/h$, donde $a = f(x + 1) - f(x)$, logo a é a variação de $f(x)$ por unidade de variação de x. (Compare com o exemplo acima.)

Uma função linear $f(x) = ax$ é um caso particular de função afim. Outro caso particular de função afim é o das funções constantes $f(x) = b$.

Quando $a > 0$, a função afim $f(x) = ax + b$ é crescente, isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Com efeito se $x_1 < x_2$ então $x_2 - x_1 > 0$ logo

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1) > 0,$$

ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$.

Analogamente, se $a < 0$ então $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, e a função afim $f(x) = ax + b$ é, neste caso, decrescente.

Teorema de Caracterização das Funções Afins.
Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função crescente ou decrescente. Se a diferença* $f(x + h) - f(x)$ *depender apenas de* h, *mas não de* x, *então* f *é uma função afim.*

(Ver demonstração no Apêndice 2 na pág. 17.)

Exemplo 10. Retomemos o Exemplo 8. Em última análise, os graus C e F são diferentes unidades de comprimento, com as quais se mede a altura de uma coluna de mercúrio. Assim, a mudança de escala, de Celsius para Fahrenheit é uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa à medida x, segundo C, a medida $f(x)$, segundo F, da mesma coluna de mercúrio. Evidentemente, f é crescente. Além disso, a diferença $f(x+h)-f(x)$ é a medida, segundo F, do segmento de reta de extremos $f(x)$ e $f(x+h)$ o qual, segundo C, tem extremos

x e $x+h$, logo seu C-comprimento é igual a h. Ora, a medida deste segmento depende apenas de h mas não de x e o mesmo se dá com a diferença $f(x+h)-f(x)$. Pelo Teorema de Caracterização, concluímos que f é uma função afim: $f(x) = ax+b$. Sabemos que $f(0) = 32$ e $f(100) = 212$. Então $b = 32$ e $100a+32 = 212$, donde $a = 1{,}8$. Portanto $f(x) = 1{,}8x+32$ é a fórmula que permite passar da temperatura x na escala Celsius para a temperatura $f(x)$ em graus Fahrenheit. A primeira pergunta do Exemplo 8 era: para qual valor de x tem-se $f(x) = x$? Deve-se ter $1{,}8x+32 = x$, donde $x = -40$. A resposta é: -40 graus Celsius é o mesmo que -40 graus Fahrenheit. A segunda pergunta era: para qual valor de x tem-se $f(x) = 2x$? Então $1{,}8x+32 = 2x$ e daí $x = 160$. Assim 160 graus Celsius equivalem a 320 graus Fahrenheit.

Provaremos a seguir que o gráfico de uma função afim é uma reta. Para isso, usaremos a fórmula da distância entre dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, segundo a qual se tem $d(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Dada a função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$, seu gráfico G é o conjunto dos pontos $(x, ax+b) \in \mathbb{R}^2$, onde $x \in \mathbb{R}$. Sejam $M = (x_1, ax_1+b)$, $N = (x_2, ax_2+b)$ e $P = (x_3, ax_3+b)$ três pontos quaisquer de G. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $x_1 < x_2 < x_3$. Mostraremos que $d(M,N)+d(N,P) = d(M,P)$. De fato, temos

$$d(M,N) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+a^2(x_2-x_1)^2} = (x_2-x_1)\sqrt{1+a^2}\,.$$

Analogamente, $d(N,P) = (x_3-x_2)\sqrt{1+a^2}$, logo

$$d(M,N)+d(N,P) = (x_2-x_1+x_3-x_2)\sqrt{1+a^2} = (x_3-x_1)\sqrt{1+a^2} = d(M,P).$$

Portanto três pontos quaisquer do gráfico G são colineares. Como G possui pontos com quaisquer abscissa, segue-se que G é uma reta.

O número b é a ordenada do ponto em que o gráfico de $f(x) = ax+b$ corta o eixo OY. Na Figura 5 vê-se como aos acréscimos iguais $x \to x+h$ e $x' \to x'+h$ dados a x e x' correspondem acréscimos iguais $f(x+h) - f(x) = f(x'+h) - f(x')$. A inclinação da reta G em relação ao eixo horizontal é $[f(x+h) - f(x)]/h = [a(x+h) - ax]/h = a$. Portanto, para valores maiores ou menores de a, o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ é mais ou menos inclinado em relação a OX.

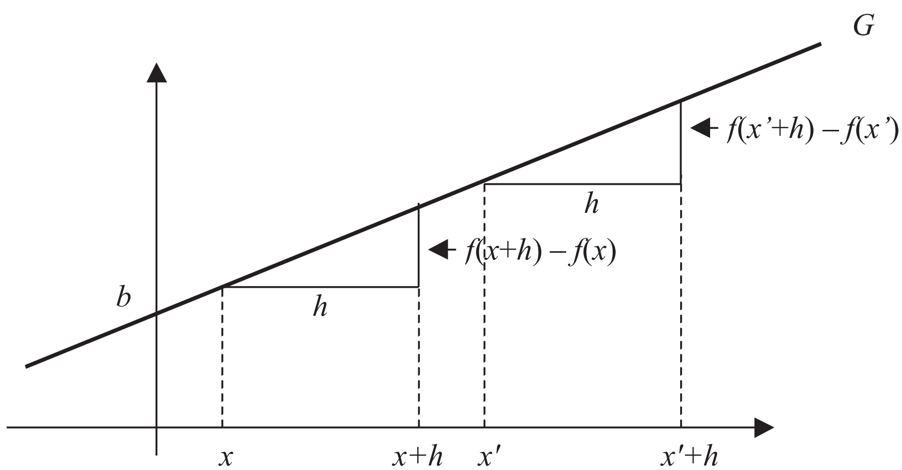

Figura 5

APÊNDICE 1

Teorema Fundamental da Proporcionalidade.
Seja $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *uma função com as seguintes propriedades:*

1) $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$;

2) $f(nx) = n \cdot f(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^+$.

Então $f(cx) = c \cdot f(x)$ *para todo* $c \in \mathbb{R}^+$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^+$.
Conseqüentemente, $f(x) = ax$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$, *com* $a = f(1)$.

Demonstração: Em primeiro lugar, para todo número racional $r = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n \cdot f(rx) = f(n \cdot rx) = f(mx) = m \cdot f(x),$$

por 2), logo $f(rx) = \dfrac{m}{n} f(x) = r \cdot f(x)$. Assim, a igualdade $f(cx) = c \cdot f(x)$ é válida quando c é racional. Suponhamos, por absurdo, que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c \cdot f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então ou $f(cx) < c \cdot f(x)$ ou $f(cx) > c \cdot f(x)$. Consideremos o primeiro caso. Temos então $f(cx)/f(x) < c$. Seja r um valor racional aproximado de c, de modo que $f(cx)/f(x) < r < c$, logo $f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. Como r é racional, vale $r \cdot f(x) = f(rx)$. Assim, podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$. Em particular $f(cx) < f(rx)$. Mas, como $r < c$, tem-se $rx < cx$ e, pela propriedade 1), isso obriga $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$. Esta contradição mostra que não é possível ter-se $f(cx) < c \cdot f(x)$. De modo inteiramente análogo se vê que $f(cx) > c \cdot f(x)$ é impossível. Portanto deve ser $f(x) = c \cdot f(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}^+$.

Observação. Um teorema análogo, com a mesma demonstração, vale para $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, escrevendo, na propriedade 2), $n \in \mathbb{Z}$ em vez de $n \in \mathbb{N}$.

APÊNDICE 2

Teorema de Caracterização das Funções Afins.
Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *crescente ou decrescente. Se a diferença* $f(x+h)-f(x)$ *depende apenas de* h *mas não de* x*, então* f *é uma função afim.*

Demonstração: Trataremos apenas do caso em que f é crescente pois o outro é análogo. Pela hipótese feita sobre f, a função $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$, está bem definida. Evidentemente φ é crescente. Além disso, para todo $h \in \mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned}\varphi(2h) &= f(x+2h) - f(x)\\ &= [f((x+h)+h) - f(x+h)] + [f(x+h) - f(x)]\\ &= \varphi(h) + \varphi(h) = 2 \cdot \varphi(h).\end{aligned}$$

Analogamente se vê que $\varphi(nh) = n \cdot \varphi(h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se ainda

$$\varphi(-h) = f(x-h) - f(x) = -[f(x) - f(x-h)] = -\varphi(h)$$

pois $x = (x-h) + h$. Segue-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $h \in \mathbb{R}$ vale

$$\varphi((-n)h) = \varphi(-nh) = -\varphi(nh) = -[n \cdot \varphi(h)] = (-n)\varphi(h).$$

Como é óbvio que $\varphi(0) = 0$, vemos que $\varphi(nh) = n \cdot \varphi(h)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pela Observação ao final do Apêndice 1, concluímos que $\varphi(ch) = c \cdot \varphi(h)$ para quaisquer $c, h \in \mathbb{R}$, logo φ é linear. Assim, pondo $a = \varphi(1) = f(x+1) - f(x)$, tem-se $\varphi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$ vale $f(x+h) - f(x) = a \cdot h$. Trocando h por x, vem: $f(h+x) - f(h) = ax$. Fazendo $h = 0$ e escrevendo $b = f(0)$, obtemos $f(x) - b = ax$, donde $f(x) = ax + b$ e o teorema está demonstrado.

Problemas Propostos*

1. Sejam r, s retas coplanares. Para cada segmento de reta AB contido em r, seja $A'B'$ sua projeção ortogonal sobre s. Prove que o comprimento de $A'B'$ é proporcional ao de AB.

2. Seja P um ponto fora da reta r. Se X e Y são pontos distintos em r, prove que a área do triângulo PXY é proporcional ao comprimento de XY. Qual é o fator de proporcionalidade?

3. Dado o ângulo $\alpha = A\hat{O}B$, para cada par de pontos X em OA e Y em OB, sejam x e y as medidas dos segmentos OX e OY respectivamente. Prove que a área do paralelogramo que tem OX e OY como dois de seus lados é proporcional a x e y. Qual é o fator de proporcionalidade? Sabendo que a área desse paralelogramo é de $29\,\text{cm}^2$ quando $x = 6\,\text{cm}$ e $y = 7\,\text{cm}$, qual o valor dessa área para $x = 2\,\text{cm}$ e $y = 3\,\text{cm}$?

4. Sejam OA, OB e OC semi-retas não coplanares e x, y, z as medidas dos segmentos OX, OY e OZ, respectivamente contidos em OA, OB e OC. Prove que o volume do paralelepípedo que tem OX, OY e OC como três das suas arestas é proporcional a x, y e z.

5. O movimento de um ponto sobre um eixo chama-se *uniforme* quando ele percorre espaços iguais em tempos iguais. Sua *velocidade* é, por definição, o espaço percorrido na unidade de tempo. Formule estas definições matematicamente e obtenha a abscissa $f(t)$ do ponto no instante t explicitamente como função de t e do ponto de partida.

6. Por dois pontos dados no plano passa uma única reta. Como se traduz esta afirmação em termos de funções afins? Prove-a algebricamente.

---

*Soluções na página 133.

7. Um fazendeiro possui ração suficiente para alimentar suas 16 vacas durante 62 dias. Após 14 dias, ele vende 4 vacas. Passados mais 15 dias, ele compra 9 vacas. Quantos dias, no total, durou sua reserva de ração?

8. Uma caravana com 7 pessoas deve atravessar o Sahara em 42 dias. Seu suprimento de água permite que cada pessoa disponha de 3,5 litros por dia. Após 12 dias, a caravana encontra 3 beduínos sedentos, vítimas de uma tempestade de areia, e os acolhe. Pergunta-se:

a) Quantos litros de água por dia caberão a cada pessoa se a caravana prosseguir sua rota como planejado?

b) Se os membros da caravana (beduínos inclusive) continuarem consumindo água como antes, em quantos dias, no máximo, será necessário encontrar um oásis?

9. Numa estrada retilínea, dois carros partem, ao mesmo tempo, de dois pontos A e B, com $d(A, B) = d$, dirigindo-se no mesmo sentido. O que partiu de A vai a v quilômetros por hora e o que saiu de B roda a w quilômetros por hora. A que distância de A eles se encontram?

10. Dois trens de carga, na mesma linha férrea, seguem uma rota de colisão. Um deles vai a 46 km/h e o outro a 58 km/h. No instante em que eles se encontram a 260 km um do outro, um pássaro, que voa a 60 km/h, parte de um ponto entre os dois, até encontrar um deles e então volta para o outro e continua nesse vai-e-vem até morrer esmagado no momento em que os trens se chocam. Quantos quilômetros voou o pobre pássaro?

11. Na loja A, um aparelho custa 3800 reais mais uma taxa mensal de manutenção de 20 reais. Na loja B, o mesmo aparelho custa 2500 reais porém a taxa de manutenção é de 50 reais por mês. Qual das duas opções é a mais vantajosa?

12. Na situação do Exemplo 3, a cada ponto X da semi-reta OA façamos corresponder o ponto Z em OB, tal que XZ seja paralelo à reta r. Chamando de x e z os comprimentos de OX e XZ respectivamente, mostre que a correspondência $x \mapsto z$ é uma proporcionalidade. Em que condições o fator de proporcionalidade é o mesmo que o da correspondência $x \mapsto y$ do Exemplo 3?