IL VOLO DEL CONDOR

L’abaco inca

Partendo da uno dei disegni tratti dall’opera *“Nueva Cronica y buen gobierno”*[1], riproducente un abaco a cinque righe e quattro colonne, è possibile decriptare il metodo di calcolo usato dagli Incas; l’abaco, riprodotto in figura 1, è contraddistinto da cerchi vuoti e pieni, implicanti la scontata impostazione che vuole quelli vuoti solo con funzione indicativa e quelli pieni con valore dipendente dalla posizione impegnata.

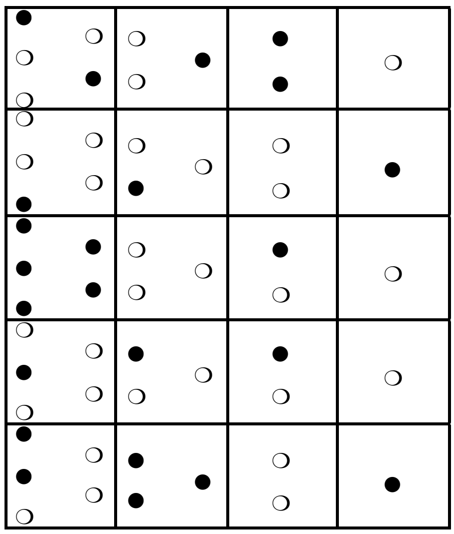

Figura 1

Riservandoci di tornare successivamente sull’abaco riprodotto, al fine di analizzarne le profondità magistralmente suggerite, procediamo al richiamo di concetti indispensabili alla comprensione del metodo di calcolo inca.

Come è noto, in tutte le tradizioni i numeri primi 1, 2, 3, 5, essendo divisibili solo per se stessi e per l’unità, rappresentano ambiti elevati; in particolare l’uno è direttamente collegabile alla divinità ed il cinque all’uomo, per il numero delle sue estremità (capo ed arti). I numeri 3 e 5 presentano anche la particolarità di essere, ciascuno, la somma dei due numeri precedenti; infatti:

$$3 = 2 + 1 \quad \text{e} \quad 5 = 3 + 2; \qquad [\mathbf{a}]$$

il numero seguente della successione sarebbe 8 (5 + 3 = 8) che non è primo e quindi non è da prendere, per il momento, in considerazione.

Ora i numeri 1, 2, 3 e 5 sono chiaramente individuabili dal numero dei cerchi vuoti contenuti nei riquadri, secondo lo schema di figura 2.

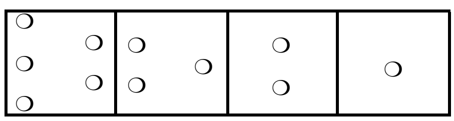

Figura 2

[1] Attribuita in modo controverso a Felipe Guaman Poma de Ayala.

con le relazioni [**a**] ricavabili anche con una semplice osservazione, dal momento che la terza e la quarta colonna sono la somma visiva delle due colonne precedenti, secondo le modalità di figura 3.

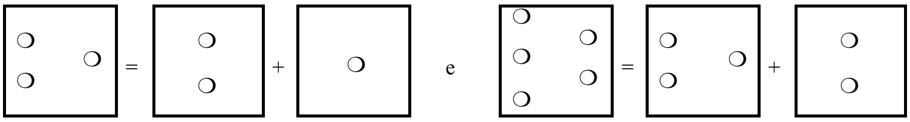

Figura 3

Sostituendo i cerchi vuoti con dei cerchi pieni o semi (d'ora in poi li chiameremo così per fare riferimento all'uso di calcolo pratico degli Incas), gli stessi non possono avere ovunque lo stesso valore, altrimenti non sarebbero suddivisi così decisamente in quattro colonne. Come procedere dunque?

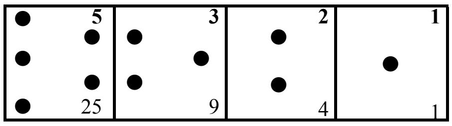

Figura 4

Partendo da destra, la prima colonna è quella delle unità (**1**), che può contenere un solo seme, per un valore totale pari a uno; la seconda colonna è quella delle coppie (**2**) e, al massimo, può contenere due semi per un valore totale di quattro (2 x 2); la terza colonna è quella delle terne (**3**) che può contenere tre semi, esprimendo un valore totale pari a nove (3 x 3); infine la quarta colonna è quella delle cinquine (**5**) che, al massimo, può contenere cinque semi in grado di esprimere il valore totale di venticinque (5 x 5). Indicando in figura 4 i valori parziali e totali caratteristici di ogni riquadro, si deduce che la prima riga dell'abaco Inca, completamente piena, esprime il numero:

$$1 + 4 + 9 + 25 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 39,$$

numero che ripresenta la successione 1, 2, 3 e 5 con ciascun termine elevato al quadrato, al fine di evidenziare un senso di totalità (le singole operazioni di elevamento al "quadrato" sono suggerite con forza anche dalla geometria dei "quadrati" che contengono i semi). D'altro canto la stessa riga completamente vuota rappresenta la *assenza* contemporanea dei numeri che vanno da 1 a 39 (siamo obbligati, per il momento, a non parlare di zero e questo si capirà in seguito). Riassumendo, la prima riga, con tutte le combinazioni possibili, è dedicata alla rappresentazione dei numeri che vanno dalla *assenza* a trentanove, per un totale di 40 condizioni.

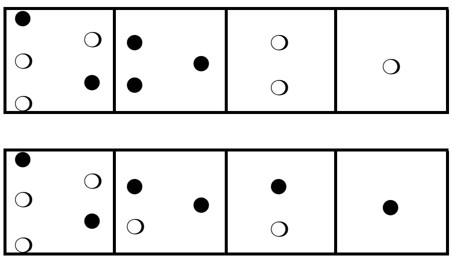

Figura 5

Ad esempio il numero 19 può essere scritto in varie maniere, due delle quali sono riprodotte in figura 5; la prima (2 x 5 + 3 x 3) è ottenuta con due cinquine e tre terne, la seconda (2 x 5 + 2 x 3 + 2 + 1) con due cinquine, due terne, una coppia ed una unità, il che fa intuire l'estrema versatilità di questo sistema di rappresentazione, versatilità basata sulla possibilità di passare semi da una colonna all'altra, osservando alcune semplici regole che saranno riportate successivamente. Per il momento conviene insistere sul significato profondo attribuito al numero 40 da tutte le tradizioni: la durata del diluvio universale è di 40 giorni, Mosè si ritira sul Sinai per 40 giorni e per 40 anni girovaga nel deserto con il suo popolo, prima di raggiungere la terra promessa; il Salvatore medita 40 giorni nel deserto prima di affrontare la sua missione; nel cristianesimo ed in molte altre religioni un digiuno di 40 giorni è il preludio ad un importante evento spirituale; c'è da pensare che anche per il grande popolo degli Incas il 40 fosse un numero di importanza tanto capitale da determinarne perfino il metodo di calcolo. Dunque passando al secondo livello dell'abaco, quindi ad un grado superiore, troviamo certamente il numero 40! Conservando anche la successione fondante 1, 2, 3, 5, avremo le prime due righe dell'abaco con i numeri indicati in figura 6, con i totali rispettivi e le potenze di 40 generatrici.

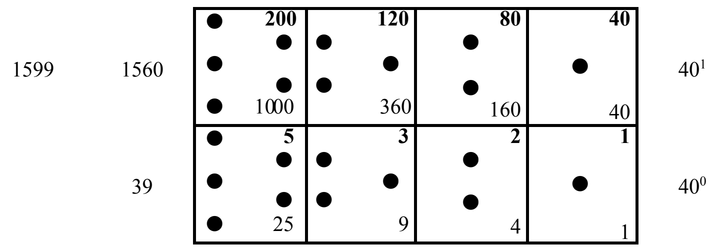

Figura 6

Ma quale legame c'è tra i due livelli, ossia quale è la condizione per passare dall'uno all'altro? Anche in questo caso la conoscenza della tradizione ci viene in aiuto: i Mondi diversi sono collegati dagli stati intermedi o sottili, alla stessa maniera del Cielo e della Terra che comunicano attraverso l'Atmosfera; ma se il Cielo ha come simbolo geometrico il cerchio (della perfezione) e la Terra il quadrato (per i suoi quattro elementi costitutivi: Terra, Acqua, Aria e Fuoco), è spontaneo pensare all'ottagono (quindi all'otto) come simbolo della Atmosfera e di tutti i sottili mondi intermedi; sicché proprio l'otto è il numero di transizione da un livello all'altro, secondo lo schema riportato in figura 7, dal momento che sussiste l'uguaglianza 8 x 5 = 40.

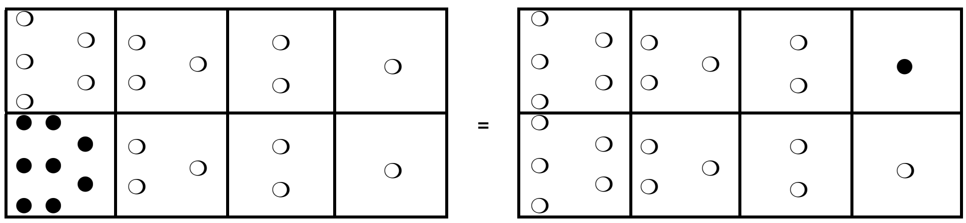

Figura 7

Oltretutto l'otto, pur non potendo trovare sistemazione palese nell'abaco (dal momento che non è primo), è in intima relazione con la successione chiamata fondante (1, 2, 3, 5), potendo essere ottenuto, alla stregua del 3 e del 5, come somma dei due elementi precedenti; per giunta esso è il simbolo dell'armonia, poiché l'Atmosfera che rappresenta trasmette tutte le onde sonore, quindi la musica. Anche in molte civiltà preinca alla Atmosfera ed alla funzione sacerdotale –intermedia per eccellenza–

viene attribuito come numero distintivo l'otto; ad esempio nella sepoltura del Signore di Sipàn, ritenuto monarca e sacerdote, sono stati rinvenuti diversi sonagli con otto globetti[2]. E quale altro magico numero, se non l'otto, dovrebbe connettere in modo sottile livelli contigui, eliminando tutte le disarmonie visive? Quando, con operazioni aritmetiche, nel primo livello si supera il valore 40, nella quarta colonna vengono a trovarsi 8 o più semi, da trasferire al secondo livello a gruppi di 8, riducendoli nel rapporto 1/8 .

Questa impostazione strategica sull'otto trova una decisiva ed entusiasmante conferma in uno scritto di padre José de Acosta: "*Vederli usare un'altra specie di quipus, con chicchi di granoturco, è perfetta letizia. Allo scopo di eseguire calcoli molto difficili per i quali un contabile capace avrebbe bisogno di carta e penna, questi indiani fanno uso delle loro granaglie. Ne mettono una qua, tre in un altro posto, e otto non so dove. Muovono qua e là un chicco e la realtà è che sono capaci di completare i loro calcoli senza fare il più piccolo errore. In verità, nell'esercizio della matematica sono migliori di noi*"[3].

E se decidessimo di scendere di livello conservando le stesse regole? Otterremmo lo schema di figura 8, con il risultato di introdurre i numeri decimali.

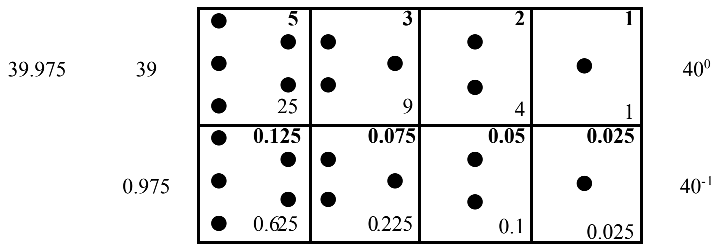

Figura 8

Nessuna difficoltà interviene quando si rende necessario aggiungere altri livelli, verso l'alto o verso il basso, corrispondenti a potenze del 40 crescenti o decrescenti, come mostra la figura 9.

Una considerazione a parte meritano le rappresentazioni di zero e di infinito nell'abaco inca. I concetti di vuoto e di pienezza totale non hanno alcun riscontro nel mondo della manifestazione: sono idee astratte alle quali ci si può solo vagamente avvicinare. Bene! Un numero comunque grande può essere sempre superato passando semplicemente al livello superiore dell'abaco, così come, per trovare un numero inferiore ad uno comunque piccolo, basta scendere di un livello! Nell'abaco inca infiniti ed infinitesimi vengono trattati alla stessa maniera; l'indeterminatezza più sconvolgente emerge sia nella rappresentazione posizionale dell'infinito, sia in quella dello zero: la corrispondenza tra metodo matematico e filosofia è perfetta! Come non evidenziare che, a livello di pensiero, niente di equivalente può essere vantato dalla coeva matematica occidentale, tanto orgogliosa dei vantaggi derivanti dall'aver saputo circoscrivere lo zero[4]? E che dire del senso di profonda angoscia suscitata da un abaco, che si estende infinitamente sia verso l'alto che verso il basso, desolatamente svuotato, dal disordinato insieme delle forze ctonie, nel tentativo di rappresentare lo zero? Possibile che non possa rimanere in qualche remoto angolino, magari al di fuori della nostra vista –o comprensione–, un semino di folle speranza, in grado di opporsi arditamente al nulla? O forse è più comprensibile la consolatoria immagine dello stesso sconfinato abaco, pazientemente riempito in ogni singola posizione per simulare l'infinito? Quale Essere dispone dell'eternità per portare a termine tale compito, dando amorevolmente un pertinente valore anche al più trascurabile semino? E che succederebbe se si flettesse questo

[2] Alva W., Longhena M., *Antico Perù*, Bergamo, 1999, p. 284.
[3] De Acosta J. *Historia natural y moral de las Indias*, Libro VI, cap. VIII.
[4] I logaritmi naturali e decimali rispondono sì a questa impostazione ma sono stati introdotti, rispettivamente, nel 1614 e nel 1624 da Napier e Briggs, con la loro caratteristica di noiosa complicatezza, ben nota a tutti gli studenti.

estesissimo abaco fino a fargli assumere la forma di una semicirconferenza? Non saremmo costretti a disporre sulla semicirconferenza complementare i numeri negativi, con il risultato sconvolgente di far coincidere $-\infty$ con $+\infty$, circostanza decisamente proibita dai rigidi assi che scandiscono gli spazi euclidei?

Cinquine	Terne	Coppie	Unità	Pot. 40	Livello
20.480.000.000	12.288.000.000	8.192.000.000	4.096.000.000		
102.400.000.000	36.864.000.000	16.384.000.000	4.096.000.000	$[40^{6}]$	6
512.000.000	307.200.000	204.800.000	102.400.000		
2.560.000.000	921.600.000	409.600.000	102.400.000	$[40^{5}]$	5
12.800.000	7.680.000	5.120.000	2.560.000		
64.000.000	23.040.000	10.240.000	2.560.000	$[40^{4}]$	4
320.000	192.000	128.000	64.000		
1.600.000	576.000	256.000	64.000	$[40^{3}]$	3
8.000	4.800	3.200	1.600		
40.000	14.400	6.400	1.600	$[40^{2}]$	2
200	120	80	40		
1.000	360	160	40	$[40^{1}]$	1
5	3	2	1		
25	9	4	1	$[40^{0}]$	0
0,125	0,075	0,050	0,025		
0,625	0,225	0,100	0,025	$[40^{-1}]$	-1
0,003125	0,001875	0,001250	0,000625		
0,015625	0,005625	0,002500	0,000625	$[40^{-2}]$	-2
0,000078125	0,000046875	0,000031250	0,000015625		
0,000390625	0,000140625	0,000062500	0,000015625	$[40^{-3}]$	-3
0,000001953125	0,000001171875	0,000000781250	0,000000390625		
0,000009765625	0,000003515625	0,000001562500	0,000000390625	$[40^{-4}]$	-4
0,000000048828125	0,000000029296875	0,000000019531250	0,000000009765625		
0,000000244140625	0,000000087890625	0,000000039062500	0,000000009765625	$[40^{-5}]$	-5

Figura 9

Alla luce di queste semplici considerazioni c'è da ritenere, obbiettivamente, che la superiorità degli Incas nei nostri confronti sia al di fuori di ogni discussione, forse non solo nelle discipline matematiche, e che l'intuizione di questa superiorità da parte di padre de Acosta, anche se basata solo su osservazioni di calcolo pratico, sia stata più che felice.

Con queste premesse così dense di significato, come faremo a meravigliarci affermando che tutti i calcoli vengono effettuati a livello visivo, con velocità insuperabile e senza rischi di errore? Volendo ad esempio effettuare la divisione 24 : 12 = 2, trascurando gli indicatori di livello ormai mentalmente acquisiti, useremo lo schema logico di figura 10.

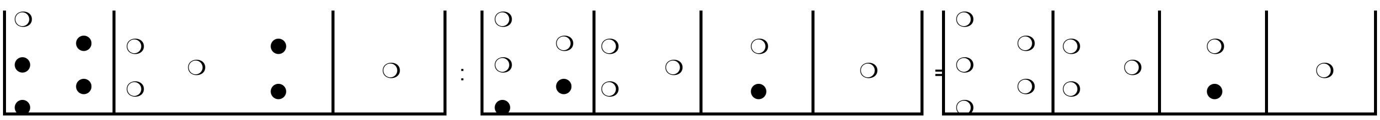

Figura 10

Ma il calcolo mostrato in figura 11 è altrettanto logico ed istantaneo, e corrisponde alla complicata operazione 984 : 12 che richiede –beninteso in senso occidentale!– carta, penna e quasi un minuto per arrivare al risultato di 82.

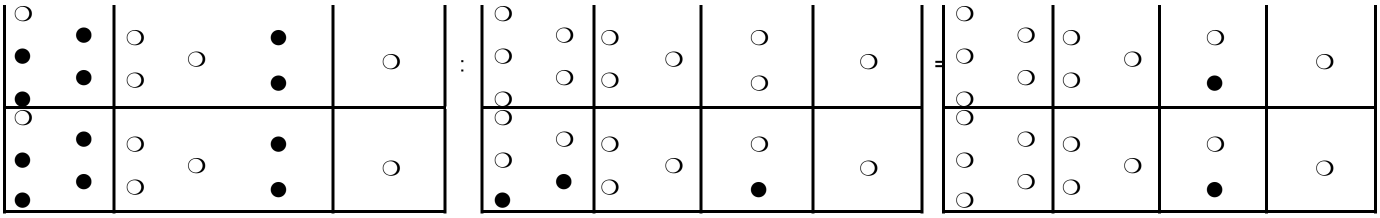

Figura 11

Per non parlare della operazione, indicata in figura 12, che corrisponde a 39.384 : 12 = 3.282 e vede dilatare notevolmente i tempi occidentali di esecuzione, con la inevitabile crescita di rischi di errore.

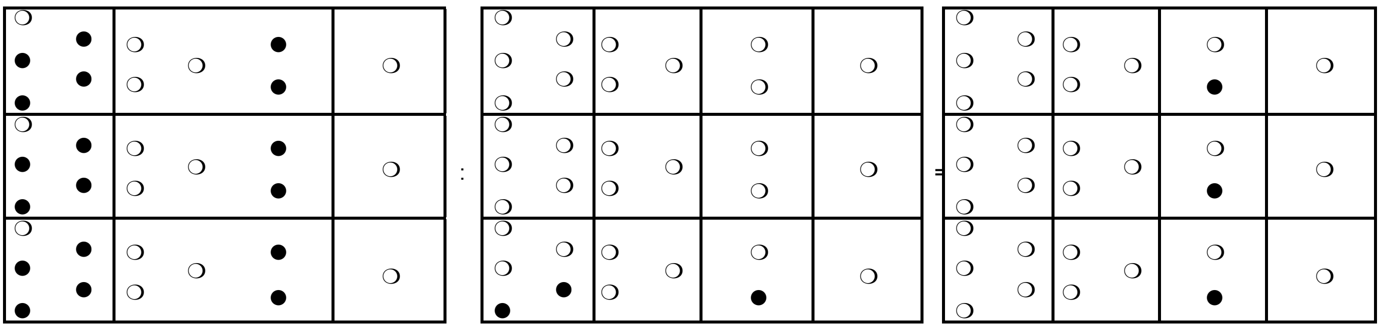

Figura 12

Quando le operazioni sono meno semplici le cose non si complicano poiché i semi diventano mobili, potendo passare da una casella all'altra osservando alcune semplici regole come quelle indicate in figura 13.

			A
ddddd	ccc	bb	a

$a + b = c$	$b + c = d$	$a + 2b = d$	$a + 3c = 2d$
$a + c = 2b$	$5b = 2d$	$5c = 3d$	$3b = 2c$
$2c = a + d$	$3b = a + d$	$2a = b$	$3a = c$
$5a = d$	$8d = A$.		

Figura 13

Moltiplicazione

Si debba eseguire la moltiplicazione 5 x 3 = 15. Lo schema inca è riportato in figura 14.

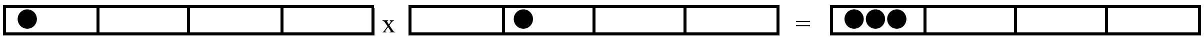

Figura 14

E, analogamente, 5 x 120 = 600 di figura 15.

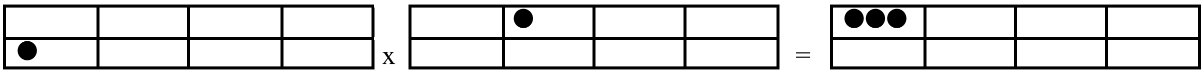

Figura 15

È semplice trovare la regola per posizionare il risultato velocemente, qualunque siano i livelli di appartenenza dei semi del moltiplicando e del moltiplicatore, purché appartenenti alle colonne terza e quarta. Conviene, pertanto, numerare i livelli e trovare il livello di pertinenza del prodotto sommando i numeri di livello di appartenenza dei fattori, come mostrato in figura 16; in pratica il posizionamento al livello 4 nasce dalla somma 1 + 3; così facendo abbiamo effettuato il prodotto 200 x 192.000 = 38.400.000 ($5 \times 40^1 \times 3 \times 40^3 = 15 \times 40^{1+3} = 15 \times 40^4$).

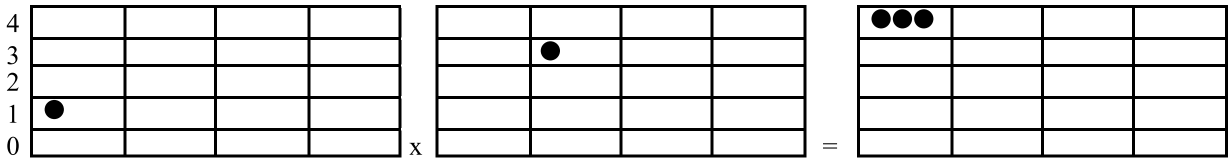

Figura 16

Nessun problema interviene quando si ha a che fare con i decimali. Ad esempio il calcolo relativo alla figura 17 corrisponde a 0,125 x 0,001875 = 0,000234375, con risultato a livello –3, ottenuto dalla somma –1 + (–2).

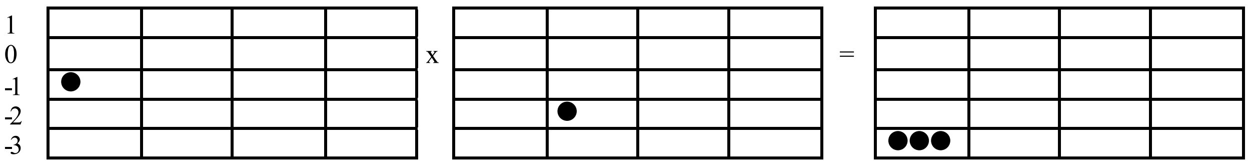

Figura 17

o ancora (figura 18) 0,003125 x 120 = 0,375 (–2 + 1 = –1) . L'abaco inca trasforma i prodotti più complessi in semplici operazioni visive e posizionamento del risultato ad un livello individuato da una somma.

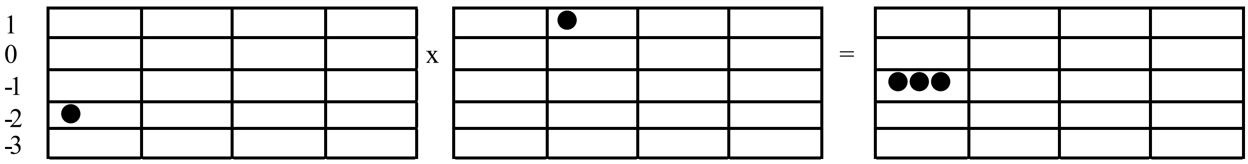

Figura 18

Divisione

Analogamente a quanto abbiamo appena visto, una sottrazione interverrà nello stabilire il posizionamento del risultato nelle operazioni di divisione. Ad esempio, partendo dallo schema base della figura 19, corrispondente a 24,5 : 4 = 6,125, si può impostare logicamente lo schema dipendente di figura 20, che ci consente di effettuare la divisione 980 : 0,0025 = 392.000 ($[24{,}5 \times 40^{1}] : [4 \times 40^{-2}] = 6{,}125 \times 40^{1-(-2)} = 6{,}125 \times 40^{3}$), con il numero di livello del risultato ottenuto per sottrazione tra quelli del dividendo e del divisore: 1 – (–2) = 3.

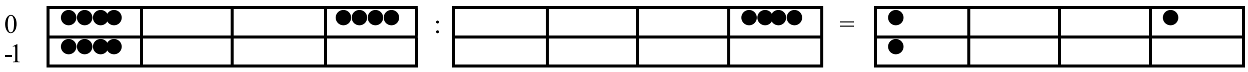

Figura 19

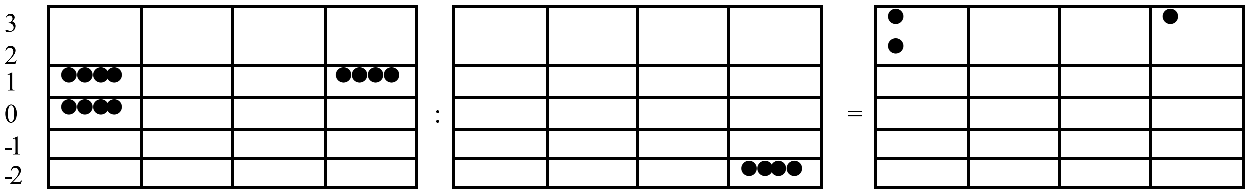

Figura 20

Elevamento a potenza

Il livello di pertinenza del risultato di un elevamento a potenza deve essere definito ricorrendo ad una operazione di moltiplicazione. Ad esempio $3^2 = 9$, riportato in figura 21, è la scaturigine di tutti i quadrati delle terne che si trovano in terza colonna.

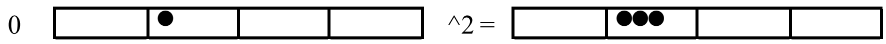

Figura 21

Sicché la figura 22 mostra 192.000^2 = 36.864.000.000, semplicemente perché 3 x 2 = 6!

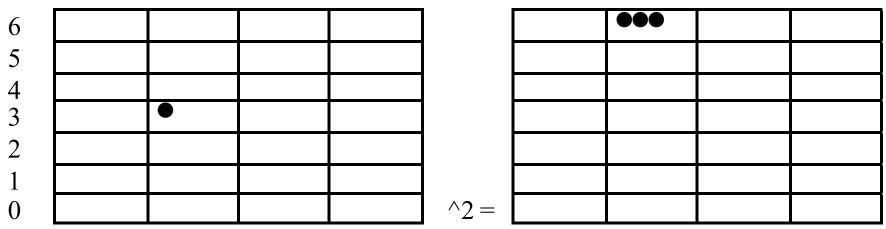

Figura 22

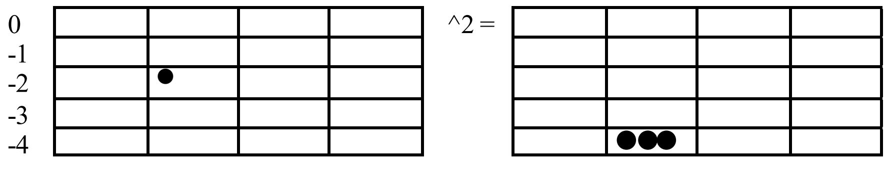

Figura 23

E la figura 23 consente il calcolo visivo di $0{,}001875^2 = 0{,}000003515625$, essendo $-4 = (-2) \times 2$.

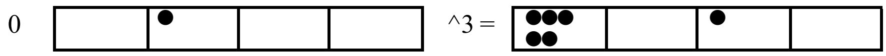

Figura 24

La variazione dell'esponente non cambia la regola, che vuole il numero di livello di pertinenza del risultato dato dal prodotto tra il numero di livello della base e l'esponente. Alla stessa maniera $3^3 = 27$, rappresentato in figura 24, permette di calcolare $0{,}075^3 = 0{,}000421875$ con lo schema di figura 25, con posizionamento del risultato al livello –3, risultante dal prodotto $(-1) \times 3 = -3$.

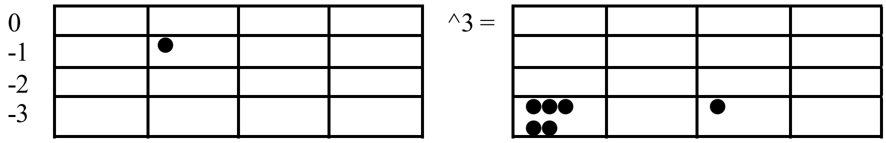

Figura 25

Estrazione di radici

Non è difficile intuire, a questo punto, che una divisione accompagna i calcoli di estrazione di radici. Così $25^{1/2} = 5$ di figura 26, ci consente di calcolare $0{,}000009765625^{1/2} = 0{,}003125$, con posizionamento del risultato a livello –2 dal momento che $-4 : 2 = -2$ (figura 27).

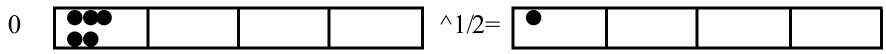

Figura 26

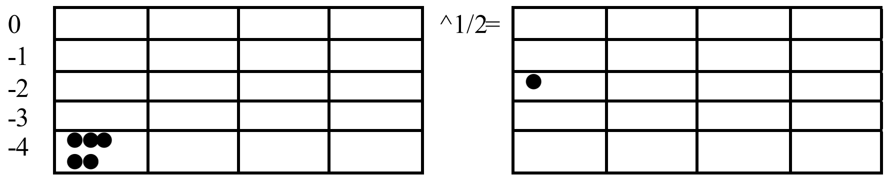

Figura 27

Questo significa –senza alcuna sorpresa– che l'abaco inca consente l'elevamento a potenza con numeri decimali (come 2,5) purché il prodotto tra il livello di partenza e l'esponente sia intero.

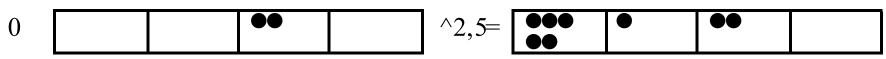

Figura 28

Ad esempio, sapendo che $4^{2,5} = 16 \times 2 = 32$ e che viene a disporsi nell'abaco come in figura 28, si può dedurre facilmente l'operazione indicata in figura 29 con il posizionamento al quinto livello legato al prodotto $2 \times 2{,}5 = 5$, che rappresenta la non semplice operazione $6400^{2,5} = 3.276.800.000$! Il caso, obiettivamente più difficile, di prodotti decimali sarà affrontato in altra occasione.

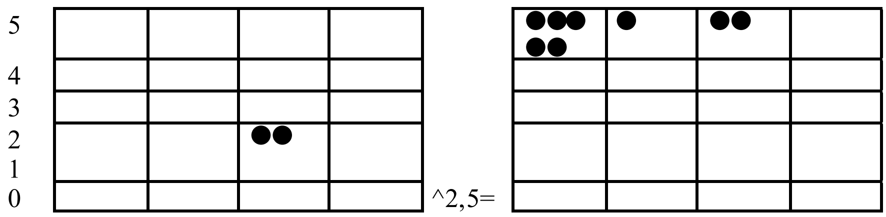

Figura 29

Il progetto Atahualpa

Abbiamo appena visto come l'abaco inca semplifichi al massimo le operazioni aritmetiche per la sua impostazione sui numeri 1, 2, 3 e 5; proprio questa impostazione indica il percorso di sviluppo degli elaboratori elettronici, attualmente basati sul sistema binario che, con la sua eccessiva semplicità, rende estremamente veloci le procedure di calcolo, sia pure con gli svantaggi che ben conosciamo.

Infatti la prima colonna dell'abaco, presa da sola, è la rappresentazione grafica proprio del sistema binario (figura 30), con il passaggio da un livello all'altro –il famoso riporto– basato sul due.

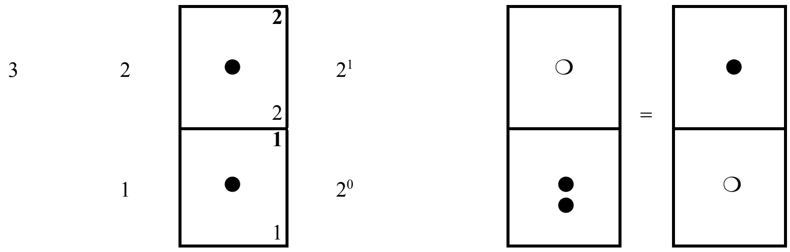

Figura 30

Considerando le prime due colonne, invece, viene fuori un interessantissimo sistema di numerazione in base sei, di pari semplicità ma meno oneroso nei calcoli (figura 31); il riporto, in questo caso, è legato al 6 e scatta quando si accumulano tre semi di peso 2.

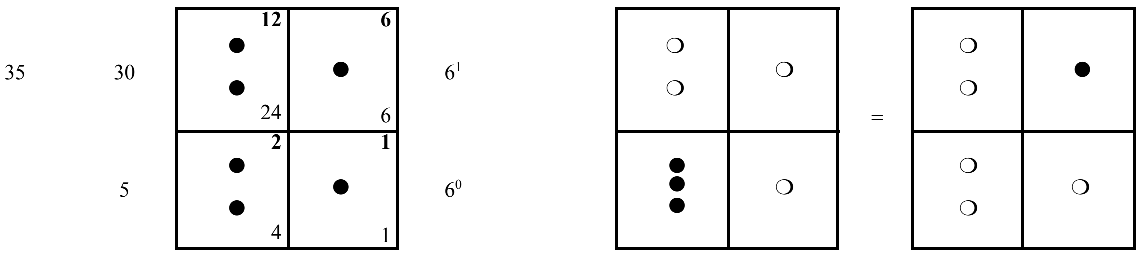

Figura 31

Tre colonne corrispondono alla base quindici (figura 32); qui cinque semi di peso 3 fanno passare al livello superiore, con una maggiore velocità di calcolo, accompagnata da una complicazione circuitale.

L'abaco completo, infine, corrisponde all'originalissimo sistema di numerazione in base quaranta, già descritto; in questo caso l'architettura dei circuiti è ancora più complessa, eppure l'incontenibile desiderio di rendere un minimo di giustizia ad una grande civiltà ci ha spinti a realizzare, con il conforto costante dell’agile lama elettronico[5], una calcolatrice con *hardware* basato sul metodo inca.

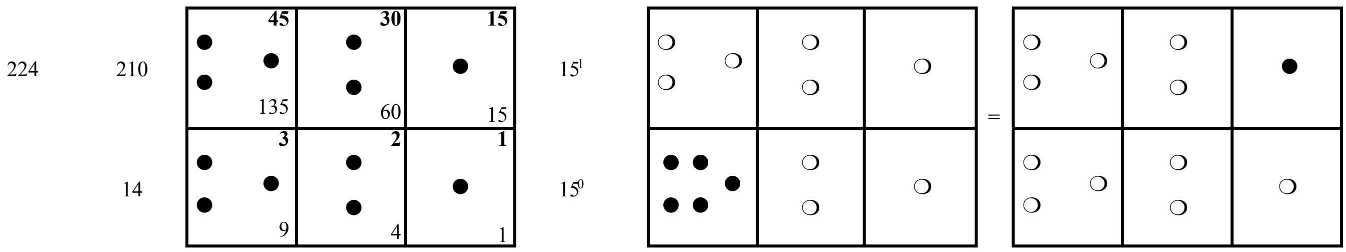

Figura 32

Ci è sembrato inevitabile dare a tale calcolatrice il nome Atahualpa, lo stesso dell’ultimo Inca eliminato non nobilmente dall’orda conquistatrice, nella speranza di far ricominciare la storia proprio là dove è stata violentemente interrotta. Sarà considerato audace, per le sole nostre forze, o semplicemente doveroso questo spontaneo tentativo?

Mappe LDI

Disponendo su due circonferenze di riferimento x e y, ortogonali e di raggio finito, i numeri positivi e negativi, viene a generarsi un sistema di rappresentazione, su superficie sferica, di straordinaria coerenza e sobrietà, lontanissimo per intelligenza di impostazione e praticità d’uso dai nostri rudimentali piani cartesiani.

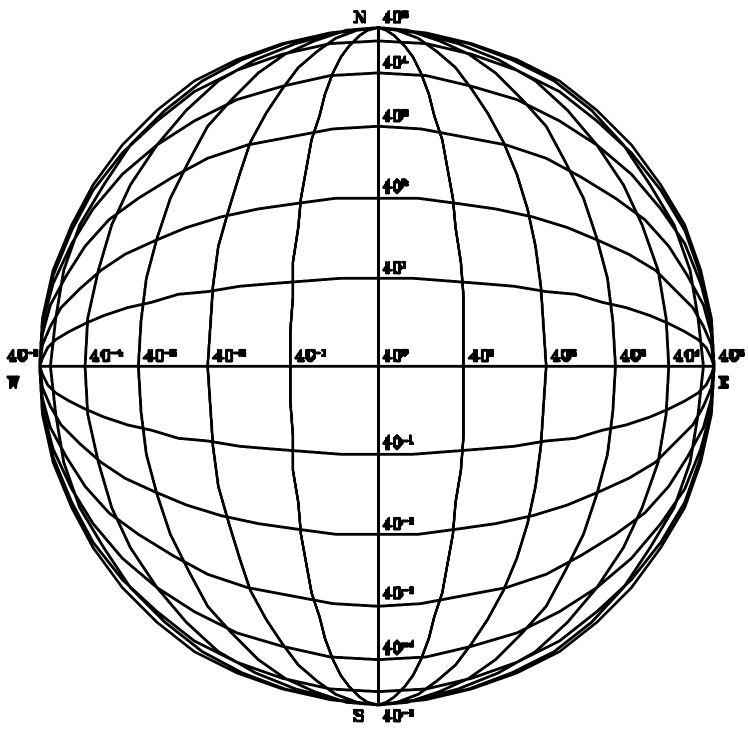

Figura 33

[5] Si tratta dell’ottimo ing. Maurizio Orlando.

Imponendo una suddivisione delle stesse circonferenze in 24 parti –ma non vi è, chiaramente, alcun vincolo nella ripartizione– si ottiene la griglia sferica di figura 33; immaginando la presenza di una sorgente solare dal lato dell'osservatore, sulle semisfere illuminata ed oscura vengono a trovare la propria rappresentazione, rispettivamente, i punti con coordinate positive e quelli con coordinate negative, circostanza non priva di una certa suggestione, che lascia intravedere una salda unità di concezione tra matematica ed astronomia. Tornando alla griglia, essa è costituita da meridiani ed equatoroidi che fanno individuare univocamente tutti i punti della superficie sferica, ad eccezione di quelli appartenenti alla "circonferenza di indeterminatezza" **ci**, che può essere considerata tanto un meridiano quanto un equatoroide, essendo perpendicolare ad entrambe le circonferenze di riferimento (fig. 34).

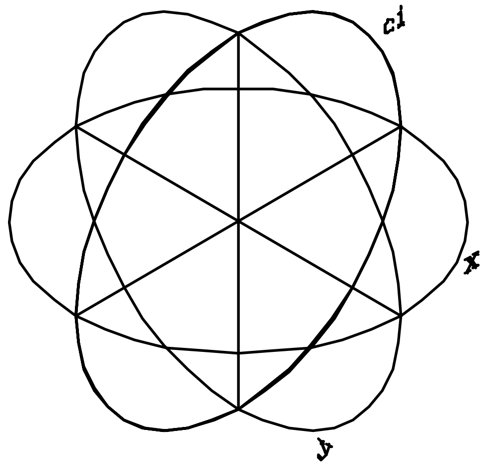

Figura 34

Praticamente, quando le coordinate x e y assumono contemporaneamente uno dei valori $\pm 40^6$ o $\pm 40^{-6}$, il punto non viene rappresentato più in modo univoco, potendo capitare ovunque in uno dei quattro archi nei quali è divisibile la circonferenza di indeterminatezza; per contro i poli **N** e **S**, individuati dalle intersezioni dei meridiani, e i poli **E** e **W**, relativi agli equatoroidi, sono rappresentativi di una infinità di punti con una coordinata pari a $\pm 40^6$ o $\pm 40^{-6}$ e l'altra variabile. Queste circostanze rendono la nostra sfera di rappresentazione, di raggio finito, del tutto simile ad una sfera di raggio infinito dove, sulla corrispondente circonferenza di indeterminatezza, trovano la propria rappresentazione ± 0 e $\pm\infty$; infatti sei poli, di coordinate $(\pm 40^{-6}, \pm y)$, $(\pm 40^6, \pm y)$, $(\pm x, \pm 40^{-6})$, $(\pm x, \pm 40^6)$, (1, 1), (-1, -1), occupano le posizioni strategiche della sfera di raggio finito ed altrettanti poli, di coordinate $(\pm 0, \pm y)$, $(\pm\infty, \pm y)$, $(\pm x, \pm 0)$, $(\pm x, \pm\infty)$, (1, 1), (-1, -1), contraddistinguono i punti chiave della sfera di raggio infinito; sicché, dopo un po' di esercizio, si è portati fatalmente a parlare di 0 e ∞ pur ragionando su una sfera di raggio finito! È facile intuire che qualsiasi funzione ha un andamento simile a se stesso, indipendente dal raggio della sfera di rappresentazione; la stessa funzione su due sfere concentriche di raggio diverso dà luogo a tracciati che sono proiezioni radiali l'uno dell'altro, con il centro della sfera che gioca il ruolo di punto focale di onnipotenza costruttiva, al pari della monade divina che simboleggia egregiamente.

Ma procediamo alla rappresentazione di alcune semplici funzioni, al fine di analizzare i principali vantaggi che caratterizzano l'insuperabile sistema inca (fig. 35).

Innanzitutto conviene, quando necessario, immaginare la sfera trasparente, al fine di esaltare il carattere di eccezionale sobrietà del sistema, al quale abbiamo già fatto cenno; ad esempio la funzione **y = x**, che impegna le due semisfere, coincide esattamente con la funzione **y = -x**, purché si legga il risultato pertinente ad una ascissa positiva sulla corrispondente ascissa negativa e viceversa; questo vale anche per la funzione **y = 1/x** e per tutte le funzioni simili con l'esponente della x dispari. Le funzioni $\mathbf{y = x^{2n}}$ possono essere definite *solari o diurne* perché, assumendo sempre risultati positivi, impegnano solo la semisfera illuminata; in questo caso il valore della funzione per una ascissa positiva coincide con quello della ascissa negativa corrispondente (analogamente le funzioni $\mathbf{y = -x^{2n}}$ possono essere classificate come *lunari o notturne*).

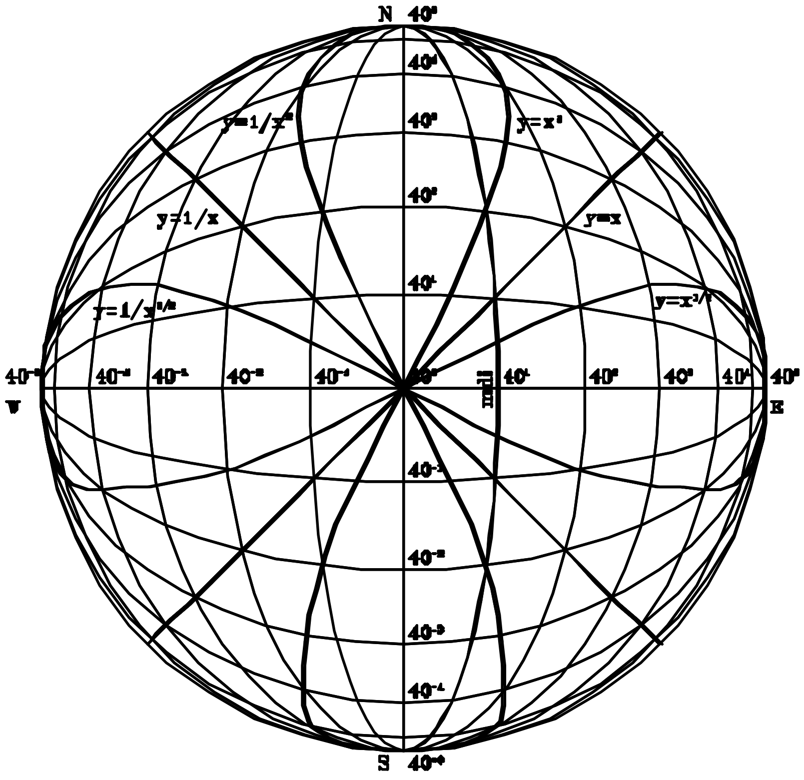

Figura 35

In secondo luogo gli ordini di zero e di infinito, tipica forzatura occidentale, diventano la percezione visiva dell'andamento più o meno verticaleggiante delle curve, senza denaturare il concetto fondamentale di questi numeri; l'andamento è da valutare rispetto alle funzioni **y = x** e **y = 1/x** che si impongono fatalmente come riferimento con il loro equilibrio diagonale; ad esempio la funzione $\mathbf{y= x^{1/2}}$ si avvicina più morbidamente a 0 e ∞ di quanto non faccia la funzione **y = x**, ed ancora più morbidamente rispetto alla funzione $\mathbf{y = x^2}$.

Una considerazione a parte merita il polo **U** di coordinate (1,1), dal quale si dipartono tutte le funzioni che globalmente impongono una quadripartizione; esso simboleggia la proiezione della divinità sulla sfera e corrisponde a Cuzco, nell'istante che vede il sole al suo zenit; dunque la suddivisione in quattro dell'impero inca, centrata sulla capitale, ha questa nobile origine matematico-filosofica. Le stesse funzioni di figura 35 ispirano le decorazioni geometriche di tanta ceramica inca e preinca, come quelle dello strano copricapo del guerriero di figura 36[6].

E veniamo al calcolo di **L**imiti, **D**erivate ed **I**ntegrali, visivo e rapido, in modo da chiarire anche il significato dell'acronimo **LDI**.

6 Alva W., Longhena M., op.cit., p. 157.

Ad esempio il $\mathbf{lim}_{x \to +0}$ **1/x** va ricercato sulla semisfera diurna, per la positività dello zero, e vale $+\infty$, dal momento che il valore della funzione ricercato giace sulla semicirconferenza di indeterminatezza superiore; mentre il $\mathbf{lim}_{x \to -0}$ **1/x** appartiene, per la negatività presente, alla semisfera notturna e vale, per motivi analoghi $-\infty$; allo stesso modo vengono calcolati il diurno $\mathbf{lim}_{x \to +\infty}$ **1/x = + 0** ed il notturno $\mathbf{lim}_{x \to -\infty}$ **1/x = - 0**. Non sembri inopportuno sottolineare ulteriormente il carattere di grande sobrietà del sistema di rappresentazione inca, proprio a proposito della funzione **y = 1/x** che viene ad essere rappresentata senza asindoti e senza discontinuità. Nelle funzioni definite *solari*, del tipo $\mathbf{y = x^2}$, emerge un carattere di coerenza disarmante in quanto $\mathbf{lim}_{x \to +\infty}$ **x2** e $\mathbf{lim}_{x \to -\infty}$ **x2** ovviamente coincidono e valgono $+\infty$, ma il ramo che "conduce" a $+\infty$ è unico e non doppio come nelle nostre ingenue parabole! Nessuna difficoltà interviene nel calcolo dei limiti delle altre funzioni riportate in figura 35, sui quali sorvoliamo.

Figura 36

Le operazioni di derivazione ed integrazione, basate fondamentalmente su variazioni di esponente, si svolgono altrettanto rapidamente, purché avvengano sul meridiano di derivazione ed integrazione, evidenziato in figura 35 con le lettere **mdi**, avente coordinata diurna $x = 40^1$.

Più precisamente, per derivare una funzione occorre ricercare sul **mdi** l'esponente dell'equatoroide che vi interseca la funzione stessa e moltiplicarlo per la funzione individuata, sullo stesso **mdi**, dall'intersezione con l'equatoroide immediatamente inferiore. Procediamo con due esempi, dal momento che è molto più semplice l'applicazione pratica rispetto alla descrizione della procedura. La funzione $\mathbf{y = x^2}$ interseca, sul **mdi**, l'equatoroide 40^2 con esponente 2, mentre l'equatoroide con esponente 40^1, immediatamente inferiore, interseca sullo stesso **mdi** la funzione **y = x**; moltiplicando 2 per x si ottiene **2x** che, come è noto, è la funzione derivata di $\mathbf{y = x^2}$. E ancora **y = 1/x** interseca sul **mdi** l'equatoroide 40^{-1} con esponente -1; scendendo un gradino troviamo l'equatoroide 40^{-2} che porta ad individuare, sullo stesso **mdi**, la funzione $\mathbf{y = 1/x^2}$; moltiplicando -1 per $1/x^2$ si ottiene $\mathbf{-1/x^2}$, funzione derivata di **y = 1/x**.

Per derivare le funzioni *lunari* è possibile procedere in varie maniere ma è da preferire, per l'estrema semplicità, la seguente: trovata la corrispondente funzione *solare*, si effettua la derivazione di quest'ultima e, ad operazione ultimata, si inverte il segno; ad esempio alla *notturna* $\mathbf{y = -x^2}$ corrisponde la *diurna* $\mathbf{y = x^2}$ con derivata $\mathbf{y' = 2x}$; cambiando il segno si ottiene $\mathbf{y' = -2x}$ che è la funzione derivata di $\mathbf{y = -x^2}$.

Non si creda che, per funzioni meno semplici, il metodo di derivazione descritto diventi complicato o, peggio ancora, non applicabile! Provi il lettore a tracciare, ad esempio, la funzione $\mathbf{y = 40x}$ e veda con quanta semplicità si giunge a definire $\mathbf{y' = 40}$, ricorrendo a un logico parallelismo con la funzione $\mathbf{y = x}$! E da quale stupore sarà pervaso nell'osservare le due civettuole cuspidi che la stessa funzione $\mathbf{y = 40x}$ forma sui poli **N** e **W** della sfera? Non si tratta, forse, di anomalie di coerenza, per distinguere $\lim_{x\to+\infty} 40x$ da $\lim_{x\to-\infty} 40x$ (che praticamente coincidono con i risultati di $+\infty$ e $-\infty$) e $\lim_{x\to+0} 40x$ da $\lim_{x\to-0} 40x$ (che si fondono in ± 0)?

Ovviamente tutte le funzioni derivate degli equatoroidi *diurni* $\mathbf{y = +cost}$ coincidono con la semicirconferenza di indeterminatezza inferiore, in quanto $\mathbf{y' = +0}$, mentre le funzioni derivate dei meridiani *diurni* $\mathbf{x = +cost}$ sono tutte rappresentate dalla semicirconferenza di indeterminatezza superiore, perché $\mathbf{y' = +\infty}$. Analogamente gli equatoroidi ed i meridiani *notturni* hanno come derivate, rispettivamente, -0 e $-\infty$. Questi richiami, anche se scontati, sono indispensabili per comprendere il criterio visivo di derivazione delle funzioni trigonometriche seno e coseno; si tratta di funzioni che interessano l'emisfero sud di rappresentazione, dal momento che i loro tracciati si sviluppano tra l'equatoroide *diurno* $\mathbf{y = 1}$ (ovvero $\mathbf{y = 40^0}$), il polo **S** e l'equatoroide *notturno* $\mathbf{y = -1}$ (o $\mathbf{y = -40^0}$). Poiché tanto la funzione seno quanto la funzione coseno hanno, nei loro massimi, come comune tangente l'equatoroide *diurno* $\mathbf{y = 1}$, per effettuare operazioni di derivazione occorre cercare al polo **S** la funzione che interseca il meridiano passante per uno qualsiasi dei massimi. Alle funzioni trigonometriche conviene dedicare uno studio a parte in quanto la loro rappresentazione, su questo sistema inca, non offre il solo vantaggio di una rapida derivazione visiva; anche ai meno esperti non possono sfuggire gli effetti della dilatazione dello zero rispetto alle nostre piatte rappresentazioni: le letture di ampiezze e fasi avvengono con chiarezza ineguagliabile; per non parlare della simmetria, rispetto al piano passante per i quattro poli **N**, **S**, **E**, **W**, delle funzioni $\mathbf{y = senx}$ e $\mathbf{y = -senx}$, che consente la risoluzione in trasparenza dei moti armonici.

Per quanto riguarda le operazioni di integrazione è facile intuire che la ricerca della primitiva di una funzione si effettua sempre sul **mdi**, salendo di un livello, rispetto alla funzione da integrare, per individuare quella funzione da dividere per l'esponente dell'equatoroide da essa intersecato; anche in questo caso un esempio è estremamente utile per chiarire il modo di procedere. Si voglia integrare la funzione $\mathbf{y = x^{1/2}}$ (fig. 35) che interseca l'equatoroide $y = 40^{1/2}$; salendo di un livello capitiamo a metà tra le funzioni $\mathbf{y = x^2}$ e $\mathbf{y = x}$; ovviamente la loro "media" $\mathbf{y = x^{3/2}}$ interseca l'equatoroide $y = 40^{3/2}$, di esponente 3/2. Dividendo $\mathbf{x^{3/2}}$ per 3/2 si ottiene $\mathbf{(2/3)x^{3/2}}$, primitiva di $\mathbf{y = x^{1/2}}$.

Non possiamo concludere questo interessante paragrafo senza far notare che siamo stati costretti, dalla natura della pubblicazione, ad illustrare il sistema di rappresentazione inca con lo studio di alcune funzioni ad una sola variabile, servendoci di una semplice superficie sferica. Ma ragionando sui volumi, interni ed esterni ad una qualsiasi sfera di riferimento, non effettuiamo lo studio di funzioni a due variabili, con i vantaggi facilmente immaginabili? E con quale coraggio tenteremo di trovare un aggettivo per commentare l'onnivalenza del centro della sfera, simbolo della divinità, che con le sue coordinate ($x = \pm 0 = \pm\infty$, $y = \pm 0 = \pm\infty$; $z = \pm 0$) è in grado di riassumere in sé tutti i numeri? Non faremmo, forse, meglio a tacere, per ascoltare nel cuore il tuono del supremo Inca :*«Io sono lo zero e l'infinito, il positivo ed il negativo, l'origine e la conclusione»*[7]?

---

[7] Liberamente tratto dal verso apocalittico *"Io sono l'alfa e l'omega, il primo e l'ultimo, il principio e la fine"*. Ap 22, 13.

Cerchiature o smussi?

In una rivista concepita esclusivamente per ingegneri, quale questa, è obbligatorio fare un cenno alla tecnica delle costruzioni messa a punto dagli Incas.

Le murature in pietra di Cuzco e Sacsahuaman, oltre a sbalordirci per la titanica mole dei blocchi e per la assenza di malta, lasciano una sensazione di curiosità insoddisfatta per la immancabile presenza di smussi su tutte le giunture dei due lati di ogni parete (figura 37). Tali smussi, spacciati sbrigativamente per elementi decorativi, si distaccano decisamente dalle nostre pronunciate bugnature, in quanto rivelano una profondissima conoscenza e della Scienza delle Costruzioni, nel delicatissimo capitolo degli effetti di intaglio, e del comportamento dei materiali sollecitati fino alla rottura, nel non semplificabile insieme delle ipotesi di rottura.

Figura 37

Volendo esaminare qualitativamente l'influenza degli smussi inca, evitando la costruzione di un modello di muratura, è scontato il ricorso alla simmetria cilindrica quale quella proposta nei provini di ghisa grigia, materiale fragile di facile reperibilità e lavorabilità (figura 38).

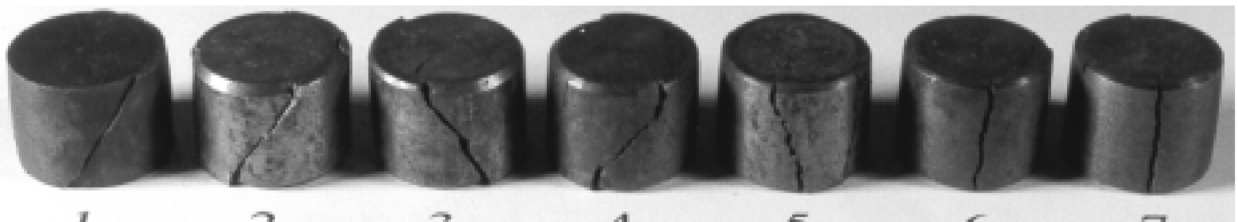

Figura 38

I risultati delle prove di compressione, incontrovertibili perché effettuati in un laboratorio legalmente autorizzato[8], sono tabulati in figura 39.

La tabella mostra che gli smussi inca equivalgono ad una cerchiatura diffusa lungo tutta l'altezza dei provini; l'aumento della sollecitazione di rottura σ_r e la diminuzione degli accorciamenti di rottura

[8] Si tratta di Labortec s.r l. che ringraziamo.

Δh sono indicativi di un considerevole aumento del modulo di elasticità, quindi di una spinta nobilitazione del materiale, nobilitazione provata anche dal tipo di rottura: a quella per scorrimento sui caratteristici piani inclinati di 45°, dovuta alla massima sollecitazione tangenziale, che devasta l'intero provino n° 1, viene gradatamente a sostituirsi la rottura per massimo allungamento trasversale dei provini n° 6 e 7 che, circoscritta alla corona cilindrica definita dallo smusso, lascia integro il cuore del materiale.

Provino	ϕ(mm)	h(mm)	Smusso	σr(N/mm^2)	Aum % σr	Δh(mm)	Rottura
1	20	20	/	737	/	3.04	max τ
2, 3	20	20	2x30°	689	–6.5	2.57	mista
4, 5	20	20	2x45°	934	26.7	2.23	mista
6, 7	20	20	2x60°	1164	57.9	1.64	max ε

ϕ diametro
h altezza
σr sollecit. rottura
Δh accorc. rottura

Figura 39

A ben riflettere si tratta di una tabella che fa rimanere con il fiato sospeso, perché mostra una superiorità della civiltà inca, non confinabile alle sole discipline matematiche; infatti nelle norme europee ed americane riguardanti le prove su materiali lapidei –è bene precisare che stiamo parlando di norme emanate recentemente!– mancano, con assoluta certezza, indicazioni del genere inca, prescrivendo le stesse norme l'uso di provini privi di smusso. E, sempre a proposito di murature, non possiamo far finta di non notare la peculiare irregolarità dei piani di posa inca (figura 37) che, lontanissima dalla casualità, consente l'inserimento di opportuni incastri orizzontali, al fine di soddisfare i più avanzati criteri di antisismicità; tant'è vero che la violenza andina dei numerosi terremoti, succedutisi nell'arco di vari secoli, nulla ha potuto contro le poderose costruzioni inca, giunte intatte fino ai nostri giorni senza alcun intervento di restauro. Nessuno, poi, ha trovato mai il coraggio di parlare della mancanza di malta nelle giunture, mancanza che ci umilia, perché possibile solo con il taglio dei blocchi con la tecnica del raggio laser.

Ma allora perché continuiamo ad ostentare una occidentale superiorità che si dimostra, al minimo confronto, alquanto vacillante?

Non sono, forse, più belle e più resistenti le bizzarre murature inca, con gli smussi, rispetto alle colonne multilitiche delle nostre cattedrali, tenute a stento in piedi da orribili cerchiature e tiranti?

Il Condor Odisseo

Nella miniatura riprodotta in copertina compare un "contabile maggiore e tesoriere" che regge un quipus, strumento andino di registrazione alfanumerica su corde[9], desolatamente privo di nodi, cioè di qualsiasi informazione utile; l'abaco, oggetto della presente trattazione, compare, al contrario, in una posizione marginale della composizione, con i semi che indicano nelle sue cinque righe, a partire dal basso, i numeri 20, 10, 27, 9 e 17, apparentemente del tutto sconnessi tra loro, estratti con la più pura casualità; in una sorta di sottotitolo, infine, troviamo una firma "curaca Condor Chava".

Ci sono, insomma, tutte le premesse per ritenere che le informazioni precise sulla civiltà inca fossero rigorosamente proibite e che una indicazione, sia pur minima, sull'uso dell'abaco fosse una operazione tanto rischiosa da esigere, almeno, un riconoscimento di merito al coraggio dell'autore, rivelato dalla firma.

9 *"Io vidi un manipolo di quei fili, nel quale una vecchia india recava scritta tutta la propria vita…".* De Acosta J., op. cit., Libro VI, cap. VIII.

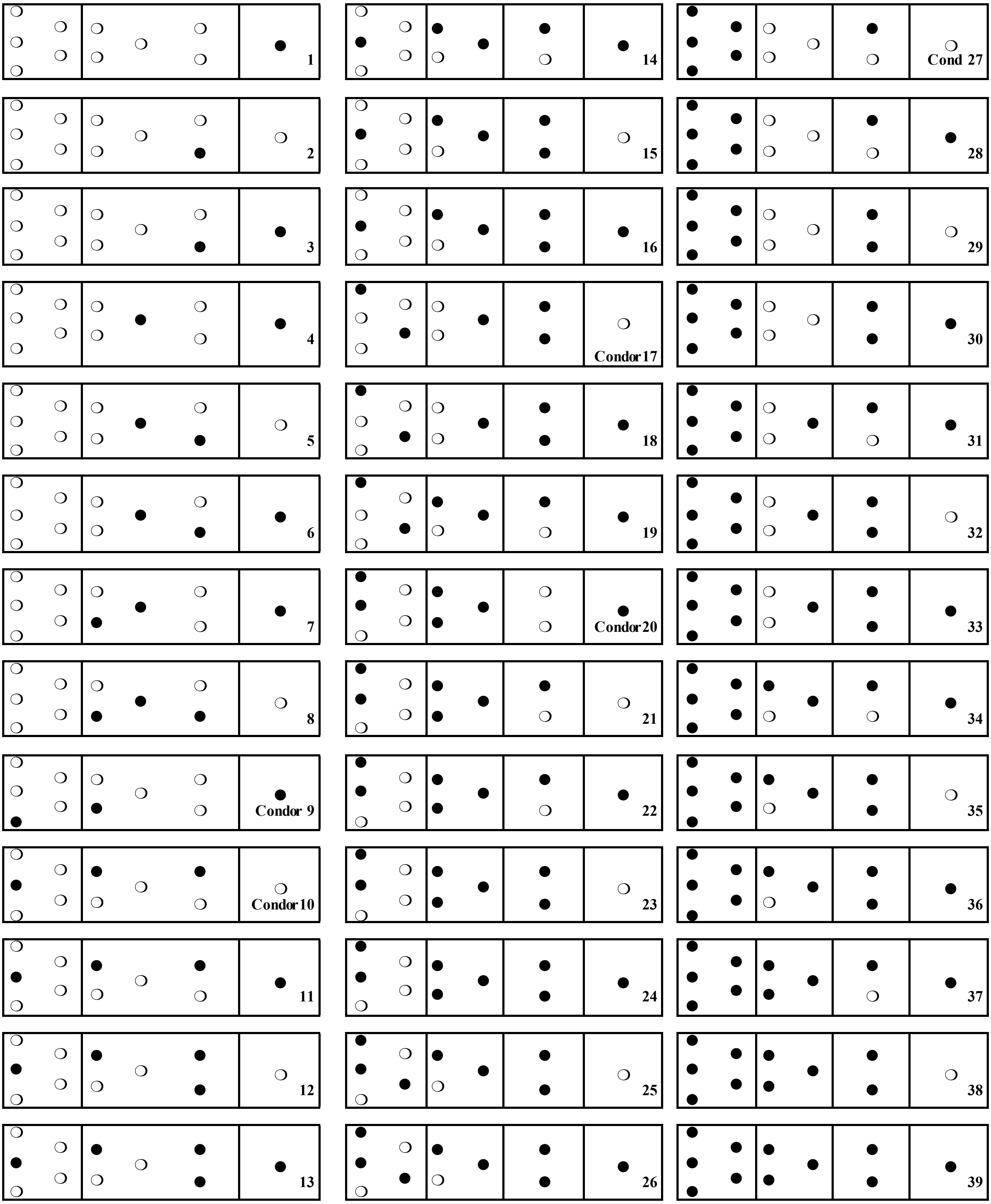
1
2
3
4
5
6
7
8
Condor 9
Condor10
11
12
13
14
15
16
Condor17
18
19
Condor20
21
22
23
24
25
26
Cond 27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39

Figura 40

E torniamo al disordinatissimo insieme numerico condoregno. Abbiamo già fatto notare che molti numeri possono essere scritti in diverse maniere, circostanza molto opportuna in fase di calcolo ma da evitare in fase di rappresentazione; ebbene i numeri indicati nell'abaco ci consentono di eliminare tutte le ridondanze, attribuendo ad ogni cifra del sistema di numerazione in base quaranta una sola rappresentazione. La regola, semplice, da rispettare è quella di procedere saturando prima le posizioni più basse (figura 40); le uniche eccezioni sono costituite proprio dai magici numeri 20, 10, 27, 9 e 17[10], sicché il geniale curaca ha dettato le regole di rappresentazione facendo ricorso alle sole eccezioni. Va da sé che in un regime di piena libertà –per riallacciarci a quanto detto in precedenza– si sarebbe potuta fare una esposizione tranquilla delle quaranta cifre, senza stendere quell'impenetrabile velo di mistero sull'abaco.

Ma chi erano i curacas?

Gli Incas, costituendo un popolo molto fiero, non avrebbero eseguito, a nessun costo, gli ordini degli invasori, costretti per questo a ricorrere a delle figure indigene di mediazione, chiamate curacas. Gli storici descrivono chiaramente l'odioso ruolo dei curacas che, molto spesso finivano con l'annegare negli squallidi abissi della corruzione[11].

Evidentemente non è una carica, sia pure scottante, a bruciare la dignità di un uomo.

Il nostro curaca si distingueva nettamente dagli altri, perché amava la sua gente in modo sì appassionato ma anche intelligente; l'ardente desiderio di lanciare, alle successive generazioni, un chiaro messaggio sulla grandezza della sua civiltà era magistralmente temperato dalla consapevolezza, piena, che un tale messaggio non avrebbe mai oltrepassato le affilatissime lame della censura.

Bisognava almeno raggiungere l'astuzia greca, frutto egemone del mediterraneo!

L'abaco sistemato in un discreto angolino, per giunta in secondo piano, con i semi gettati senza alcun criterio e, soprattutto, l'innocente firma, scagionatrice perfino da idee di violazione degli ordini, costituiscono l'impercettibile cavallo di Troia che nessuna Cassandra avrebbe potuto temere. Magari, dopo una lunghissima notte, qualche poeta dal cuore bambino avrebbe messo uno zio stravagante in condizione di aprire il cavallo, per restituire al popolo inca la Elena del suo orgoglio e far espugnare la città della cultura occidentale, altrimenti inviolabile per le sue superbe mura di protezione; magari l'occasione avrebbe preso le vesti di un regalo per la festa della pace tra i popoli, un libro con la riproduzione del misterioso abaco; al resto avrebbe provveduto lo Spirito di verità, squarciando con un lampo le tenebre dell'ignoranza, infittite da secoli di ingiustizie.

Che dire allora a te, leggiadro Condor in volo, elargitore –a sorpresa– dei sacri tesori del profanato Perù?

Tu ci guidi, dalle celesti altezze del passato, a scalare le candide vette andine della matematica, a scoprire le cristalline trasparenze dell'oceano Pacifico del sapere.

Intitoleremo molte scuole a te, monarca di astuzia altruistica, affinché i nostri teneri pulcini imparino ad elaborare messaggi tanto intelligenti da attraversare indenni le notti più lunghe, preservando le nostre preziose varietà culturali.

Qualcuno avrà il volo maestoso, ascensionale del condor.

Uno, il prediletto, avrà il volo odisseo, perpetuo del **Condor Chava**.

Nicolino De Pasquale

[10] Il 25 non può essere considerato tale, poiché si ricava per analogia con il 17. Non è il caso di dilungarci ora sulle funzioni dell'accettore di terna e dei datori di coppia e di unità, né su quelle dei due accettori di cinquina e dei datori di terna e di coppia, peraltro facilmente intuibili dal lettore accorto con un attento esame della stessa figura 19.

[11] De Acosta J., *De procuranda indorum salute*, Libro III, cap. XVI, vv. 4.1–4.24.