The 16 Faces of a Dutch Math Journal

Hans Hagen

Abstract

Much of what ConTEXt originally provided originated from our daily needs, at that time dictated by educational consultancy and course development. However, the last couple of years most features find their origin in the demands of publishers, users as well as an occasional "Let's see (prove) if TEX can do it (better)". One of those users is the Dutch Math Society (NAW).

Quite a while ago the Dutch Math Society decided to restyle their journal and the decision was made to use ConTEXt as typesetting engine, one reason being its ability to typeset on a grid and place graphic in columns. Since it happened in the early days of ConTEXt, some of the demands resulted in rather complex and often weird macros.[1]

Advanced mixed font support, magazine-like column features, tight integration with MetaPost, flexible placement of elements etc. are nowadays supported in the kernel in a more natural way, if only because the core of ConTEXt has become more flexible and mature. And so the moment has come to let the editors switch to the reimplemented journal style.

In this talk I will illustrate how needs by demanding users like the Dutch Math Society's Journal have brought ConTEXt to where it stands today and is heading tomorrow.

[1]These were written by Taco Hoekwater, who did a pretty good job, as proven by the fact that up to date these macros are still in use.

Chris Heunen
Faculteit NWI
Radboud Universiteit Nijmegen
Postbus 9010
6500 GL Nijmegen
heunen@math.ru.nl

Dick van Leijenhorst
Faculteit NWI
Radboud Universiteit Nijmegen
Postbus 9010
6500 GL Nijmegen
bolke@cs.ru.nl

Tensegrities

Wie wel eens het Kröller-Müller museum heeft bezocht, zal in de beeldentuin zeker de hoge toren, opgetrokken uit louter stalen balken en kabels, hebben gezien. Deze 'Needle Tower' is een werk van Kenneth Snelson en dit beeld is niet de enige vorm die op deze manier is te construeren. In dit artikel wordt ingegaan op enkele wiskundige aspecten van deze constructies: hoe kunnen we deze zogenaamde tensegrities, of houtje-touwtje-figuren, klassificeren op structuur? Chris Heunen studeert momenteel af op het gebied van complexiteitstheorie bij onder andere Dick van Leijenhorst, universitair hoofddocent aan de Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica van de Radboud Universiteit Nijmegen. Zij stellen een nieuwe aanpak ter classificatie voor, waarbij ze echter snel tegen complexiteitstheoretische harde problemen aanlopen.

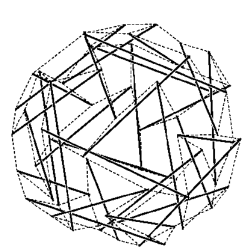
Een *tensegrity* is een structuur die zijn integriteit behoudt onder spanning. Het concept is van Kenneth Snelson ([10]), een Amerikaanse beeldhouwer, en is populair geworden door de befaamde architect Buckminster Fuller. De voornaamste toepassingen liggen dan ook in de bouwkunde: vanwege hun geringe gewicht, opvouwbaarheid, en de geringe invloed van uitwendige krachten, zijn tensegrities ideaal voor bijvoorbeeld daken van voetbalstadia. Maar ook in de ruimtevaart liggen toepassingen, en in de celbiologie.

Tensegrities bestaan slechts uit twee elementen: balken en kabels. Tenminste, zo worden ze in de bouwkunde genoemd. Maar je kunt ook zelf speelgoedvarianten construeren uit houtjes en touwtjes, en ze hebben dan ook wat weg van *Hoberman spheres* en *Bucky balls*. Als je het goed doet, kun je de touwtjes zelfs vervangen door elastiekjes, zonder dat dat invloed heeft op het uiterlijk: in plaats van een rigide bouwwerk krijg je er dan een die vanzelf zijn vorm weer aanneemt na een val of een mep. (Maar daarover later meer.) De touwtjes houden dus tegelijkertijd het hele bouwsel bijeen maar de houtjes uit elkaar.

De figuren zijn niet alleen fascinerend om te zien (Snelson maakt er kunstwerken van) en om mee te spelen, maar ook wiskundig interessant: wat is een tensegrity eigenlijk, wiskundig gezien? Hoe kan het zijn vorm behouden? Kunnen we ze klassificeren? Velen is groepentheorie aangeleerd aan de hand van de 17 behangpatronen. Zo lijken ook de wat onbekendere tensegrities geschikt om mooie wiskunde met een fraai voorbeeld te ondersteunen.

Wat is een tensegrity?
Laten we maar meteen beginnen met de definities en eisen. Een tensegrity is een verzameling punten $v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^3$. Tussen twee van zulke punten loopt ofwel een houtje, ofwel een touwtje, ofwel niks. Dit stellen we voor met de 'typefunctie' $t : \{1, \ldots, n\}^2 \to \{\text{houtje}, \text{touwtje}, \text{niks}\}$.

Elke verbinding heeft een bepaalde 'stijfheid'; dit modelleren we met een functie $c : \{1, \ldots, n\}^2 \to \mathbf{R}^+$. Voor elastiek zal c kleiner zijn dan voor staalkabel, want de eerste 'trekt minder hard' dan de laatste bij gelijke uitrekking. Uiteraard is $c(i, j) = 0$ als v_i



Een tensegrity met 30 houtjes (doorgetrokken) en 70 touwtjes (gestippeld)

en v_j niet verbonden zijn. (Natuurkundigen zullen c als de veerconstante herkennen.)

Tenslotte veronderstellen we een functie $r : \{1, \ldots, n\}^2 \to \mathbf{R}$, die de rustlengte van elke verbinding representeert. Te allen tijde hebben we dus voor elke $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$t(i, j) = \text{houtje} \Rightarrow \|v_i - v_j\| \leq r(i, j)$$

$$t(i, j) = \text{touwtje} \Rightarrow \|v_i - v_j\| \geq r(i, j)$$

Een houtje 'duwt een punt weg', terwijl een touwtje 'aan een punt trekt'; het lijkt misschien verrassend dat houtjes uit kunnen rekken, maar in de bouwkunde worden vaak telescopische staven gebruikt. Daarom is het ook nutteloos zowel een houtje als een touwtje tussen twee punten te hebben, en zijn onze t, c en r dus welgedefinieerd.

Een fatsoenlijke tensegrity is stabiel, wat wil zeggen dat bij elk punt de trekkende kracht de duwende opheft. Een stabiele tensegrity voldoet dus volgens Hooke aan

$$\forall_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} c(i, j) \cdot \left(v_i - v_j - r(i, j) \frac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|} \right) = 0 \qquad (1)$$

We eisen ook dat een tensegrity samenhangend is. Bovendien mogen de houtjes elkaar niet aanraken, in het bijzonder niet in hun eindpunten. Dit weer om bouwkundige redenen: kogelgewrichten zijn moeilijk. Zo'n gewricht kunnen we echter gemakkelijk simuleren, in figuur 1 zijn bijvoorbeeld 3-gewrichten gesimuleerd door touwtjes:

De hoofdvraag waarin we nu geïnteresseerd zijn, is '*welke tensegrity-structuren* $(v_1, \ldots, v_n, t, c, r)$ *voldoen aan (1) voor vaste* $n \in \mathbf{N}$?'. En 'structuur' bedoelen we hierbij in de groepentheoretische zin: als je een tensegrity $v_1, \ldots, v_n$ hebt, dan voldoet een willekeurige permutatie die t, c en r respecteert natuurlijk ook, maar dat vinden we flauw.

Eerder werk
Als je echter op zoek gaat in de literatuur, zul je hier weinig over vinden. Het meeste is gericht op ingenieurs [2–3]. Maar zoals gezegd zijn er ook toepassingen in de celbiologie [4–5]. En in de ruimtevaart; er zijn zelfs theorieën dat het universum zelf de structuur van een tensegrity heeft — zwarte gaten leveren compressie (houtjes), terwijl gelinkte melkwegstelsels spanningen daartussen vormen (touwtjes). Af en toe kom je exotischere toepassingen zoals [6] tegen, waarmee ingenieurs met op tensegrities gebaseerde filmbeelden kunnen inschatten hoe stevig een constructie is. Ook kun je op een cultus stuiten die gebaseerd is op het idee dat tussen mensen ook aantrek- en afstoot-krachten werken.

Wiskundig is er echter weinig verricht. Het enige noemenswaardige werk is dat van Connelly en Back [1]: zij maakten een catalogus van tensegrities. Het idee hierachter is in zekere zin 'top-down'. Ze schrijven een symmetriegroep voor, en gaan vervolgens na welke tensegrity-structuren hieraan voldoen. Dit levert een alleraardigste lijst op, met plaatjes en al, zie [11].

Naast voldoende voorwaarden stellen wij ons echter ook noodzakelijke ten doel. Dat noodzaakt ons tot grovere methoden, meer in een 'bottom-up' stijl.

Nieuwe aanpak
We gebruiken dan ook een andere aanpak dan Connelly en Back in [1]. Ten eerste scheiden we de structuur van een tensegrity van zijn realisatie. Mits juist uitgevoerd, heeft dat als voordeel dat de klassificatie gemakkelijk verloopt, en daarna enkel nog een filtering op daadwerkelijk realiseerbare klassen gedaan hoeft te worden.

De structuur leggen we vast in een graaf. Om precies te zijn, een ongerichte, complete, rib-gekleurde graaf. Als punten van de graaf nemen we simpelweg $1, \ldots, n$. De ribbe $\{i, j\}$ geven we 'kleur' $t(i, j)$. We spreken vervolgens af welke symmetrieën we toelaatbaar achten, en laten zien dat deze symmetriegroep werkt op onze grafen. Vervolgens kunnen we de symmetrieklassen bepalen als de banen van de collectie grafen onder de groep.

Maar dan hebben we teveel klassen: het vastleggen van de tensegrity-structuur in een graaf lijkt weliswaar heel natuurlijk, het is ook enkel dat. De graaf zegt alleen iets over verbondenheid, maar niets over fysische realiseerbaarheid. We moeten dus nog een eliminatieproces toepassen op de klassen. Dit komt erop neer dat we voor elke klasse moeten nagaan of er $v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^3$ zijn die voldoen aan (1), c en r.

Grafen en groepen
Ten eerste zullen we n maar eens vastleggen. Uit de stabiliteitseis (1) volgt direct dat er geen punten zijn die enkel door touwtjes bereikt worden. En omdat verder houtjes disjunct zijn, weten we dus dat elk houtje precies twee punten met zich meebrengt, en dat dat dus ook alle punten zijn. Noodzakelijkerwijs moet n dus even zijn, laten we zeggen $n = 2N$, waarbij dus N het aantal houtjes is.

Vervolgens kunnen we de $2N$ punten in de graaf een standaard-oriëntatie toebedelen, omdat we weten dat er N houtjes zijn. Deze normaalvorm neemt alvast iets van de keuzevrijheid

in t weg. We kiezen de punten zó, dat precies tussen $2i - 1$ en $2i$ een houtje loopt: $t(2i - 1, 2i) = \text{houtje}$ (zie figuur 2).

Merk trouwens even op dat het niets uitmaakt of we nu met de complete graaf werken, of dat we de niks-verbindingen gewoon uit de graaf weglaten.

Zij nu Γ de verzameling van al deze complete, rib-gekleurde grafen met $2N$ punten. Een element γ van Γ is dus een functie, die aan een ribbe $\{i, j\}$ zijn 'kleur' $t(i, j)$ toekent. Zij verder $\widetilde{\Gamma}$ de deelverzameling van Γ van alle grafen op normaalvorm: $\widetilde{\Gamma} = \{\gamma \in \Gamma : \forall_{1 \leq i \leq N} [\gamma(\{2i - 1, 2i\}) = \text{houtje}]\}$.

Met S_X noteren we de symmetrische groep op de eindige verzameling X, dus de verzameling permutaties van X met als operator functiecompositie. Hierbij zullen we $S_{\{1,2,\ldots,k\}}$ afkorten tot S_k. Herinner dat een groepswerking van een groep G op de verzameling Γ een homomorfisme $G \to S_\Gamma$ is, dus een afbeelding die de groepsstructuur bewaart. Men gaat eenvoudig na dat permuteren van de punten een groepswerking is op Γ. Met andere woorden: S_{2N} werkt op Γ.

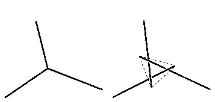
We zouden nu direct kunnen proberen de banen van Γ onder S_{2N} te bepalen. Het blijkt echter dat dit erg inefficiënt is qua rekenwerk. Maar nadat we de klassen bepaald hebben, gaan we toch de realiseerbare daaruit filteren. Als we dus de niet-realiseerbare tensegrity-structuren eerder in het proces kunnen elimineren, scheelt dit alleen maar rekenwerk.

En we kunnen net zo goed wat heuristiek eerder toepassen. Een goed idee is om houtjes te permuteren in plaats van punten (S_N in plaats van S_{2N}). Maar omdat een permutatie van punten ook de eindpunten van een houtje kan verwisselen, moeten we naast alle houtjes permuteren ook elk houtje apart omkeren (met S_2). Deze combinatie heet het kransproduct [7].

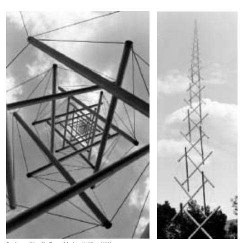
Definitie. Zij G en H groepen, waarvan H op een verzameling X werkt. Schrijf G^X voor de verzameling functies $X \to G$. We maken nu van G^X een groep door de operatie van G puntsgewijs door te voeren: voor $f, g \in G^X$ definieren we $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, waarbij de $\cdot$ in de rechterzijde de operatie van G is. Nu werkt H op G^X door de operatie $hf(x) = f(hx)$ voor $f : X \to G, h \in H$ en $x \in X$. Het *kransproduct* van G en H, notatie $G \wr H$, is het direct product $G^X \times H$.

Het is de grootste ondergroep van S_X die de partities van X, geïnduceerd door de actie van H op X, invariant laat. Net als S_{2N} op Γ werkt, werkt ook $S_2 \wr S_N$ op $\widetilde{\Gamma}$. We bewijzen nu dat we door houtjes in plaats van punten te permuteren geen essentiële mogelijkheden verliezen.

Stelling. Door $S_2 \wr S_N$ te gebruiken in plaats van S_{2N} verliezen we geen banen. Preciezer: representanten van banen van $\widetilde{\Gamma}$ onder $S_2 \wr S_N$ vormen tevens een compleet stel baanrepresentanten voor Γ onder S_{2N}.



Figuur 1 Simulatie van 3-gewrichten door touwjes



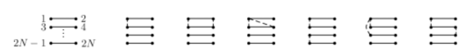
Snelsons 'Needle Tower' in het Kröller-Müller museum

Bewijs. $S_2 \wr S_N$ werkt op $\widetilde{\Gamma}$, en dus zijn er onder deze groep een aantal banen $\widetilde{O}_1, \widetilde{O}_2, \ldots, \widetilde{O}_k$ voor zekere $k \in \mathbf{N}$. Elke baan bevat nu een representant (op normaalvorm!): er zijn $\widetilde{\gamma}_1 \in \widetilde{O}_1, \widetilde{\gamma}_2 \in \widetilde{O}_2, \ldots, \widetilde{\gamma}_k \in \widetilde{O}_k$ zodat $\widetilde{\gamma}_i(\{2j - 1, 2j\}) = \text{houtje}$ voor $1 \leq i \leq k$ en $1 \leq j \leq N$.
We zagen al dat ook S_{2N} op Γ werkt, en dat er onder S_{2N} dus ook banen $O_1, O_2, \ldots, O_l$ zijn voor zekere $l \in \mathbf{N}$.
Het is triviaal dat iedere S_{2N}-baan O een γ op normaalvorm bevat. Maar dan bevat O ook de baan $\widetilde{O}_i$ van γ onder de werking van $S_2 \wr S_N$ op $\widetilde{\Gamma}$, en daarmee ook diens representant $\widetilde{\gamma}_i$.
Stel nu dat O ook nog een $\widetilde{\gamma}_j$ bevat. In dat geval geldt voor $\pi \in S_{2N}$ dat $\pi(\widetilde{\gamma}_i) = \widetilde{\gamma}_j$. Maar dan laat π de partitie $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2N - 1, 2N\}$ invariant, en is π dus een element van $S_2 \wr S_N$. Dus moet wel $i = j$ gelden!
De $\widetilde{\gamma}_i$ vormen dus inderdaad een compleet stel baanrepresentanten voor S_{2N}, en we mogen ons inderdaad beperken tot het berekenen van de $\widetilde{\gamma}_i$. □

Merk op dat de groep G die we zo krijgen en willen laten werken op $\widetilde{\Gamma}$ voortgebracht wordt door de permutaties $(1\ 2)$, $(1\ 3)(2\ 4)$ en $(1\ 3\ \ldots\ 2N - 1)(2\ 4\ \ldots\ 2N)$.

We hebben nu dus een kanonieke groep G, die op een natuurlijke manier alle symmetrieën van onze grafen bevat. Bekijk nu de collectie $\widetilde{\Gamma}$ van alle grafen op normaalvorm, en laat G hierop werken. Wat we nu zoeken zijn de banen van $\widetilde{\Gamma}$ onder G. Eén representant van elke baan is zelfs voldoende.

Om dit exponentiele probleem aan te pakken gebruiken we de methode van 'tabular programming': we beginnen bij de 'blaadjes van de recursie' en combineren die opwaarts, terwijl we onderweg alles weggooien wat we niet meer nodig hebben. In dit geval verdelen we de gezochte klassen onder in aantal touwtjes K, en



Figuur 2 Standaard-oriëntatie van punten, en de zes gevonden structuren voor 4 houtjes en hoogstens 2 touwtjes ($N = 4, K \leq 2$)

bepalen de verzameling representanten van banen incrementeel. De structuur waarvan we gebruikmaken is die van de normaalvorm.

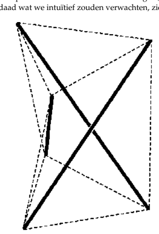
Voor de beginwaarde $K = 1$ is het duidelijk dat er maar één tensegrity-structuur is met N houtjes en 1 touwtje: het maakt niet uit tussen welke twee houtjes het touwtje is gespannen (herinner dat een touwtje niet tussen dezelfde twee punten als een houtje kan lopen).

Dan gaan we alle klassen met K touwtjes uitbreiden tot $K + 1$ touwtjes. Neem een klasse met K touwtjes. We fixeren deze eerste K touwtjes, en bekijken waar het volgende touwtje gespannen kan worden. Dus voor elke klasse met K touwtjes krijgen we nul of meer klassen met $K + 1$ touwtjes.

Hoewel er bij N houtjes maar $2N(N - 1)$ touwtjes mogelijk zijn, hoeven we niet verder te gaan dan halverwege, $K = N(N - 1)$. Dit omdat een tensegrity met $K > N(N - 1)$ een gelijke structuur heeft als een tensegrity met $N(N - 1) - K$ touwtjes. We hoeven alleen maar de touwtjes te 'inverteren', dat wil zeggen touwtjes verwijderen waar die waren, en invoegen waar ze niet waren. En dat is veel gemakkelijker dan de tweede helft net zo berekenen als de eerste.

We hebben dus het volgende algoritme: zij N gegeven, en G onze symmetriegroep. Begin met $K = 1$ en neem als eerste touwtje $t_1 = \{1, 3\}$. Zet $R = \{G\}$. Fixeer nu het eerste touwtje, dat wil zeggen, beschouw als nieuwe groep $G := \bigcap_{g \in G} \mathrm{Stab}_{\{t_1\}}(g)$, en neem $R := R \cup G$, $K := K + 1$. Herhaal dit proces totdat $K = N(N - 1)$, en bepaal de tweede helft door 'touwtjes-inversie'.

Als we dit procédéuitvoeren voor $N = 4$ zolang $K \leq 2$, krijgen we inderdaad wat we intuïtief zouden verwachten, zie figuur 2.



Figuur 3 De enige tensegrity met 3 houtjes

Met het lemma van Burnside en de daarop voortbouwende stelling van Polýa kunnen we nu het aantal banen (en daarmee het aantal gevonden representanten) verifiëren [9].

Lemma. (Burnside) Stel dat een eindige groep G op een verzameling X werkt. Dan is het aantal banen van X onder G gelijk aan $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Stab}_X(g)|$.

Stelling. (Polýa) Stel dat een eindige groep G op een verzameling X werkt. Dan is het aantal banen van X onder G met k kleuren gelijk aan $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k^{\#^c(g)}$. Hierbij stelt $\#^c(\pi)$ het minimum aantal cykels van de permutatie π voor.

Helaas is het bewijs van het lemma van Burnside een kwestie van tellen en sommige objecten daarbij weg te laten, en is niet constructief. Maar we kunnen het nog steeds gebruiken ter verificatie.

Realisatie
Goed, we hebben dus nu alle theoretisch mogelijke klassen van tensegrity-structuren met N houtjes. Maar we hebben ook alleen pas die structuur. In termen van onze definities: we hebben alleen pas rekening gehouden met de typefunctie t, en nog niet met de fysische beperkingen c, r en (1). Uit al deze klassen moeten we nog degenen pikken die echt mogelijk zijn, dus degenen waarvoor c en r bestaan die aan (1) voldoen.

Laten we eerst maar eens aannemen dat c constant is (behalve natuurlijk de verplichte $c(i, j) = 0$ zodra $t(i, j) = \text{niks}$). Dat is niet zo onredelijk, want als je een tensegrity bouwt heb je toch niet de neiging om hier weer eens elastiek, daar weer eens staalkabel te gebruiken.

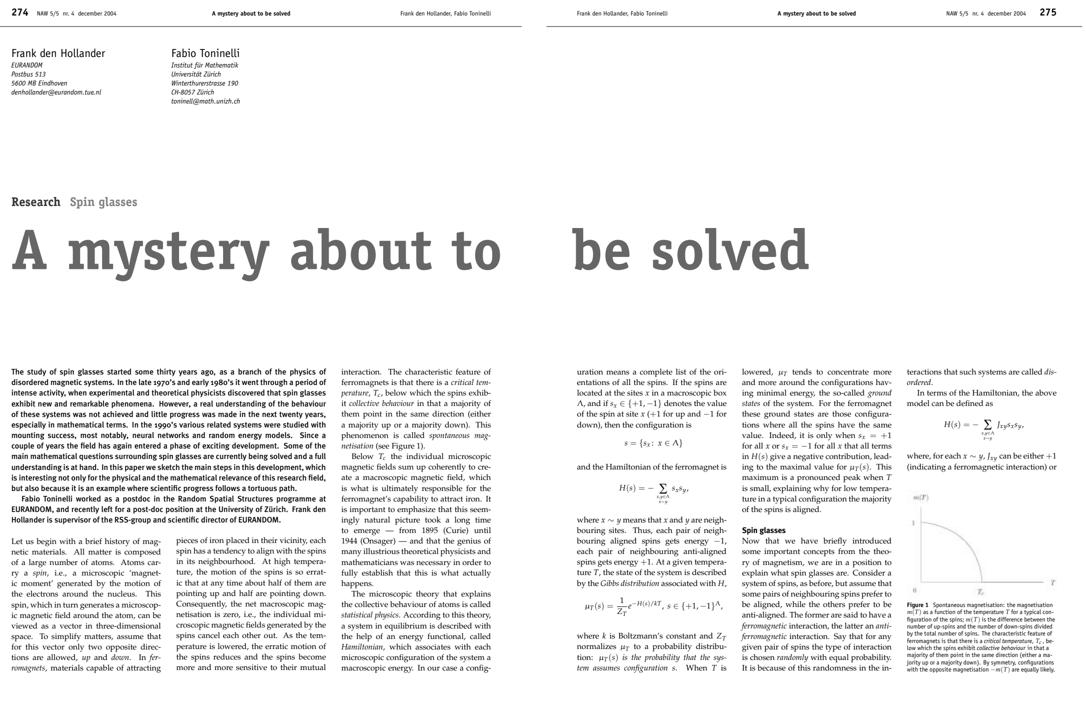
We doen dus even net of $v_1, \ldots, v_n$ en r variabel zijn, en proberen hiervoor de stabiliteitsvergelijkingen (1) op te lossen.

Het slechte nieuws is nu dat dit nog niet meevalt. Het gaat hier om een vectoriëel stelsel non-lineaire vergelijkingen. Daar kennen wij helaas geen specifieke oplossingsmethode voor. Dus grepen we maar naar een generieke methode, die van Gröbner-bases. Helaas is deze methode dubbel-exponentieel: als er n onbekenden zijn, kost het $O(2^{2^n})$ elementaire rekenstappen om een oplossing te vinden.

Resultaten
Dit alles is uitgeprogrammeerd in *Magma*, een computer-algebrasysteem, dat weet heeft van zowel groepen als Gröbner-bases. *Magma*'s algoritmen staan bekend als zeer snel, en het is uitermate moeilijk om zelf met snellere op de proppen te komen.

En omdat Gröbner-bases inherent 'moeilijk' zijn, heeft ook *Magma* hier helaas last van: met een weekend rekentijd kwamen we niet verder dan $N = 4$, dus tensegrities met 4 houtjes.

Zo bleek dat er maar één essentiële tensegrity-structuur is met



Frank den Hollander
EURANDOM
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
denhollander@eurandom.tue.nl

Fabio Toninelli
Institut für Mathematik
Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190
CH-8057 Zürich
toninell@math.unizh.ch

Research Spin glasses

A mystery about to be solved

The study of spin glasses started some thirty years ago, as a branch of the physics of disordered magnetic systems. In the late 1970's and early 1980's it went through a period of intense activity, when experimental and theoretical physicists discovered that spin glasses exhibit new and remarkable phenomena. However, a real understanding of the behaviour of these systems was not achieved and little progress was made in the next twenty years, especially in mathematical terms. In the 1990's various related systems were studied with mounting success, most notably, neural networks and random energy models. Since a couple of years the field has again entered a phase of exciting development. Some of the main mathematical questions surrounding spin glasses are currently being solved and a full understanding is at hand. In this paper we sketch the main steps in this development, which is interesting not only for the physical and the mathematical relevance of this research field, but also because it is an example where scientific progress follows a tortuous path.

Fabio Toninelli worked as a postdoc in the Random Spatial Structures programme at EURANDOM, and recently left for a post-doc position at the University of Zürich. Frank den Hollander is supervisor of the RSS-group and scientific director of EURANDOM.

Let us begin with a brief history of magnetic materials. All matter is composed of a large number of atoms. Atoms carry a *spin*, i.e., a microscopic 'magnetic moment' generated by the motion of the electrons around the nucleus. This spin, which in turn generates a microscopic magnetic field around the atom, can be viewed as a vector in three-dimensional space. To simplify matters, assume that for this vector only two opposite directions are allowed, *up* and *down*. In *ferromagnets*, materials capable of attracting pieces of iron placed in their vicinity, each spin has a tendency to align with the spins in its neighbourhood. At high temperature, the motion of the spins is so erratic that at any time about half of them are pointing up and half are pointing down. Consequently, the net macroscopic magnetisation is zero, i.e., the individual microscopic magnetic fields generated by the spins cancel each other out. As the temperature is lowered, the erratic motion of the spins reduces and the spins become more and more sensitive to their mutual interaction. The characteristic feature of ferromagnets is that there is a *critical temperature*, T_c, below which the spins exhibit *collective behaviour* in that a majority of them point in the same direction (either a majority up or a majority down). This phenomenon is called *spontaneous magnetisation* (see Figure 1).

Below T_c the individual microscopic magnetic fields sum up coherently to create a macroscopic magnetic field, which is what is ultimately responsible for the ferromagnet's capability to attract iron. It is important to emphasize that this seemingly natural picture took a long time to emerge — from 1895 (Curie) until 1944 (Onsager) — and that the genius of many illustrious theoretical physicists and mathematicians was necessary in order to fully establish that this is what actually happens.

The microscopic theory that explains the collective behaviour of atoms is called *statistical physics*. According to this theory, a system in equilibrium is described with the help of an energy functional, called *Hamiltonian*, which associates with each microscopic configuration of the system a macroscopic energy. In our case a configuration means a complete list of the orientations of all the spins. If the spins are located at the sites x in a macroscopic box Λ, and if $s_x \in \{+1, -1\}$ denotes the value of the spin at site x ($+1$ for up and -1 for down), then the configuration is

$$s = \{s_x \colon x \in \Lambda\}$$

and the Hamiltonian of the ferromagnet is

$$H(s) = -\sum_{\substack{x,y\in\Lambda \\ x\sim y}} s_x s_y,$$

where $x \sim y$ means that x and y are neighbouring sites. Thus, each pair of neighbouring aligned spins gets energy -1, each pair of neighbouring anti-aligned spins gets energy $+1$. At a given temperature T, the state of the system is described by the *Gibbs distribution* associated with H,

$$\mu_T(s) = \frac{1}{Z_T} e^{-H(s)/kT}, \ s \in \{+1, -1\}^\Lambda,$$

where k is Boltzmann's constant and Z_T normalizes μ_T to a probability distribution: $\mu_T(s)$ *is the probability that the system assumes configuration* s. When T is lowered, μ_T tends to concentrate more and more around the configurations having minimal energy, the so-called *ground states* of the system. For the ferromagnet these ground states are those configurations where all the spins have the same value. Indeed, it is only when $s_x = +1$ for all x or $s_x = -1$ for all x that all terms in $H(s)$ give a negative contribution, leading to the maximal value for $\mu_T(s)$. This maximum is a pronounced peak when T is small, explaining why for low temperature in a typical configuration the majority of the spins is aligned.

Spin glasses

Now that we have briefly introduced some important concepts from the theory of magnetism, we are in a position to explain what spin glasses are. Consider a system of spins, as before, but assume that some pairs of neighbouring spins prefer to be aligned, while the others prefer to be anti-aligned. The former are said to have a *ferromagnetic* interaction, the latter an *anti-ferromagnetic* interaction. Say that for any given pair of spins the type of interaction is chosen *randomly* with equal probability. It is because of this randomness in the interactions that such systems are called *disordered*.

In terms of the Hamiltonian, the above model can be defined as

$$H(s) = -\sum_{\substack{x,y\in\Lambda \\ x\sim y}} J_{xy} s_x s_y,$$

where, for each $x \sim y$, J_{xy} can be either $+1$ (indicating a ferromagnetic interaction) or

Figure 1 Spontaneous magnetisation: the magnetisation $m(T)$ as a function of the temperature T for a typical configuration of the spins; $m(T)$ is the difference between the number of up-spins and the number of down-spins divided by the total number of spins. The characteristic feature of ferromagnets is that there is a *critical temperature*, T_c, below which the spins exhibit *collective behaviour* in that a majority of them point in the same direction (either a majority up or a majority down). By symmetry, configurations with the opposite magnetisation $-m(T)$ are equally likely.

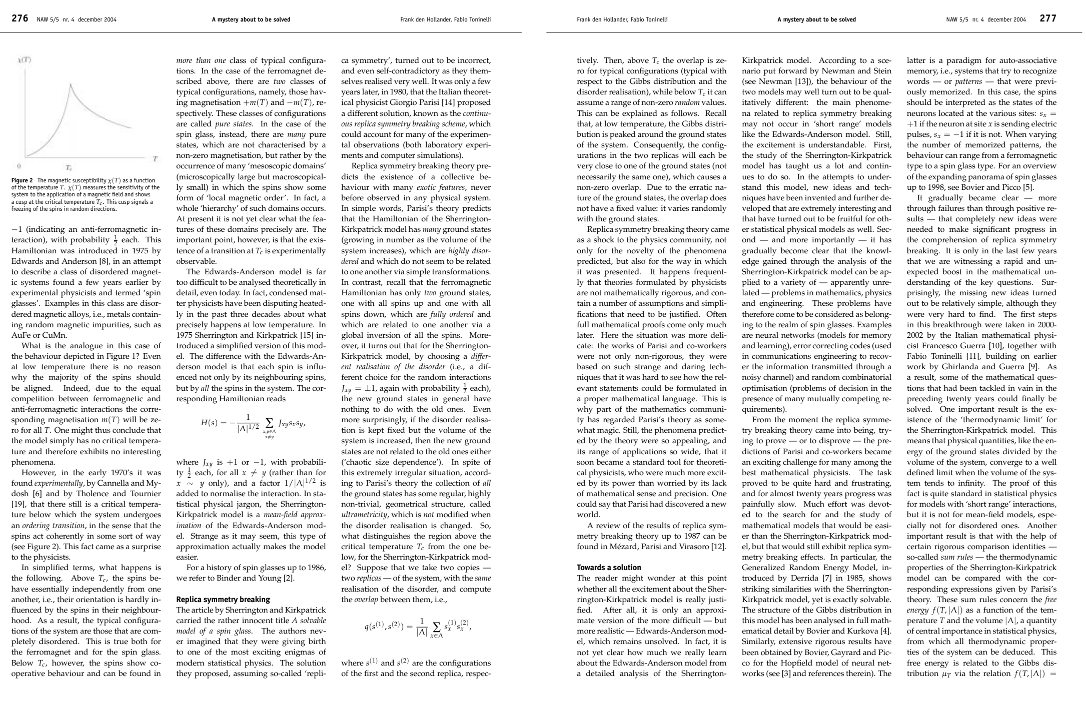


Figure 2 The magnetic susceptibility $\chi(T)$ as a function of the temperature T. $\chi(T)$ measures the sensitivity of the system to the application of a magnetic field and shows a cusp at the critical temperature T_c. This cusp signals a freezing of the spins in random directions.

-1 (indicating an anti-ferromagnetic interaction), with probability $\frac{1}{2}$ each. This Hamiltonian was introduced in 1975 by Edwards and Anderson [8], in an attempt to describe a class of disordered magnetic systems found a few years earlier by experimental physicists and termed 'spin glasses'. Examples in this class are disordered magnetic alloys, i.e., metals containing random magnetic impurities, such as AuFe or CuMn.

What is the analogue in this case of the behaviour depicted in Figure 1? Even at low temperature there is no reason why the majority of the spins should be aligned. Indeed, due to the equal competition between ferromagnetic and anti-ferromagnetic interactions the corresponding magnetisation $m(T)$ will be zero for all T. One might thus conclude that the model simply has no critical temperature and therefore exhibits no interesting phenomena.

However, in the early 1970's it was found *experimentally*, by Cannella and Mydosh [6] and by Tholence and Tournier [19], that there still is a critical temperature below which the system undergoes an *ordering transition*, in the sense that the spins act coherently in some sort of way (see Figure 2). This fact came as a surprise to the physicists.

In simplified terms, what happens is the following. Above T_c, the spins behave essentially independently from one another, i.e., their orientation is hardly influenced by the spins in their neighbourhood. As a result, the typical configurations of the system are those that are completely disordered. This is true both for the ferromagnet and for the spin glass. Below T_c, however, the spins show cooperative behaviour and can be found in *more than one* class of typical configurations. In the case of the ferromagnet described above, there are *two* classes of typical configurations, namely, those having magnetisation $+m(T)$ and $-m(T)$, respectively. These classes of configurations are called *pure states*. In the case of the spin glass, instead, there are *many* pure states, which are not characterised by a non-zero magnetisation, but rather by the occurrence of many 'mesoscopic domains' (microscopically large but macroscopically small) in which the spins show some form of 'local magnetic order'. In fact, a whole 'hierarchy' of such domains occurs. At present it is not yet clear what the features of these domains precisely are. The important point, however, is that the existence of a transition at T_c is experimentally observable.

The Edwards-Anderson model is far too difficult to be analysed theoretically in detail, even today. In fact, condensed matter physicists have been disputing heatedly in the past three decades about what precisely happens at low temperature. In 1975 Sherrington and Kirkpatrick [15] introduced a simplified version of this model. The difference with the Edwards-Anderson model is that each spin is influenced not only by its neighbouring spins, but by *all* the spins in the system. The corresponding Hamiltonian reads

$$H(s) = -\frac{1}{|\Lambda|^{1/2}} \sum_{\substack{x,y\in\Lambda \\ x\neq y}} J_{xy} s_x s_y,$$

where J_{xy} is $+1$ or -1, with probability $\frac{1}{2}$ each, for all $x \neq y$ (rather than for $x \sim y$ only), and a factor $1/|\Lambda|^{1/2}$ is added to normalise the interaction. In statistical physical jargon, the Sherrington-Kirkpatrick model is a *mean-field approximation* of the Edwards-Anderson model. Strange as it may seem, this type of approximation actually makes the model easier.

For a history of spin glasses up to 1986, we refer to Binder and Young [2].

Replica symmetry breaking

The article by Sherrington and Kirkpatrick carried the rather innocent title *A solvable model of a spin glass*. The authors never imagined that they were giving birth to one of the most exciting enigmas of modern statistical physics. The solution they proposed, assuming so-called 'replica symmetry', turned out to be incorrect, and even self-contradictory as they themselves realised very well. It was only a few years later, in 1980, that the Italian theoretical physicist Giorgio Parisi [14] proposed a different solution, known as the *continuous replica symmetry breaking scheme*, which could account for many of the experimental observations (both laboratory experiments and computer simulations).

Replica symmetry breaking theory predicts the existence of a collective behaviour with many *exotic features*, never before observed in any physical system. In simple words, Parisi's theory predicts that the Hamiltonian of the Sherrington-Kirkpatrick model has *many* ground states (growing in number as the volume of the system increases), which are *highly disordered* and which do not seem to be related to one another via simple transformations. In contrast, recall that the ferromagnetic Hamiltonian has only *two* ground states, one with all spins up and one with all spins down, which are *fully ordered* and which are related to one another via a global inversion of all the spins. Moreover, it turns out that for the Sherrington-Kirkpatrick model, by choosing a *different realisation of the disorder* (i.e., a different choice for the random interactions $J_{xy} = \pm 1$, again with probability $\frac{1}{2}$ each), the new ground states in general have nothing to do with the old ones. Even more surprisingly, if the disorder realisation is kept fixed but the volume of the system is increased, then the new ground states are not related to the old ones either ('chaotic size dependence'). In spite of this extremely irregular situation, according to Parisi's theory the collection of *all* the ground states has some regular, highly non-trivial, geometrical structure, called *ultrametricity*, which is *not* modified when the disorder realisation is changed. So, what distinguishes the region above the critical temperature T_c from the one below, for the Sherrington-Kirkpatrick model? Suppose that we take two copies — two *replicas* — of the system, with the *same* realisation of the disorder, and compute the *overlap* between them, i.e.,

$$q(s^{(1)}, s^{(2)}) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x\in\Lambda} s_x^{(1)} s_x^{(2)},$$

where $s^{(1)}$ and $s^{(2)}$ are the configurations of the first and the second replica, respectively. Then, above T_c the overlap is zero for typical configurations (typical with respect to the Gibbs distribution and the disorder realisation), while below T_c it can assume a range of non-zero *random* values. This can be explained as follows. Recall that, at low temperature, the Gibbs distribution is peaked around the ground states of the system. Consequently, the configurations in the two replicas will each be very close to one of the ground states (not necessarily the same one), which causes a non-zero overlap. Due to the erratic nature of the ground states, the overlap does not have a fixed value: it varies randomly with the ground states.

Replica symmetry breaking theory came as a shock to the physics community, not only for the novelty of the phenomena predicted, but also for the way in which it was presented. It happens frequently that theories formulated by physicists are not mathematically rigorous, and contain a number of assumptions and simplifications that need to be justified. Often full mathematical proofs come only much later. Here the situation was more delicate: the works of Parisi and co-workers were not only non-rigorous, they were based on such strange and daring techniques that it was hard to see how the relevant statements could be formulated in a proper mathematical language. This is why part of the mathematics community has regarded Parisi's theory as somewhat magic. Still, the phenomena predicted by the theory were so appealing, and its range of applications so wide, that it soon became a standard tool for theoretical physicists, who were much more excited by its power than worried by its lack of mathematical sense and precision. One could say that Parisi had discovered a new world.

A review of the results of replica symmetry breaking theory up to 1987 can be found in Mézard, Parisi and Virasoro [12].

Towards a solution

The reader might wonder at this point whether all the excitement about the Sherrington-Kirkpatrick model is really justified. After all, it is only an approximate version of the more difficult — but more realistic — Edwards-Anderson model, which remains unsolved. In fact, it is not yet clear how much we really learn about the Edwards-Anderson model from a detailed analysis of the Sherrington-Kirkpatrick model. According to a scenario put forward by Newman and Stein (see Newman [13]), the behaviour of the two models may well turn out to be qualitatively different: the main phenomena related to replica symmetry breaking may not occur in 'short range' models like the Edwards-Anderson model. Still, the excitement is understandable. First, the study of the Sherrington-Kirkpatrick model has taught us a lot and continues to do so. In the attempts to understand this model, new ideas and techniques have been invented and further developed that are extremely interesting and that have turned out to be fruitful for other statistical physical models as well. Second — and more importantly — it has gradually become clear that the knowledge gained through the analysis of the Sherrington-Kirkpatrick model can be applied to a variety of — apparently unrelated — problems in mathematics, physics and engineering. These problems have therefore come to be considered as belonging to the realm of spin glasses. Examples are neural networks (models for memory and learning), error correcting codes (used in communications engineering to recover the information transmitted through a noisy channel) and random combinatorial optimisation (problems of decision in the presence of many mutually competing requirements).

From the moment the replica symmetry breaking theory came into being, trying to prove — or to disprove — the predictions of Parisi and co-workers became an exciting challenge for many among the best mathematical physicists. The task proved to be quite hard and frustrating, and for almost twenty years progress was painfully slow. Much effort was devoted to the search for and the study of mathematical models that would be easier than the Sherrington-Kirkpatrick model, but that would still exhibit replica symmetry breaking effects. In particular, the Generalized Random Energy Model, introduced by Derrida [7] in 1985, shows striking similarities with the Sherrington-Kirkpatrick model, yet is exactly solvable. The structure of the Gibbs distribution in this model has been analysed in full mathematical detail by Bovier and Kurkova [4]. Similarly, extensive rigorous results have been obtained by Bovier, Gayrard and Picco for the Hopfield model of neural networks (see [3] and references therein). The latter is a paradigm for auto-associative memory, i.e., systems that try to recognize words — or *patterns* — that were previously memorized. In this case, the spins should be interpreted as the states of the neurons located at the various sites: $s_x = +1$ if the neuron at site x is sending electric pulses, $s_x = -1$ if it is not. When varying the number of memorized patterns, the behaviour can range from a ferromagnetic type to a spin glass type. For an overview of the expanding panorama of spin glasses up to 1998, see Bovier and Picco [5].

It gradually became clear — more through failures than through positive results — that completely new ideas were needed to make significant progress in the comprehension of replica symmetry breaking. It is only in the last few years that we are witnessing a rapid and unexpected boost in the mathematical understanding of the key questions. Surprisingly, the missing new ideas turned out to be relatively simple, although they were very hard to find. The first steps in this breakthrough were taken in 2000-2002 by the Italian mathematical physicist Francesco Guerra [10], together with Fabio Toninelli [11], building on earlier work by Ghirlanda and Guerra [9]. As a result, some of the mathematical questions that had been tackled in vain in the preceding twenty years could finally be solved. One important result is the existence of the 'thermodynamic limit' for the Sherrington-Kirkpatrick model. This means that physical quantities, like the energy of the ground states divided by the volume of the system, converge to a well defined limit when the volume of the system tends to infinity. The proof of this fact is quite standard in statistical physics for models with 'short range' interactions, but it is not for mean-field models, especially not for disordered ones. Another important result is that with the help of certain rigorous comparison identities — so-called *sum rules* — the thermodynamic properties of the Sherrington-Kirkpatrick model can be compared with the corresponding expressions given by Parisi's theory. These sum rules concern the *free energy* $f(T, |\Lambda|)$ as a function of the temperature T and the volume $|\Lambda|$, a quantity of central importance in statistical physics, from which all thermodynamic properties of the system can be deduced. This free energy is related to the Gibbs distribution μ_T via the relation $f(T, |\Lambda|) =$

18 NAW 5/5 nr. 1 maart 2004 **Een meetkundekunstenaar** T.A. Springer

T.A. Springer
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
springer@math.uu.nl

In memoriam Harold Scott Macdonald Coxeter (1907–2003)

Een meetkundekunstenaar

Op 30 maart 2003 overleed op 96-jarige leeftijd de meetkundige Harold Scott Macdonald Coxeter, sinds 1936 verbonden aan de Universiteit van Toronto (Canada). In Nederland had hij vele vrienden, waarvan de graficus M.C. Escher wel de bekendste is. Hij ontving diverse onderscheidingen en acht eredoctoraten. In 1948 werd hij fellow van de Royal Society van Canada en in 1950 van de Britse Royal Society. Sinds 1978 was hij erelid van het Wiskundig Genootschap en in 1974 werd hij benoemd tot buitenlands lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Dit In Memoriam is geschreven door T.A. Springer voor de Levensberichten (2003) van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. De auteur is emeritus hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit Utrecht.

Donald Coxeter werd geboren in Kensington (Londen) in een familie van Quakers. Zijn vader had een familiebedrijf waar chirurgische apparatuur vervaardigd werd, maar in zijn hart was hij kunstenaar. In het gezin was dan ook veel artistieke activiteit: Coxeters vader musiceerde en zijn moeder schilderde.

Al heel vroeg bleek dat Donald wiskundig en muzikaal begaafd was. Als kleuter keek hij graag in de financiële pagina's van de krant, omdat daar zoveel getallen te vinden zijn. Hij wilde eerst componist worden; omstreeks zijn twaalfde had hij al een strijkkwartet en een opera gecomponeerd.

Maar wiskunde ging de boventoon voeren. In 1919 ging hij naar een 'boarding school' (*St. George's School* te Harpenden ten Noorden van Londen). Hij vertelt dat hij daar, toen hij met een kleine aandoening op de ziekenafdeling lag, met zijn buurman John Petrie (zoon van de egyptoloog Sir Matthew Flinders Petrie) aan de praat kwam over regelmatige lichamen (de vijf platonische lichamen), die ze in hun meetkundeboek ontdekt hadden. Donald kreeg de ingeving dat zulke lichamen ook in vier dimensies zouden moeten bestaan en John kon een paar dagen later een realistisch model van zoiets tekenen, waardoor zij de extra dimensie konden zien. Toen wist Donald dat wiskunde, en meetkunde in het bijzonder, zijn toekomst moest zijn. Hij was toen veertien jaar.

Coxeter senior vond dat de school zijn zoon niet voldoende uitdaging bood en bracht Donald in contact met wiskundigen. Hij kreeg het advies zich via privé-onderwijs voor te bereiden op een studie in Cambridge, en dat gebeurde. In 1926 won hij een studiebeurs van *Trinity College*. Hij kwam er in contact met coryfeeën als G.H. Hardy, J.E. Littlewood (zijn 'director of studies'), L. Wittgenstein. De Ph.D.-graad behaalde hij in 1931, zijn supervisor was de meetkundige H.F. Baker. Het proefschrift gaat — uiteraard — over meerdimensionale regelmatige lichamen.

In de entourage van Baker leerde de jonge Coxeter de groepentheorie kennen, die de wiskundige aanpak belichaamt van meetkundige symmetrieën. De negentiende-eeuwse wiskundigen hadden ingezien dat de symmetrieën van de platonische lichamen in interessante twee- en driedimensionale groepen van lineaire transformaties georganiseerd zijn. Coxeter begreep dat zijn meerdimensionale regelmatige lichamen samenhangen met interessante meerdimensionale lineaire groepen en hij begon omstreeks 1930 over die groepen na te denken.

Tot 1936 was hij 'research fellow' van Trinity College. Hij bracht ook twee academische jaren (1932–1933 en 1934–1935) door in Princeton in de Verenigde Staten. Daar leerde hij veel van O. Veblen en hij maakte kennis met latere prominenten van zijn generatie als R. Brauer en N. Jacobson. In 1934 publiceerde hij de resultaten van zijn groepentheoretisch werk: de classificatie van 'kaleidoscopen' of spiegelingsgroepen, dat wil zeggen groepen van reële lineaire transformaties voortgebracht door spiegelingen. In dat fundamentele artikel vindt men ook de diagrammen die deze groepen beschrijven (thans Coxeterdiagrammen of Coxeter-Dynkindiagrammen genoemd). Hij gaf een exposé van zijn resultaten in de vermaarde 'notes' van een college van H. Weyl over Liegroepen aan het Institute for Advanced Study in Princeton.

Tegenwoordig komt ieder die in wiskunde of natuurkunde van doen heeft met continue symmetrieën (belichaamd in de Liegroepen) de Coxeterdiagrammen tegen. In genoemd artikel vindt men ook wat nu het Coxeterelement wordt genoemd: het product van de voortbrengers van een spiegelingsgroep.

Een ander artikel uit 1934, dat gaat over groepen met een presentatie ($R_i^2 = (R_iR_j)^{k_{ij}} = 1$) als die van de spiegelingsgroepen, is het begin van de theorie van de Coxetergroepen.

In 1936 werd Coxeter een assistant professorship aangeboden in Canada, aan de Universiteit van Toronto. Op advies van zijn vader, die de oorlogswolken al zag hangen, en van G.H. Hardy besloot hij het aanbod aan te nemen. Hij is tot zijn dood in Toronto gebleven.

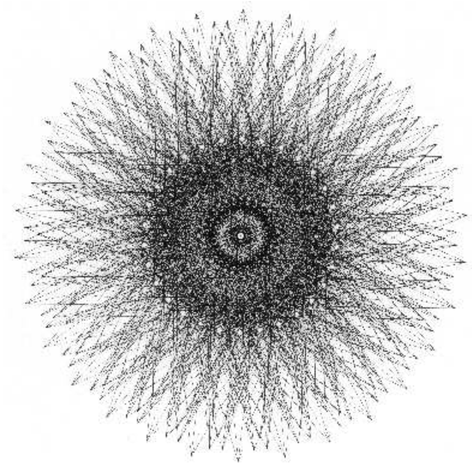
T.A. Springer **Een meetkundekunstenaar** NAW 5/5 nr. 1 maart 2004 19

Ook in 1936 trouwde hij met de Nederlandse Rien (Hendrina) Brouwer, die hij in 1935 in Engeland ontmoet had bij gemeenschappelijke kennissen. Zij was hem vele jaren een trouwe steun; zij overleed in 1999. Het echtpaar had twee kinderen, een zoon en een dochter.

Coxeters academische carrière verliep langzaam, na zeven jaar werd hij associate professor en pas na twaalf jaar full professor (Coxeter zei dat hij zich voelde als de aartsvader Jacob, die zeven jaren moest werken voor Lea en zeven jaren voor Rachel).

Coxeter was een productieve wiskundige; hij publiceerde ongeveer 200 artikelen. Daarnaast schreef hij verschillende boeken. Een standaardwerk is *Regular Polytopes* (1948, nieuwe uitgave 1973), waar zijn encyclopedische kennis blijkt van de literatuur over regelmatige lichamen. In dat boek komt men ook Coxeter's vriend John Petrie tegen als ontdekker van de Petrie-veelhoeken van een regelmatig lichaam.

In vele talen vertaald is *Introduction to Geometry* (1961/1981). De titel van de Duitse vertaling *Unvergängliche Geometrie* geeft weer wat Coxeter in dat boek voor ogen stond. Naast boeken over meetkundige onderwerpen is er het algebraïsch georiënteerde boek met W.O.J. Moser , *Generators and Relations for Discrete Groups* (1957/1980). Coxeter zelf was het meest gesteld op zijn boek *Regular Complex Polytopes* (1974/1991) over re-



De *Great grand stellated 120-cell*, een van de vele figuren uit het boek *Regular Complex Polytopes* van Coxeter. Coxeter liet zich graag inspireren door muziek; uit het voorwoord: "This book has occupied much of my time and attention for nearly twenty years. [...] I have made an attempt to construct it like a Bruckner symphony, with crescendos and climaxes, little foretastes of pleasure to come, and abundant cross-references. The geometric, algebraic and group-theoretic aspects of the subject are interwoven like different sections of the orchestra."

20 NAW 5/5 nr. 1 maart 2004 **Een meetkundekunstenaar** T.A. Springer

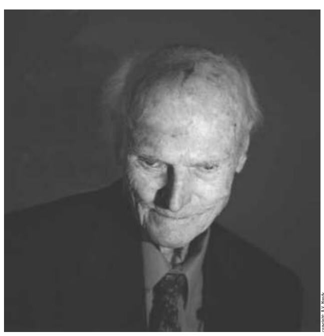
gelmatige lichamen in een complexe ruimte, een boek met spectaculaire illustraties. De bijbehorende symmetriegroepen zijn eindige groepen van complexe lineaire transformaties, voortgebracht door complexe spiegelingen, een soort gegeneraliseerde Coxetergroepen. De belangstelling ervoor is in de loop van de jaren steeds meer toegenomen.

Coxeters publicaties zijn zorgvuldig geredigeerd en helder geschreven; esthetische aspecten waren voor hem belangrijk. Hij was een inspirerend spreker die altijd iets verrassends bracht. Zijn grote meetkundige intuïtie blijkt overal; hij kon meerdimensionale objecten 'zien'. De thema's van Coxeters publicaties zijn al genoemd: regelmatige lichamen, meetkundige symmetrieën en de bijbehorende groepentheorie, thema's waarop vele variaties kunnen worden gemaakt, waaraan hij zelf ook gewerkt heeft. Hier volgen enkele voorbeelden.

In een artikel uit 1951 worden de (reeds genoemde) Coxeterelementen nader bekeken. Coxeter vertelt dat de aanleiding was een voordracht van C. Chevalley over de Bettigetallen van compacte Liegroepen. Coxeter herkende getallen die hij in zijn *Regular Polytopes* was tegengekomen. Dit bracht hem ertoe de eigenwaarden van Coxeter elementen te bepalen. Die bleken een fraaie wetmatigheid te vertonen, later door anderen uitvoerig geanalyseerd (een voorbeeld van wisselwerking tussen Coxeters concrete meetkunde en meer esoterische delen van de wiskunde.)

De icosaëder (het regelmatig twintigvlak) treft men aan als ruimtelijke configuratie in sommige virussen. Het optreden van regelmatige of halfregelmatige lichamen buiten de wiskunde interesseerde Coxeter zeer. Vice versa was er bij niet-wiskundigen belangstelling voor zijn werk. De Amerikaanse ontwerper en architect Buckminster Fuller droeg één van zijn boeken op aan Coxeter. Fuller maakte in de jaren '40 van de vorige eeuw furore met zijn 'geodesic dome's'. Daarvan is een belangrijk constructie-element de 'buckyball', een afgeknotte icosaëder met 60 hoekpunten, 12 regelmatige vijfhoeken en 20 regelmatige zeshoeken als zijvlakken, natuurlijk goed bekend aan Coxeter (Leonardo da Vinci had er overigens al een tekening van gemaakt).

In de jaren '80 bleken buckyballs op te treden als bouwstenen van moleculen genaamd fullerenes. Eén ervan is C_{60}, waarvan de moleculen buckyballs zijn met in ieder hoekpunt een koolstofatoom. C_{60} heeft zeer bijzondere chemische eigenschappen. De ontdekkers ervan ontvingen in 1996 de Nobelprijs voor chemie.



copyright: R.V. Moody

Coxeter in Banff, augustus 2001, gedurende een lezing over meetkunde bij Escher.

Coxeter had een speciale relatie met Nederland. Hij kwam regelmatig met zijn vrouw op familiebezoek in Nederland en kreeg contacten met Nederlandse wiskundigen. Er waren ook andere wiskundige connecties. Coxeter was vertrouwd met het werk over meerdimensionale regelmatige lichamen van Nederlandse wiskundigen uit het begin van de twintigste eeuw (onder anderen E.L. Elte, S.L. van Oss, P.H. Schoute, W.A. Wythoff). In Nederland zijn zij wat in het vergeetboek geraakt. Maar hun werk komt uitvoerig aan de orde in *Regular Polytopes*.

Tijdens een bezoek aan Nederland in 1954 nam Coxeter deel aan het vierjaarlijkse Internationale Wiskundecongres dat toen in Amsterdam plaats vond. In het kader van het congres was er een expositie van het grafische werk van M.C. Escher, toen buiten Nederland nauwelijks bekend. Coxeter werd er zeer door geboeid en bezocht Escher in Baarn. Zij raakten bevriend en Coxeter bracht Escher in contact met de symmetrieën van het niet-Euclidische vlak (gevisualiseerd als het inwendige van een cirkel). Deze symmetrieën heeft Escher in zijn latere werk geëxploreerd. Bijvoorbeeld in zijn houtsnede *Cirkellimiet III* uit 1959 (met vissen die naar de rand toe steeds kleiner worden). Coxeter heeft de trigonometrie die er achter zit geanalyseerd. Hij was geïmponeerd door Eschers intuïtieve gevoel voor de wiskundige details die Coxeter alleen met ingewikkelde trigonometrie kon aanpakken. (Coxeter vertelt dat na afloop van een lezing waarbij Escher ook aanwezig was, deze hem vertelde dat hij er geen woord van begrepen had. . .) Coxeter heeft veel gedaan voor het bekend maken van Eschers werk buiten Nederland.

Coxeter overleed plotseling op 96-jarige leeftijd, op 30 maart 2003. Hoewel zijn mobiliteit achteruit gegaan was, was zijn geest nog fris. De meetkunde heeft hem tot het laatst beziggehouden.

Peter Teunissen
Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen
Technische Universiteit Delft
Postbus 5048
2600 GA Delft
p.j.g.teunissen@citg.tudelft.nl

Vakantiecursus 2003

GPS and integer estimation

Het Global Positioning System (GPS) is een wereldwijd plaatsbepalingssysteem op basis van satellieten. De eerste plannen en ontwerpen voor het systeem dateren uit de vroege jaren zeventig in de vorige eeuw; reeds in februari van 1978 werd de eerste GPS-satelliet gelanceerd. De nominale constellatie omvat 24 satellieten, die elk in ongeveer 12 uur om de aarde cirkelen. Daardoor kunnen overal ter wereld, doorgaans minstens vier satellieten tegelijkertijd waargenomen worden. Peter Teunissen, hoogleraar mathematische geodesie en positiebepaling aan de Technische Universiteit Delft verzorgde in de zomer van 2003 colleges over Global Positioning Systems in het kader van de, door het CWI georganiseerde, vakantiecursus voor wiskundeleraren.

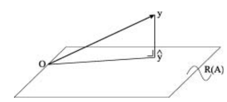
The Global Positioning System (GPS) nowadays is used for a whole variety of positioning and navigation applications. These applications range from navigating your private sailboat to determining the millimeter movements of the earth's tectonic plates. For the very high-accuracy applications of GPS one needs very precise range information. These precise ranges for positioning with GPS are obtained from carrier phase measurements. These measurements of range inherently contain unknown integer ambiguities to account for the mismatch of a whole number of wavelengths or cycles. This contribution describes the problem of GPS carrier phase ambiguity resolution, discusses some relevant elements of integer estimation theory and reviews some of the high precision positioning applications that come into reach when the integer carrier phase ambiguities can be resolved quickly and correctly.

Redundant measurements
As in other physical sciences, empirical data are used in geodesy to make inferences so as to describe the physical reality. Many such problems involve the determination of a number of unknown parameters which bear a linear or linearized relationship to the set of data. In order to be able to check for errors or to reduce for the effect these errors have on the final result, the collected data often exceed the minimum necessary for a unique solution (redundant data). As a consequence of measurement uncertainty, redundant data are usually inconsistent in the sense that each sufficient subset yields different results from another subset. Hence, redundancy generally leads to an inconsistent system of linear(ized) equations, say

$$y \cong Ax \tag{1}$$

where vector y contains the m observations, vector x the n unknown parameters. The $m \times n$ matrix A relates the observations to the parameters. Redundancy of the above system is defined as $m - \text{rank}A$, which in case of a full rank matrix simplifies to $m - n$, the difference between the number of observations and the number of unknown parameters.

The above inconsistent system is without additional criteria not uniquely solvable. The problem of solving an inconsistent system of equations has attracted the attention of leading scientists in the middle of the 18th century. Historically, the first methods of combining redundant measurements originate from studies in



Figuur 1 Least-squares estimation implies a (n orthogonal) projection of the observation vector y onto the plane spanned by the columns of matrix A. Example with three observations and two unknown parameters.

geodesy and astronomy, namely from the problem of determining the size and shape of the earth, and the problem of finding a mathematical representation of the motions of the Moon. Since its discovery almost 200 years ago, the method of least-squares has been and still is too a large extent one of the most popular methods of solving an inconsistent system of equations. Although the method of least-squares may seem 'natural' for a student in modern times, its discovery evolved only slowly from earlier methods of combining redundant observations [1]

GPS positioning basically is determining the location of a (user) receiver with respect to satellites of which the locations (orbits) are known. This determination takes place by measuring distances, and from a geometric point of view three measurements would suffice to determine the three coordinates of the user (fortunately we know on which side of the satellite configuration the earth is located). The simplest example of (1) in case of GPS is therefore when distances are measured from an unknown GPS receiver position to more than three GPS satellites of which the positions are known. Since the distance from the unknown receiver position r to the known position of satellite s is a nonlinear function of the unknown position coordinates,

$$l_r^s = \sqrt{(x^s - x_r)^2 + (y^s - y_r)^2 + (z^s - z_r)^2} \tag{2}$$

the common approach is to approximate this relation by a linearized version, that is, developing the nonlinear relation in a Taylor series with zeroth and first order terms only, using good approximate values for the unknown parameters. As a result the (increments of the) observed distances are collected in vector y, the (increments of the) three unknown coordinates in vector x and the partial derivatives in matrix A. In reality the equations are far more complicated than (2) due to the fact that one also has to account for clock errors, atmospheric delays and orbital errors.

Least-squares
Around 1800 Legendre and Gauss at the same time (most likely independently), invented the method of least-squares for solving an inconsistent system of equations. The least-squares solution to (1) reads

$$\hat{x} = (A^T Q_y^{-1} A)^{-1} A^T Q_y^{-1} y \tag{3}$$

with Q_y^{-1} being the weight matrix. This solution is obtained by first adding an unknown error vector e to (1), giving the consistent but undetermined system $y = Ax + e$, and then minimizing the weighted norm of e, $\| e \|_{Q_y}$, as function of x. The least-squares estimator has various desirable properties. When the positive definite matrix Q_y is chosen as the variance-covariance matrix of the observations, the least-squares estimator has the smallest variance (best possible precision) of all linear unbiased estimators.

The geometric interpretation of what least-squares does to the observations is shown in figure 1. The inconsistency between observations on one hand and model (with unknown parameters) on the other is removed by orthogonal projection. Vector $\hat{y} = A\hat{x}$ eventually lies in the plane or linear manifold spanned by the columns of matrix A (indicated by $R(A)$). The orthogonal projection realizes shortest distance between the original observation values y and the adjusted ones $\hat{y}$; the observation values are modified as little as possible, though satisfying the assumed model afterwards. This follows from interpreting the least-squares estimation principle as the principle of least distance

$$\min_x \|y - Ax\|^2_{Q_y}. \tag{4}$$

The (squared and weighted) distance between y and $\hat{y} = A\hat{x}$ is minimized.

In order to evaluate the quality of the least-squares solution in a probabilistic sense, we need the probability density function (PDF) of $\hat{x}$. Since $\hat{x}$ of (3) is a linear function of y, the least-squares estimator has a Gaussian distribution whenever y is Gaussian distributed. The PDF of the unbiased least-squares estimator $\hat{x}$ can therefore be uniquely characterized by means of the variance-covariance matrix of $\hat{x}$. With Q_y being the variance-covariance matrix of the observations, application of the error propagation law to (3) gives the variance-covariance matrix of the estimated parameters as

$$Q_{\hat{x}} = (A^T Q_y^{-1} A)^{-1} \tag{5}$$

This matrix can be used to evaluate the precision of the parameter estimators, as for instance the position coordinates.

GPS carrier phase observable
GPS observations of distance or range are obtained by measuring signal travel-times (from satellite to receiver) and multiplying these by the speed of light. Two types of distance measurements are employed: pseudo range code and carrier phase. The code observation is based on the (binary) code the satellite modulates onto the signal carrier; the distance can be measured virtually unambiguously. For the carrier phase, the receiver measures the difference in phase between the carrier wave received from the satellite and the reference carrier wave it generated itself. The (physical) phase difference reads

$$\psi_r^s = \phi_r - \phi^s.$$

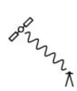
With some simplifying assumptions, the phase of a carrier wave at some epoch t equals frequency f multiplied by time t: $\phi = ft$. The receiver compares the reference carrier at time of observation t_r with the carrier received from the satellite, which was generated a little earlier in order to be 'in time' at the receiver, namely at $t_r - \tau_r^s$, where τ_r^s is the signal travel time from satellite to re-

Figuur 2 A GPS receiver and antenna permanently installed for precisely monitoring motions of the earth's crust. Site Ranchita in California in the US. Photo taken from album at http://www.scign.org/

ceiver.
The above phase difference becomes

$$\psi_r^s = f\tau_r^s,$$

and when multiplied by wavelength $\lambda = \frac{c}{f}$, $\lambda\psi_r^s = c\tau_r^s = l_r^s$, the distance in meters is obtained; it equals the travel time premultiplied by the speed of light c, exactly as with the code observation.



Figuur 3 Measurement of phase on the continuous carrier wave transmitted by the satellite. The satellite keeps on transmitting the carrier wave, cycle after identical cycle.

As a consequence of carrying out measurements on a (monotone) continuous carrier wave, the receiver can not distinguish one cycle from another. The satellite keeps on transmitting the carrier wave, in principle cycle after identical cycle, see figure 3.

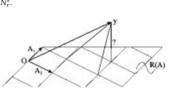
At some epoch in time the receiver simply starts outputing the measured *fractional* difference in phase: $\text{frac}(\psi_r^s) \in [0, 1\rangle$ cycle. The full (physical) phase difference is then decomposed into

$$\psi_r^s = \underbrace{\text{int}(\psi_r^s)}_{N_r^s} + \underbrace{\text{frac}(\psi_r^s)}_{\phi_r^s}.$$

The observed (fractional) phase difference ϕ_r^s (times the wavelength) does thereby not equal the distance from satellite to receiver l_r^s, but equals this distance apart from an integer number of wavelengths

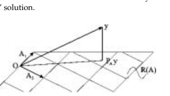
$$\lambda\phi_r^s = l_r^s - \lambda N_r^s.$$

As a consequence the vector x in (1) will, next to the unknown receiver coordinates, now also contain unknown *integer* cycle ambiguities N_r^s.



Figuur 4 Least-squares with integer parameters: possible solutions for the vector of observations form a grid in the column-space of matrix A (A_1 and A_2 are two columns of matrix A); the solution is no longer allowed to lie anywhere in the plane $R(A)$.

Integer least-squares
The least-squares solution (3) is obtained from solving (4), where x is allowed to vary over the whole n- dimensional space of *real* numbers. In case of GPS however, when use is made of the carrier phase observations, the vector of unknown parameters x consists of both real-valued and integer valued parameters (real-valued coordinates and integer-valued carrier phase ambiguities). We therefore need to modify the solution (3) so as to take the integerness of some of the parameters into account. To keep the discussion simple, it will be assumed here that *all* parameters in vector x are integer-valued. Due to the integerness of the parameters, orthogonal projection of y will now not do the job properly, see figure 4. Nevertheless one can start with 'ordinary' least-squares as a first step, see figure 5. The solution so obtained for the unknown parameters will be real-valued and is usually referred to as the 'float' solution.



Figuur 5 Least-squares with integer parameters: the first step consists of 'ordinary' least-squares (orthogonal projection); the solution $\hat{x}$ for the parameters will consist of real-valued numbers.

To apply the least-squares principle (4), but now under the condition that the parameters in x are all integers, a second step has to be carried out. Since the first step projects orthogonally to the plane $R(A)$, the second step takes place *in* the plane. From the orthogonal decomposition

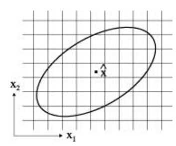
$$\|y - Ax\|^2_{Q_y} = \|y - \hat{y}\|^2_{Q_y} + \|\hat{y} - Ax\|^2_{Q_y} \tag{6}$$

it follows that the second step amounts to solving the minimization problem

$$\min_x (\hat{y} - Ax)^T Q_y^{-1} (\hat{y} - Ax) =$$

$$\min_x (\hat{x} - x)^T A^T Q_y^{-1} A (\hat{x} - x) = \min_x (\hat{x} - x)^T Q_{\hat{x}}^{-1} (\hat{x} - x) \tag{7}$$

for x being integer, where in the last equation (5) has been used. This minimization can also be visualized in the parameter space, see figure 6, instead of in the observation space as in figures 1 and 4.



Figuur 6 Least-squares with integer parameters: in the second step the integer solution for x is sought that is *closest* to the real-valued solution $\hat{x}$ of the first step; 'closest' is to be measured in the metric of the variance-covariance matrix $Q_{\hat{x}}$; the quadratic form (7), set equal to a constant, is represented by the ellipse in this example with two ambiguities x_1 and x_2.

The integer least-squares principle has been applied very successfully to GPS ambiguity resolution. By the presence of the variance-covariance matrix $Q_{\hat{x}}$ in (7), the precision and correlation of the individual real-valued ambiguity estimates is properly and fully exploited. In contrast to the 'ordinary' least-squares solution (3), there does not exist an analytical solution to (7). In practice a search over possible integer solutions has to be carried out. The space of integer solutions is restricted by limiting the squared and weighted distance in (7) to a convenient value. As a result, the volume of the corresponding ellipse (or hyper-ellipsoid in higher dimensions) has to be searched through in order to find the integer least-squares solution of x.

When the ambiguities of the first step are of poor precision and at the same time highly correlated, the ellipse or ellipsoid gets very elongated and narrow. As a consequence the discrete search may get computationally inefficient. For computational efficiency the quadratic form (7) can be integer transformed, so that the resulting ellipsoid becomes more sphere-like and the transformed ambiguities become less correlated [2–3].

Alternative integer estimators
Instead of the integer least-squares estimator one can also think of alternative integer estimators. Starting from the 'float' solution, such an estimator $\check{x} = F(\hat{x})$ will consist of a mapping $F : R^n \mapsto Z^n$ from the n-dimensional space of real numbers to the n-dimensional space of integers. Due to the discrete nature of Z^n, the map F will not be one-to-one. This implies that different real-valued ambiguity vectors will be mapped to the same integer vector. One can therefore assign a subset $S_z \subset R^n$ to each integer vector $z \in Z^n$:

$$S_z = \{x \in R^n \mid z = F(x)\}, \quad z \in Z^n \tag{8}$$

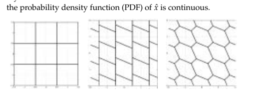
The subset S_z contains all real-valued ambiguity vectors that will be mapped by F to the same integer vector $z \in Z^n$. This subset is referred to as the *pull-in-region* of z. It is the region in which all ambiguity 'float' solutions are pulled to the same 'fixed' ambiguity vector z.

Since the pull-in-regions define the integer estimator completely, one can define classes of integer estimators by imposing various conditions on the pull-in-regions. One such class is given as follows [4].

An integer estimator is said to be *admissible* if

$$\begin{aligned} &(i) \bigcup_{z \in Z^n} S_z = R^n \\ &(ii) S_{z_1} \bigcap S_{z_2} = \{0\}, \ \forall z_1, z_2 \in Z^n, z_1 \neq z_2 \\ &(iii) S_z = z + S_0, \ \forall z \in Z^n \end{aligned} \tag{9}$$

This definition is motivated as follows. Each one of the above three conditions describe a property of which it seems reasonable that it is possessed by an arbitrary integer ambiguity estimator. The first condition states that the pull-in-regions should not leave any gaps and the second that they should not overlap. The absence of gaps is needed in order to be able to map any 'float' solution $\hat{x} \in R^n$ to Z^n, while the absence of overlaps is needed to guarantee that the 'float' solution is mapped to just one integer vector. Note that the pull-in-regions are allowed to have common boundaries. This is permitted if we assume to have zero probability that $\hat{x}$ lies on one of the boundaries. This will be the case when the probability density function (PDF) of $\hat{x}$ is continuous.



Figuur 7 Two-dimensional pull-in regions of rounding, bootstrapping and integer least-squares.

The third and last condition follows from the requirement that $F(x + z) = F(x) + z, \forall x \in R^n, z \in Z^n$. Also this condition is a reasonable one to ask for. It states that when the 'float' solution is perturbed by $z \in Z^n$, the corresponding integer solution is perturbed by the same amount. This property allows one to apply the *integer remove-restore* technique: $F(\hat{x} - z) + z = F(\hat{x})$. It therefore allows one to work with the fractional parts of the entries of $\hat{x}$, instead of with its complete entries.

There exist various admissible integer estimators. The simplest integer map is the one that corresponds to integer rounding. In this case the integer vector is obtained from a rounding of each of the entries of $\hat{x}$ to its nearest integer. Since componentwise rounding implies that each real-valued ambiguity estimate $\hat{x}_i, i = 1, \ldots, n$, is mapped to its nearest integer, the absolute value of the difference between the two is at most $\frac{1}{2}$. The subsets $S_{R,z}$ that belong to this integer estimator are therefore given as

$$S_{R,z} = \bigcap_{i=1}^{n} \left\{ \hat{x} \in R^n \mid | \hat{x}_i - z_i | \leq \frac{1}{2} \right\}, \ \forall z \in Z^n \tag{10}$$

The subset $S_{R,z}$ is an n-dimensional cube, with sides of length 1 and centered at the grid point z.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres
Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
http://www.nieuwarchief.nl

Hoofdredactie
Jaap Top (top@math.rug.nl)

Eindredactie
Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties
Reinie Erné (erne@math.leidenuniv.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Redactie
Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)
Hans Melissen (j.b.m.melissen@its.tudelft.nl)
Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)

Bureauredactie
Jos Brakenhoff (naw@math.leidenuniv.nl)
Annelies Hafkenscheid (naw@math.leidenuniv.nl)

Medewerkers
Danny Beckers (KUN), Wieb Bosma (KUN), J.A.W. van Casteren (Univ. Antwerpen), Jan van de Craats (KMA), Hans Cuypers (TUE), Robbert Fokkink (TUD), Michael van Hartskamp, Geertje Hek (UVA), Teun Koetsier (VU), Joop Kolk (UU), Ger Koole (VU), Pieter Moree (UVA), Jan van Neerven (TUD), Mark Peletier (CWI), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal (FI)

TEX-ondersteuning
Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager
Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period
Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions
Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam

Vormgeving
Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties
Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)
Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk
Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.
De contributie voor leden van het KWG bedraagt € 70 per jaar. Gepensioneerden betalen € 35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor € 25 per jaar.
Pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG.
Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van € 50.
Members of the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London,* and *South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay € 50 instead of the full membership fee of € 70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.
A postage charge of € 5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of € 7,50 for members living outside of Europe.
Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor € 90 respectievelijk € 105.
Internetpagina: http://www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie
Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)
Eduard Looijenga (UU, *voorzitter*), Herman te Riele (CWI, *secretaris*), Fieke Dekkers (UU, *penningmeester*), Geertje Hek (UvA), Metha Kamminga (NHL), Annette Kik (CWI), Vivi Rottschäfer (UL), Michel Vellekoop (UT).

Informatie voor auteurs

Kopij
Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient electronisch te worden aangeboden aan de hoofdredacteur Jaap Top (top@math.rug.nl). Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina: http://www.math.leidenuniv.nl/~naw

Reprints
Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	*verschijningsdatum*	*uiterste inleverdatum kopij*
2	18-06-2004	24-02-2004
3	03-09-2004	11-05-2004
4	03-12-2004	10-08-2004
1	04-03-2005	10-11-2004

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Universiteit van Amsterdam
Universiteit Leiden
Vrije Universiteit
Universiteit Utrecht
Technische Universiteit Eindhoven
Eurandom
Technische Universiteit Delft
Universiteit Twente
Katholieke Universiteit Nijmegen

Op het omslag

Brief van Grothendieck aan Serre van 2 april 1984. Zie bladzijde 42 voor een recensie van de onlangs in het Engels vertaalde correspondentie.

Agenda | Upcoming Events

maart 2004

8–12 maart
❑ **Buildings and Groups of Lie-Type**
Minisymposium over semi-simpele Liegroepen vanuit combinatorisch perspectief. Docent: Bernhard Mühlherr (Université Libre de Bruxelles).
plaats *Technische Universiteit Eindhoven*
info *www.win.tue.nl/math/eidma*

15–19 maart
❑ **Mathematics with Industry**
48ste Europese Studiegroep. Bedrijven leveren problemen aan die wiskundigen proberen op te lossen.
plaats *Technische Universiteit Delft*
info *ta.twi.tudelft.nl/swi*

19 maart
❑ **Kangoeroe**
Wedstrijd voor middelbare scholieren en voor leerlingen van groep 7 en 8 van de basisschool.
info *www.math.kun.nl/kangoeroe*

23 maart
❑ **Johan Bernoulli lezing**
Prof.dr.ir Bart de Moor (Katholieke Universiteit Leuven) verzorgt de Bernoulli lezing met titel *Systems biology: a new mathematical frontier*
plaats *Aula Academiegebouw, Rijksuniversiteit Groningen*

25–26 maart
❑ **Nationale rekendagen**
Conferentie, gewijd aan het rekenonderwijs.
plaats *De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout*
info *www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen*

26 maart – 26 september
❑ **Goochelen met getallen**
Expositie over de plaats en historie van getallen in de samenleving.
plaats *Museum Boerhaave, Leiden*
info *www.museumboerhaave.nl*

29 maart – 4 april
❑ **Workshop Conformal Invariance, Scaling limits and Percolation**
Organisatoren: Nina Gantert, Remco van der Hofstad
plaats *Eurandom*
info *www.eurandom.tue.nl*

april 2004

16–17 april
❑ **Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres**
Gastsprekers: Neil Sloane (AT&T), Bernard de Baets (Universiteit Gent) en Stef Tijs (Universiteit van Tilburg), Manjul Bhargava (Princeton University).
plaats *Universiteit van Tilburg*
info *www.uvt.nl/nmc2004*

20–29 april
❑ **Continuous and Discrete Random Spatial Processes**
Organisatoren: J. van den Berg (CWI), B. Nienhuis (UvA).
plaats *Lorentz Center, Leiden*
info *www.lc.leidenuniv.nl*

21 april
❑ **Koksma symposium**
Symposium naar aanleiding van de honderdste geboortedag van J.F. Koksma.
plaats *Vrije Universiteit Amsterdam*
info *maryke@few.vu.nl*

mei 2004

10–14 mei
❑ **Approximation Algorithms and Games on Networks**
Minicursus op de doorsnede van de vakgebieden algoritme-ontwerpen en speltheorie door prof. Éva Tardos (Cornell University, USA).
plaats *Technische Universiteit Eindhoven*
info *www.win.tue.nl/math/eidma*

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.
Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

15 mei
❑ **Symposium X Historische kring reken- en wiskunde onderwijs**
Organisatie: Freudenthalinstituut.
plaats *Hogeschool Domstad, Utrecht*
info *www.fi.uu.nl/nl/indexagenda.html*

28 mei
❑ **Panama voorjaardag**
Panama voorjaardag en NVORW-jaarvergadering.
plaats *De Uithof, Utrecht*
info *www.fi.uu.nl/panama/voorjaarsdag*

juni 2004

3–25 juni
❑ **Lie groups in Analysis, Geometry and Mechanics**
MRI Spring School 2004, AiO-cursus van drie weken. Sprekers: J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk, R.H. Cushman, G.J. Heckman, E.P. van den Ban.
plaats *Universiteit Utrecht*
info *www-mri.sci.kun.nl*

9–11 juni
❑ **Onderwijs Research Dagen 2004**
plaats *Universiteit Utrecht*
info *www.fi.uu.nl/nl/indexagenda.html*

14–18 juni
❑ **Moda 7**
Conferentie over het ontwerpen van statistische experimenten.
plaats *Kapellerput, Heeze*
info *www.eurandom.tue.nl*

21–25 juni
❑ **13th European Conference for Mathematics in Industry**
Internationale conferentie over wiskundig modelleren van industriële processen.
plaats *Technische Universiteit Eindhoven*
info *www.ecmi2004.tue.nl*

23–25 juni
❑ **Workshop HPOPT 2004**
Internationale workshop over High Performance Optimization Techniques met thema: Optimization and Polynomials.
plaats *CWI, Amsterdam*
info *www.cwi.nl/~monique/hpopt2004*

30 juni
❑ **MSOM Multi-Echelon Inventory Conference**
plaats *Eindhoven*
info *www.tm.tue.nl/opc/msom2004*

juli 2004

1–2 juli
❑ **MSOM 2004 Conference**
plaats *Eindhoven*
info *www.tm.tue.nl/opc/msom2004*

4–11 juli
❑ **ICME-10**
10th International Congress on Mathematical Education
plaats *Kopenhagen, Denemarken*
info *www.icme-10.dk*

6–18 juli
❑ **Internationale Wiskunde Olympiade**
De 45ste versie van het grootste internationale wiskundetoernooi voor middelbare scholieren.
plaats *Athene, Griekenland*
info *olympiads.win.tue.nl/imo/index.html*

augustus — oktober 2004

15–19 augustus
❑ **International Society for Clinical Biostatistics 2004**
Internationale conferentie georganiseerd door de afdeling Medische Statisiek van de Leiden University Medical Centre (LUMC).
plaats *Leiden*
info *iscb2004.clinicalresearch.nl*

23–26 augustus
❑ **Harmonic Analysis and Homogeneous Spaces**
Workshop, gewijd aan harmonische analyse en haar toepassingen in de mathematische fysica, niet-communicatieve meetkunde en getallentheorie.
plaats *Lorentz Center, Universiteit Leiden*
info *www.lc.leidenuniv.nl*

27 augustus
❑ **Special day in honour of Gerrit van Dijk**
Special day in honour of Gerrit van Dijk on the occasion of his 65th birthday.
plaats *Universiteit Leiden*
info *harmonic@math.leidenuniv.nl*

30 augustus–3 september
❑ **Workshop Algebraic Cycles and Motives**
Organisatoren: S.J. Edixhoven, J. Nagel, C. Peters.
plaats *Lorentz Center, Universiteit Leiden*
info *www.lc.leidenuniv.nl*

6–8 oktober
❑ **Woudschoten-conferentie**
De 29-ste conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Wiskunde Gemeenschappen. Thema's van deze conferentie zijn Computational electromagnetics en Geometrische integratie voor ODEs en PDEs.
plaats *Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist*
info *www.cwi.nl/projects/wnw/conf2004*

6 NAW 5/5 nr. 1 maart 2004 Nieuws

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.
Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres
Het Koninklijk Wiskundig Genootschap en het Belgisch Wiskundig Genootschap houden dit jaar een gezamenlijk congres. Het congres vindt plaats op vrijdag 16 en zaterdag 17 april 2004 aan de Universiteit van Tilburg.

Er zijn drie hoofdvoordrachten. Stef Tijs (Universiteit van Tilburg) geeft een voordracht over Nash-evenwichten, Bernard De Baets (Universiteit van Gent) spreekt over vage verzamelingen en Neil Slaone (AT&T) over zijn 'On-Line Encyclopedia of Integer Sequences'. Verder is er de tweejaarlijkse Beeger lezing (getaltheorie) door Manjul Bhargava (Princeton University), een speciale voordracht over gokken in het casino door Ben van der Genugten (Universiteit van Tilburg) en een interactieve veilingles (met een echte veiling) door Casper de Vries (Erasmus Universiteit Rotterdam). Daarnaast zijn er vijftien minisymposia, korte presentaties van promovendi en aangemelde voordrachten.

Voor het eerst is zaterdag een congresdag. De organisatie verwacht dat dit interessant kan zijn voor hbo- en vwo-docenten. Het programma houdt hiermee rekening en er is een speciaal tarief voor deelname op zaterdag.
Voor informatie, zie http://www.uvt.nl/nmc2004 *Willem Haemers*

Veertigste Mersenne-priemgetal gevonden
Het GIMPS-project (*Great Internet Mersenne Prime Search*) heeft op op 2 december 2003 aangekondigd dat Michael Shafer (werkzaam op de Michigan State University) het veertigste Mersenne-priemgetal

$$2^{20996011} - 1$$

gevonden heeft. Het getal bestaat uit meer dan zes miljoen cijfers en slaat daarmee het vorige record $2^{13466917} - 1$, dat gevonden werd op 14 november 2001 en iets meer dan vier miljoen cijfers telde.

Het GIMPS-project wordt op dit moment gedragen in een wereldwijd virtueel netwerk van ongeveer 211.000 computers. Mersennepriemgetallen zijn genoemd naar Marin Mersenne, een Franse geestelijke, die zo'n driehonderd jaar geleden als eerste getallen van het type $2^p - 1$ bestudeerde. (In die laatste formule is ook p, de exponent van 2, een priemgetal.) Bij het GIMPS-project wordt gebruik gemaakt van software ontwikkeld door George Woltman en Scott Kurowski, draaiend op 'gewone' PC's.
Informatie: www.mersenne.org/20996011.htm *Dick Klingens*

Koksma Symposium
Op woensdag 21 april 2004 vindt op de Vrije Universiteit voor een breed publiek een symposium plaats naar aanleiding van de honderdste geboortedag van J. F. Koksma (1904-1964), voornaamste grondlegger van de beoefening van de wiskunde aan de VU. Koksma promoveerde op 4 juni 1930 bij Van der Corput in Groningen. Op 10 oktober van hetzelfde jaar werd hij gewoon hoogleraar aan de VU. Voor de VU, die zich als universiteit waar moest maken, was Koksma een gouden greep. Hij was een goed wiskundige, die onder meer met Erdős samenwerkte.

Zijn hoofdwerk is *Diophantische Approximationen* uit 1936. Koksma was ook een doortastend netwerker, die binnen het Mathematische Centrum en bij de organisatie van het Internationale Mathematische Congres in Amsterdam een grote rol speelde. En hij gaf ook nog uitstekend college, daarbij het contact met zijn gehoor voortdurend handhavend. "U zit toch nog wel in de diligence, meneer Kok", sprak hij ooit, toen student Kok glazig begon te kijken.

Op het symposium zal ook het eerste exemplaar van het boek *Worsteling naar waarheid* van H. Blauwendraat worden gepresenteerd. Dit boek beschrijft de geschiedenis van het wiskunde- en informatica-onderwijs en -onderzoek aan de de Vrije Universiteit.

Aan het symposium werken onder meer mee: Hendrik Blauwendraat, Gerard Alberts, Rob Tijdeman en Cor Baaijen. Aanvang: 14.30 uur. Plaats: zaal D107, Gebouw voor Natuurwetenschappen.
Inlichtingen: T.Koetsier@few.vu.nl *Teun Koetsier*

Omdat de Leidse universiteit was gesloten, promoveerde N.G. de Bruijn (midden voor)in 1943 niet bij Kloosterman (rechts zittend), maar aan de VU bij Koksma (derde van links op de eerste rij, naast Bottema).

Nieuwe opzet tweede fase gepubliceerd en bijgesteld
Donderdag 4 december heeft minister Van der Hoeven de eind oktober toegezegde nieuwe opzet voor de profielen in havo/vwo aan de Tweede Kamer gezonden. Globaal is de opzet drie verplichte vakken per profiel, één vak te kiezen uit een beperkt cluster en één keuzevak in het vrije deel.

Op 4 februari 2004 zijn de schema's met de invulling van het havo en het vwo bijgesteld na het overleg van de minister met de vaste commissie voor onderwijs van de tweede kamer. Het is opvallend dat het vak natuurkunde niet langer verplicht is bij het profiel Natuur en Gezondheid.
Voor het downloaden van de brief van de minister en voor een schema van de aanpassing, zie: www.tweedefase-loket.nl/downloaden/index.php *Gerard Koolstra*

Nieuwe profielen voor havo en vwo zijn een ramp
De rectores van de drie technische universiteiten J. Fokkema, R. van Santen en F. van Vught waarschuwen in een brief in de NRC voor de gevolgen van het nieuwste plan van minister Verhoeven. Enige citaten:

"Begin december heeft minister Van der Hoeven haar nieuwste plan gepresenteerd voor aanpassing van de profielen in de Tweede Fase van het voortgezet onderwijs (de klassen 4 en 5 van het havo en de klassen 4, 5 en 6 van het vwo). Alleen al het feit dat dit de derde keer was in 2003 dat de minister met een plan kwam, illustreert hoe complex deze profielenkwestie is. En hoe omstreden. Want zowel na de lancering van het eerste plan, in januari 2003, als na de bijstelling van juli waren de bezwaren niet van de lucht.

De minister roept het beeld op dat de bètavakken moeilijk en weinig aantrekkelijk zijn en dat het allemaal wel wat minder mag. De twee natuurprofielen Natuur en Gezondheid (N en G) en Natuur en Techniek (N en T) worden een stuk lichter, er wordt, met name in het vwo, minder wiskunde, algemene natuurwetenschappen en natuurkunde gegeven, terwijl natuurkunde ook nog eens verdwijnt als verplicht vak uit het N en G-profiel.

De technische universiteiten zijn tegenstander van een verlichting van de bètacomponent in de twee natuurprofielen N en G en N en T. Zo'n verlichting staat op gespannen voet met de voorbereiding die het vwo moet bieden op een vervolgstudie, bijvoorbeeld aan een van de drie technische universiteiten.

De beide natuurprofielen zijn niet robuust genoeg en bereiden onvoldoende voor op bijvoorbeeld een technische vervolgstudie. Elk van de beide natuurprofielen moet vier verplichte, echte bètavakken kennen. Alleen zo is er voldoende ruimte om het vwo (voorbereidend wetenschappelijk onderwijs) inderdaad te laten voorbereiden op een universitaire vervolgstudie met als doelen: voldoende diepgang, ruimte voor vernieuwing, ruimte om aansprekende contexten uit natuur, wetenschap en techniek aan te reiken en ruimte voor interdisciplinaire ontwikkelingen op de snijvlakken van de klassieke bètavakken." *bron: NRC Handelsblad, 3 februari*

Wiskundig onderzoek leidt tot nieuw muziekinstrument
Twee Canadese wiskundigen, Samuel Gaudet en Claude Gauthier hebben een nieuw muziekinstrument ontwikkeld — de tritare.

Tijdens hun onderzoek op het gebied van getaltheorie stuitten ze op een verzameling getallen met symmetrieën die mogelijkheden leken te hebben in de electronica, en uiteindelijk was een nieuw instrument het resultaat. Het heeft de vorm van een (omgekeerde) Y en heeft zes netwerken van snaren, die een hele serie geluiden kunnen voortbrengen, variërend van snaargetokkel tot het luiden van kerkklokken.
Voor meer informatie, zie www.radio-canada.ca/regions/atlantique/tele/Chroniques/tritare_12371.shtml *Gerard Koolstra*

Bedrijfswiskunde positief beoordeeld
De opleidingen bedrijfswiskunde van de Nederlandse hogescholen leveren waardevolle krachten voor het bedrijfsleven en (semi-)overheidsinstellingen af. Dit concludeert de onafhankelijke visitatiecommissie die, onder voorzitterschap van prof.dr. J. van de Craats, in 2003 vier hbo-opleidingen bedrijfswiskunde voor de eerste keer op hun kwaliteit heeft beoordeeld. De bevindingen zijn vastgelegd in het in december 2003 gepubliceerde visitatierapport *Analyse en Inzicht*. Het beroep van bedrijfswiskundige is nieuw en nog tamelijk onbekend. Het overgrote deel van de hbo-studenten in de bedrijfswiskunde is min of meer toevallig 'tegen de opleiding aangelopen'. Er blijkt dus geen effectief wervingsbeleid gevoerd te worden. Het volledige visitatierapport is te downloaden via de site van de hbo-raad onder publicaties, (sub)thema kwaliteitszorg.
Zie de website www.hbo-raad.nl *Metha Kamminga*

Nieuws NAW 5/5 nr. 1 maart 2004 7

8 NAW 5/5 nr. 1 maart 2004 Nieuws

Sneeuwbal binnenstebuiten
Een prachtig — maar vergankelijk — voorbeeld van wiskundige kunst wordt gevormd door een vier meter hoog beeld van sneeuw dat voorstelt hoe een bol volgens de topologische regels der kunst binnenstebuiten kan worden gekeerd. Dat dit mogelijk is werd pas in 1959 bewezen (door Stephen Smale) en concrete ideeën over hoe dit gevisualiseerd kon worden stammen uit de jaren zeventig van de vorige eeuw.

Een team onder leiding van de wiskundige Stan Wagon (Macalester College in St. Paul, Minnesota- VS) heeft vorige maand tijdens het *14th International Snow Sculpture Championship* (Breckenridge, VS) het binnenstebuiten keren letterlijk in beeld gebracht. De creatie kreeg een eervolle vermelding als 'meest ambitieus beeldhouwwerk'.
Zie www.sciencenews.org/20040207/mathtrek.asp *Gerard Koolstra*

Wintersymposium Wiskunde en muziek
Tweehonderd belangstellenden kwamen af op het wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap met het thema *Wiskunde en Muziek*, dat plaatsvond in de Aula van het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht. Door de grote toeloop moest organisator Metha Kamminga de dag een kwartier later dan gepland openen.

Er werden drie plenaire lezingen gegeven. De eerste lezing over boventonen werd verzorgd door Jan van de Craats en was een groot succes. Hij illustreerde zijn lezing met experimenten aan de vleugel. De tweede lezing werd verzorgd door sonoloog Rutger Teunissen die een digitale presentatie hield over signaalbewerking. Ook dit onderwerp werd uitstekend gevisualiseerd met behulp van computerbeelden met bijpassende geluidsweergave.

Na de lunchpauze was het de beurt aan Henkjan Honing die over zijn onderzoek naar de persoonlijke perceptie van het fenomeen ritme in de muziek vertelde. Dit ging op geanimeerde wijze met vele vragen aan het publiek, zoals:"Kunt u dit ritme klappen?" Als laatste maakte Loek Dikker, componist van filmmuziek, een aantal improvisaties gebaseerd op verschillende groepen boventonen. Het was een zeer interessante en uitstekend verzorgde dag.
bron: webserv.nhl.nl/˜kamminga/wintersymposium/verslagwintersymp04.html

Wiskundeonderwijs webwijzer
Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen te Noordwijkerhout is een nieuwe website ten doop gehouden. Deze 'wiskundeonderwijs-webwijzer' is het initiatief van de samenwerkende niet-commerciële wiskundeonderwijs-websites in Nederland, waaronder die van het Freudenthal Insituut, het APS, de Ned. Vereniging van Wiskundeleraren, het Koninklijk Wiskundig Genootschap, de Digitale School, WisBase, Pythagoras, Vierkant voor Wiskunde en Kennislink. De bedoeling is om onder andere door overzichten per onderwerp en zoekmogelijkheden op meerdere websites tegelijk, de steeds groeiende hoeveelheid informatie en bruikbaar materiaal toegankelijker te maken, met name voor leerlingen en docenten.
Internetadres: www.wiskundeonderwijs.nl *Gerard Koolstra*

Nieuw rekenonderwijs voor ouders onbegrijpelijk
In het februarinummer van het blad *J/M*, dat zich richt op ouders van opgroeiende kinderen, wordt aandacht besteed aan het veranderde rekenonderwijs op de basisschool. Verschillende deskundigen komen aan het woord over onderwerpen als vermenigvuldiging van breuken (citaat:"Welke leerling wist nu precies wat hij deed als hij twee breuken vermenigvuldigde? Bijna niemand toch?"), het verdwijnen van staartdelingen en het zogenaamde realistische reken- en wiskundeonderwijs.

Afgezien van het ontbreken van kritische distantie bij de geïnterviewde deskundigen geeft het artikel een helder overzicht van de huidige stand van zaken op de basisschool. *Derk Pik*

Expositie Museum Boerhaave in Leiden
Museum Boerhaave te Leiden exposeert van 26 maart tot en met 26 september demonstratiespellen en historische voorwerpen onder het thema *Goochelen met getallen*. Er zijn meerdere thema's: getallen in de natuur, inhoud- en lengtematen, getallen in de astronomie, landmeetkunde en zeevaartkunde, mechanica en statistiek.

Onder de historische voorwerpen bevinden zich de differentiemachine van Babbage uit 1830, oude rekenlinialen, rekenschijven en rekencylinders, schoolboekjes , land- en zeekaarten, oude rekenmachines, planetaria, *staatsloten* en een Babylonisch kleitablet van 2000 jaar voor Christus. *bron: www.museumboerhaave.nl*

Planetarium (1794) George Adams, Londen

Bessensap
Het evenement *Bessensap*, dat op dinsdag 18 mei plaats zal vinden in het Amsterdamse *NEMO*, brengt journalisten, redacteuren, voorlichters en mediagenieke onderzoekers bij elkaar onder het motto: wetenschap ontmoet pers, pers ontmoet wetenschap. Bessensap is inmiddels uitgegroeid tot een sfeervolle en interactieve gebeurtenis in de niche van wetenschap, media en samenleving. NWO verwacht veel publiciteit op en rond deze dag.

Ook mag tijdens *Bessensap* een aantal onderzoekers zich met actueel en journalistiek spannend onderzoek presenteren aan de media. Doel is om via heldere, krachtige en voor journalisten prikkelende presentaties steeds het laatste nieuws te belichten. *Bron: e-mailcirculaire NWO*

Problemen/UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten. De uitslagen worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://uwc.ewi.tudelft.nl/uitslag/uitslag.pdf

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijzen toegekend, van 100, 50, en 25 euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50, en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 euro toegekend.
Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 februari 2005. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.
De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Optiver
DERIVATIVES TRADING

Problem A
1. Show that there exist infinitely many $n \in \mathbf{N}$, such that $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$ is a square.
2. Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be those squares. Calculate $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Problem B
Let G be a finite set of elements and $\cdot$ a binary associative operation on G. There is a neutral element in G and that is the only element in G with the property $a \cdot a = a$. Show that G with the operation $\cdot$ is a group.

Problem C
Let $\{a_n\}_n$ be a sequence ($n \geq 0$), with $a_n \in \{\pm 1\}$ for all n. Define

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Prove that $\exists C > 0 : \forall m > 0 : \exists n > m : |S_n| > C\sqrt{n}$.

Edition 2004/1
Op de ronde 2004/1 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we inzendingen van Syb Botma, Kenny De Commer, Filip Cools and Hendrik Hubrechts.

Problem 2004/1-A
For every integer $n > 2$ prove that $\sum_{j=1}^{n-1} \left(1/(n-j) \sum_{k=j}^{n-1} 1/k\right) < \pi^2/6$.

Solution This problem has been solved by Syb Botma, Kenny De Commer, Filip Cools, Klaas Pieter Hart, Hendrik Hubrechts, Ruud Jeurissen and Jaap Spies. Ruud Jeurissen's solution is given here.
Let A_{n-1} denote the left hand side. Changing the order of summation we get

$$A_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n-j} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{s=n-k}^{n-1} \frac{1}{s}.$$

Eindredactie: Matthijs Coster
Redactieadres: UWC/NAW
Mathematisch Instituut
Postbus 9512
2300 RA Leiden
uwc@nieuwarchief.nl

Oplossingen

Then

$$A_n - A_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{s=n+1-k}^{n} \frac{1}{s} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{s=n-k}^{n-1} \frac{1}{s} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-k}\Big)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \frac{1}{n}\Big(\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s} - \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{t}\Big) = \frac{1}{n^2}.$$

Since $A_1 = 1$, we find $A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (and $\lim_{n\to\infty} A_{n-1} = \frac{\pi^2}{6}$).

Problem 2004/1-B
Consider the first digits of the numbers 2^n: 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, ... Does the digit 7 appear in this sequence? Which digit appears more often, 7 or 8? How many times more often?

Solution This problem has been solved by Filip Cools, Hendrik Hubrechts, Kenny De Commer, Syb Botma and Jaap Spies. The problem has been taken from V.I. Arnold's *Mathematical methods in classical mechanics* (it is the final problem of section 16 and its solution is given in section 51). By coincidence a solution of the problem appeared in the June 2004 issue of the Newsletter of the European Mathematical Society. The answers are: 7 does occur (though it takes some time before its first occurence) and it occurs more often than 8. To specify the answer to the third question one has to use an averaging result (e.g. the ergodic theorem or Weyl's criterion).
Take logarithms to find that the first digit of 2^n is equal to 7 if and only if

$$\log 7 \leq n \log 2 < \log 8, \bmod 1$$

Represent the circle by the real numbers modulo 1. The map $x \mapsto x + \log 2$ is an irrational rotation ρ of the circle. The equation above now says that 7 occurs as the first digit of 2^n if and only if the unit element of the circle rotates into $(\log 7, \log 8)$ under ρ^n. It is known that an irrational rotation is uniquely ergodic and by the ergodic theorem, for numbers $a < b$ in $(0, 1)$ the fraction

$$\frac{|\{n \leq N\colon \rho^n(x) \in (a, b) \bmod 1\}|}{N}$$

converges to $b - a$ as N goes to infinity, regardless of the choice of x. It follows that the fraction of iterates 2^n with initial digit 7 is equal to $\log 8 - \log 7$ as N goes to infinity. Similarly, the fraction of iterates with initial digit 8 is equal to $\log 9 - \log 8$.

Problem 2004/1-C
We have a circular key chain and we want to colour the keys, using as few colours as possible, so that each key can be identified by the color pattern — that is, by looking at the key's colour and neighboring colours as far away as needed. Let $f(n)$ be the minimal number of colours required to uniquely disambiguate a circular key chain of n keys in this way. Determine $f(n)$ for all positive integers n.

Solution This problem has been solved by Filip Cools, Hendrik Hubrechts, Kenny De Commer and Ruud Jeurissen. It is problem 729 in the Journal of Recreational Mathematics (vol 11, 1979), proposed by Frank Rubin. It has appeared in many puzzle corners ever after and it has sprouted the 'distinguishing number' in graph theory. The answer is that $f(n) = 2$ if $n \geq 6$ and $f(n) = 3$ if $n = 3, 4, 5$.
Enumerate the keys $1, 2, 3, \ldots, n$ cyclically. To disambiguate the chain you have to be able to find keys 1 and 2, since then you can find the other keys by counting. So $f(n) \leq 3$, since you can colour 1 green, 2 red and colour the others yellow. Suppose $n \geq 6$. Colour $1, 3, n$ red and colour all other keys green. Then 2 is the only green key that has two red neigbours since $n \geq 6$. So you can find key 2 and key 1 is its only neighbour that has a red neighbour.

Oplossingen

We need to show that $f(n) \neq 2$ if $n = 3, 4, 5$. Suppose we can use red and green to disambiguate the key chain. Clearly it does not suffice to colour one key differently from all the others. Since $n = 3, 4, 5$ we may assume that two keys are green while the others are red. Turn the key ring around (reflect) in such a way that the green keys exchange their position. This action does not change the colour pattern, so the key ring cannot be disambiguated.
Kenny De Commer proposes and solves a related key chain problem: what is the minimal number of colours that you need in order to disambiguate the chain, regardless of how you apply the colours?

Problem 2003/1-B
Jos Brands has pointed out that the solution to UWC problem 2003/1-B as given in last year's September issue is not correct. We will come back to this problem in a later issue.

In the previous issue we remarked that Bert Jagers gave a general solution to problem 2003/4-B, which is presented here.

Problem 2003/4-B
Let and m and n be coprime. Assume that G is a group such that m-th powers and n-th powers commute. Then G is abelian.

Solution Let $M \subset G$ be generated by all m-th powers and let $N \subset G$ be generated by all n-th powers. These subgroups are clearly invariant under automorphisms, hence they are normal. Since m and n are coprime $G = MN$ and $M \cap N$ is contained in the center of G. Let $s \in M$ and $t \in N$ be arbitrary elements. To settle that G is abelian it suffices to show that $st = ts$, in other words, the commutator $[s, t]$ is equal to e . Observe that $[s, t] = sts^{-1}t^{-1} \in M \cap N$ since, by normality, $[s, t]$ is a product of two elements of M as well as a product of two elements of N. Hence $[s, t]$ is an element of the center, say $[s, t] = z$. In other words $sts^{-1} = zt$, so $st^ms^{-1} = z^mt^m$. Since $t^m \in N$ it commutes with s, so $z^m = e$. In exactly the same way $z^n = e$. So $z = [s, t] = e$.

Uitslag Editie 2004/1

	Naam	A	B	C	*Totaal*
1.	Hendrik Hubrechts	11	9	10	119
2.	Filip Cools	10	8	10	112
3.	Kenny De Commer	10	3	11	97

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie
We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

	Naam	*Punten*
1.	Kenny De Commer	142
2.	Tom Claeys	138
3.	Gerben Stavenga e.a.	136
4.	Filip Cools e.a.	107
5.	Peter Bruin	99