



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

---



FLÁVIO HENRIQUE ALVES DE SOUSA DIAS

**Minimização da vibração de engrenamento por meio da  
modificação do perfil dos dentes das engrenagens cilíndricas de  
dentes retos**

Manaus-AM

2022

FLÁVIO HENRIQUE ALVES DE SOUSA DIAS

**Minimização da vibração de engrenamento por meio da  
modificação do perfil dos dentes das engrenagens cilíndricas de  
dentes retos**

**Versão Corrigida**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Faculdade de Tecnologia da Universidade Federal  
do Amazonas como parte dos requisitos necessários  
para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Danilo de Santana Chui

Manaus-AM

2022

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

D541m	<p>Dias, Flávio Henrique Alves de Sousa</p> <p>Minimização da vibração de engrenamento por meio da modificação do perfil dos dentes das engrenagens cilíndricas de dentes retos / Flávio Henrique Alves de Sousa Dias . 2022</p> <p>113 f.: il. color; 31 cm.</p> <p>Orientador: Danilo de Santana Chui</p> <p>TCC de Graduação (Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Amazonas.</p> <p>1. Engrenagens. 2. Vibrações. 3. Otimização. 4. Modificação do perfil do dente. 5. Rigidez de engrenamento variante no tempo. I. Chui, Danilo de Santana. II. Universidade Federal do Amazonas III. Título</p>
-------	---



Ministério da Educação  
Universidade Federal do Amazonas  
Coordenação do Curso de Engenharia Mecânica

### DECISÃO DA BANCA EXAMINADORA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO (TCC)

A **BANCA EXAMINADORA DE TCC**, nomeada pela Portaria nº 148/2022-FT/UFAM (1180355), em reunião realizada em 06 de outubro de 2022, após a sessão de apresentação oral perante a Faculdade de Tecnologia/UFAM, conforme Resolução nº 02/2013 do Colegiado do Curso de Engenharia Mecânica, **APROVOU**, por unanimidade, o TCC do aluno **FLÁVIO HENRIQUE ALVES DE SOUSA DIAS**, com o título "**MINIMIZAÇÃO DA VIBRAÇÃO DE ENGRENAMENTO POR MEIO DA MODIFICAÇÃO DO PERFIL DOS DENTES DAS ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES RETOS**".

Prof. Dr. Danilo de Santana Chui  
Orientador (DEMEC/UFAM)

Prof. Dr. Gustavo Cunha da Silva Neto  
Membro (DEMEC/UFAM)

Prof. MSc. Junout Martins Louzada Neto  
Membro (DEMEC/UFAM)

Em Manaus, 26 de outubro de 2022.



Documento assinado eletronicamente por **Danilo de Santana Chui, Coordenador de Curso**, em 27/10/2022, às 07:38, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Cunha da Silva Neto, Professor do Magistério Superior**, em 27/10/2022, às 16:03, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Junout Martins Louzada Neto, Professor do Magistério Superior**, em 27/10/2022, às 16:29, conforme horário oficial de Manaus, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufam.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1224438** e o código CRC **EB54EE5C**.

Av. Octávio Hamilton Botelho Mourão - Bairro Coroado 1 Campus Universitário Senador Arthur Virgílio Filho, Setor Norte - Telefone: (92) 3305-1181  
CEP 69080-900, Manaus/AM, [cmecanica@ufam.edu.br](mailto:cmecanica@ufam.edu.br)

À minha querida mãe,  
dedico.

# AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por nunca me deixar esmorecer e permitir conquistar esta grande vitória.

À minha mãe, Bárbara Alves, por acreditar, confiar, me inspirar diariamente com seu exemplo e não medir esforços para me propiciar sempre o melhor.

À minha futura noiva, Brenda Freitas, por estar sempre ao meu lado, me motivando e não me deixando cair nos momentos difíceis, me fazendo sorrir todos os dias, deixando a vida mais leve.

A um grande amigo, Rodrigo Nascimento, pela amizade, por compartilhar as lutas e vitórias desta jornada.

A um grande amigo, Renato Trevisan, pela amizade, por compartilhar as *bads*, por me fazer acreditar mais em mim, pelo suporte e dicas que agregaram na construção desse trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Danilo Chui, pela confiança, por todos os conselhos, paciência, apoio e orientação para que este trabalho fosse concluído.

Ao Prof. Dr. Gustavo Neto, por todo suporte e conselhos, importantes para a conclusão deste trabalho.

À Universidade Federal do Amazonas, por possibilitar a realização deste curso e me apresentar amizades que levarei para o resto da vida.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho.

Nunca teria chegado até aqui se não fosse por todos vocês!

*“O importante é não parar de questionar.”*

*(Albert Einstein)*

## RESUMO

DIAS, Flávio. **Minimização da vibração de engrenamento por meio da modificação do perfil dos dentes das engrenagens cilíndricas de dentes retos. 2022. 113f.** Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus-AM, 2022.

As engrenagens estão entre os mais antigos dispositivos inventados pelo homem e, dentre as diversas formas de transmissão de potência, são geralmente mais robustas e duráveis, com eficiência na ordem de 98%. A característica dinâmica de um sistema de transmissão por engrenagens é um importante parâmetro para definir sua qualidade. A variação na quantidade de dentes em contato durante a rotação das engrenagens tem grande contribuição para as vibrações destes sistemas. Deriva-se desse contexto a necessidade de avaliar as características dinâmicas do engrenamento ainda em fase de projeto. Neste trabalho, é realizado um estudo sobre a modificação de adendo no perfil dos dentes das engrenagens. Para isso, foram realizadas simulações do modelo dinâmico a fim de determinar um valor ótimo do parâmetro de modificação capaz de minimizar as vibrações de um engrenamento ideal de engrenagens cilíndricas de dentes retos para as condições especificadas de operação, considerando a rigidez e o amortecimento de engrenamento variantes no tempo, incluindo uma melhoria no cálculo de massa equivalente. Da comparação entre os resultados da simulação do sistema otimizado e original, conclui-se que a modificação ótima aproxima as respostas dinâmicas às estáticas, com taxas de variação próximas a zero e erro de transmissão quase-constante, provendo mínima vibração ao sistema.

**Palavras-chave:** Engrenagens, Vibrações, Modificação do perfil do dente, Otimização, Rigidez de engrenamento variante no tempo.

# ABSTRACT

DIAS, Flávio. **Minimizing gear mesh vibration by the tooth profile modification of cylindrical spur gears. 2022. 113f.** Undergraduate thesis (Mechanical Engineering) - Federal University of Amazonas, Manaus-AM, 2022.

Gears are among the oldest devices invented by man and, among the various forms of power transmission, are generally the most robust and durable, with efficiency in the order of 98%. The dynamic characteristic of a gear transmission system is an important parameter to define its quality. The variation in the number of teeth in contact during rotation of the gears has a large contribution to the vibrations of these systems. From this context derives the need to evaluate the dynamic characteristics of the gear while still in the design phase. In this paper, a study is conducted on the addendum modification in the tooth profile of gears. For this purpose, dynamic model simulations were performed in order to determine an optimal value of the modification parameter capable of minimizing the vibrations of an ideal cylindrical spur gear for the specified operating conditions, considering time-varying gear stiffness and damping, including an improvement in the equivalent mass calculation. From the comparison between the simulation results of the optimized and original system, it is concluded that the optimal modification brings the dynamic responses closer to the static ones, with change rates close to zero and nearly constant transmission error, providing minimal vibration to the system.

**Keywords:** Gears, Vibrations, Tooth profile modification, Optimization, Time-varying mesh stiffness.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Nomenclatura de engrenagens de dentes retos. . . . .	30
Figura 2	Geração de uma evolvente a partir da circunferência de base. . . .	32
Figura 3	Nomenclatura do par engrenado. . . . .	33
Figura 4	Cinemática do engrenamento de um par de dentes. . . . .	34
Figura 5	Relações da linha de ação de um engrenamento. . . . .	35
Figura 6	Relação entre fases de engrenamento e razão de contato. . . . .	36
Figura 7	Distribuição de carga na superfície do dente e regiões de contato. .	38
Figura 8	Relação de engrenamento de um par de engrenagens. . . . .	38
Figura 9	Força elástica sobre o dente. . . . .	39
Figura 10	Modelo aproximado do dente no método de Ishikawa. . . . .	44
Figura 11	Relação entre as rigidezes. . . . .	48
Figura 12	Tipos de modificação de engrenagem. . . . .	52
Figura 13	Geração do perfil do dente. . . . .	52
Figura 14	Geração do perfil do dente a partir da ferramenta modificada. . . .	53
Figura 15	Modificação de adendo - alívio de topo. . . . .	53
Figura 16	Rigidez estática teórica e real. . . . .	54
Figura 17	Modelo dinâmico torcional de um engrenamento de engrenagens cilíndricas de dentes retos com 6 GDL. . . . .	57
Figura 18	Modelo dinâmico torcional de um engrenamento de engrenagens cilíndricas com dentes modificados. . . . .	60
Figura 19	Método de busca pela seção áurea de uma função. . . . .	63
Figura 20	Ilustração das iterações do método de busca pela seção áurea. . . .	64
Figura 21	Método de interpolação polinomial - quadrática. . . . .	65

Figura 22	Ilustração das iterações do método de interpolação polinomial - quadrática. . . . .	66
Figura 23	Definição da coordenada normalizada. . . . .	70
Figura 24	Método para cálculo da massa e momento de inércia dos dentes das engrenagens. . . . .	71
Figura 25	Método para cálculo da massa e momento de inércia das engrenagens. . . . .	72
Figura 26	Métodos de avaliação do TPM. . . . .	73
Figura 27	Relações entre sistemas e métodos. . . . .	73
Figura 28	Ilustração hipotética do resultado da interpolação. . . . .	74
Figura 29	Fluxograma do algoritmo de otimização. . . . .	76
Figura 30	Relações de engrenamento constantes - Sistema I. . . . .	80
Figura 31	Velocidade relativa simulada no ponto de contato - Sistema I. . . . .	80
Figura 32	Quantidade de modificação no ponto de contato - Sistema I. . . . .	81
Figura 33	Par de engrenagens do Sistema I. . . . .	82
Figura 34	Rigidez de engrenamento pelo método de Ishikawa - Sistema I. . . . .	84
Figura 35	Rigidez de engrenamento pelo método da energia - Sistema II. . . . .	85
Figura 36	Rigidez de engrenamento pelo método da energia - com o termo de rigidez de fundação - Sistema III. . . . .	85
Figura 37	Rigidez de engrenamento pelo método da energia de deformação Sistema I. . . . .	86
Figura 38	Relações estáticas do engrenamento - Sistema I. . . . .	87
Figura 39	Parâmetros e coeficiente de amortecimento com $\mu$ variável - Sistema I. . . . .	88
Figura 40	Coeficiente de amortecimento de engrenamento variante no tempo - Sistema I. . . . .	89
Figura 41	Qualidade da interpolação. . . . .	90
Figura 42	Respostas dinâmicas - Sistema I. . . . .	91

Figura 43	Respostas dinâmicas (a) - Sistema I com modificação. . . . .	92
Figura 44	Respostas dinâmicas sobre um ciclo de contato do dente (b) - Sistema I com modificação. . . . .	93
Figura 45	Rigidez equivalente - Sistema I. . . . .	94
Figura 46	Erro de transmissão estático com modificação - Sistema I. . . . .	94
Figura 47	Erro de transmissão dinâmico obtido através do Método II - Sistema I. . . . .	95
Figura 48	Erro de transmissão dinâmico pelo método da energia vs método de Ishikawa - Sistema I. . . . .	96
Figura 49	Erro de transmissão dinâmico sob condição de atrito variável - Sistema I. . . . .	96
Figura 50	Iterações do processo de otimização. . . . .	97
Figura 51	Respostas dinâmicas - Sistema I otimizado. . . . .	97
Figura 52	Erro de transmissão e rigidez equivalente - Sistema I otimizado. . . . .	98
Figura 53	Erros de transmissão - Sistema I. . . . .	99
Figura 54	Força dinâmica atuando em um par de dentes - Sistema I otimizado. . . . .	99
Figura 55	Respostas dinâmicas sob outras condições de operação ( $P = 40$ kW e $\omega = 1000$ rpm; $\Delta_{max} = 41,6009 \mu\text{m}$ ) - Sistema I. . . . .	101
Figura 56	Respostas dinâmicas sob outras condições de operação ( $P = 240$ kW e $\omega = 6000$ rpm; $\Delta_{max} = 41,6009 \mu\text{m}$ ) - Sistema I. . . . .	101
Figura 57	Respostas dinâmicas sob outras condições de operação ( $P = 150$ kW e $\omega = 1500$ rpm; $\Delta_{max} = 41,6009 \mu\text{m}$ ; $\Delta_{max_{opt}} = 102,9341 \mu\text{m}$ ) - Sistema I. . . . .	102
Figura 58	Momento de inércia de massa de um cilindro . . . . .	111
Figura 59	QR-Code do repositório com os códigos . . . . .	113

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Valores para os coeficientes do termo de rigidez de fundação. . . .	47
Tabela 2	Valores de referência para a geometria e material das engrenagens - Sistema I. . . . .	68
Tabela 3	Valores de referência para operação do engrenamento - Sistema I.	68
Tabela 4	Valores de referência para a geometria e material das engrenagens utilizadas na verificação dos cálculos da TVMS. . . . .	69
Tabela 5	Dimensões calculadas das engrenagens utilizadas na simulação e para validação dos cálculos da rigidez de engrenamento. . . . .	79
Tabela 6	Valores dos parâmetros constantes de engrenamento. . . . .	79
Tabela 7	Valores dos parâmetros de massa e momento de inércia do Sistema I original. . . . .	82
Tabela 8	Valores dos parâmetros de massa e momento de inércia do Sistema I modificado. . . . .	82

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAD	<i>Compute-Aided Design</i> - projeto auxiliado por computador
CAM	<i>Computer-Aided Manufacturing</i> - fabricação auxiliada por computador
CG	Centro de Gravidade
DEMEC	Departamento de Engenharia Mecânica
DTE	<i>Dynamic Transmission Error</i> - erro de transmissão dinâmico
FEA	<i>Finite Element Analysis</i> - análise de elementos finitos
FEM	<i>Finite Element Method</i> - método de elementos finitos
FT	Faculdade de Tecnologia
GDL	Grau(s) de liberdade
HPSTC	<i>Highest Point Single of Tooth Contact</i> - ponto mais alto de contato do dente em engrenamento simples
LPSTC	<i>Lowest Point Single of Tooth Contact</i> - ponto mais baixo de contato do dente em engrenamento simples
RMS	<i>Root Mean Square</i> - valor quadrático médio ou valor eficaz
STE	<i>Static Transmission Error</i> - erro de transmissão estático
TE	<i>Transmission Error</i> - erro de transmissão (teórico)
TPM	<i>Tooth Profile Modification</i> - modificação do perfil do dente
TVMD	<i>Time-Varying Meshing Damping</i> - amortecimento de engrenamento variante no tempo
TVMF	<i>Time-Varying Meshing Force</i> - força de engrenamento variante no tempo
TVMS	<i>Time-Varying Meshing Stiffness</i> - rigidez de engrenamento variante no tempo
UFAM	Universidade Federal do Amazonas

## LISTA DE SÍMBOLOS

$i$	$i = 1$ : pinhão; $i = 2$ : coroa
$j$	$j = 1$ : primeiro par de dentes engrenados; $j = 2$ : segundo par de dentes engrenados
$A_{di}$	Área do dente da engrenagem $i$
$A_{dm_i}$	Área do dente modificado da engrenagem $i$
$b$	Largura das engrenagens
$B_0$	Deformação estática
$c$	Coefficiente de amortecimento
$c_j$	Coefficiente de amortecimento do par de dentes $j$
$C_r$	Razão de contato
$d_{bi}$	Diâmetro de base da engrenagem $i$
$d_{ei}$	Diâmetro externo da engrenagem $i$
$d_{ii}$	Diâmetro interno da engrenagem $i$
$d_{pi}$	Diâmetro primitivo da engrenagem $i$
$E$	Módulo de elasticidade
$F$	Força atuante na linha de ação
$F_a$	Força axial
$F_{at}$	Força de atrito
$F_n$	Força normal no ponto de contato
$F_t$	Força tangencial no ponto de contato
$G$	Módulo de elasticidade ao cisalhamento
$h_{fi}$	Razão do raio do furo pelo diâmetro interno da engrenagem $i$
$h_i$	Altura do dente (sem corte) da engrenagem no modelo de Ishikawa
$h_i$	Altura do dente da engrenagem no modelo de Ishikawa

$h_{i,j}$	Metade da largura do dente no ponto de contato do dente $j$ da engrenagem $i$
$h_{r_i}$	Altura da base do dente da engrenagem no modelo de Ishikawa
$h_{x_i}$	Altura do ponto de contato no dente da engrenagem no modelo de Ishikawa
$I_{c_i}$	Momento de inércia cilindro de base da engrenagem $i$
$I_{d_i}$	Momento de inércia do dente da engrenagem $i$
$I_{dm_i}$	Momento de inércia do dente modificado da engrenagem $i$
$J_i$	Momento de inércia polar da engrenagem $i$
$J_{m_i}$	Momento de inércia polar modificado da engrenagem $i$
$k_{a,i,j}$	Rigidez de compressão axial do dente da engrenagem $i$
$k_{b,i,j}$	Rigidez de flexão do dente da engrenagem $i$
$k_{f,i,j}$	Rigidez de fundação do dente da engrenagem $i$
$k_{h_j}$	Rigidez de contato Hertziano do par $j$ de dentes engrenados
$k_j$	Coefficiente de rigidez do par de dentes $j$
$k_M$	Rigidez total do sistema modificado
$k_{s_i,j}$	Rigidez de cisalhamento do dente
$l_i$	Distância do ponto de contato com relação à base do dente da engrenagem $i$
$l_{k_j}$	Distância do HPSTC (ou LPSTC) ao ponto de contato
$L_a$	Distância entre as duas circunferências de base (na tangente comum ao pinhão e coroa)
$m$	Modulo das engrenagens
$m_{c_i}$	Massa do cilindro de base da engrenagem $i$
$m_{d_i}$	Distância em que não há engrenamento (na tangente comum ao pinhão e coroa) (com referência ao pinhão ( $i = 1$ ) ou coroa ( $i = 2$ ))
$m_{dente_i}$	Massa do dente da engrenagem $i$
$m_{dm_i}$	Massa do dente modificado da engrenagem $i$
$m_{e_m}$	Massa equivalente do sistema modificado
$m_e$	Massa equivalente do sistema

$m_i$	Massa total da engrenagem $i$
$m_{mi}$	Massa total da engrenagem $i$ modificada
$N_i$	Número de dentes da engrenagem $i$
$p_b$	Passo de base
$P$	Potência transmitida pelo eixo do pinhão (entrada)
$PTH$	Comprimento da linha de contato (tangente comum ao pinhão e coroa)
$r_{bi}$	Raio de base da engrenagem $i$
$r_{ei}$	Raio externo da engrenagem $i$
$r_{fi}$	Raio do furo da engrenagem $i$
$r_{ii}$	Raio interno da engrenagem $i$
$r_{pi}$	Raio primitivo da engrenagem $i$
$r_{x_{i,j}}$	Distância do ponto de contato do par de dentes engrenados $j$ ao centro da engrenagem $i$
$R_j$	Razão de compartilhamento de carga sobre o par de dentes $j$
$R_a$	Rugosidade da superfície dos dentes das engrenagens
$S_{a_i}$	Largura do dente (no diâmetro do adendo) da engrenagem $i$ no modelo de Ishikawa
$S_{d_i}$	Largura do dente (no diâmetro do dedendo) da engrenagem $i$ no modelo de Ishikawa
$t_0$	Tempo inicial dos estados
$T$	Torque imposto pelo eixo ao pinhão (entrada)
$T_0$	Temperatura de operação do sistema
$TE$	Erro de transmissão estático teórico
$TE'$	Erro de transmissão estático real
$TE_M$	Erro de transmissão estático do sistema com TPM
$U$	Energia dissipada pelo atrito
$v_{relj}$	Velocidade relativa no ponto de contato do par $j$

$V_{d_i}$	Volume do dente da engrenagem $i$
$V_{dmi}$	Volume do dente modificado da engrenagem $i$
$W_a$	Trabalho realizado pelo atrito
$x$	Erro de transmissão (na linha de ação)
$x_0$	Vetor de estados iniciais
$x_{cg_i}$	Centroide do dente da engrenagem $i$
$\dot{x}$	Taxa de variação do erro de transmissão (na linha de ação)
$\ddot{x}$	Taxa de variação da velocidade do erro de transmissão (na linha de ação)
$\vec{x}$	Vetor de estados
$\dot{\vec{x}}$	Derivada temporal do vetor de estados
$X_i$	Distância do ponto de contato na linha de ação do ponto de contato $i$
$y_{cg_i}$	Centroide do dente da engrenagem $i$
$y_{cgmi}$	Centroide do dente modificado da engrenagem $i$
$\alpha$	Ângulo de pressão
$\alpha_{crit}$	Ângulo de pressão crítico
$\alpha_{i,0}$	Posição angular inicial do dente da engrenagem $i$ quando $\theta_1 = 0$
$\alpha_{x_i,j}$	Ângulo do ponto de contato do par $j$ de dentes engrenados da engrenagem $i$
$\beta_c$	Expoente de modificação ( $\beta_c = 1$ : modificação linear)
$\Gamma$	Coordenada normalizada (posição de contato referente ao ponto primitivo)
$\delta_{Br_i}$	Deformação de flexão da parte retangular do dente da engrenagem $i$ (método da ishikawa)
$\delta_{Bt_i}$	Deformação de flexão da parte trapezoidal do dente da engrenagem $i$ (método da ishikawa)
$\delta_{G_i}$	Deformação de base do dente da engrenagem $i$ (método da ishikawa)
$\delta_{pv_i}$	Deformação de contato do par de dentes engrenados (método da ishikawa)
$\delta_{S_i}$	Deformação de cisalhamento do dente da engrenagem $i$ (método da ishikawa)
$\delta_{t_i}$	Deformação total do dente da engrenagem $i$ (método da ishikawa)

$\Delta TE$	Erro de transmissão estático equivalente
$\Delta_{i,j}$	Valor da modificação do dente no ponto de contato
$\bar{\Delta}_j$	Valor da modificação total no ponto de contato do par de dentes engrenados
$\Delta_{max}$	Valor máximo da modificação
$\Delta_{max,opt}$	Valor máximo da modificação ótima
$\zeta$	Fator de amortecimento
$\eta_M$	Viscosidade cinemática do lubrificante
$\theta_i$	Deslocamento angular (teórico) da engrenagem $i$
$\theta'_i$	Deslocamento angular real da engrenagem $i$
$\dot{\theta}_i$	Velocidade angular da engrenagem $i$
$\ddot{\theta}_i$	Aceleração angular da engrenagem $i$
$\theta_{b_i}$	Metade da distância angular da raiz do dente da engrenagem $i$
$\theta_d$	Duração angular da fase de engrenamento duplo (2 pares de dentes em contato)
$\theta_s$	Duração angular da fase de engrenamento simples (apenas 1 par de dente em contato)
$\lambda$	Razão de frequências
$\mu$	Coeficiente de atrito
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\nu_{P_\varepsilon}$	Velocidade tangencial no ponto de contato
$\rho$	Densidade do material das engrenagens
$\rho_0$	Densidade do lubrificante
$\phi_{i,j}$	Ângulo de engrenamento do par $j$ de dentes engrenados da engrenagem $i$
$\chi$	Amplitude de vibração de ressonância
$\omega$	Frequência de excitação vibracional
$\omega_i$	velocidade de rotação da engrenagem $i$
$\omega_n$	Frequência natural

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>20</b>
1.1	Objetivos . . . . .	27
1.1.1	Objetivo geral . . . . .	27
1.1.2	Objetivos específicos . . . . .	27
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>29</b>
2.1	Engrenagens cilíndricas de dentes retos . . . . .	29
2.1.1	Nomenclatura . . . . .	29
2.1.2	A curva evolvente . . . . .	31
2.1.3	Relações geométricas e engrenamento . . . . .	32
2.1.4	Erros de engrenamento . . . . .	41
2.2	Rigidez de engrenamento variante no tempo . . . . .	43
2.2.1	Método de Ishikawa . . . . .	43
2.2.2	Método da energia de deformação . . . . .	46
2.3	Amortecimento variante no tempo . . . . .	48
2.3.1	Fator de amortecimento . . . . .	50
2.4	Modificação do perfil dos dentes . . . . .	51
2.5	Modelo dinâmico . . . . .	55
2.5.1	Modelo de um par de engrenagens de dentes retos . . . . .	56
2.5.2	Modelo dinâmico com modificação do perfil do dente . . . . .	59
2.6	Otimização . . . . .	62
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>67</b>
3.1	Parâmetros do engrenamento . . . . .	67

3.2	Rigidez e amortecimento de engrenamento . . . . .	70
3.3	Massa e momento de inércia . . . . .	71
3.4	Modificação do perfil dos dentes . . . . .	72
3.5	Modelo dinâmico . . . . .	73
3.6	Otimização . . . . .	75
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>78</b>
4.1	Sistema de engrenagens . . . . .	78
4.1.1	Dimensões e relações de engrenamento . . . . .	78
4.1.2	Modificação dos dentes . . . . .	81
4.1.3	Massa e momento de inércia . . . . .	81
4.1.4	Rigidez e amortecimento de engrenamento . . . . .	83
4.1.4.1	Amortecimento . . . . .	87
4.2	Simulação dos modelos dinâmicos . . . . .	90
4.2.1	Método I . . . . .	91
4.2.2	Método II . . . . .	94
4.3	Otimização . . . . .	97
4.4	Influência das diferentes condições de operação . . . . .	100
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>103</b>
5.1	Conclusões . . . . .	103
5.2	Sugestões para trabalhos futuros . . . . .	104
	<b>Referências</b>	<b>105</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>110</b>
	<b>Apêndice B</b>	<b>112</b>

# 1 INTRODUÇÃO

As engrenagens estão entre os mais antigos dispositivos inventados pelo homem. Conforme apontam Juvinall e Marshek (2013), há relatos da utilização de engrenagens em carruagens chinesas datadas do ano de 2600 a.C.. Aristóteles, no século IV a.C., escreveu sobre engrenagens como se fossem elementos muito comuns. No século XV, Leonardo da Vinci projetou grande quantidade de dispositivos incorporando diversos tipos de engrenagens. Os autores ainda mencionam que entre as diversas formas de transmissão de potência mecânica, as engrenagens são geralmente mais robustas e duráveis, com eficiência na ordem de 98%. Contudo, os custos de fabricação são, em geral, maiores que o de correntes e correias e aumentam significativamente com o aumento da precisão - exigido pela combinação de altas velocidades, cargas e baixos níveis de ruído.

Wu, Zuo e Parey (2008) relatam que as engrenagens possuem um papel importante na indústria, na aplicação automotiva e no cotidiano. Segundo Huang e Liu (2000), com a demanda por máquinas que operam com altas rotações, surge a necessidade de prever as características dinâmicas de sistemas de transmissão por engrenagens ainda durante a fase de projeto. Características estas que, de acordo com Luo e Li (2019a), são importantes parâmetros para definir a qualidade desses sistemas.

Durante o processo de engrenamento, excitações internas são geradas principalmente pela mudança no número de dentes em contato durante a rotação das engrenagens, resultando em vibrações e ruídos ao sistema, podendo ocasionar instabilidades em certas condições de operação. Além de causar danos às próprias engrenagens, as vibrações são propagadas aos demais componentes do sistema, resultando no aumento da carga dinâmica nos elementos de fixação e apoio, reduzindo a vida útil, agravando e/ou acelerando as causas de falhas prematuras.

Wang (2007) afirma que o perfil dos dentes das engrenagens tem grande influência na vibração e ruído do sistema, esses podendo ser amplamente reduzidos com uma sutil

modificação do perfil. Além disso, Hu *et al.* (2016) mencionam que a modificação do perfil já é uma prática utilizada para evitar impacto nas engrenagens durante o processo de engajamento<sup>1</sup>, provendo maior estabilidade de transmissão. Ma *et al.* (2016) relatam que tal modificação pode reduzir os erros de transmissão e compensar por erros de fabricação.

As investigações sobre vibrações, impactos e ruídos em sistema de engrenagens tem sido tópico de interesse nas últimas décadas (XIAO *et al.*, 2019). Ainda nos anos 70, Conry e Seireg (1971) desenvolveram um algoritmo para análise de corpos elásticos em contato utilizando uma modificação do método simplex (método de otimização linear) complementado pela análise de elementos finitos (FEA), para obter os esforços (excitações internas) que minimizam a energia de deformação no contato entre corpos. Posteriormente, Conry e Seireg (1973) aplicaram esta metodologia tratando especificamente da distribuição de carga na superfície dos dentes de engrenagens. Esse método é conhecido como LTCA (*Loaded Tooth Contact Analysis* – análise de contato do dente carregado).

Simon (1989) apresentou um estudo sobre a modificação ótima no perfil dos dentes de engrenagens de dentes retos e helicoidais, considerando, simultaneamente, o alívio de topo e coroamento dos dentes. O trabalho consistia na aplicação de um modelo de modificação linear (para o alívio de topo e coroamento) e parabólico (apenas o coroamento) os quais foram otimizados para minimizar o fator de distribuição de carga entre os dentes.

Já no final do século passado, Litvin *et al.* (1999) realizou uma simulação computacional do engrenamento de engrenagens helicoidais convencionais e com modificações na geometria, incluindo alterações da superfície dos dentes. A metodologia empregada em seu trabalho ficou sendo conhecida como TCA (*Tooth Contact Analysis* – análise de contato do dente) e foi um marco para o estudo das engrenagens. O autor é muitas vezes referenciado como o precursor da teoria do engrenamento moderno, pois a metodologia por ele apresentada permite determinar a superfícies dos dentes obtidas através da superfície da ferramenta geradora, além de fornecer as linhas de contato do engrenamento na superfície dos dentes.

Alguns estudos incorporaram as metodologias do TCA e LTCA para obter as características de contato, distribuição de carga, superfície modificada do dente e mini-

---

<sup>1</sup>Início do contato entre um novo par de dentes.

mização da vibração de engrenamento. Dos mais recentes autores que se apropriaram desta mescla, destacam-se: Wang e Shi (2017) apresentando um método preciso para o cálculo das perdas por atrito para um par de engrenagens helicoidais, levando em consideração os erros de transmissão, e tal modelo foi posteriormente utilizado no trabalho de Wang (2019), otimizando o perfil do dente de engrenagens helicoidais baseado nas características dinâmicas do engrenamento, minimizando as vibrações do sistema de engrenagens. Em seguida, Wang (2021a) realizou estudo semelhante, porém a partir de uma otimização multi-objetivo na qual avaliou a velocidade relativa entre os dentes além dos parâmetros de modificação de perfil e axial. E, finalmente, Wang (2021b) aplicou modificações 3D no dente para reduzir vibrações de engrenagens helicoidais, utilizando os mesmos princípios de seus demais recentes trabalhos.

Este tipo de modelagem e simulação da resposta dinâmica usualmente requer grande quantidade de dados obtidos do TCA e FEA combinados com técnicas numéricas que consomem recursos e tempo (GKIMISIS *et al.*, 2021). Outra abordagem difundida, que também sofreu evoluções durante os últimos anos, é a análise do engrenamento através do modelo dinâmico elaborado a partir do cálculo analítico da rigidez de engrenamento variante no tempo (TVMS).

Este cálculo era comumente realizado por aproximações do perfil dos dentes em modelos quase-estáticos. Conforme estudos na área se desenvolviam, surgiram melhorias nas aproximações do perfil dos dentes e modelos que permitiam que rigidez fosse calculada dinamicamente. Como o método de Ishikawa (desenvolvido por Si-lurian Ishikawa em 1984) para o cálculo analítico da TVMS, apresentado por Shi *et al.* (2013), no qual o autor utiliza uma aproximação do dente por um retângulo e um trapézio.

Estas aproximações acabam por violar a lei de Willis, que relaciona a força do engrenamento com as características geométricas do perfil de dente involuto. Assim, no modelo de Ishikawa, perdem-se informações importantes para uma análise precisa sobre os efeitos provocados pela mudança da rigidez ao longo do tempo na dinâmica do engrenamento.

Já o método da energia de deformação (também conhecido como método da energia potencial) para o cálculo analítico da TVMS, considerando a deformação de flexão do dente, compressão axial e de contato hertziano (ou contato de Hertz), foi apresentado em um modelo proposto por Yang e Lin (1987). A notável diferença deste modelo

para o de Ishikawa é a utilização do perfil evolvente perfeito.

Apesar desse último modelo oferecer uma proposta melhor que aquela que costumava ser utilizada, Tian, Zuo e Fyfe (2004) incluíram a energia de deformação causada por esforços de cisalhamento do dente. Os autores compararam-na com as até então utilizadas energia de deformação axial, flexão e contato, evidenciando a maior influência da energia causada pelo cisalhamento que as demais sobre a energia de deformação total. E concluíram que a energia de deformação causada por esforços cisalhantes afeta a rigidez do engrenamento em um fator de 2.

Outra melhoria ao método da energia foi apresentada por Sainsot, Velex e Duverger (2004), quando introduziram a energia causada pela a deflexão da fundação do dente. Os autores se basearam na teoria de Muskhelishvili *et al.* (1953) para tensões e deformações de corpos anelares para encontrar a fórmula analítica da rigidez de fundação assumindo variações lineares e constantes das tensões na raiz do dente.

Além da rigidez, a consideração do amortecimento é também importante para a modelagem de um sistema de engrenagens, uma vez que esse contabiliza a dissipação de energia. Segundo Gkimisis *et al.* (2021), o amortecimento de engrenamento está relacionado principalmente aos efeitos da lubrificação, visto que o amortecimento histerético (que ocorre pela dissipação de energia interna do corpo devido à perdas na restituição da deformação após remoção das cargas que a causaram) é bem menos significativo. O fator de amortecimento é geralmente calculado através de relações semi-empíricas, apesar de que nenhum consenso tenha sido estabelecido nesta metodologia de modelagem.

O trabalho de Li e Kahraman (2011) relata que a derivação do termo de amortecimento não é tão direta quanto a da rigidez, justificando a determinação empírica do coeficiente de amortecimento viscoso na maioria dos modelos dinâmicos. Os autores declaram que as relações entre o engrenamento e a perda de potência mecânica devido ao amortecimento tem atraído a pouca atenção dos pesquisadores, apesar do pouco que se sabe sobre o mecanismo de amortecimento do engrenamento. Como uma gama de valores para o fator de amortecimento são citadas na literatura experimental, com variações de 1–2% à elevados 10%, os autores propuseram uma formulação para o amortecimento baseados no princípio da lubrificação elastohidrodinâmica (um tipo de lubrificação hidrodinâmica que ocorre quando há pressão de contato e deslizamento simultâneos entre os corpos). Eles também investigam a influência das condições de

contato, incluindo torque, velocidade e temperatura do lubrificante no amortecimento do engrenamento.

Li (2015) contribuiu com o modelo apresentado por Li e Kahraman (2011) introduzindo uma derivação da perda de desempenho mecânico. O autor notou que o aumento de temperatura do óleo reduz a viscosidade e conseqüentemente eleva a fricção e perda de potência, fator considerado no trabalho de Li e Kahraman (2011). Esta desconsideração não é apropriada em condições de elevado deslizamento onde o efeito térmico é evidente, fato que, segundo o autor, demandava um modelo térmico de lubrificação que foi por ele apresentado ao invés do isotérmico.

Luo e Li (2019b) também publicaram um estudo utilizando um modelo de dissipação para o cálculo do fator de amortecimento, baseado na perda de energia por atrito no engrenamento. Também investigam o efeito da modificação do perfil do dente nas características dinâmicas de um sistema de transmissão por engrenagens com condições termoelásticas de engrenamento.

Uma proposta diferente das apresentadas até então foi trazida por Zhan, Fard e Jazar (2017), quando elaboram um método CAD-FEM-QSA (*Computer Aided Design for Finite Element Method of Quasi-Static Algorithm* – projeto assistido por computador para o método de elementos finitos de algoritmo quase-estático). Além de expor diversas comparações entre o método analítico e o FEM na determinação da rigidez de engrenamento. Os autores afirmam que o método analítico não é extremamente preciso quanto o FEM, devido à complexidade da geometria das engrenagens, porém, apresenta maior eficiência computacional.

Gkimisis *et al.* (2021) declaram o significativo custo computacional que foi introduzido com as simulações dinâmicas, tornando-as de certa forma impraticáveis para os renderizadores atuais (situação agravada com engrenagens e sistemas mais complexos). Assim como conclui Zhan, Fard e Jazar (2017), a maioria dos estudos sobre engrenagens focam em análises 2D, dada a relativa insuficiência na análise 3D. Apesar do custo computacional elevado, a técnica da FEA trouxe contribuições para a análise de propriedades estáticas das engrenagens, além de auxiliar com a validação de resultados obtidos analiticamente.

Segundo Tian, Zuo e Fyfe (2004), as pesquisas sobre a dinâmica de mecanismos de engrenagens têm ganhado bastante atenção nas últimas décadas: com modelos simples de massa-mola com um grau de liberdade até modelos mais sofisticados com múlti-

plos graus de liberdade, considerando a TVMS, amortecimento, erros de fabricação e montagem, não linearidade, atrito, desgaste e trincas. Modelos estes que variam da consideração apenas da vibração torcional ao acoplamento lateral-torcional da vibração em metodologias analíticas e métodos numéricos.

Li e Kahraman (2011) também mencionam que as publicações de dados experimentais indicam que engrenagens cilíndricas de dentes retos se comportam como sistemas não lineares variantes no tempo, devido aos fatores discutidos até então. Estes modelos geralmente empregam dois discos rígidos para representar a inércia do corpo das engrenagens, que estão conectadas uma à outra através da interface de engrenamento ao longo da linha de ação.

Métodos numéricos são utilizados para a solução destes modelos dinâmicos, que tratam de equações diferenciais. Algumas funções são disponíveis no *software* MATLAB, como as documentadas por Shampine e Reichelt (1997). Dentre as mais utilizadas estão a *ode45*, geralmente a primeira a ser utilizada, pois possui precisão elevada para problemas não rígidos (não existe um consenso sobre a definição matemática de um problema rígido, mas esse pode ser entendido como um problema difícil de resolver com métodos explícitos (CASH, 2000)). Para o caso de demora excessiva da solução pela *ode45*, é possível que o problema em questão seja rígido, então, se faz o uso da *ode15s*. De acordo com Louzada Neto (2019), essa é geralmente indicada para problemas com funções descontínuas, como o caso do engrenamento.

A diferença por trás do funcionamento destas duas funções é: a *ode45* realiza soluções numéricas em problemas de valor inicial utilizando o método explícito de Runge-Kutta de 4, 5 ordem. Já a *ode15s* utiliza uma implementação da diferenciação numérica com passo quase-constante em termos de *backward differentiation* (método de diferenciação semelhante ao usual, porém com o termo da função incremental sendo o valor da função no passo anterior) e realiza várias etapas em cada iteração.

Os estudos nessa área das engrenagens utilizam as abordagens aqui mencionadas para a obtenção do sinal de vibração através do modelo dinâmico empregado, sendo parte destes relacionados à previsão de falhas. Como o trabalho já mencionado de Tian, Zuo e Fyfe (2004), que investiga a resposta vibracional de uma caixa de engrenagens de um estágio com falhas dos dentes. E o estudo conduzido por Zhou *et al.* (2012), onde utilizam um algoritmo combinado com um método de modelagem autorregressiva e demodulação do sinal de vibração para investigar as características da resposta com o

aumento da trinca.

Chen e Shao (2011) desenvolveram um modelo analítico capaz de prever mudanças na rigidez causadas por trincas e analisaram o comportamento dinâmico do engrenamento em vários estágios. Esse trabalho abriu caminhos para análises do monitoramento das condições de falha e diagnósticos, especialmente para trincas em estágio inicial, provendo base para a tese de Zhao (2015), na qual o autor desenvolveu métodos de prognóstico a fim de prever a vida útil de componentes específicos, integrando a física da falha e dados de monitoramento. O também já citado autor, Louzada Neto (2019), aplicou métodos de prognóstico baseado em filtros de partículas na análise de uma caixa de engrenagens, utilizando o mesmo modelo dinâmico apresentado por Zhao (2015).

A motivação deste trabalho veio do estudo em que Luo e Li (2019b) realizaram uma modificação linear de adendo no perfil dos dentes. Os autores apresentaram um novo método para modelagem do sistema dinâmico com perfil modificado, considerando a quantidade de modificação do perfil como parte do erro de transmissão do sistema, utilizando também um método de amortecimento equivalente baseado na dissipação de energia pelo atrito. Perceberam ainda que um termo forçante no modelo dinâmico é introduzido devido à modificação do perfil, o que difere seu trabalho dos demais relacionados com o tema. Contudo, os autores utilizaram o método de Ishikawa para o cálculo da rigidez de engrenamento, além de deixarem uma lacuna sobre como escolher a melhor quantidade de modificação para o perfil dos dentes. Também não comentaram sobre os efeitos de diferentes condições de operação sobre a dinâmica do sistema de engrenagens com dentes modificados.

Mediante esse contexto, como forma de contribuir para o estudo dos efeitos das modificações do perfil dos dentes das engrenagens, este trabalho tem como enfoque a raiz da vibração de um sistema de engrenagens: o engrenamento em si. Para isso, é adotado um sistema ideal de engrenagens cilíndricas de dentes retos, isto é, um par de engrenagens sem defeitos de fabricação e montagem, construídas com material homogêneo (densidade constante), possuindo rugosidade da face do dente constante, operando sob condição de lubrificação ideal (fornecimento de lubrificante contínuo e sem variação na temperatura de operação do sistema), com torque e velocidade rotacional de entrada constantes.

Levando em consideração a rigidez e o amortecimento variantes no tempo e utili-

zando um método de dissipação de energia por atrito de contato entre os dentes para o cálculo do amortecimento, o modelo dinâmico do engrenamento com e sem alívio de topo (modificação de adendo) é estabelecido e simulado, obtendo-se o sinal de vibração e outras características dinâmicas do sistema. Em seguida, um método de otimização baseado na busca pela seção áurea é aplicado a fim de encontrar o parâmetro de modificação do perfil do dente que minimize a vibração do engrenamento para determinada condição de operação.

De forma sucinta, a estrutura do trabalho está disposta da seguinte forma: A presente introdução contextualiza e demonstra a relevância e motivação do tema estudado, além de exibir uma abordagem geral ao leitor do que esperar deste trabalho juntamente com os objetivos geral e específicos, que descrevem o foco da metodologia utilizada; no Capítulo 2, a revisão da literatura relata o atual estado da arte, trazendo estudos relevantes sobre o tema abordado além do referencial teórico necessário para a compreensão do desenvolvimento e da abordagem utilizada no decorrer do trabalho; no Capítulo 3 a metodologia é apresentada, assim como as delimitações e hipóteses consideradas neste estudo; já o Capítulo 4 apresenta a aplicação da metodologia proposta, juntamente com a discussão dos resultados obtidos; e, por fim, o Capítulo 5 traz as conclusões juntamente com as perspectivas e sugestões para trabalhos futuros.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivo geral**

Minimizar a amplitude de vibração de um par de engrenagens cilíndricas de dentes retos em engrenamento externo ideal por meio da modificação de adendo no perfil dos dentes.

### **1.1.2 Objetivos específicos**

- a) Definir os parâmetros das engrenagens e condições de operação do sistema a ser trabalhado;
- b) Calcular a geometria das engrenagens e relações do engrenamento;
- c) Definir o modelo vibracional do sistema, incluindo o parâmetro de modificação;

- d) Calcular a massa equivalente do sistema;
- e) Calcular a rigidez de engrenamento variante no tempo através do método da energia potencial;
- f) Calcular o amortecimento variante no tempo;
- g) Solucionar o modelo dinâmico;
- h) Avaliar quantitativamente o erro de transmissão dinâmico, através da amplitude pico-a-pico;
- i) Elaborar um algoritmo de otimização para minimizar a amplitude do erro de transmissão dinâmico em regime permanente;
- j) Avaliar o resultado da otimização, através da simulação do sistema original e otimizado;
- k) Avaliar a influência das condições de operação na quantidade ótima do parâmetro de modificação.

## **2 REVISÃO DA LITERATURA**

O presente capítulo traz mais detalhes sobre os temas abordados, a fim de facilitar a compreensão do desenvolvimento e dos resultados obtidos (Capítulo 4), limitando-se ao estudo de engrenagens cilíndricas de dentes retos em engrenamento externo com razões de contato entre 1 e 2 (Subseção 2.1.3).

### **2.1 Engrenagens cilíndricas de dentes retos**

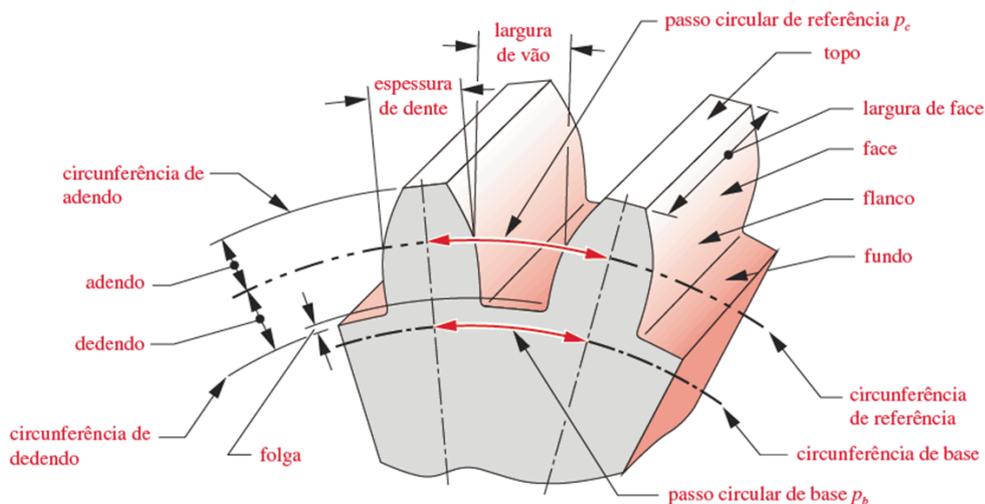
Flores e Gomes (2015) mencionam que as engrenagens são consideradas uma evolução das rodas de atrito que, como o nome sugere, transferem o movimento entre os eixos através da força de atrito no contato entre as rodas. Como é de se esperar, deslizamento e perdas são marcantes neste tipo de transferência.

Juvinall e Marshek (2013) relatam que, dentre os mais diversos tipos de engrenagens (como cilíndricas com dentes helicoidais, cônicas com dentes retos, cônicas helicoidais, cônicas hipoides, parafuso sem fim, cremalheira, etc.), as cilíndricas de dentes retos representam o tipo mais simples e comum, cuja finalidade é transmitir movimento e potência entre eixos paralelos por meio dos dentes em contato com uma relação de velocidades angulares mais constante possível. O perfil dos dentes das engrenagens são então baseados em curvas teóricas que atendam o critério de ação conjugada (Subseção 2.1.3). Contudo, imprecisões do processo de fabricação, deformações durante o contato e erros de montagem causarão ligeiros desvios a esta relação.

#### **2.1.1 Nomenclatura**

Para situar o leitor com a terminologia básica de engrenagens de dentes retos, são ilustradas a seguir as principais nomenclaturas utilizadas neste trabalho, suas relações e cálculos envolvidos.

Figura 1: Nomenclatura de engrenagens de dentes retos.



Fonte: Norton (2013).

Uma engrenagem cilíndrica de dentes retos é constituída com base em alguns diâmetros (ilustrados na Figura 1), sendo:

**Diâmetro primitivo ( $d_p$ ):** Define a circunferência primitiva e é utilizado para determinar as relações de transmissão entre o par de engrenagens, pois é nele que ambas as engrenagens se encontram em apenas um único ponto, como melhor visualizado na Figura 3;

**Diâmetro externo ou de adendo ( $d_a$ ):** Define a circunferência de adendo, limitando a altura dos dentes;

**Diâmetro interno ou de dedendo ( $d_d$ ):** Define a circunferência de dedendo, delimitando o cilindro do corpo da engrenagem;

**Diâmetro de base ( $d_b$ ):** Define a circunferência de base, utilizado como referência para a geração do perfil evolvente (Subseção 2.1.2).

O adendo ( $h_a$ ) é distância definida pela diferença radial entre a circunferência de adendo (ou externo) e a circunferência primitiva. Semelhante ao dedendo ( $h_d$ ), que é a distância definida pela diferença radial entre a circunferência primitiva e a circunferência de dedendo somado à folga. O passo circular ( $p_c$ ) é a distância do arco percorrido em um ciclo do dente com relação à circunferência primitiva, ou ainda, pode ser definido como a quantidade de dentes por milímetro na circunferência primitiva. Já o

passo de base ( $p_b$ ), é a mesma medida angular porém com relação à circunferência de base. A espessura do dente ( $sc$ ) é medida com a referência da circunferência primitiva, assim como a largura do vão. Outra relação importante é o ângulo do dente ( $\gamma$ ), sendo a distância angular do dente medido em relação à circunferência primitiva.

De acordo com Provenza (1987) essas relações são dadas por:

$$\begin{aligned}
 d_{pi} &= mN_i, & d_{bi} &= d_{pi} \cos \alpha, \\
 d_{ai} &= m(N_i + 2), & d_{di} &= m(N_i - 2,334), \\
 p_{ci} &= m\pi, & p_{bi} &= \frac{\pi d_{bi}}{N_i}, \\
 h_{ai} &= m, & h_{di} &= 1,167 m, \\
 h_i &= h_{ai} + h_{di}, & \gamma_i &= \frac{2\pi}{N_i}, \\
 sc_i &= N_i m \sin \alpha, & e_i &= 0,167 m.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Onde  $\alpha$  é o ângulo de pressão (ver Figura 3),  $N_i$  o número de dentes da engrenagem. O módulo representa o inverso do passo primitivo (ou de referência), calculado como  $m = 25,4 P/\pi$  (em milímetros), e  $e_i$ , a folga da engrenagem  $i$ .

Segundo Juvinal e Marshek (2013), a largura da face da engrenagem é geralmente determinada como:

$$9m < b < 14m, \tag{2.2}$$

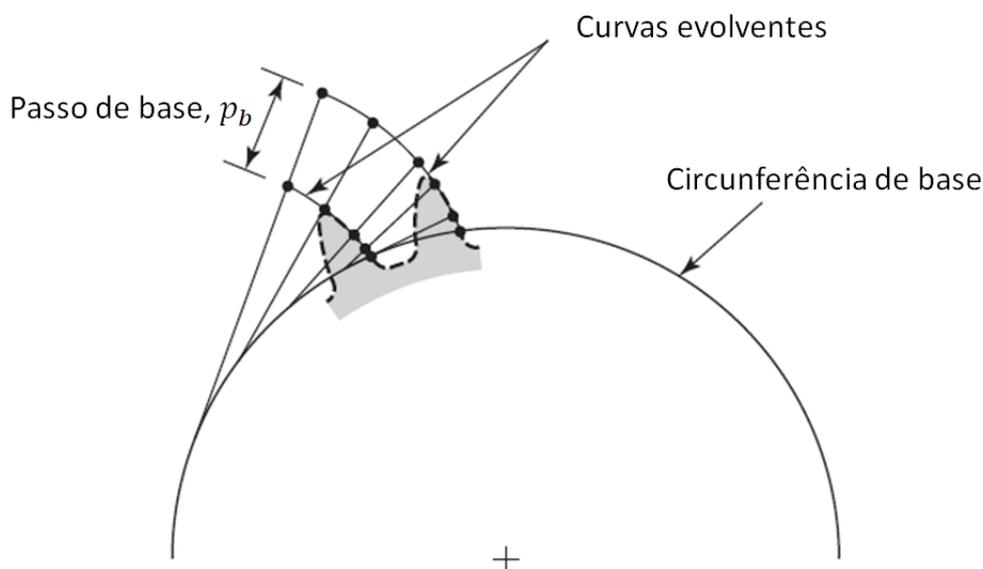
também podendo ser definida por requisitos de resistência (e critério de falhas) ou ainda por requisitos de projeto, como limitação da largura devido às dimensões da caixa de engrenagens.

### 2.1.2 A curva evolvente

Segundo Budynas e Nisbett (2020), a ação conjugada de um engrenamento é o movimento conjunto das engrenagens com velocidade angular constante. Este critério pode ser satisfeito através vários perfis de dentes (Subseção 2.1.3). Há registros das mais diversas curvas utilizadas nos perfis disponíveis na literatura, como a curva cicloidal de uma engrenagem que funciona por meio de excentricidade dos eixos de transmissão, a exemplo do estudo conduzido por Hwang e Hsieh (2007). Porém, a curva teórica mais utilizada para atender ao critério geométrico da ação conjugada ideal é chamada de evolvente de circunferência (também conhecida como involuta),

que é a curva gerada por qualquer ponto sobre uma linha tensa quando desenrolada de uma circunferência (de base), como exemplificado na Figura 2.

Figura 2: Geração de uma evolvente a partir da circunferência de base.



Fonte: Adaptado de Juvinal e Marshek (2013).

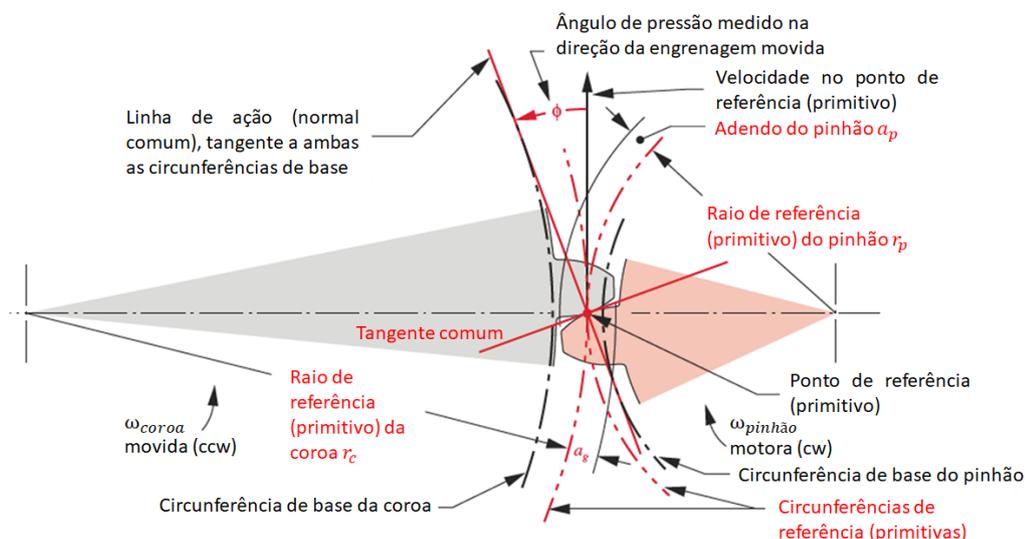
Nota-se que a distância entre os pontos marcados na linha tensa permanecem constantes ( $p_b$ ), enquanto a superfície do dente é percorrida pelos pontos ao desenrolar da linha na circunferência de base. A partir desta propriedade, surgem algumas relações na linha de ação de um engrenamento (Figura 3).

### 2.1.3 Relações geométricas e engrenamento

Os requisitos fundamentais para as formas de perfis de qualquer par de engrenagens conjugadas podem ser resumidos na lei fundamental de Willis (para engrenamento com eixos paralelos). Segundo Radzevich (2016), a lei de Willis declara que as normais aos perfis dos dentes engrenados, em todos os pontos de contato, passam por um ponto fixo localizado na linha de centro que, como o nome sugere, é uma reta que atravessa o centro geométrico das engrenagens.

Costumeiramente, atribui-se o nome de “pinhão” para a engrenagem motora (usualmente a de menor diâmetro, para o caso de redução de velocidade/aumento de torque) e “coroa” para a engrenagem movida. Surgem algumas propriedades ao acoplar-se um par de engrenagens compatíveis, como mostra a Figura 3:

Figura 3: Nomenclatura do par engrenado.



Fonte: Adaptado de Norton (2013).

As duas circunferências primitivas se interceptam em um único ponto (primitivo ou de referência), comum à linha de centros e à linha de ação (também chamada de linha de geração ou linha de pressão, segundo Budynas e Nisbett (2020)), sendo essa a reta tangente comum às duas circunferências de base. Vê-se a linha de ação como a linha tensa que gera a curva involuta (Subseção 2.1.2) e, quando as engrenagens rotacionam, o ponto de contato comum entre os dentes se moverá sobre esta linha, atendendo o requisito de ação conjugada. Além disso, o ponto primitivo se trata também do centro instantâneo de velocidade nula sendo, de acordo com a lei de Willis, por ele que toda normal ao ponto de contato em qualquer instante de tempo irá atravessar. Outra relação importante é o ângulo formado entre a linha de ação e a tangente às circunferências no ponto primitivo, chamado de ângulo de pressão.

Para ocorrer o engrenamento adequado, faz-se necessário a escolha do módulo (ou passo), número de dentes, diâmetros e ângulo de pressão compatíveis. O último deve ser maior que o ângulo crítico, dado segundo Litvin e Fuentes (2004) por:

$$\alpha_{cr} = \arcsen\left(\sqrt{\frac{2}{N_1}}\right), \quad (2.3)$$

e, segundo Budynas e Nisbett (2020), o número de dentes do pinhão deve atender a

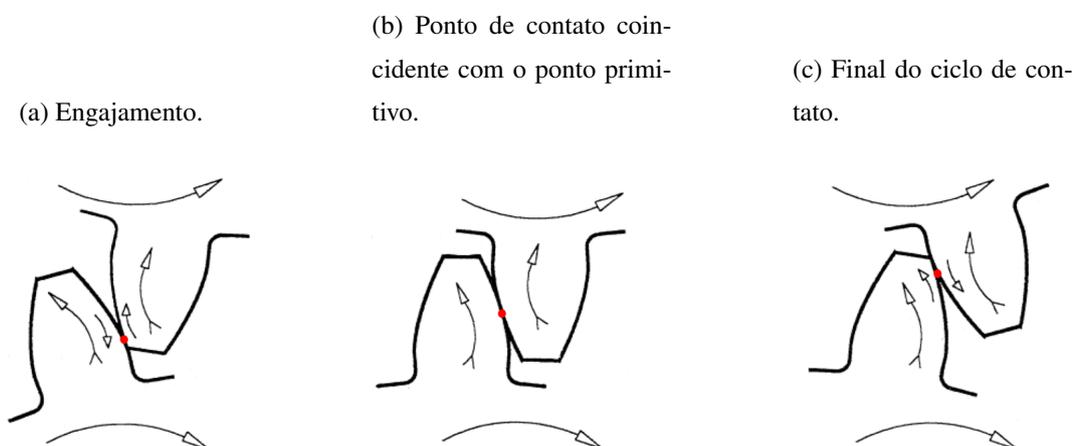
seguinte relação para que não haja interferência (Subseção 2.1.4):

$$N_{1min} = \frac{2k}{3 \operatorname{sen}^2 \alpha} \left( 1 + \sqrt{1 + 3 \operatorname{sen}^2 \alpha} \right), \quad (2.4)$$

onde  $k = 1$  para um dente com profundidade total. As demais relações são calculadas de acordo com as equações (2.1).

Mesmo que a linha de ação permaneça fixa entre as circunferências de base das engrenagens acopladas, os pontos de contato relativos à superfície dos dentes sofrem alterações durante o engrenamento, que pode ser observado na cinemática entre as engrenagens ilustrada na Figura 4.

Figura 4: Cinemática do engrenamento de um par de dentes.



Fonte: Adaptado de Muraro *et al.* (2012).

Conforme Muraro *et al.* (2012), no instante da Figura 4(a), o engrenamento entre o par de dentes acabou de iniciar, quando a parte inferior do dente do pinhão está em contato com a parte superior da coroa. As setas maiores indicam a direção de rolagem dos dentes e as menores se tratam da velocidade relativa do ponto de contato. No instante da Figura 4(b), o ponto de contato coincide com o ponto primitivo (encontro entre as circunferências primitivas). Nota-se que não há velocidade relativa entre os dentes nesse único instante. Razão pela qual esse se chama centro instantâneo de velocidade nula, pois, tendo-o como referência, as duas engrenagens rolam sem deslizamento entre si. Por fim, o instante da Figura 4(c) representa o fim do ciclo de engrenamento de um par de dentes, com o contato ocorrendo na ponta do dente do pinhão e na base do dente da coroa.

Outra relação importante é a razão de contato ( $C_r$ ), que define a quantidade de pa-

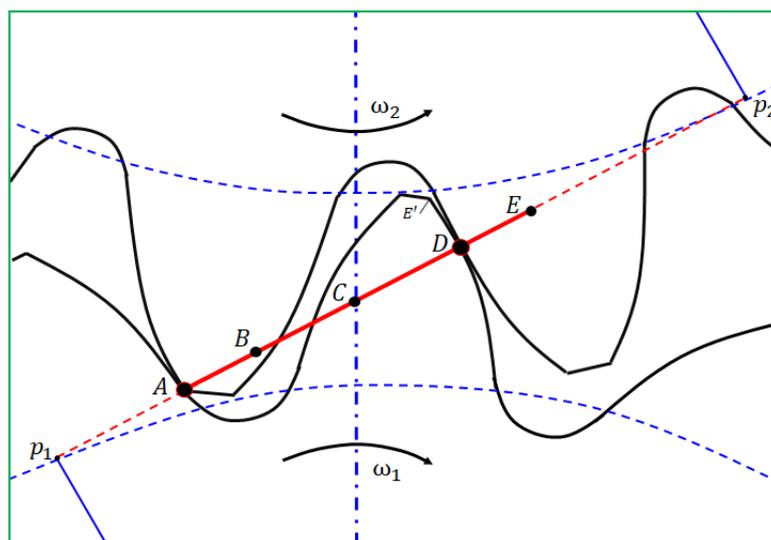
res de dentes em contato durante o engrenamento e, de acordo com Juvinali e Marshek (2013), é expressa pela equação (2.5).

$$C_r = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - (r_{p1} + r_{p2}) \sin \alpha}{p_b}. \quad (2.5)$$

Por exemplo,  $1 < C_r < 2$  quer dizer que em qualquer instante de tempo haverá ao menos um par de dentes engrenado e no máximo dois. Norton (2013) recomenda utilizar no mínimo uma razão de contato de 1,2 para uma operação suave, mas adiciona que é preferível razões superiores a 1,4. Engrenagens helicoidais, por causa de sua geometria, possuem razões de contato superiores, o que provê maior estabilidade ao engrenamento.

No instante exibido na Figura 5, segundo explica Tian, Zuo e Fyfe (2004), o ponto de contato  $A$  acabou de engrenar, enquanto que o ponto  $D$  está no curso final do ciclo. Nota-se que eventualmente o ponto  $E'$  estará no ponto  $E$ , então, o engrenamento deste par irá se encerrar, restando apenas o par que iniciou o engrenamento em  $A$  e este contato simples irá permanecer durante o deslocamento do ponto de contato passando do ponto  $B$  ao  $D$ . Nota-se que todo o caminho percorrido pelos pontos de contato formam a reta vermelha contínua sobre a linha de ação ( $\overline{AE}$ ), chamado caminho de contato.

Figura 5: Relações da linha de ação de um engrenamento.



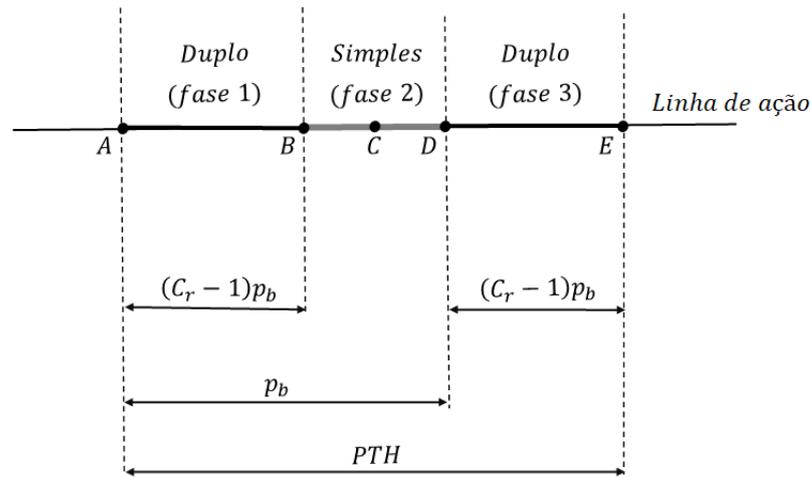
Fonte: Adaptado de Tian, Zuo e Fyfe (2004).

A Figura 6 ilustra as fases de contato sobre a linha de ação e relaciona as distâncias

entre as fases com a razão de contato ( $1 < C_r < 2$ ), de acordo com as propriedades da curva evolvente. O caminho de contato, denotado por  $PTH$ , é a distância útil sobre a linha de ação e demarca um ciclo de contato de um par de dentes engrenados, sendo calculado, segundo Mohammed *et al.* (2013), como:

$$PTH = C_r p_b. \quad (2.6)$$

Figura 6: Relação entre fases de engrenamento e razão de contato.



Fonte: Adaptado de Mohammed *et al.* (2013).

Observa-se que a distância do ciclo de engrenamento na linha de ação ( $PTH$ ) é formado pela sobreposição da distância do passo de base ( $p_b$ ) dos pares de dentes na região de duplo contato, pois no instante em que o ponto de contato na região simples chega ao ponto D o contato do segundo par é também iniciado em A. Assim como relata Mohammed *et al.* (2013), com uma razão de contato de 1,6, 60% do tempo será sob a condição de engrenamento duplo.

O comprimento das fases de engrenamento simples e duplo são dados por:

$$\text{simples} = p_b - \text{duplo}, \quad (2.7)$$

$$\text{duplo} = (C_r - 1) p_b, \quad (2.8)$$

e o comprimento da linha de ação ( $L_a = \overline{p_1 p_2}$ ), de acordo com as relações ilustradas na Figura 5, pode ser calculado pela expressão:

$$L_a = \sqrt{r_{p1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{p2}^2 - r_{b2}^2}. \quad (2.9)$$

Assim como as distâncias em que não há engrenamento na linha de ação ( $md_1 = \overline{p_1A}$  e  $md_2 = \overline{p_2E}$ ):

$$md_i = \sqrt{r_{ai}^2 - r_{bi}^2} - PTH. \quad (2.10)$$

Segundo Tian, Zuo e Fyfe (2004), o período angular referente à fase de engrenamento duplo (dois pares de dentes engrenados) é calculado como:

$$\theta_d = \operatorname{tg} \left( \frac{N_1 \cos \alpha}{N_1 + 2} \right) - \frac{2\pi}{N_1} - \operatorname{tg} \left[ \operatorname{arccos} \frac{N_1 \cos \alpha}{\sqrt{(N_2 + 2)^2 + (N_1 + N_2)^2 - 2(N_2 + 2)(N_1 + N_2) \cos(\operatorname{arccos} \frac{N_2 \cos \alpha}{N_2 + 2} - \alpha)}} \right]. \quad (2.11)$$

Assim, a extensão do deslocamento angular quando há dois pares de dentes engrenados é expressa como:

$$\theta_1 \in \left[ (n-1) \frac{2\pi}{N_1}, \theta_d + (n-1) \frac{2\pi}{N_1} \right], \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.12)$$

onde  $n$  é o ciclo do engrenamento do dente. E o período referente à fase de engrenamento simples (um par de dentes engrenados) é dado como:

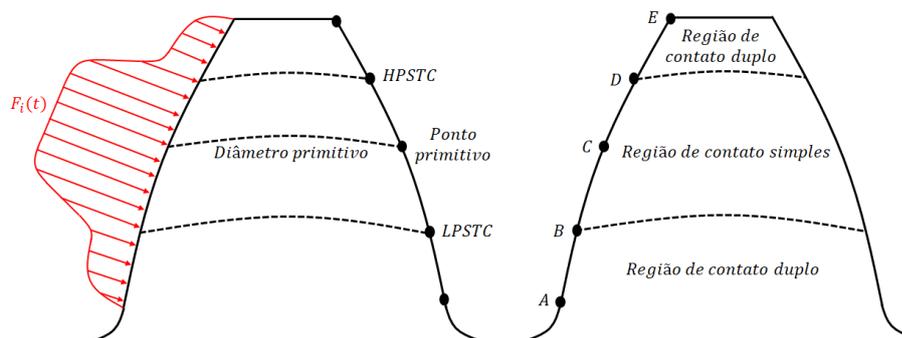
$$\theta_s = \frac{2\pi}{N_1} - \theta_d. \quad (2.13)$$

Correspondentemente, a extensão do deslocamento angular para um par de dentes engrenados é:

$$\theta_1 \in \left[ (n-1) \frac{2\pi}{N_1} + \theta_d, (n-1) \frac{2\pi}{N_1} + (\theta_d + \theta_s) \right], \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.14)$$

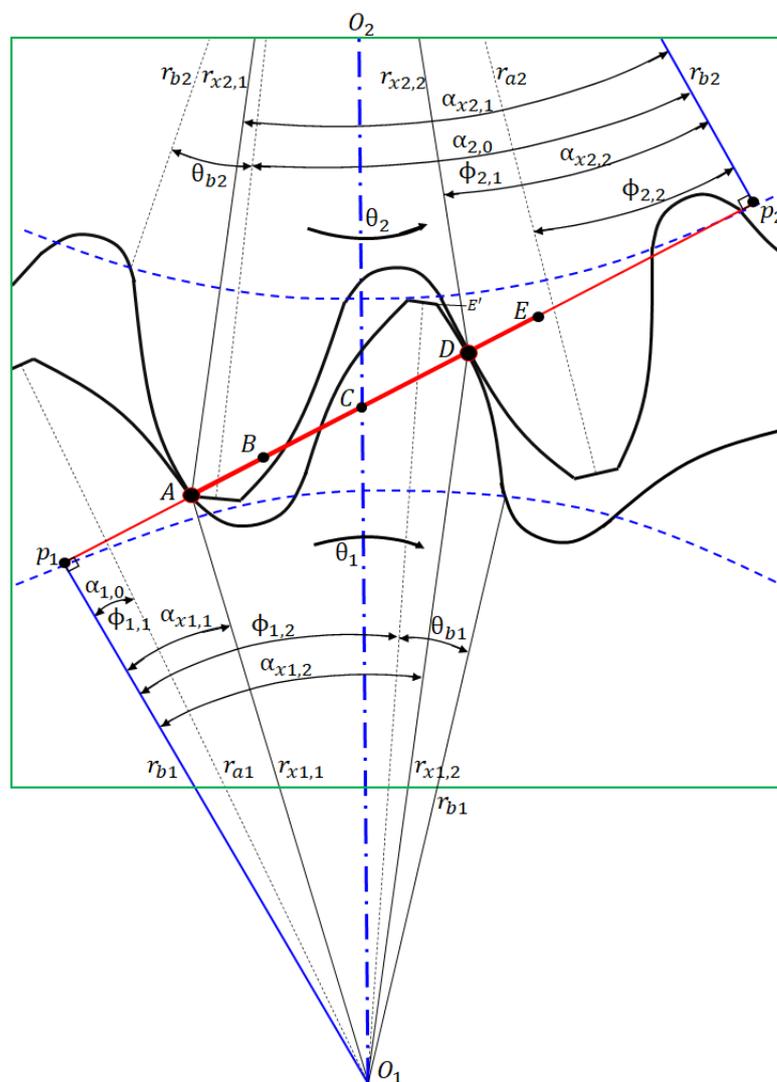
Como há variação na quantidade de dentes em contato durante o tempo, a força atuando no dente sofre flutuações com a distribuição de carga entre dentes em contato, como ilustrado na Figura 7. Alguns pontos, representados no perfil do dente, possuem nomes específicos, como o HPSTC (*Highest Point of Single Tooth Contact*) sendo o ponto mais alto no contato do dente em que há apenas um par engrenado, semelhantemente, o LPSTC (*Lowest Point of Single Tooth Contact*) o ponto mais baixo. Pode-se ainda observar a relação dos pontos representados no perfil do dente, na Figura 7, com os representados na linha de ação da Figura 6.

Figura 7: Distribuição de carga na superfície do dente e regiões de contato.



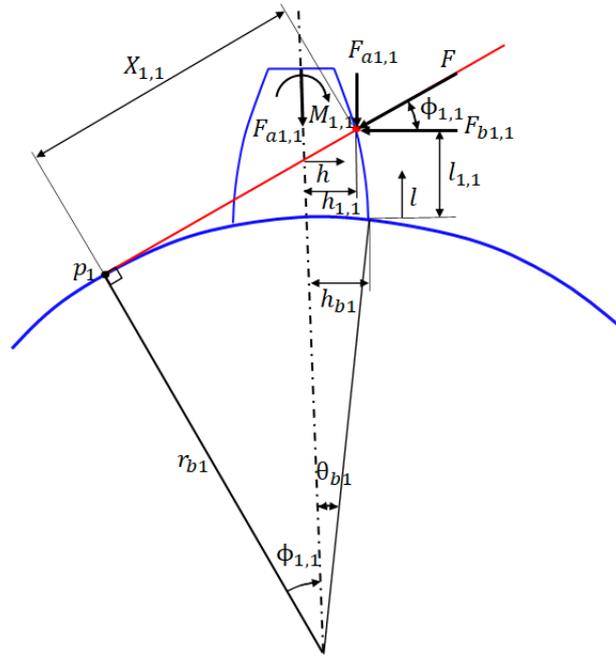
Fonte: Adaptado de Muraro *et al.* (2012).

Figura 8: Relação de engrenamento de um par de engrenagens.



Fonte: Adaptado de Tian, Zuo e Fyfe (2004).

Figura 9: Força elástica sobre o dente.



Fonte: Adaptado de Yang e Lin (1987).

De posse dessas informações, pode-se então estabelecer as relações geométricas entre os pontos de interesse do engrenamento, que possibilitam o cálculo da TVMS (rigidez de engrenamento variante no tempo) na Seção 2.4. Através da Figura 8 e Figura 9, é possível visualizar as relações que descrevem o engrenamento e os pontos de contato.

Conforme explica Tian (2004), o ângulo  $\alpha_{i,0}$  é o deslocamento angular fixo que demarca o início do engrenamento ( $\theta_1 = 0$ ), ou seja, no instante do engajamento do ponto A (fase 1). Para o pinhão, esse é calculado como:

$$\alpha_{1,0} = -\frac{\pi}{2N_1} - \text{inv } \alpha + \text{tg} \left[ \arccos \frac{N_1 \cos \alpha}{\sqrt{(N_2 + 2)^2 + (N_1 + N_2)^2 - 2(N_2 + 2)(N_1 + N_2) \cos(\arccos \frac{N_2 \cos \alpha}{N_2 + 2} - \alpha)}} \right], \quad (2.15)$$

onde  $\text{inv}$  é a função involuta ( $\text{inv } \alpha = \text{tg } \alpha - \alpha$ ). E para a coroa tem-se:

$$\alpha_{2,0} = \text{tg} \left( \arccos \frac{N_2 \cos \alpha}{N_2 + 2} \right) - \frac{\pi}{2N_2} - \text{inv } \alpha. \quad (2.16)$$

A metade do ângulo do dente com relação à circunferência de base,  $\theta_{bi}$ , depende

apenas das dimensões da engrenagem, calculado como:

$$\theta_{bi} = \frac{\pi}{2N_i} + \text{inv } \alpha. \quad (2.17)$$

Sendo  $\theta_i$  o deslocamento angular da engrenagem  $i$ , o ângulo de engrenamento  $\phi_{i,1}$  (também visualizado na Figura 9), que no instante exibido na Figura 8 ( $\theta_1 = 0$ ) coincide com  $\alpha_{i,0}$ , é dado, segundo Yang e Lin (1987), por:

$$\phi_{1,1} = \theta_1 + \alpha_{1,0}, \quad (2.18)$$

$$\phi_{2,1} = \frac{X_{2,1}}{r_{b2}} - \theta_{b2}, \quad (2.19)$$

$$\theta_2 = \frac{N_1}{N_2} \theta_1, \quad (2.20)$$

em que  $X_{i,j}$  é a distância do ponto de contato na linha de ação (ver Figura 9), dado por:

$$X_{1,j} = (\phi_{1,j} + \theta_{b1})r_{b1}, \quad (2.21)$$

$$X_{2,j} = L_a - X_{1,j}. \quad (2.22)$$

Além da posição central do dente em contato (calculada com  $\phi_{i,j}$ ), faz-se necessário também conhecer a posição do ponto de contato na superfície do dente, podendo ser calculado a partir de  $r_{xi,j}$ , que é a distância radial até o ponto de contato, de acordo com a Figura 8:

$$r_{x1,j} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_{x1,j}}, \quad (2.23)$$

$$r_{x2,j} = \sqrt{r_{b2}^2 + \left( L_a - \sqrt{r_{x1,j}^2 - r_{b1}^2} \right)^2}. \quad (2.24)$$

O ângulo relacionado ao vetor da posição de contato do dente é calculado como:

$$\alpha_{x1,j} = \phi_{1,j} + \arctg \left( \frac{h_{1,j}}{r_{b1} \cos \theta_{b1} + l_{1,j}} \right), \quad (2.25)$$

$$\alpha_{x2,j} = \arccos \frac{r_{b2}}{r_{x2,j}}, \quad (2.26)$$

onde  $l_{i,j}$  é a altura e  $h_{i,j}$  a largura do dente no ponto de contato (Figura 9), sendo expressos por:

$$l_{i,j} = r_{bi} \left[ (\theta_{bi} + \phi_{i,j}) \text{sen } \phi_{i,j} + \cos \phi_{i,j} - \cos \theta_{bi} \right], \quad (2.27)$$

$$h_{i,j} = r_{bi} \left[ (\theta_{bi} + \phi_{i,j}) \cos \phi_{i,j} - \text{sen } \phi_{i,j} \right]. \quad (2.28)$$

Como todas as variáveis estão em função de  $\phi_{i,1}$ , para encontrar as relações do segundo par basta então definir  $\phi_{i,2}$ :

$$\phi_{1,2} = \phi_{1,1} + \frac{2\pi}{N_1}, \quad (2.29)$$

$$\phi_{2,2} = \phi_{2,1} + \frac{2\pi}{N_2}. \quad (2.30)$$

Lembrando que o índice  $i$  se refere ao pinhão ( $i = 1$ ) ou coroa ( $i = 2$ ) e o índice  $j$  se refere ao par de dentes engrenados.

Como comentado, a força do engrenamento sempre atuará na direção da linha de ação. Porém, no decorrer do engrenamento sua posição angular com relação ao dente varia com o tempo, mantendo-se normal à superfície do dente, conforme exibido na Figura 9. Assim, a decomposição vetorial da força é dada em função da posição angular  $\phi_{i,j}$ , resultando nos esforços axiais, cortantes e momento fletor no dente que, por sua vez, provocarão deformações variantes no tempo no decorrer do engrenamento. Segundo Yang e Lin (1987), esses são calculados como:

$$F_{ai,j} = F \sin \phi_{i,j}, \quad (2.31)$$

$$F_{bi,j} = F \cos \phi_{i,j}. \quad (2.32)$$

A velocidade do ponto de contato em relativa entre os dentes pode ser obtida através da seguinte relação, válida para dentes involutos, apresentada por Yang e Lin (1987):

$$v_{relj} = \dot{\theta}_1 X_{1,j} - \dot{\theta}_2 (L_a - X_{1,j}), \quad (2.33)$$

em que  $\dot{\theta}_i$  é a velocidade de rotação da engrenagem  $i$ , sendo a relação entre  $\dot{\theta}_1$  e  $\dot{\theta}_2$  obtida pela derivação temporal da equação (2.20).

## 2.1.4 Erros de engrenamento

A seguir são apresentados alguns dos principais tipos de erros que ocorrem no engrenamento de engrenagens cilíndricas de dentes retos que podem alterar as relações desenvolvidas até então:

1. Folga de engrenamento: Segundo Budynas e Nisbett (2020), é a distância que excede o espaço entre os dentes medido na circunferência primitiva. Em outras palavras, é o espaçamento existente entre dois dentes engrenados para se evitar

o travamento destes. Pode-se realizar intencionalmente a inclusão deste tipo de erro a depender das condições de lubrificação, erros de fabricação, deflexão sob carga aplicada e expansão térmica (na faixa temperatura de operação), com atenção especial em sistemas com reversão de movimento.

2. Interferência: Budynas e Nisbett (2020) definem como sendo o contato dos perfis dos dentes não conjugados. Quando este fenômeno ocorre, há contato da ponta do dente contra a raiz de outro dente que não deveria estar engrenado, acarretando em possíveis travamentos e desgaste nos dentes. Geralmente se utiliza o alívio na região da raiz, conhecida como modificação de dedendo, através do processo chamado de *undercutting* e, para situações de projeto, segundo Gemaque (2004) deve-se obedecer a seguinte relação entre o número de dentes:

$$N_2 \leq \frac{N_1^2 \sin^2 \alpha - 4}{4 - 2N_1 \sin^2 \alpha}. \quad (2.34)$$

3. Paralelismo axial: Quando há falha no paralelismo dos eixos (no caso de sistemas com eixos paralelos), as engrenagens apresentam desvio angular entre si, tornando a linha de contato em ponto de contato, que, de acordo com Litvin e Fuentes (2004), resulta em concentração tensões de contato e contato de borda do dente.
4. Desvio de passo: É quando o comprimento do passo medido (geralmente através do diâmetro primitivo - ou seja, passo primitivo-) não está de acordo com o teórico. Este desvio pode ser acumulado (somando-se vários passos seguidos) e, segundo Gemaque (2004), o setor analisado não deve possuir desvio maior que 1/8 da circunferência primitiva.
5. Erro geométrico: Ghosh e Chakraborty (2016) afirmam que é impossível fabricar um dente de engrenagem com perfil involuto perfeito, pois sempre haverá algum desvio com relação ao perfil teórico. Este erro pode ser medido através do erro de transmissão estático sem carga fazendo o uso de máquinas sofisticadas.
6. Erro de transmissão: É a variação da deformação no caminho de contato causado pela força entre os dentes engrenados. O erro de transmissão estático é dado pela diferença entre a posição teórica do engrenamento (sem deformações) e a posição real. Uma forma de introduzir este tipo de erro é através da modificação do dente.

Sendo  $\Delta_{i,j}$  uma função do erro que envolve os efeitos de todos os erros da engrenagem  $i$ , quando apenas os erros devido a modificação do perfil são considerados, este pode ser expresso, segundo Luo e Li (2019b), como:

$$\bar{\Delta}_j = \Delta_{1,j} + \Delta_{2,j}, \quad (2.35)$$

onde  $\Delta_{i,j}$  representa a quantidade de modificação do dente da engrenagem  $i$  referente ao par de dentes  $j$  engrenados.

Vale notar que a variação da distância entre centros, que é geralmente causada por elevadas rotações, erros de montagem e deflexão do eixo não causa erro de transmissão, conforme apontam Litvin e Fuentes (2004).

## 2.2 Rigidez de engrenamento variante no tempo

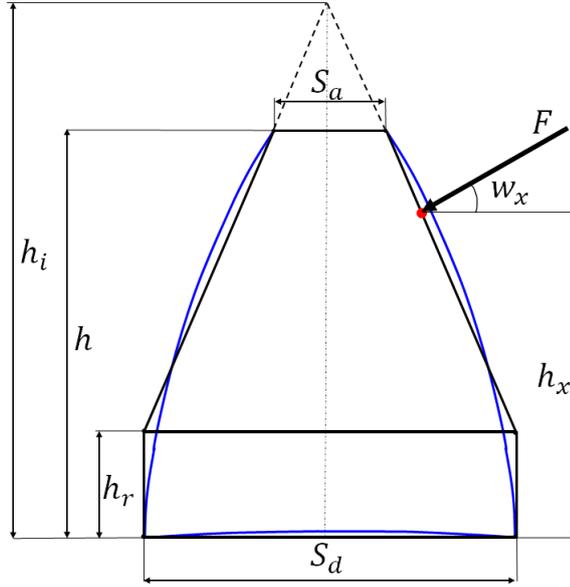
A rigidez de um corpo sólido é a capacidade de resistir à deformações quando submetido a esforços externos. A rigidez de engrenamento de um par de engrenagens é, portanto, a resistência à deformação do corpo em contato, no caso, os dentes. Como visto na Subseção 2.1.3, os pontos de contato e os esforços atuantes sobre as superfícies dos dentes variam com o tempo, como também observado pela Figura 7. Assim, para o estudo da dinâmica do engrenamento de um par de engrenagens se faz necessário a descrição detalhada das deformações não lineares que ocorrem com o contato.

Estas análises eram anteriormente realizadas por meio de estudos quase-estáticos, situação que não condiz com a realidade do fenômeno. Com a evolução destes estudos, surgiram métodos que permitiram análises cada vez mais precisas.

### 2.2.1 Método de Ishikawa

De acordo com Shi *et al.* (2013), um dos métodos mais empregados no Japão para o estudo da rigidez de engrenamento é o de Ishikawa. Esse método foi desenvolvido ainda em 1984 por Silurian Ishikawa, em que é utilizada uma aproximação do perfil do dente por um retângulo e um trapézio, ilustrado na Figura 10.

Figura 10: Modelo aproximado do dente no método de Ishikawa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Apesar da pequena diferença entre as áreas, percebe-se que enquanto em diferentes instantes a altura do ponto de contato  $h_x$  se altera, a normal ao ponto sempre terá a mesma direção paralela à aresta do trapézio, o que acaba por violar a lei de Willis. Contudo, este método permite observar o comportamento não contínuo e a ordem de grandeza da rigidez de engrenamento, sendo um bom ponto de partida e oferece cálculos mais rápidos de serem resolvidos computacionalmente quando comparado com o método da energia de deformação apresentado na Subseção 2.2.2.

De acordo com Shi *et al.* (2013), as formulações da geometria pelo modelo de Ishikawa são:

$$S_a = d_a \left( \frac{sc}{d_p} + \text{inv } \alpha - \text{inv} \left( \arccos \frac{d_p \cos \alpha}{d_a} \right) \right), \quad (2.36)$$

$$S_d = 2r_b \text{sen} \left( \frac{\pi + 4x_s \text{tg } \alpha}{2N} + \text{inv } \alpha \right), \quad (2.37)$$

$$h_x = r_x \cos(\alpha_x - w_x) - \sqrt{r_d^2 - \frac{S_d^2}{2}}, \quad (2.38)$$

$$w_x = \alpha_x - \left( \frac{S_a}{r_a} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_x \right), \quad (2.39)$$

$$h_r = \sqrt{r_b^2 - \frac{S_d^2}{2}} - \sqrt{r_d^2 - \frac{S_d^2}{2}}, \quad (2.40)$$

$$h = \sqrt{r_a^2 - \frac{S_a^2}{2}} - \sqrt{r_d^2 - \frac{S_d^2}{2}}, \quad (2.41)$$

$$h_i = \frac{h S_d - h_r S_a}{S_d - S_a}, \quad (2.42)$$

sendo  $S_a$  calculado de acordo com relação de espessura dos dentes segundo Litvin e Fuentes (2004). Assim, pode-se calcular as deformações devido às forças de contato. Ainda de acordo com Shi *et al.* (2013), a deformação de flexão do trapézio e do retângulo são calculadas como:

$$\delta_{Bt} = \frac{6F \cos^2 w_x}{E b S_d^3} \left[ \frac{h_i - h_x}{h_i - h_r} \left( 4 - \frac{h_i - h_x}{h_i - h_r} \right) - 2 \ln \frac{h_i - h_x}{h_i - h_r} - 3 \right] (h_i - h_r)^3, \quad (2.43)$$

$$\delta_{Br} = \frac{12F \cos^2 w_x}{E b S_d^3} \left[ h_x h_r (h_x - h_r) + \frac{h_r^3}{3} \right], \quad (2.44)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade do material da engrenagem,  $b$  é a espessura e  $F$  a força de engrenamento. Assim, a deformação por cisalhamento é dada por:

$$\delta_S = \frac{2(1 + \nu)F \cos^2 w_x}{E b S_d} \left[ h_r + (h_i - h_r) \ln \frac{h_i - h_r}{h_i - h_x} \right], \quad (2.45)$$

sendo  $\nu$  o coeficiente de Poisson. A deformação de base é calculada como:

$$\delta_G = \frac{24F h_x^2 \cos^2 w_x}{\pi E b S_d^2}. \quad (2.46)$$

E a deformação devido ao contato hertziano é dada por:

$$\delta_h = \frac{4(1 - \nu^2)F}{\pi E b}. \quad (2.47)$$

Sendo a deformação total de um dente:

$$\delta_i = \delta_{Br} + \delta_{Bt} + \delta_S + \delta_G. \quad (2.48)$$

Então a deformação do par de dentes é:

$$\delta_{\Sigma,j} = \delta_{1,j} + \delta_{2,j} + \delta_{h,j}. \quad (2.49)$$

Assim, a rigidez do par  $j$  engrenado se dá por:

$$k_j = \frac{F}{b \delta_{\Sigma,j}}. \quad (2.50)$$

Resultando na função descontínua da rigidez de engrenamento na forma:

$$\begin{cases} k_t = k_1, & \theta_1 \in \left[ (n-1)\frac{2\pi}{N_1}, \theta_d + (n-1)\frac{2\pi}{N_1} \right] \\ k_t = k_1 + k_2, & \theta_1 \in \left[ (n-1)\frac{2\pi}{N_1} + \theta_d, (n-1)\frac{2\pi}{N_1} + (\theta_d + \theta_s) \right]. \end{cases} \quad (2.51)$$

## 2.2.2 Método da energia de deformação

Diferente do modelo de Ishikawa, o método da energia de deformação proposto por Yang e Lin (1987) leva em consideração o perfil evolvente perfeito. Além disso, este método se aproveita do cálculo diferencial e trata o dente como uma viga em balanço para construir as formulações que seguem:

$$\begin{aligned} U_h &= \frac{F^2}{2k_h}, & U_b &= \frac{F^2}{2k_b}, \\ U_s &= \frac{F^2}{2k_s}, & U_a &= \frac{F^2}{2k_a}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

A energia de contato hertziano está relacionada com a deformação do dente na vizinhança do contato e para um par de engrenagens fabricadas com o mesmo material (mesmo módulo de elasticidade -  $E$ ) a rigidez independe do ponto de contato e é expressa por:

$$k_{hj} = \frac{\pi E b}{4(1 - \nu^2)}. \quad (2.53)$$

As energias  $U_b$  (flexão),  $U_s$  (cisalhamento) e  $U_a$  (compressão axial) irão depender do ponto de contato e são expressas, conforme segue Tian (2004):

$$U_{bi,j} = \int_0^{l_{i,j}} \frac{M_{i,j}^2}{2E I_l} dl = \int_0^{l_{i,j}} \frac{[F_{bi,j}(l_{i,j} - l) - F_{ai,j}h_{i,j}]}{2E I_l} dl, \quad (2.54)$$

$$U_{si,j} = \int_0^{l_{i,j}} \frac{1, 2F_{bi,j}^2}{2G A_l} dl, \quad (2.55)$$

$$U_{ai,j} = \int_0^{l_{i,j}} \frac{F_{ai,j}^2}{2E A_l} dl, \quad (2.56)$$

onde  $I_l$  é o momento de inércia efetivo do dente,  $A_l$  a área da seção transversal efetiva e  $G$  o módulo de elasticidade ao cisalhamento, calculados por:

$$I_l = \frac{1}{12}(2h_{i,j})^3 b = \frac{2}{3}h_{i,j}^3 b, \quad (2.57)$$

$$A_l = 2h_{i,j} b, \quad (2.58)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.59)$$

Tabela 1: Valores para os coeficientes do termo de rigidez de fundação.

	$A_i$	$B_i$	$C_i$	$D_i$	$E_i$	$F_i$
$L^*(h_{fi}, \theta_b)$	$-5,5740 \times 10^{-5}$	$-1,9986 \times 10^{-3}$	$-2,3015 \times 10^{-4}$	$4,7702 \times 10^{-3}$	0,0271	6,8045
$M^*(h_{fi}, \theta_b)$	$60,1110 \times 10^{-5}$	$28,1000 \times 10^{-3}$	$-83,431 \times 10^{-4}$	$-9,9256 \times 10^{-3}$	0,1624	0,9086
$P^*(h_{fi}, \theta_b)$	$-50,9520 \times 10^{-5}$	$185,5000 \times 10^{-3}$	$0,0538 \times 10^{-4}$	$53,3000 \times 10^{-3}$	0,2895	0,9236
$Q^*(h_{fi}, \theta_b)$	$-6,2042 \times 10^{-5}$	$9,0889 \times 10^{-3}$	$-4,0964 \times 10^{-4}$	$7,8297 \times 10^{-3}$	-0,1472	0,6904

Fonte: Adaptado de Chen e Shao (2011).

sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material,  $h_{i,j}$  a distância horizontal (Figura 9) do ponto de contato até a linha central do dente, calculada através da equação (2.28) e  $b$  é a largura da engrenagem.

Após manipulações algébricas, as equações (2.54) à (2.56) resultam em:

$$\frac{1}{k_{bi,j}} = \int_{-\phi_{i,j}}^{\theta_{bi}} \frac{3\{1 + \cos \phi_{i,j}[(\theta_{bi} - \phi)\sin \phi - \cos \phi]\}^2(\theta_{bi} - \phi)\cos \phi}{2E b[\sin \phi + (\theta_{bi} - \phi)\cos \phi]^3} d\phi, \quad (2.60)$$

$$\frac{1}{k_{si,j}} = \int_{-\phi_{i,j}}^{\theta_{bi}} \frac{1, 2(1 + \nu)(\theta_{bi} - \phi)\cos \phi \cos^2 \phi_{i,j}}{E b[\sin \phi + (\theta_{bi} - \phi)\cos \phi]} d\phi, \quad (2.61)$$

$$\frac{1}{k_{ai,j}} = \int_{-\phi_{i,j}}^{\theta_{bi}} \frac{(\theta_{bi} - \phi)\cos \phi \sin^2 \phi_{i,j}}{2E b[\sin \phi + (\theta_{bi} - \phi)\cos \phi]} d\phi. \quad (2.62)$$

A contribuição de Sainsot, Velex e Duverger (2004) introduziu o termo de deformação da fundação do dente, calculado como:

$$\delta_{fi,j} = \frac{F \cos^2 \phi_{i,j}}{E b} \left\{ L * \frac{u_{fi,j}^2}{S_{di}} + M * \frac{u_{fi,j}}{S_{di}} + P * (1 + Q * \tan^2 \phi) \right\}, \quad (2.63)$$

em que  $u_{fi,j} = l_{i,j} - h_{i,j} \tan(\phi_{i,j})$  e  $S_{di} = \theta_{bi} d_{di}$ . Os coeficientes  $L^*$ ,  $M^*$ ,  $P^*$ ,  $Q^*$  podem ser aproximados pela função polinomial:

$$X_i^* = \frac{A_i}{\theta_b^2} + B_i h_{fi}^2 + \frac{C_i h_{fi}}{\theta_b} + \frac{D_i}{\theta_b} + E_i h_{fi} + F_i, \quad (2.64)$$

onde  $X_i^*$  denota os coeficientes  $L^*$ ,  $M^*$ ,  $P^*$ ,  $Q^*$  e  $h_{fi} = d_{di}/2r_{fi}$  a razão do diâmetro interno pelo furo  $r_{fi}$  da engrenagem. Os valores de  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  e  $F_i$ , são dados pela Tabela 1.

A rigidez da fundação pode ser expressa como:

$$k_{fi,j} = \frac{F}{\delta_{fi,j}}. \quad (2.65)$$

Assim, a rigidez total para um par de dentes engrenados é dada por:

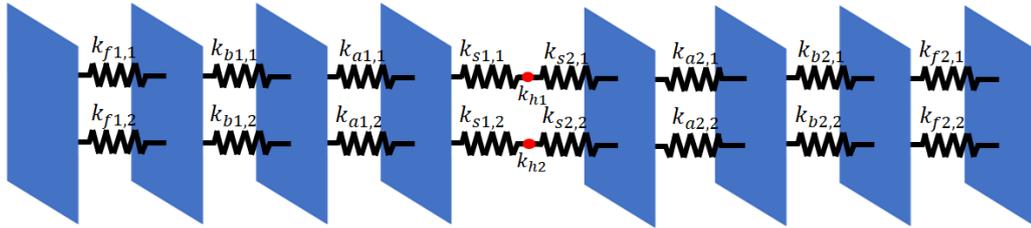
$$\frac{1}{k_{tj}} = \frac{1}{k_{hj}} + \left( \frac{1}{k_{b1,j}} + \frac{1}{k_{s1,j}} + \frac{1}{k_{a1,j}} + \frac{1}{k_{f1,j}} \right) + \left( \frac{1}{k_{b2,j}} + \frac{1}{k_{s2,j}} + \frac{1}{k_{a2,j}} + \frac{1}{k_{f2,j}} \right). \quad (2.66)$$

E a rigidez total para dois pares de dentes engrenados é da forma:

$$k_t = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\frac{1}{k_{hj}} + \left( \frac{1}{k_{b1,j}} + \frac{1}{k_{s1,j}} + \frac{1}{k_{a1,j}} + \frac{1}{k_{f1,j}} \right) + \left( \frac{1}{k_{b2,j}} + \frac{1}{k_{s2,j}} + \frac{1}{k_{a2,j}} + \frac{1}{k_{f2,j}} \right)}. \quad (2.67)$$

A Figura 11 ilustra a relação entre as rigidezes. Sendo a associação em série a relação entre as rigidezes correspondentes aos esforços sofridos pelo par de dentes de cada engrenagem. A relação em paralelo é a representação entre os pares de dentes engrenados.

Figura 11: Relação entre as rigidezes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, a rigidez total de engrenamento pelo método da energia é expressa pela função descontínua:

$$\begin{cases} k_t = \frac{1}{\frac{1}{k_{hj}} + \left( \frac{1}{k_{b1,j}} + \frac{1}{k_{s1,j}} + \frac{1}{k_{a1,j}} + \frac{1}{k_{f1,j}} \right) + \left( \frac{1}{k_{b2,j}} + \frac{1}{k_{s2,j}} + \frac{1}{k_{a2,j}} + \frac{1}{k_{f2,j}} \right)}, & \theta_1 \in \left[ (n-1)\frac{2\pi}{N_1}, \theta_d + (n-1)\frac{2\pi}{N_1} \right] \\ k_t = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\frac{1}{k_{hj}} + \left( \frac{1}{k_{b1,j}} + \frac{1}{k_{s1,j}} + \frac{1}{k_{a1,j}} + \frac{1}{k_{f1,j}} \right) + \left( \frac{1}{k_{b2,j}} + \frac{1}{k_{s2,j}} + \frac{1}{k_{a2,j}} + \frac{1}{k_{f2,j}} \right)}, & \theta_1 \in \left[ (n-1)\frac{2\pi}{N_1} + \theta_d, (n-1)\frac{2\pi}{N_1} + (\theta_d + \theta_s) \right]. \end{cases} \quad (2.68)$$

### 2.3 Amortecimento variante no tempo

Em sistemas práticos, a energia vibracional é gradualmente convertida em calor e ruído e, devido à perda na energia, a resposta (deslocamento do sistema) decresce gradualmente. Este fenômeno é chamado de amortecimento. Mesmo que a quantidade de energia convertida em calor e ruído seja relativamente baixa, a consideração do

amortecimento se torna importante para prever a vibração do sistema. Xiang *et al.* (2019) comenta que o ruído de uma caixa de engrenagens pode ser dividido em ruído sonoro (aéreo) e ruído estrutural (vibração), sendo que cerca de 90% da energia é devido ao ruído estrutural. Contudo, Rao (2011) afirma que determinar as causas de amortecimento em sistemas práticos é uma tarefa difícil, mas pode-se modelá-lo de algumas formas:

1. Amortecimento viscoso: o mecanismo mais utilizado na análise de vibrações. Quando um sistema mecânico vibra em meio a um fluido como o ar (ou gás), água ou óleo, a resistência oferecida pelo fluido ao corpo causa a dissipação de energia. Neste caso, a quantidade de energia dissipada depende de vários fatores, como o tamanho e forma do corpo, a viscosidade do fluido, a frequência de vibração e a velocidade do sistema. No amortecimento viscoso, a força de amortecimento é proporcional à velocidade na qual o corpo vibra.
2. Amortecimento de Coulomb: neste caso a força de amortecimento é constante em magnitude mas com direção oposta ao movimento. É causada pelo atrito entre as superfícies que estão secas ou possuem lubrificação insuficiente.
3. Material, sólido ou amortecimento histerético: quando o material é deformado, a energia absorvida é dissipada pelo material. O efeito é devido ao atrito entre os planos internos do corpo que deslizam enquanto a deformação ocorre.

De acordo com Gkimisis *et al.* (2021), o amortecimento de sistemas de engrenagens está relacionado principalmente aos efeitos da lubrificação, tendo em vista que o amortecimento histerético é bem menos significativo.

Os amortecedores viscosos podem ser construídos de diversas maneiras. Por exemplo, quando uma placa se move relativamente a outra com um fluido viscoso no meio, tem-se um amortecedor viscoso. A expressão matemática deste fenômeno é descrita, segundo Inman (2014), como:

$$c = 2\zeta \sqrt{km} = 2\zeta m\omega_n, \quad (2.69)$$

em que  $k$  a rigidez,  $m$  a massa  $c$  o coeficiente de amortecimento e  $\zeta$  o fator de amortecimento e  $\omega_n$  a frequência natural do sistema.

### 2.3.1 Fator de amortecimento

De acordo com Rao (2011), o fator de amortecimento determina a natureza do comportamento da vibração do sistema. Onde valores de  $0 < \zeta < 1$  promovem uma resposta subamortecida, na qual o movimento harmônico do sistema vibracional decresce exponencialmente.  $\zeta > 1$  fornece uma resposta superamortecida, ou seja, a resposta tem característica não periódica e decresce exponencialmente com o tempo.  $\zeta = 1$  é o caso do sistema criticamente amortecido, em que a resposta é não periódica e eventualmente decresce a zero. Já  $\zeta = 0$  se trata de um caso puramente teórico em que o sistema oscila indefinidamente sem amortecimento.

Este fator é geralmente obtido através de relações semi-empíricas e os autores que tratam deste estudo não chegaram a um consenso na metodologia na modelagem deste fenômeno. Para sistemas de engrenagens, é típico o uso de valores de  $\zeta$  entre 4% a 8% (GKIMISIS *et al.*, 2021).

Para o amortecimento viscoso a amplitude de ressonância é conhecida:  $\chi = \frac{F}{c \omega_n}$ . Porém, Thomson (2018) afirma que para os outros tipos de amortecimento uma expressão simples pode não existir, mas, é possível aproximar a amplitude de ressonância substituindo o coeficiente de amortecimento por um equivalente na equação de dissipação de energia dada por:

$$W_d = \oint c \dot{\chi} d\chi = \oint c \dot{\chi}^2 dt = c\omega\chi^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - \phi) dt = \pi c\omega\chi^2. \quad (2.70)$$

Resultando em:

$$W_d = \pi c_{eq}\omega\chi^2. \quad (2.71)$$

E substituindo a equação (2.69) na equação (2.71), tem-se que o fator de amortecimento é dado por:

$$\zeta = \frac{W_d}{2\pi U}, \quad (2.72)$$

onde  $U = \frac{kB^2}{2}$  é a energia dissipada, em que  $B$  é a amplitude de vibração forçada do sistema, que para o caso da razão entre as frequências de excitação e natural seja bem menor que 1 ( $\lambda \ll 1$  - neste trabalho,  $\lambda_{max} = 0,22$ ), esta amplitude pode ser aproximada pela deformação estática causada pela força de excitação, sendo  $B \approx B_0 = w/k$ , onde  $w$  é a força de excitação e  $k$  a rigidez do sistema.

Além disso,  $W_d$  deve ser avaliado para o caso particular da força de amortecimento,

que para o amortecimento de Coulomb,  $W_d$  se trata do trabalho realizado pelo atrito de contato. Conforme Thomson (2018),  $W_d = 4FB$ , onde  $F = w\mu$ , em que  $w$  é a força normal externa e  $\mu$  o coeficiente de atrito entre os dentes em contato que, segundo Luo e Li (2017), pode ser calculado como:

$$\mu = 0,12 \left( \frac{w_t R_a}{\eta_M \nu_{Pe} r_p} \right)^{0,25} \quad (2.73)$$

Trazendo a aplicação para o caso de engrenamento,  $w_t$  é a força tangencial no ponto de contato,  $R_a$  a rugosidade das superfícies dos dentes,  $\eta_M$  a viscosidade dinâmica do lubrificante na temperatura de operação,  $\nu_{Pe}$  a velocidade tangencial no ponto de contato e  $r_x$  a distância radial do ponto de contato ao centro da engrenagem, definido na equação (2.23).

## 2.4 Modificação do perfil dos dentes

A modificação das propriedades de um engrenamento pode se dar de diferentes maneiras, como a inclusão intencional de erros (conforme comentado na Subseção 2.1.4), alterando a condição de lubrificação, temperatura de operação, carga e velocidades para modificar alguma propriedade desejada do engrenamento. Além disso, modificações das próprias engrenagens afetam também a dinâmica do engrenamento, e estas podem ser modificação no perfil do dente, axial e 3D que se trata da combinação das duas últimas, conforme exibido na Figura 12.

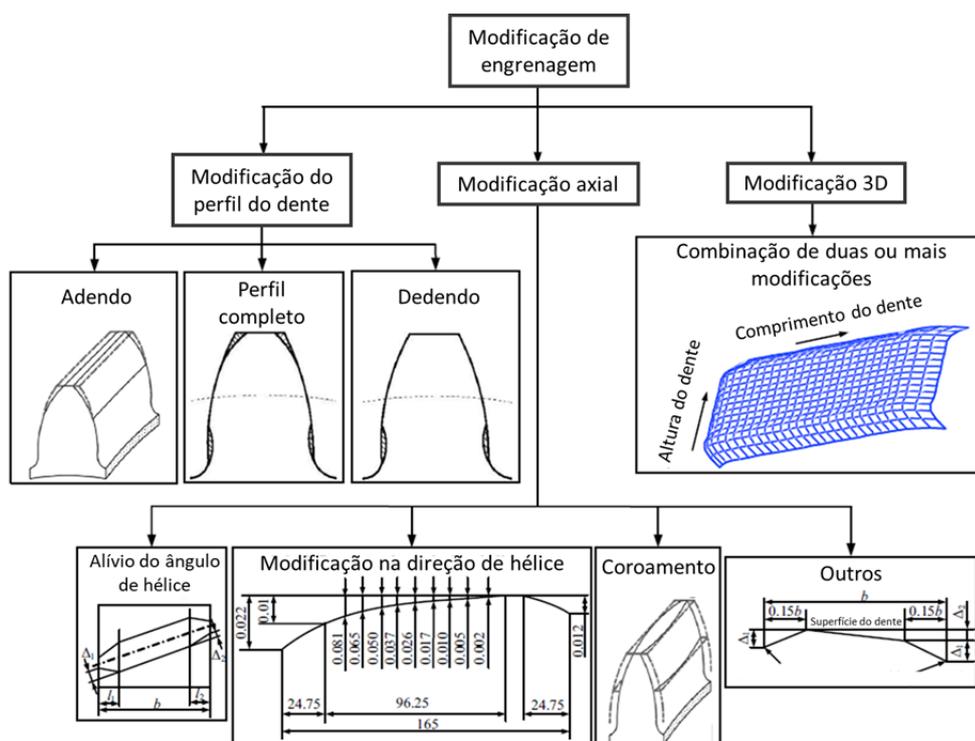
Litvin e Fuentes (2004) afirmam que modificações de perfil são comuns na indústria. Com o objetivo de evitar interferência entre os dentes, os fabricantes realizam o *undercut*, que é um recorte na raiz do dente (modificação de dedendo), por exemplo. Outro exemplo se dá com o trabalho de Wang (2019), onde o autor realiza uma modificação de perfil completo para reduzir a vibração do engrenamento e em outro estudo, Wang (2021b) realiza uma modificação 3D com o mesmo objetivo.

Essas modificações podem ser realizadas a partir de alterações nos parâmetros de fabricação, como Litvin e Fuentes (2004) comenta, exemplificado na Figura 13(a), em que o perfil da engrenagem é formado pela cremalheira geradora em posição padrão (centrodo<sup>1</sup> da cremalheira tangente à circunferência primitiva da engrenagem) e Figura 13(b) com a posição alterada. Ou ainda com a modificação da superfície da ferramenta

<sup>1</sup>Região que coincide com a trajetória seguida pelo centro instantâneo.

geradora, como o já comentado estudo de Wang (2019) utilizando o método TCA de Litvin *et al.* (1999) e LTCA de Conry e Seireg (1973), na qual obtém a superfícies modificadas dos dentes de engrenagens helicoidais através da modificação das superfícies dos dentes da cremalheira geradora (Figura 14).

Figura 12: Tipos de modificação de engrenagem.

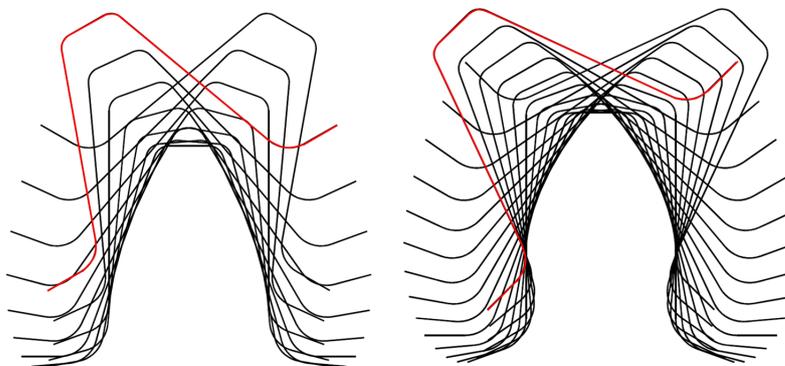


Fonte: Adaptado de Wang (2021b).

Figura 13: Geração do perfil do dente.

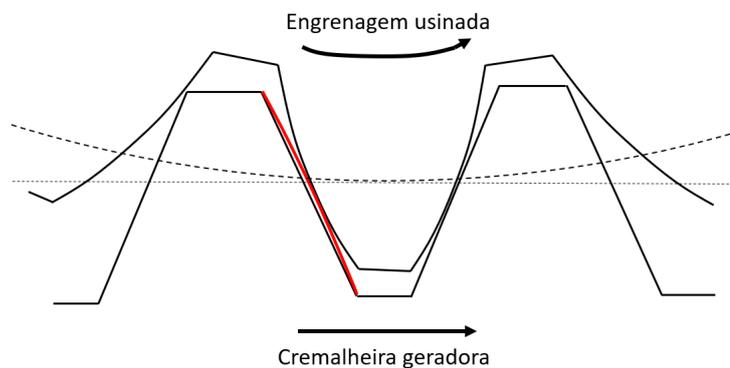
(a) Evolvente padrão

(b) Evolvente modificada



Fonte: Adaptado de Litvin e Fuentes (2004).

Figura 14: Geração do perfil do dente a partir da ferramenta modificada.



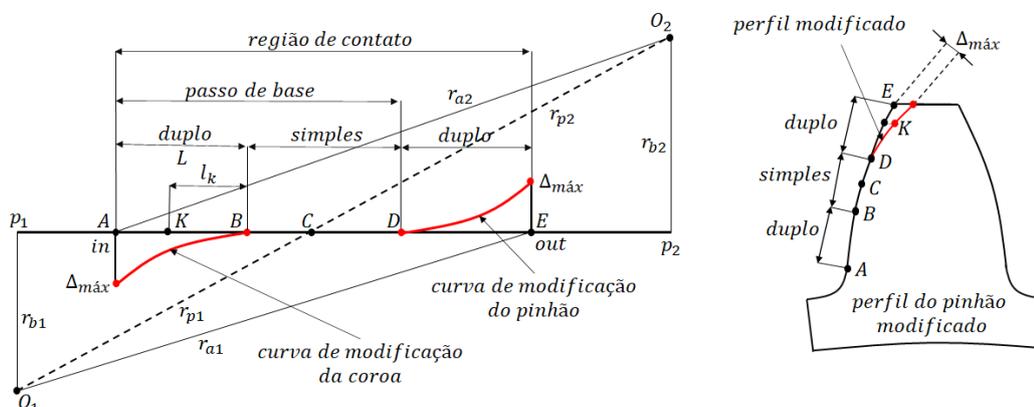
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 15 ilustra a modificação de adendo que é descrita, segundo Hu *et al.* (2016) pela expressão:

$$\Delta_{i,j} = \Delta_{max} \left( \frac{l_{kj}}{L} \right)^{\beta_c}, \quad (2.74)$$

em que  $\Delta_{i,j}$  é a quantidade de modificação no ponto de contato  $K$  (na fase duplo da ponta do dente modificado) e  $\Delta_{max}$  a quantidade máxima de modificação, na qual um valor de referência pode ser encontrado a partir da precisão de fabricação da engrenagem, onde  $\Delta_{max} = 2E_{mse} + \delta_{HPSTC}$  em que  $E_{mse}$  é o desvio de passo e  $\delta_{HPSTC}$  o valor da deformação do ponto de contato de dente único mais alto (HPSTC - Figura 7).  $\beta_c$  é o coeficiente de modificação que para o caso linear  $\beta_c = 1$ .  $L$  é o comprimento da fase de engrenamento duplo no caminho de contato e  $l_{kj}$  é a distância do HPSTC ou LPSTC até o ponto de contato  $K$  na fase de contato duplo do par de dentes  $j$ .

Figura 15: Modificação de adendo - alívio de topo.

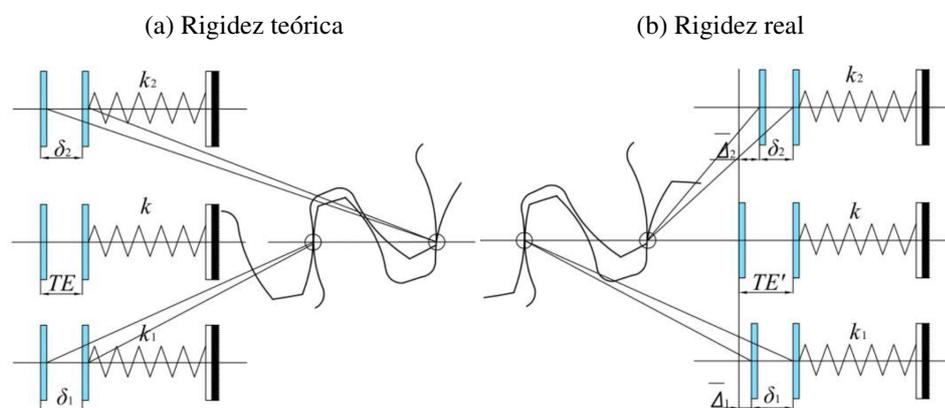


Fonte: Adaptado de Luo e Li (2019b).

Durante o engrenamento, apenas um dente do par em contato terá modificação ativa. Assim, nas fases de contato duplo o dente da coroa do primeiro par estará com a parte modificada do dente em contato enquanto que no segundo par o dente do pinhão estará com a parte modificada em contato. O objetivo por trás desta modificação é a inclusão de erros de engrenamento no contato duplo, a fim de reduzir a discrepância entre as fases.

No processo de transmissão, o modelo de carga do duplo par engrenado pode ser simplificado em um modelo de duas molas paralelas com diferentes rigidezes (Figura 16(a) e 16(b)), semelhantemente ao exibido na Figura 11.

Figura 16: Rigidez estática teórica e real.



Fonte: Luo e Li (2019b).

A Figura 16(a) ilustra a deformação estática de cada par. Luo e Li (2019b) comentam que a força atuante no engrenamento é dividida entre os dentes em contato de tal forma que as deformações  $\delta_1$  e  $\delta_2$  sejam iguais, assim  $(TE)$  representa o erro de transmissão estático teórico do sistema dado por:

$$TE = \frac{F}{k_1 + k_2} = \frac{F}{k_t} \quad (2.75)$$

Já na figura 16(b), a deformação estática leva em consideração os erros de engrenamento, que é o termo decrescido da deformação  $\delta_i$ , e assim as cargas para o primeiro e segundo par são expressas como:

$$F_1 = k_1(TE' - \bar{\Delta}_1), \quad (2.76)$$

$$F_2 = k_2(TE' - \bar{\Delta}_2). \quad (2.77)$$

Sendo a carga externa total do sistema (força atuante na linha de ação) igual a soma da carga dos dois pares engrenados:

$$F = F_1 + F_2. \quad (2.78)$$

Baseado nas equações (2.76) à (2.78), para o modelo com erros, o erro de transmissão estática real  $TE'$  pode ser expresso por:

$$TE' = \frac{F + k_1 \bar{\Delta}_1 + k_2 \bar{\Delta}_2}{k_1 + k_2}, \quad (2.79)$$

em que  $\bar{\Delta}_j$  é a função dos erros do sistema. Assim, de acordo com a equação (2.35) e (2.79), o erro de transmissão estático do sistema apenas com erros causado pelas modificações dos dentes é dado por:

$$TE_M = \frac{F + \sum_{j=1}^2 k_j (\Delta_{1,j} + \Delta_{2,j})}{k_1 + k_2}. \quad (2.80)$$

Um dos métodos para contabilizar a modificação do perfil é através da modificação da rigidez de engrenamento, chamado método da rigidez equivalente de engrenamento que, de acordo com Ghosh e Chakarborty (2013), pode ser calculada como:

$$k_M = \frac{F}{TE_M} = \frac{F(k_1 + k_2)}{F + \sum_{j=1}^2 k_j (\Delta_{1,j} + \Delta_{2,j})}. \quad (2.81)$$

## 2.5 Modelo dinâmico

A modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de desenvolver e implementar modelos matemáticos em sistemas reais. Há várias formas e técnicas de se obter modelos matemáticos, uma delas é a modelagem caixa branca. Neste caso, faz-se necessário conhecer a fundo o sistema a ser modelado e as relações matemáticas que descrevem os fenômenos envolvidos. Este tipo de modelagem também é conhecida como modelagem pela física ou natureza do processo, ou ainda modelagem fenomenológica ou conceitual (AGUIRRE, 2007).

Vale notar que um modelo matemático possui algumas características do sistema real. A escolha destas características não é única e depende do objetivo para o qual o modelo está sendo desenvolvido. Para sistemas dinâmicos, deseja-se que o modelo

matemático represente o comportamento dinâmico, ou seja, possibilite a predição da evolução temporal do sistema. Contudo, sabe-se que o modelo desenvolvido para um determinado sistema é apenas uma representação aproximada.

Aguirre (2007) ainda apresenta alguns conceitos importantes para a modelagem de um sistema dinâmico:

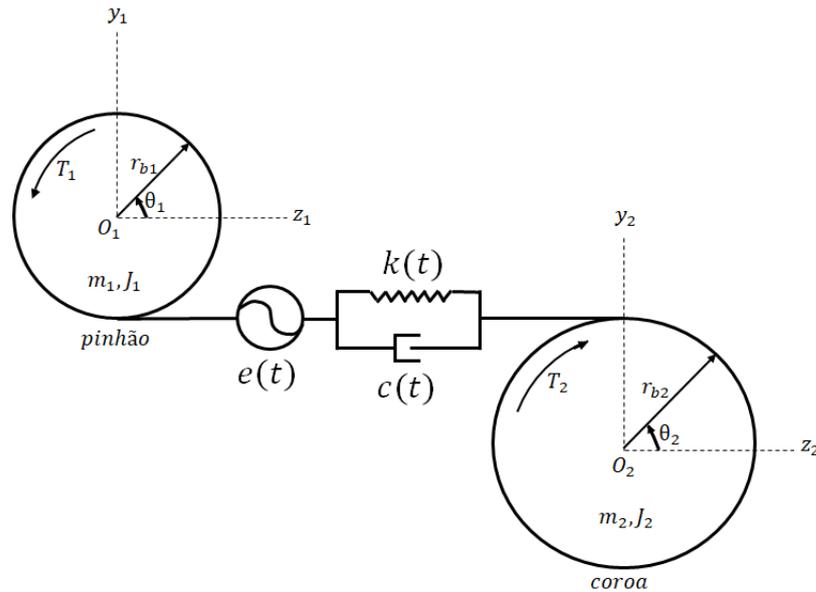
1. Linearidade: formalmente, diz-se que um sistema é linear se satisfaz o princípio da superposição. Em outras palavras, pode-se dizer que o sistema tem o mesmo tipo de comportamento independente do ponto de operação;
2. Invariância no tempo: diz-se que um sistema é invariante no tempo quando o comportamento deste sendo modelado não varia com o tempo. O que não significa que as variáveis do sistema possuem valores constantes. Pelo contrário, os valores das variáveis que caracterizam o sistema flutuam com o tempo, sendo esta evolução temporal determinada por uma lei, como a dinâmica do sistema. Em outras palavras, o sistema é invariante se um deslocamento no tempo da entrada causa um deslocamento no tempo da saída.
3. Discreto ou contínuo: modelos contínuos são descritos por equações diferenciais e representam a evolução do sistema continuamente no tempo. Em contraste, modelos discretos no tempo representam a evolução do sistema em instantes discretos e são escritos por equações a diferenças.
4. Autônomo ou não autônomo: diz-se que um modelo é autônomo se tal modelo não depende explicitamente do tempo.
5. Determinísticos ou estocásticos: os modelos determinísticos são aqueles em que as variáveis e parâmetros são tratados como sendo determinísticos, ou seja, não são variáveis aleatórias. Por outro lado, os estocásticos lidam com diversas fontes de incertezas presentes em qualquer situação real por meio do uso de variáveis aleatórias, como sendo uma função da densidade de probabilidade condicional.

### **2.5.1 Modelo de um par de engrenagens de dentes retos**

A Figura 17 mostra um sistema de engrenamento de um par de engrenagens cilíndricas de dentes retos aproximado como sendo dois discos rígidos interligados atra-

vés da interface de engrenamento na qual as características de contato variam com o tempo, isto é, a rigidez  $k(t)$ , o amortecimento  $c(t)$  e o erro de engrenamento  $e(t)$  estão em função do tempo.

Figura 17: Modelo dinâmico torcional de um engrenamento de engrenagens cilíndricas de dentes retos com 6 GDL.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O modelo possui 6 graus de liberdade, sendo as direções  $y_1$ ,  $z_1$  e  $\theta_1$  para o pinhão e  $y_2$ ,  $z_2$  e  $\theta_2$  para a coroa. As equações de movimento, ou seja, as equações matemáticas que representam o sistema ao longo do tempo, podem ser obtidas através do equacionamento de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{dq_i} \right) - \frac{dL}{dq_i} - \frac{dR}{dq_i} = Q_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.82)$$

onde  $L = T - U$  e  $R = \frac{c\dot{q}_i^2}{2}$ , sendo  $T$  é a energia cinética,  $U$  a energia potencial e  $R$  a função de dissipação de Rayleigh,  $c$  o coeficiente de amortecimento,  $Q_i$  a força externa aplicada à coordenada generalizada representada por  $q_i$ .

Quando aplicada a equação (2.82) ao modelo torcional da Figura 17, obtém-se as

equações dinâmicas do sistema, segundo Ghosh e Chakraborty (2016):

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_1(t) + k_2(t))(r_{b1}\theta_1 - r_{b2}\theta_2 + z_1 - z_2)r_{b1} + (c_1(t) + c_2(t))(r_{b1}\dot{\theta}_1 - r_{b2}\dot{\theta}_2 + \dot{z}_1 - \dot{z}_2)r_{b1} = T_1, \quad (2.83)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 - (k_1(t) + k_2(t))(r_{b1}\theta_1 - r_{b2}\theta_2 + z_1 - z_2)r_{b2} + - (c_1(t) + c_2(t))(r_{b1}\dot{\theta}_1 - r_{b2}\dot{\theta}_2 + \dot{z}_1 - \dot{z}_2)r_{b2} = -T_2, \quad (2.84)$$

$$m_1\ddot{z}_1 + c_{1z}\dot{z}_1 + k_{1z}z_1 = 0, \quad (2.85)$$

$$m_2\ddot{z}_2 + c_{2z}\dot{z}_2 + k_{2z}z_2 = 0, \quad (2.86)$$

$$m_1\ddot{y}_1 + c_{1y}\dot{y}_1 + k_{1y}y_1 = 0, \quad (2.87)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + c_{2y}\dot{y}_2 + k_{2y}y_2 = 0, \quad (2.88)$$

onde  $J_i$  é o momento de inércia,  $m_i$  a massa,  $\theta_i$  o deslocamento angular,  $\dot{\theta}_i$  e  $\ddot{\theta}_i$  a velocidade e aceleração angular da engrenagem  $i$ .  $z_i$  é o deslocamento vibratório translacional,  $\dot{z}_i$  e  $\ddot{z}_i$  a velocidade e aceleração na translacional ao longo da linha de ação. Semelhantemente,  $y_i$  é o deslocamento vibratório translacional na direção normal à linha de ação,  $\dot{y}_i$  e  $\ddot{y}_i$  a velocidade e aceleração deste deslocamento.  $r_{bi}$  é o raio de base da engrenagem,  $T_i$  o torque.  $k_j(t)$  e  $c_j(t)$  são a rigidez de engrenamento variante no tempo e o amortecimento de engrenamento variante no tempo, respectivamente, do par de dentes  $j$  engrenados.  $k_{iz}$  é a rigidez do sistema eixo-rolamento da engrenagem  $i$  atuante na direção da linha de ação,  $k_{iy}$  é a rigidez do sistema eixo-rolamento da engrenagem  $i$  atuante na direção normal à linha de ação.  $c_{iz}$  é o amortecimento do sistema eixo-rolamento da engrenagem  $i$  atuante na direção da linha de ação,  $c_{iy}$  é o amortecimento do sistema eixo-rolamento da engrenagem  $i$  atuante na direção normal à linha de ação.

Ghosh e Chakraborty (2016) afirmam que a modificação do perfil do dente afeta a resposta dinâmica do sistema através apenas da TVMS no modelo dinâmico. Sendo assim, o TPM está relacionado apenas com as equações (2.83) e (2.84), ou seja, apenas relacionado a vibração torcional do sistema. Adicionalmente, sem força de excitação nas coordenadas translacionais, a vibração nestas serão eventualmente nulas. Então, o sistema pode ser reduzido a 2 graus de liberdade e as equações de movimento do

sistema são:

$$J_1 \ddot{\theta}_1(t) + (k_1(t) + k_2(t)) (r_{b1}\theta_1(t) - r_{b2}\theta_2(t))r_{b1} + \quad (2.89)$$

$$+ (c_1(t) + c_2(t))(r_{b1}\dot{\theta}_1(t) - r_{b2}\dot{\theta}_2(t))r_{b1} = T_1 = r_{b1}F,$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2(t) - (k_1(t) + k_2(t)) (r_{b1}\theta_1(t) - r_{b2}\theta_2(t))r_{b2} + \quad (2.90)$$

$$- (c_1(t) + c_2(t))(r_{b1}\dot{\theta}_1(t) - r_{b2}\dot{\theta}_2(t))r_{b2} = -T_2 = -r_{b2}F,$$

onde  $k(t)$  é a TVMS,  $c(t)$  o amortecimento de engrenamento variante no tempo (TVMD),  $F$  a força externa na linha de ação,  $r_{bi}$  é o raio de base e  $\theta_i$  o deslocamento angular da engrenagem  $i$ . Assim, baseado nas equações (2.89) e (2.90) a equação que governa o sistema é então expressa como:

$$(r_{b1}\ddot{\theta}_1(t) - r_{b2}\ddot{\theta}_2(t)) + c(t)(r_{b1}\dot{\theta}_1(t) - r_{b2}\dot{\theta}_2(t)) \left( \frac{r_{b1}^2}{J_1} + \frac{r_{b2}^2}{J_2} \right) + \quad (2.91)$$

$$+ k(t)(r_{b1}\theta_1(t) - r_{b2}\theta_2(t)) \left( \frac{r_{b1}^2}{J_1} + \frac{r_{b2}^2}{J_2} \right) = \left( \frac{r_{b1}^2}{J_1} + \frac{r_{b2}^2}{J_2} \right) F,$$

em que  $r_{b1}\theta_1(t) - r_{b2}\theta_2(t)$  denota a quantidade de deformação no ponto de contato do engrenamento, ou seja, o erro de transmissão dinâmico (*DTE*) do sistema, que pode ser expresso como:  $x = r_{b1}\theta_1(t) - r_{b2}\theta_2(t)$ , e subsequentemente, a primeira e segunda derivada do erro de transmissão são expressas por  $\dot{x} = r_{b1}\dot{\theta}_1(t) - r_{b2}\dot{\theta}_2(t)$  e  $\ddot{x} = r_{b1}\ddot{\theta}_1(t) - r_{b2}\ddot{\theta}_2(t)$ , respectivamente. Além disso, a massa equivalente do par de engrenagens pode ser expressa como  $m_e = J_1 J_2 / (J_1 r_{b2} + J_2 r_{b1})$  e a equação (2.91) pode ser simplificada para:

$$m_e \ddot{x} + c(t)\dot{x} + k(t)x = F. \quad (2.92)$$

A equação (2.92) é a equação diferencial da vibração torcional do modelo de sistema de transmissão por engrenagens.

## 2.5.2 Modelo dinâmico com modificação do perfil do dente

Conforme comentado na Seção 2.4, uma das formas de incluir os efeitos do TPM é através da alteração provocada pela modificação na TVMS utilizando o método da rigidez equivalente (equação (2.81)), conforme apresentado pelo estudo de Ghosh e Chakarborty (2013). Contudo, Luo e Li (2019b) apresentaram um novo método de modelagem para um sistema de engrenagens após o TPM que é apresentado a seguir.

Os autores perceberam, através equação (2.80), que o erro de transmissão do sistema após o TPM está relacionado não apenas à carga e rigidez do sistema, mas também à função da quantidade de TPM. Assim, a equação (2.80) também pode ser reescrita como:

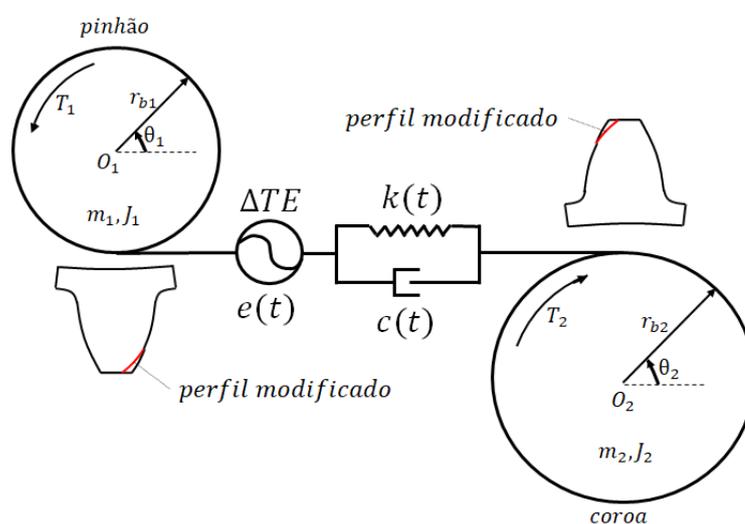
$$TE_M = \frac{F}{k_1 + k_2} + \frac{\sum_{j=1}^2 k_j(\Delta_{1,j} + \Delta_{2,j})}{k_1 + k_2} = TE + \Delta TE. \quad (2.93)$$

Em que o erro de transmissão estático ( $TE_M$ ) é a soma do erro de transmissão estático teórico ( $TE$ ) e do erro de transmissão estático equivalente ( $\Delta TE$ ). Sendo assim, o erro de transmissão estático equivalente do par de dentes  $j$  causado pela quantidade de modificação dos dentes pode ser expresso como:

$$\Delta TE_j = \frac{k_j(\Delta_{1,j} + \Delta_{2,j})}{k_1 + k_2}. \quad (2.94)$$

A Figura 18 representa o modelo para o sistema de engrenagens engrenadas considerando o erro de transmissão causado pela modificação dos perfis dos dentes.

Figura 18: Modelo dinâmico torcional de um engrenamento de engrenagens cilíndricas com dentes modificados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela Figura 18 observa-se que a direção da modificação do perfil do dente do pinhão é oposta a direção de rotação, enquanto que a da coroa é na mesma direção da

rotação. Assim, o ângulo de rotação real  $\theta'_i(t)$  das engrenagens é expresso como:

$$\theta'_1(t) = \theta_1(t) - \Delta\theta_1(t) = \theta_1(t) - \frac{\Delta TE_1}{r_{b1}}, \quad (2.95)$$

$$\theta'_2(t) = \theta_2(t) - \Delta\theta_2(t) = \theta_2(t) + \frac{\Delta TE_2}{r_{b2}}. \quad (2.96)$$

Considerando que o ângulo de rotação equivalente causado pelo TPM é o erro estático do sistema, a primeira e segunda derivada do ângulo de rotação real  $\theta'_i(t)$  e  $\theta''_i(t)$  são iguais a primeira e segunda derivada do ângulo de rotação teórico  $\dot{\theta}_i(t)$  e  $\ddot{\theta}_i(t)$ , isto é:

$$\dot{\theta}'_1(t) \approx \dot{\theta}_1(t), \quad \ddot{\theta}'_1(t) \approx \ddot{\theta}_1(t), \quad (2.97)$$

$$\dot{\theta}'_2(t) \approx \dot{\theta}_2(t), \quad \ddot{\theta}'_2(t) \approx \ddot{\theta}_2(t). \quad (2.98)$$

Então, substituindo (2.97) e (2.98) nas equações (2.89) e (2.90), a equação diferencial da vibração torcional do sistema com TPM é expressa como:

$$J_1 \ddot{\theta}_1(t) + c(t) (r_{b1} \dot{\theta}_1(t) - r_{b2} \dot{\theta}_2(t)) r_{b1} + \quad (2.99)$$

$$+ k(t) (r_{b1}(\theta_1(t) - \Delta\theta_1(t)) - r_{b2}(\theta_2(t) - \Delta\theta_2(t))) r_{b1} = T_1 = r_{b1}F,$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2(t) + c(t) (r_{b2} \dot{\theta}_2(t) - r_{b1} \dot{\theta}_1(t)) r_{b2} + \quad (2.100)$$

$$+ k(t) (r_{b2}(\theta_2(t) - \Delta\theta_2(t)) - r_{b1}(\theta_1(t) - \Delta\theta_1(t))) r_{b2} = -T_2 = -r_{b2}F.$$

As equações (2.99) e (2.100) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} & (r_{b1} \ddot{\theta}_1(t) - r_{b2} \ddot{\theta}_2(t)) + c(t) (r_{b1} \dot{\theta}_1(t) - r_{b2} \dot{\theta}_2(t)) \left( \frac{r_{b1}^2}{J_1} + \frac{r_{b2}^2}{J_2} \right) + \quad (2.101) \\ & + k(t) ((r_{b1} \theta_1(t) - r_{b2} \theta_2(t)) - (r_{b1} \Delta\theta_1(t) - r_{b2} \Delta\theta_2(t))) \left( \frac{r_{b1}^2}{J_1} + \frac{r_{b2}^2}{J_2} \right) \\ & = \left( \frac{r_{b1}^2}{J_1} + \frac{r_{b2}^2}{J_2} \right) F. \end{aligned}$$

As mesmas simplificações aplicadas à equação (2.91) podem ser realizadas na equação (2.101). Além disso,  $r_{b1} \Delta\theta_1(t) + r_{b2} \Delta\theta_2(t) = \Delta TE$ . Assim, a equação (2.101) pode ser escrita na forma:

$$m_e \ddot{x} + c(t) \dot{x} + k(t)x = F + \sum_{j=1}^2 k_j(t) (\Delta_{1,j} + \Delta_{2,j}) = F + \sum_{j=1}^2 k_j(t) \bar{\Delta}_j. \quad (2.102)$$

A equação (2.102), apresentada por Luo e Li (2019b), mostra que o TPM afeta a dinâmica da resposta do sistema alterando a força de excitação do sistema, na qual o incremento da carga é igual a soma dos produtos da rigidez e da quantidade de modificação de cada par de dentes relacionados.

## 2.6 Otimização

Segundo Luenberger (2008), o conceito de otimização é enraizado como o princípio por trás da análise de muitas decisões complexas ou alocação de problemas. Uma abordagem para um processo de decisão complexo envolve a seleção de valores para variáveis correlacionadas, focando atenção em um único objetivo designado para quantificar o desempenho e medir a qualidade da decisão. Este objetivo é maximizar (ou minimizar, dependendo da formulação) sujeito à restrições que limitam a seleção de valores para as variáveis de decisão. Se um único aspecto de um problema puder ser isolado e caracterizado como um objetivo, a otimização pode prover uma boa estrutura para análise.

O programa de otimização linear (problema caracterizado em funções lineares - tanto a função objetivo quanto as restrições), para duas variáveis, é dado, segundo Luenberger (2008), na forma padrão:

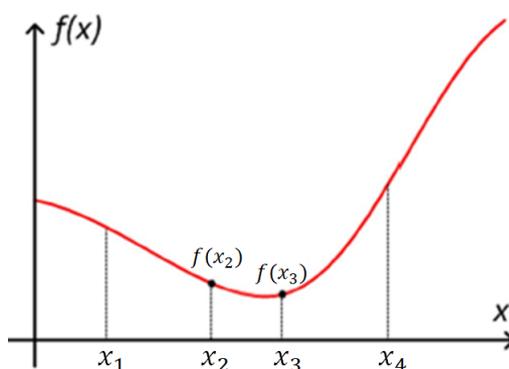
$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 = B, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Ainda de acordo com Luenberger (2008), a característica mais importante de um computador é a habilidade de desempenhar operações repetitivas eficientemente e, para se aproveitar desta característica, a maioria dos algoritmos são projetados para resolver grandes problemas de otimização de forma iterativa. Para a programação linear, a sequência gerada tem um comprimento finito, atingindo a solução após um número finito (porém inicialmente não especificado) de iterações. Já para a programação não linear, a sequência geralmente nunca alcança exatamente o ponto de solução, mas converge para este. Operacionalmente, o processo de otimização é interrompido quando um ponto suficientemente próximo da solução é atingido.

É possível que o problema que se deseja otimizar não possua uma função objetivo

simples de ser diferenciada para se obter os máximos e mínimos. Uma técnica utilizada para encontrar extremos (máximos ou mínimos) de uma função unidimensional dentro de um intervalo especificado é a busca pela seção áurea. Para uma função unimodal (com apenas um ponto extremo) dentro do intervalo especificado um valor extremo será encontrado. Para o caso em que exista múltiplos extremos dentro do intervalo de busca, um destes extremos será obtido. Essa técnica deriva seu nome pelo fato de que o algoritmo mantém o espaçamento dos pontos de busca segundo a proporção áurea  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033\dots$

Figura 19: Método de busca pela seção áurea de uma função.



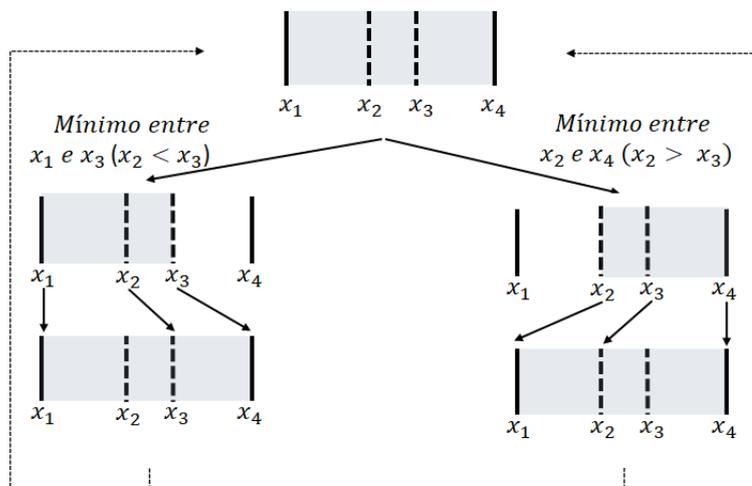
Fonte: Adaptado de Webb (2015).

$x_2$  e  $x_3$  são calculados a partir do intervalo de busca inicial ( $x_1$  e  $x_4$ ) sendo:

$$x_2 = x_4 + \frac{x_4 - x_1}{\varphi} \quad \text{e} \quad x_3 = x_1 + \frac{x_4 - x_1}{\varphi}. \quad (2.104)$$

Então a função é avaliada nestes pontos e, ao compará-los, há apenas duas possibilidades:  $f(x_2) < f(x_3)$  ou  $f(x_2) > f(x_3)$ . A próxima iteração irá utilizar a equação (2.104) para calcular os novos pontos, seguindo a lógica exemplificada com a Figura 20.

Figura 20: Ilustração das iterações do método de busca pela seção áurea.



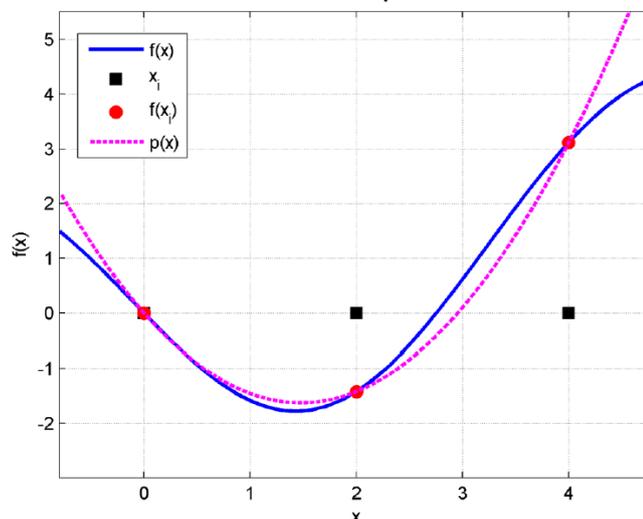
Fonte: Elaborado pelo autor.

Onde:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_4 - x_3} = \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{x_4 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \varphi.$$

O *software* MATLAB possui uma função de otimização que se baseia nesse método. De acordo com Webb (2015), a função *fminbnd* utiliza a busca pela seção áurea quando necessário e interpolação polinomial quando possível. Caso o ponto esteja próximo do ótimo, a interpolação quadrática (parabólica) pode ser satisfatória. Assim, adequando a curva em três pontos calculados, uma parábola única é formada e o possível mínimo se encontrará no extremo desta. A visualização de um exemplo é dada na Figura 21.

Figura 21: Método de interpolação polinomial - quadrática.



Fonte: Webb (2015).

Neste método, não é necessário calcular a parábola em si, pode-se ir direto à busca pelo ponto ótimo. Mas, esta pode ser calculada de, acordo com Webb (2015), através da formulação:

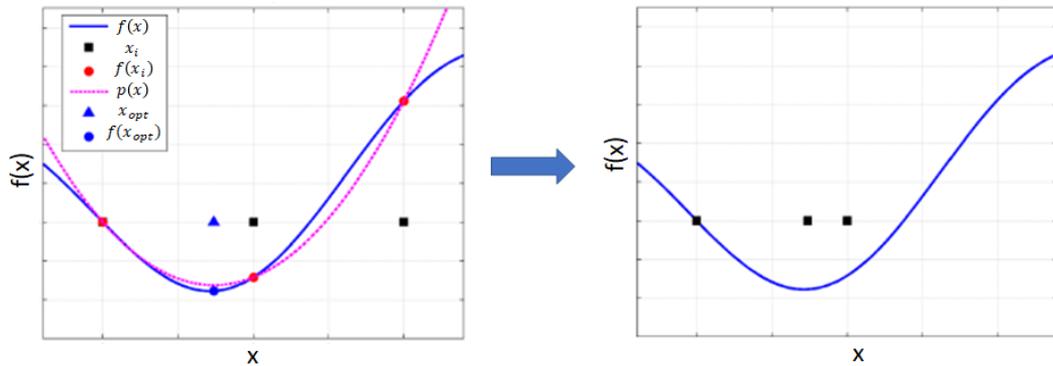
$$p(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3), \quad (2.105)$$

sendo o ponto ótimo da parábola dado por:

$$x_4 = x_2 - \frac{1}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2 [f(x_2) - f(x_3)] - (x_2 - x_3)^2 [f(x_2) - f(x_1)]}{(x_2 - x_1) [f(x_2) - f(x_3)] - (x_2 - x_3) [f(x_2) - f(x_1)]}. \quad (2.106)$$

E na iteração seguinte,  $x_4$  será o novo ponto de estimação, como ilustra a Figura 22.

Figura 22: Ilustração das iterações do método de interpolação polinomial - quadrática.



Fonte: Adaptado de Webb (2015).

A determinação do novo intervalo é semelhante ao método da procura pela seção áurea. Como observa-se na Figura 22,  $f(x_4) < f(x_2)$ ,  $x_{opt}$  está no intervalo com menor valor de  $f(x)$ , então se descarta o intervalo superior ( $x > x_2$ ):

$$x_{1,i+1} = x_{1,i}, \quad (2.107)$$

$$x_{2,i+1} = x_{4,i}, \quad (2.108)$$

$$x_{3,i+1} = x_{2,i}. \quad (2.109)$$

E, se  $f(x_4) > f(x_2)$ ,  $x_{opt}$  está no intervalo superior, então se descarta o intervalo inferior:

$$x_{1,i+1} = x_{2,i}, \quad (2.110)$$

$$x_{2,i+1} = x_{4,i}, \quad (2.111)$$

$$x_{3,i+1} = x_{3,i}. \quad (2.112)$$

A otimização então é interrompida quando o critério de parada é satisfeito, isto é, o erro calculado é menor que o estabelecido ( $10^{-4}$  por padrão).

$$\varepsilon_a = (2 - \varphi) \left| \frac{x_{sup} - x_{inf}}{\hat{x}_{opt}} \right|, \quad (2.113)$$

onde  $x_{sup}$  e  $x_{inf}$  se tratam dos valores do intervalo de busca e  $\hat{x}_{opt}$  o valor ótimo estimado da última iteração.

### 3 METODOLOGIA

A metodologia adotada neste trabalho é apresentada visando a satisfação dos objetivos descritos na Seção 1.1. Aqui também estão explícitas as limitações e restrições deste trabalho. Além disso, um algoritmo foi elaborado utilizando o *software* MATLAB (disponível no Apêndice B) no qual são realizados todos os cálculos e simulações.

#### 3.1 Parâmetros do engrenamento

Como ponto de partida, se faz necessário definir o sistema de engrenagens a ser trabalhado. Um par foi utilizado para a simulação dinâmica (Sistema I) e outros dois pares de engrenagens distintos foram utilizados para a validação dos cálculos da TVMS (Sistemas II e III). Considerando em todos os casos engrenagens cilíndricas de dentes retos com engrenamento ideal, ou seja, engrenagens sem defeitos de fabricação e montagem, sem erros de engrenamento (exceto ao tratar da modificação de perfil), com material homogêneo (densidade constante), com razões de contato entre 1 e 2 ( $1 < C_r < 2$ ), rugosidade da face dos dentes constante, com lubrificação ideal (fornecimento contínuo de lubrificante e sem variação da temperatura de operação), torque e velocidade rotacional de entrada constantes. Além disso, as análises são restritas às respostas em regime permanente.

Adicionalmente, foi inserido um furo nas engrenagens para possibilitar o cálculo da rigidez de fundação, assim, o diâmetro do furo foi arbitrariamente definido como 20% do valor do diâmetro de dedendo. A arbitrariedade deste valor se dá ao fato de que a definição desta dimensão não foi mencionada na literatura representada.

Os parâmetros das engrenagens e de operação utilizados no sistema apresentado

por Luo e Li (2019b) (Sistema I) são aqui reproduzidos nas Tabelas 2 e 3.

Tabela 2: Valores de referência para a geometria e material das engrenagens - Sistema I.

Parâmetro	Valor
Número de dentes - $N_1, N_2$	27, 35
Módulo normal - $m$ (mm)	3
Ângulo de pressão - $\alpha$ ( $^\circ$ )	20
Largura da face - $b$ (mm)	25
Rugosidade da superfície - $Ra$ ( $\mu\text{m}$ )	0,63
Módulo de elasticidade - $E$ (GPa)	206
Coefficiente de Poisson - $\nu$	0,3
Densidade - $\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )	7850

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3: Valores de referência para operação do engrenamento - Sistema I.

Parâmetro	Valor
Potência de entrada - $P$ (kW)	80
Rotação de entrada - $\omega$ (rpm)	2000
Temperatura de operação - $T_0$ ( $^\circ\text{C}$ )	60
Tipo do lubrificante	SCH632
Densidade do lubrificante - $\rho_0$ ( $\text{kg/m}^3$ )	870
Viscosidade cinemática - $\eta_M$ (cSt)	320 (40 $^\circ\text{C}$ ) / 38,5 (100 $^\circ\text{C}$ )

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a validação dos cálculos da rigidez de engrenamento pelo método da energia foram utilizados os parâmetros dos sistemas de engrenagens conforme apresentadas por Tian, Zuo e Wu (2012) (Sistema II) e Chen e Shao (2011) (Sistema III), cujos valores estão disponíveis na Tabela 4.

Tabela 4: Valores de referência para a geometria e material das engrenagens utilizadas na verificação dos cálculos da TVMS.

Parâmetro	Sistema:	II	III
		Valor	Valor
Número de dentes - $N_1, N_2$		19, 48	25, 30
Módulo normal - $m$ (mm)		3,175	2
Ângulo de pressão - $\alpha$ (°)		20	20
Largura da face - $b$ (mm)		16	20
Módulo de elasticidade - $E$ (GPa)		206,8	200
Coefficiente de Poisson - $\nu$		0,3	0,3
Rotação de entrada - $\omega$ (rpm)		1800	2400

Fonte: Elaborado pelo autor.

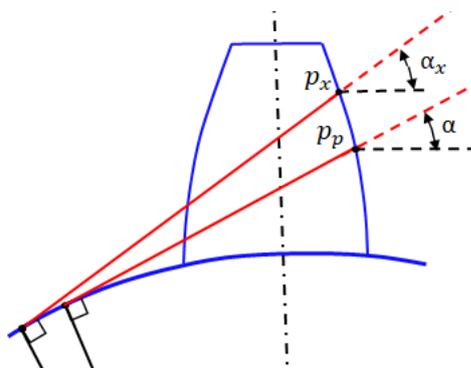
De posse dos parâmetros geométricos, as dimensões das engrenagens são calculadas de acordo com as equações (2.1). Assim como as relações do engrenamento, segundo apresentado na Subseção 2.1.3, onde são obtidos as distâncias entre as engrenagens, razão de contato, comprimento angular das fases de engrenamento e ângulos de engrenamento para o primeiro e segundo par de dentes engrenados.

Além disso, para facilitar a visualização das variáveis com relação ao ciclo de contato do dente, introduz-se uma coordenada normalizada,  $\Gamma$ , que relaciona a distância do ponto de contato ao ponto primitivo, definida como:

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha_x}{\operatorname{tg} \alpha} - 1, \quad (3.1)$$

em que  $\alpha_x$  é o ângulo de pressão no ponto de contato e  $\alpha$  o ângulo de pressão no ponto primitivo (Figura 23).

Figura 23: Definição da coordenada normalizada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.2 Rigidez e amortecimento de engrenamento

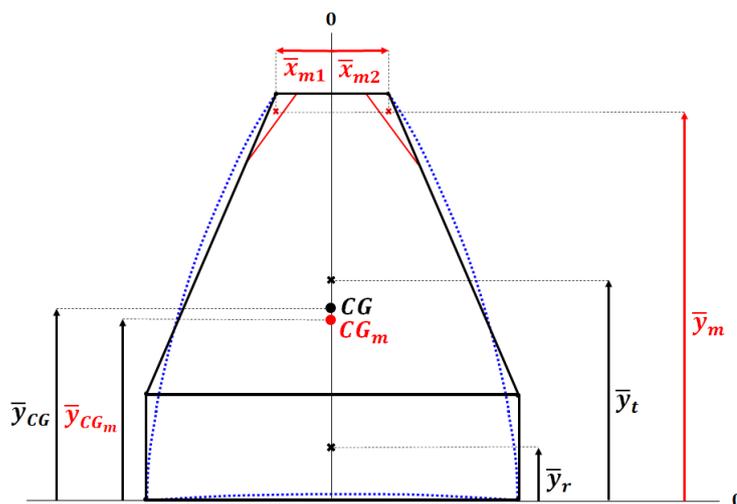
Os cálculos para a rigidez de engrenamento,  $k(t)$ , foram realizados de acordo com as equações (2.68) e foram então validados a partir da comparação dos gráficos obtidos com os gráficos disponíveis na literatura mencionada de Tian, Zuo e Wu (2012), nesse caso, sem a utilização do termo de rigidez devido à inclinação da fundação, pois os autores não a utilizaram. E para a validação desta última, foi realizada a comparação com o estudo de Chen e Shao (2011). Adicionalmente, apenas para avaliar a diferença dos valores obtidos entre as metodologias para cálculo de rigidez de engrenamento, essa foi também calculada pelo método de Ishikawa de acordo com as equações (2.51), validadas a partir da comparação com os gráficos disponíveis em Luo e Li (2019b).

Para o amortecimento, primeiro foi calculado o fator de amortecimento,  $\zeta$  (equação (2.72)), que é baseado nas condições de contato, isto é, velocidade e posição do ponto de contato relativo aos dentes (equação (2.33)) e nas condições de operação (Tabela 3). No estudo apresentado por Luo e Li (2019b), após o cálculo do coeficiente de atrito variante no tempo,  $\mu$  (equação (2.73)), a partir dos parâmetros definidos nas Tabelas 2 e 3, seleciona-se o respectivo à posição de contato no ponto primitivo, ou seja, utiliza-se um valor de  $\mu$  constante e, conseqüentemente, o valor de  $\zeta$  também será constante. A decisão da suposição de coeficiente de atrito constante também foi avaliada neste trabalho em relação ao coeficiente variável. Assim, pode-se então calcular o coeficiente de amortecimento,  $c(t)$ , simultaneamente com a rigidez de engrenamento (dentro do mesmo *loop*), visto que ambos estão relacionados pela equação (2.69).

### 3.3 Massa e momento de inércia

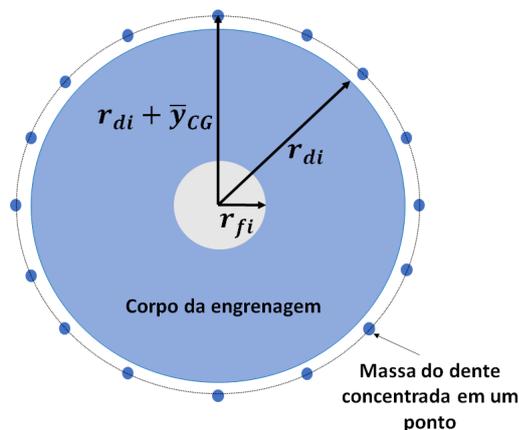
Para o cálculo de massa e momento de inércia das engrenagens, é geralmente utilizada uma simplificação considerando toda a engrenagem como cilindro maciço, a exemplo o modelo utilizado por Zhao (2015). Contudo, como este trabalho trata principalmente de modificações nos dentes das engrenagens, optou-se por incluir o cálculo de seus momentos de inércia e massas, como mais uma forma de quantificar as modificações no modelo dinâmico através da diferença na massa equivalente devido à remoção de material pela modificação de perfil. Assim, o presente autor utilizou da mesma simplificação do dente pelo método de Ishikawa (Figura 10) para determinar o centro de massa do dente, através do cálculo do centro de área do trapézio e retângulo utilizando a equação (A.5), ilustrado nas Figuras 24 e 25. Isso pôde ser realizado por conta da hipótese assumida de homogeneidade e pelo fato de se tratar de engrenagens cilíndricas de dentes retos, que possuem dentes com largura constante e não há variação da distância do centroide do dente com relação à largura da engrenagem (Anexo A).

Figura 24: Método para cálculo da massa e momento de inércia dos dentes das engrenagens.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25: Método para cálculo da massa e momento de inércia das engrenagens.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, o corpo da engrenagem foi tratado como um cilindro e os dentes como sendo um ponto singular com a massa concentrada em seu *CG* a uma distância radial ao centro da engrenagem, definida como o raio de dedendo adicionada à altura do centroide do dente. Desse arranjo foram calculados tanto a massa quanto o momento de inércia. Para engrenagens modificadas, o mesmo princípio foi utilizado para o cálculo sobre os dentes, porém, contabilizando a remoção de material da ponta do dente e, considerando que ambas as faces sofreram modificação, o centro de massa não foi alterado com relação à largura do dente, apenas com relação a sua altura. Para os modelos com e sem modificação, a validação do cálculo de massa e momento de inércia foi realizada através da comparação dos valores calculados em relação aos valores obtidos através do *software* SOLIDWORKS<sup>1</sup>.

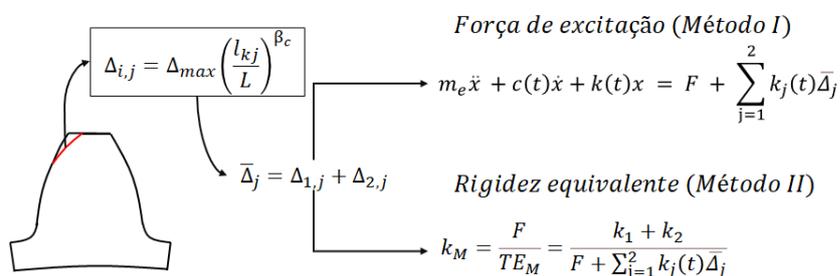
### 3.4 Modificação do perfil dos dentes

A modificação no perfil do dente é avaliada de duas maneiras: com a inclusão da força de excitação provocada pela modificação, segundo Luo e Li (2019b), denotado como Método I, e por meio a alteração da rigidez pelo método da rigidez equivalente utilizada por Ghosh e Chakarborty (2013), denotado como Método II, conforme ilustrado na 26. O valor da quantidade de modificação linear ( $\beta_c = 1$ ) é calculado de acordo com a posição de contato, segundo a equação (2.74). Esse é incluído no modelo dinâmico da equação (2.102) e na rigidez equivalente de acordo com a equação

<sup>1</sup><https://www.solidworks.com/pt-br - software CAD 3D>.

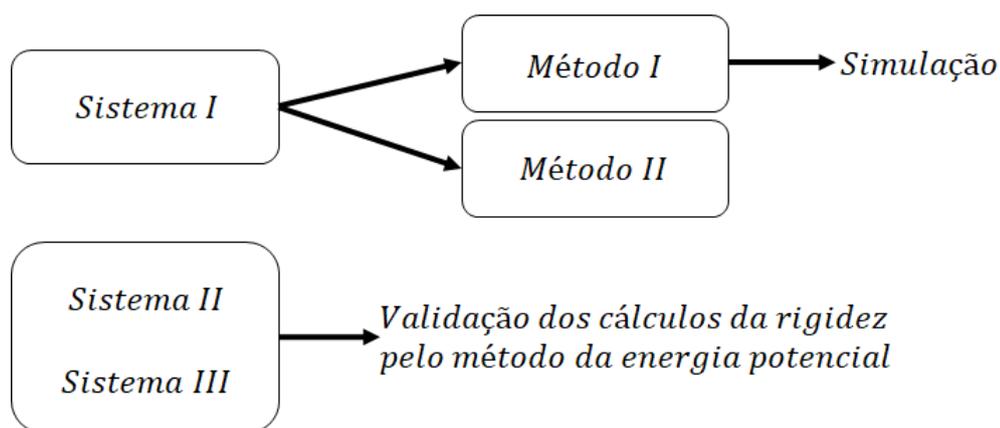
(2.81).

Figura 26: Métodos de avaliação do TPM.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 27: Relações entre sistemas e métodos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

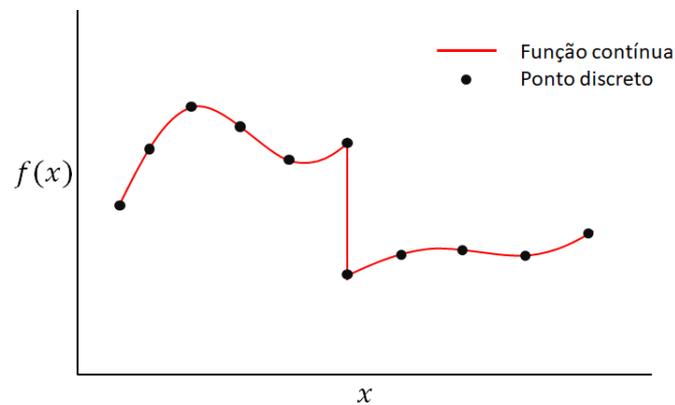
Vale notar que os métodos são avaliados separadamente, ou seja, utiliza-se o modelo dinâmico da equação (2.102) para a simulação. Em paralelo, calcula-se apenas a rigidez equivalente (equação (2.81)), a partir da qual permite-se notar algumas relações entre os dois métodos. A Figura 27 ilustra as relações entre os sistemas e métodos utilizados.

### 3.5 Modelo dinâmico

Este trabalho se baseia no modelo torcional para um engrenagens com modificação de perfil apresentado por Luo e Li (2019b), que trata de um modelo dinâmico determinístico, não linear, contínuo, variante no tempo e autônomo.

Visando a solução dos modelos estabelecidos nas equações (2.92) e (2.102), faz-se necessário a interpolação polinomial dos valores discretos de  $k(t)$  e  $c(t)$ , que proverá duas funções contínuas, no sentido de contínuo-discreto, pois as funções ainda serão descontínuas no sentido de salto dos valores no tempo, devido a mudança na quantidade de dentes em contato. Essas funções interpoladas representam  $k(t)$  e  $c(t)$  em qualquer instante de tempo, podendo, então, ser incorporadas ao modelo dinâmico. Para isso, foi utilizada a função *fit* do MATLAB e um resultado hipotético do processo é ilustrado na Figura 28.

Figura 28: Ilustração hipotética do resultado da interpolação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para obter as respostas dinâmicas, escreve-se equação do modelo dinâmico (equação (2.92)) sem modificação do perfil do dente reescrita na forma de espaço de estados, dada como:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k(t)}{m_e} & \frac{-c(t)}{m_e} \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_e} \end{bmatrix} F, \quad (3.2)$$

em que  $\vec{x}$  é o vetor de estados. E para o modelo com modificação, a equação (2.102) reescrita na forma de espaço de estados é:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k(t)}{m_e} & \frac{-c(t)}{m_e} \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_e} \end{bmatrix} \left( F + k_1(t)\bar{\Delta}_1 + k_2(t)\bar{\Delta}_2 \right). \quad (3.3)$$

Este formato é comumente utilizado, pois reduz a equação diferencial à primeira ordem, permitindo o cálculo computacional mais eficiente.

A solução da equação (3.2) através da função *ode15s*, a partir dos estados iniciais (ambos iguais a zero), fornecem os estados do sistema, isto é, a deformação (erro

de transmissão dinâmico) e taxa de variação dessa deformação. A realimentação dos estados ao modelo dinâmico retorna os valores da aceleração do erro de transmissão. A força de engrenamento variante no tempo (TVMF) é obtida aplicando os valores dos estados na equação (3.4), dada, segundo Ghosh e Chakraborty (2016), como:

$$TVMF = k(t)x + c(t)\dot{x}. \quad (3.4)$$

Para o modelo com modificação, a equação (3.3) é utilizada e solucionada da mesma maneira do modelo dinâmico sem modificação. A diferença consiste apenas na formulação da TVMF, em que  $k_j(t)$  é a rigidez de engrenamento referentes ao par de dentes  $j$ , sendo  $k(t) = k_1(t) + k_2(t)$ , dada por:

$$TVMF = k(t)x + c(t)\dot{x} - k_1(t)\bar{\Delta}_1 - k_2(t)\bar{\Delta}_2. \quad (3.5)$$

A equação (3.5) é equivalente à equação (3.4), sendo que a primeira apenas deduz a força provocada pela deformação na região de modificação do dente, tendo em vista que, no local onde ocorreu a modificação, houve remoção de material e esse não será deformado.

A resposta dinâmica de interesse principal se trata da posição, que no referido sistema é o erro de transmissão dinâmico (DTE). Sendo assim, sobre o sinal vibracional desse erro é extraído o valor de amplitude pico-a-pico em regime permanente, tomado como o parâmetro de qualidade do sistema modificado, ou seja, a função objetivo.

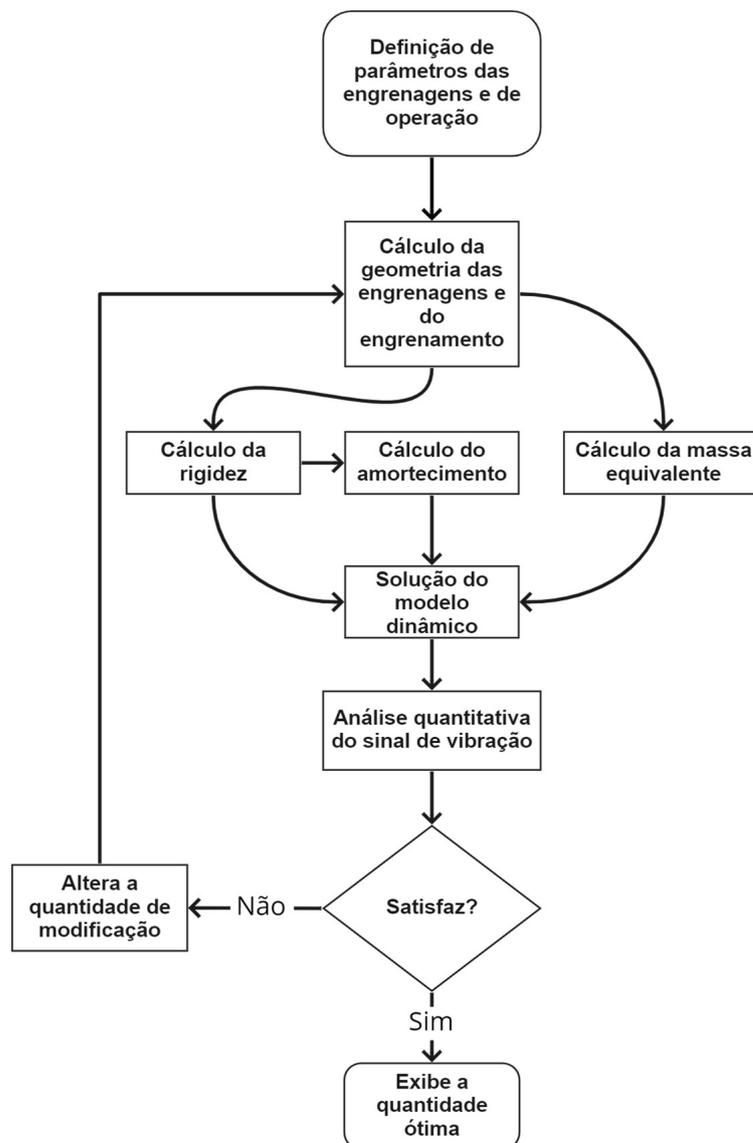
### 3.6 Otimização

Como visto até então, o processo até a obtenção do sinal de vibração é de certa forma complexo e a definição de uma função objetivo com o termo da quantidade de modificação explícita para o problema é inviável. Sendo assim, o método de otimização escolhido é baseado na busca pela seção áurea e interpolação parabólica, que independe da utilização de derivadas e encaixa-se perfeitamente neste tipo de problema. O uso deste método se deu a partir do *software* MATLAB, com a função *fminbnd*, utilizado para encontrar o mínimo local de uma função univariada dentro de um intervalo de busca.

O algoritmo de otimização elaborado é exemplificado na Figura 29 e sumariza

todo o processo de obtenção do valor ótimo.

Figura 29: Fluxograma do algoritmo de otimização.



miro

Fonte: Elaborado pelo autor.

O ponto de partida dá-se com a definição dos parâmetros das engrenagens e de operação, os quais serão utilizados para o cálculo da geometria das engrenagens, que é utilizada para o cálculo da massa equivalente e relações de engrenamento. Essa última define a rigidez e, por sua vez, o amortecimento de engrenamento variante no tempo. Esses parâmetros são então introduzidos no modelo dinâmico, o qual é solucionado e obtém-se a amplitude pico-a-pico sobre sinal de vibração (erro de transmissão dinâ-

mico), parâmetro a ser minimizado pela função  $fminbnd$  alterando-se a quantidade de modificação até que o critério de parada (tolerância) seja atendido.

O intervalo de busca da função  $fminbnd$  é determinado a partir da observação do comportamento da função a ser otimizada para várias quantidades de modificação. Assim, o intervalo foi estabelecido de 0 à 50  $\mu\text{m}$ , para as condições de operação da Tabela 3. A tolerância do algoritmo pode ser baseada na capacidade dimensional da fabricação, porém, para obter maior precisão no valor de otimização neste caso de simulação, é utilizada a tolerância padrão de  $1 \times 10^{-4} \mu\text{m}$ . Escrevendo o problema de otimização na forma padrão, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & Amp_{max}(DTE(\Delta_{max})) \\ \text{sujeito a} \quad & \Delta_{max} < 50, \\ & \Delta_{max} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Após o término do processo de otimização, o valor máximo de modificação que minimiza a amplitude do sinal de vibração é então utilizado na simulação onde é exibido o comportamento do sistema antes e depois da modificação, permitindo a verificação da efetividade da otimização. Avalia-se também a modificação ótima do Sistema I, simulado pelo Método I, comparando-a com as relações obtidas através do Método II.

De maneira complementar, a influência das condições de operação na quantidade ótima de modificação foi analisada a partir de três modificações realizadas às entradas de potência e velocidade angular. A temperatura de operação não é avaliada devido a suposição de coeficiente de atrito constante e nenhum outro termo no modelo utilizado contempla a alteração deste parâmetro. Das três configurações distintas utilizadas, duas destas são com variações diretamente proporcionais às condições da Tabela 3 e outra arbitrária, não proporcional, com 187,5% da potência e 75% da velocidade de rotação.

## **4 RESULTADOS E DISCUSSÕES**

Neste capítulo, os resultados de todos os procedimentos necessários para otimizar o perfil do dente são apresentados, com o cálculo das dimensões e relações das engrenagens na Seção 4.1, cálculo da rigidez e amortecimento de engrenamento na Subseção 4.1.4, cálculo da massa e momento de inércia na Subseção 4.1.3, simulações do modelo dinâmico na Seção 4.2, até a otimização na Seção 4.3. Além disso, na Seção 4.4 são discutidos os efeitos da alteração dos parâmetros de operação.

### **4.1 Sistema de engrenagens**

#### **4.1.1 Dimensões e relações de engrenamento**

Utilizando os parâmetros geométricos das Tabelas 2 e 4, são calculadas as dimensões das engrenagens, exibidas na Tabela 5, referentes ao sistema utilizado para simulação (Sistema I) e aos sistemas utilizados para validação dos cálculos da rigidez de engrenamento pelo método da energia (Sistemas II e III).

A partir dessas dimensões é possível estabelecer as relações de engrenamento, descritas na Subseção 2.1.3, que são exibidas na Tabela 6. Estas relações definem as características geométricas do engrenamento, a partir das quais é posteriormente calculada a TVMS e o TVMD do par de engrenagens.

Tabela 5: Dimensões calculadas das engrenagens utilizadas na simulação e para validação dos cálculos da rigidez de engrenamento.

Sistema:	I		II		III	
Parâmetro	Pinhão	Coroa	Pinhão	Coroa	Pinhão	Coroa
$d_p$ (mm)	81,00	105,00	60,32	152,40	50,00	60,00
$d_a$ (mm)	87,00	111,00	66,67	158,75	54,00	64,00
$d_b$ (mm)	76,11	98,67	56,69	143,21	46,98	56,38
$d_d$ (mm)	74,00	98,00	52,91	144,99	45,33	55,33
$d_f$ (mm)	14,80	19,60	10,58	29,00	9,07	11,07
$sc$ (mm)	4,71	4,71	4,98	4,99	3,14	3,14
$S_a$ (mm)	2,18	2,25	2,18	2,45	1,44	1,47
$S_d$ (mm)	5,56	5,89	5,52	6,82	3,65	3,79
$h$ (mm)	6,59	6,58	7,01	6,95	4,40	4,39
$h_r$ (mm)	1,06	0,50	1,89	0,53	0,83	0,33
$h_i$ (mm)	10,16	10,33	10,34	10,56	6,72	6,97
$\theta_b$ (°)	4,19	3,42	5,59	2,73	4,45	3,85

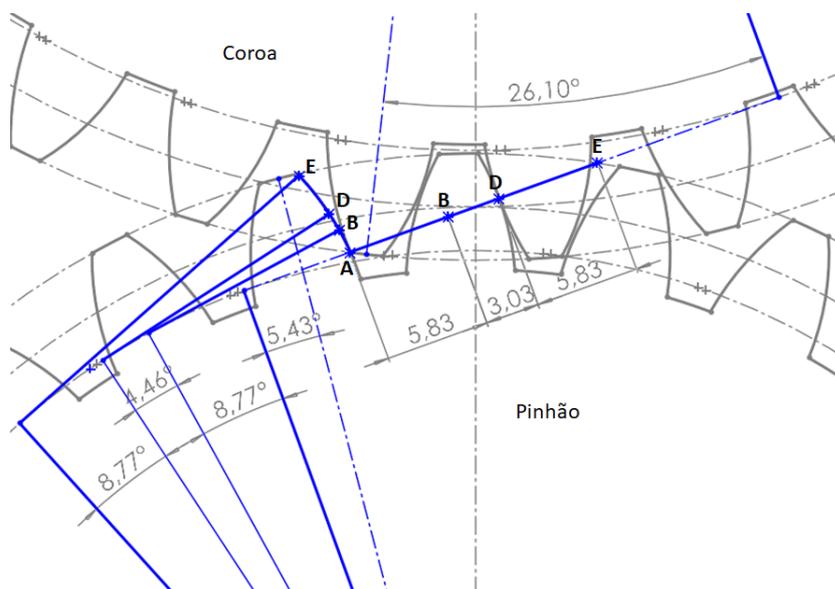
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 6: Valores dos parâmetros constantes de engrenamento.

Sistema:	I	II	III
Parâmetro	Valor	Valor	Valor
$p_b$ (mm)	8,86	9,37	5,90
$L_a$ (mm)	31,81	36,38	18,81
$C_r$ (mm)	1,66	1,64	1,63
$PTH$ (mm)	14,68	15,42	9,64
$duplo$ (mm)	5,83	6,05	3,73
$simples$ (mm)	3,03	3,32	2,17
$\theta_d$ (°)	8,77	12,23	9,11
$\theta_s$ (°)	4,46	6,71	5,29
$\alpha_{1,0}$ (°)	5,42	-1,29	4,49
$\alpha_{2,0}$ (°)	26,10	24,68	26,92

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 30: Relações de engrenamento constantes - Sistema I.

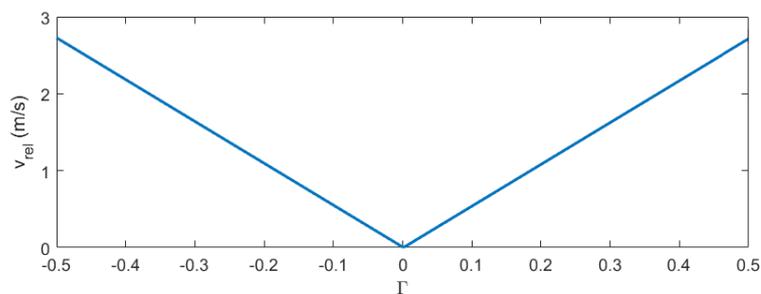


Fonte: Elaborado pelo autor.

Através da Figura 30, pode-se visualizar as relações entre as fases de engrenamento e seus respectivos comprimentos no caminho de contato e durações angulares, relativos ao primeiro par de dentes em contato do Sistema I, conforme os valores exibidos na Tabela 6.

O comportamento da velocidade relativa do ponto de contato em um ciclo de um par de dentes, exibido na Figura 31. Essa, que se trata também da velocidade tangencial no ponto de contato, demonstra que o ponto de contato inicia o engajamento com elevada velocidade de deslizamento, decresce a zero no ponto primitivo e retorna a aumentar com a progressão do engrenamento até o fim do contato do par de dentes.

Figura 31: Velocidade relativa simulada no ponto de contato - Sistema I.

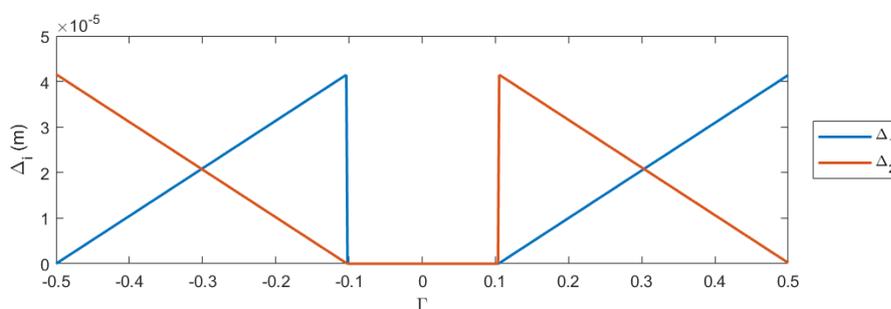


Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4.1.2 Modificação dos dentes

A modificação linear de adendo dos dentes altera os parâmetros de massa, momento de inércia, rigidez equivalente (utilizada no Método II) e força de excitação do sistema (utilizada no Método I). Conhecendo-se as posições angulares em que o contato do par de dentes estará sobre a região de modificação (fases de engrenamento duplo), pode-se adicionar as quantidades de modificação calculadas de acordo com a equação (2.35) nas etapas subsequentes. Os valores de modificações para o primeiro e segundo par são ilustrados na Figura 32.

Figura 32: Quantidade de modificação no ponto de contato - Sistema I.



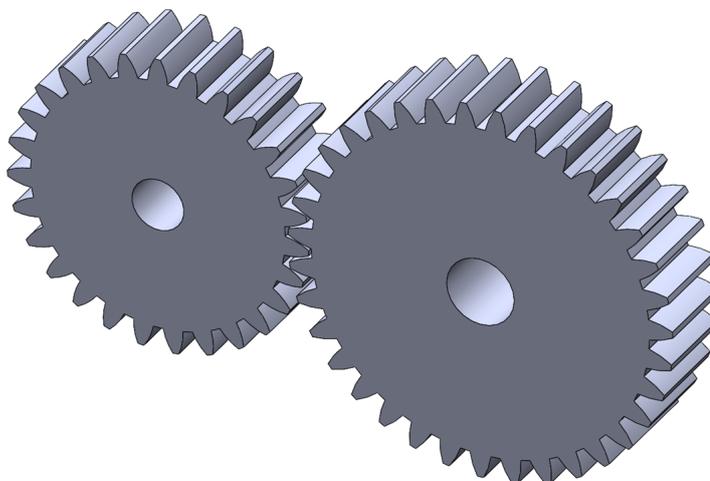
Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que apenas um dente do par engrenado atua sobre região com modificação em cada instante. Quando o dente do pinhão do primeiro par está na região de contato duplo, o dente da coroa está com a região modificada em contato, enquanto que para o segundo par, o dente do pinhão está com a região de modificação em contato. Portanto, o que se vê no gráfico é uma sobreposição dos dois pares de dentes engrenados, enquanto que na região de engrenamento simples, não há modificação de nenhum dos dentes em contato.

## 4.1.3 Massa e momento de inércia

De posse das dimensões das engrenagens exibidas na Tabela 5, e seguindo a metodologia descrita na Seção 3.3, calcula-se os parâmetros de massa e momento de inércia referentes ao Sistema I. A Figura 33 ilustra o modelo CAD construído através do *software* SOLIDWORKS, do qual são extraídos os valores de inércia e comparados aos valores obtidos analiticamente, exibidos na Tabela 7.

Figura 33: Par de engrenagens do Sistema I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 7: Valores dos parâmetros de massa e momento de inércia do Sistema I original.

Parâmetro	Pinhão	Coroa
$m$ - calculado (kg)	0,9549	1,6113
$m$ - CAD (kg)	0,9522	1,6082
$J$ - calculado (kg.m <sup>2</sup> )	$8,0583 \times 10^{-4}$	$2,2844 \times 10^{-3}$
$J$ - CAD (kg.m <sup>2</sup> )	$8,0246 \times 10^{-4}$	$2,2772 \times 10^{-3}$
$m_e$ - calculado (kg)	0,3493	
$m_e$ - CAD (kg)	0,3480	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 8: Valores dos parâmetros de massa e momento de inércia do Sistema I modificado.

Parâmetro	Pinhão	Coroa
$m_{mod}$ - calculado (kg)	0,9529	1,6087
$m_{mod}$ - CAD (kg)	0,9505	1,6066
$J_{mod}$ - calculado (kg.m <sup>2</sup> )	$8,0247 \times 10^{-4}$	$2,2765 \times 10^{-3}$
$J_{mod}$ - CAD (kg.m <sup>2</sup> )	$7,9936 \times 10^{-4}$	$2,2721 \times 10^{-3}$
$m_{e_{mod}}$ - calculado (kg)	0,3479	
$m_{e_{mod}}$ - CAD (kg)	0,3469	

Modificação de  $\Delta_{max} = 41,6009 \mu\text{m}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o sistema com modificação do dente, apenas o valor máximo de modificação ( $\Delta_{max}$ ) é necessário. Então, o mesmo procedimento é realizado, tanto analiticamente quanto em CAD e os resultados obtidos do sistema modificado são exibidos na Tabela 8.

Apesar da simplificação do formato do dente utilizando o modelo aproximado de dente de Ishikawa para o cálculo da massa e momento de inércia, a diferença entre os valores calculados para os obtidos através do CAD são significativamente pequenas, com uma variação máxima dos parâmetros de 0,42%, uma diferença de 0,37% para a massa equivalente e 0,29% para a massa equivalente modificada. O que mostra que a aproximação considerada não introduzirá erros relevantes sobre a resposta dinâmica no que diz respeito a este parâmetro.

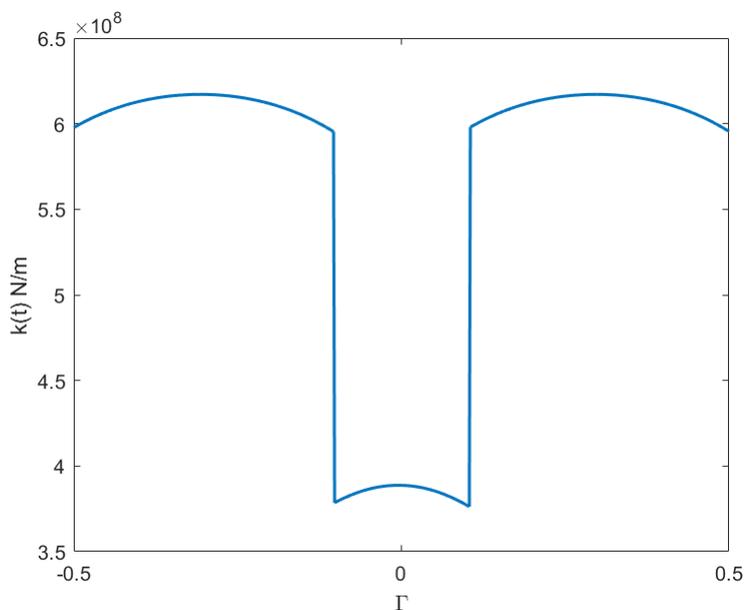
Fazendo uma comparação com o modelo usual, que considera a engrenagem apenas como um cilindro maciço com raio  $r_b$ , não seria possível determinar uma variação de massa provocada pela quantidade de modificação do dente e o valor calculado das massas seriam de 0,893 kg para o pinhão e 1,500 kg para a coroa, ou seja, uma diferença de 6,45% e 7,11%, respectivamente, quando comparado com o valor obtido por CAD.

#### 4.1.4 Rigidez e amortecimento de engrenamento

A rigidez de engrenamento é um dos parâmetros que possui grande influência sobre a característica vibracional do sistema, tendo em vista que a mesma afeta diretamente o modelo dinâmico e através, também, do coeficiente de amortecimento equivalente. Assim, a qualidade da resposta obtida pela simulação está relacionada a qualidade e confiabilidade no cálculo da rigidez de engrenamento.

Tendo em vista que o cálculo da rigidez de engrenamento utilizada por Luo e Li (2019b) é realizado pelo método de Ishikawa e neste trabalho é utilizado o método da energia de deformação, surge a necessidade da comparação dos valores obtidos entre os diferentes métodos. Os cálculos referentes ao método de Ishikawa (Subseção 2.2.1) resultam no gráfico exibido na Figura 34, que demonstra o comportamento da rigidez durante um ciclo de engrenamento do dente, simétrico com relação ao ponto principal (quando  $\Gamma = 0$ ).

Figura 34: Rigidez de engrenamento pelo método de Ishikawa - Sistema I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

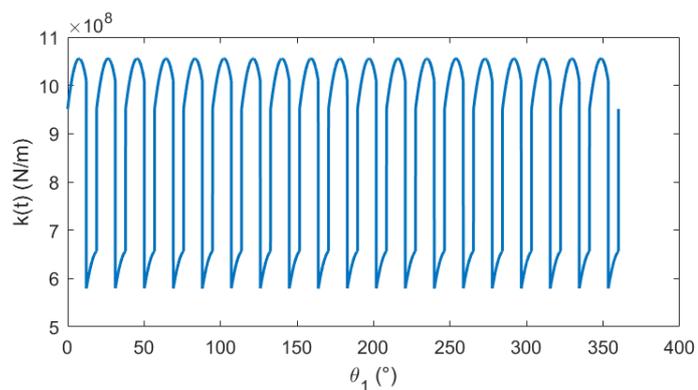
No cálculo, tanto pelo método de Ishikawa quanto da energia, foi utilizado um *loop* para a varredura angular do pinhão, na qual foi estabelecido cada ponto de contato discreto. Para estes, foi calculado a rigidez referente a cada par de dentes em contato. Assim, utilizando as formulações estabelecidas na Subseção 2.2.2, obtém-se a rigidez de engrenamento pelo método da energia.

Para validar os cálculos da rigidez de engrenamento sem o termo de rigidez de fundação, o resultado obtido foi comparado diretamente com o disponível na literatura. A visualização dos gráficos foram ajustadas de forma a aproximar o formato de visualização da referência, facilitando a comparação. Assim, para o Sistema II, os gráficos ilustrados na Figura 35(a) exibe a rigidez calculada e na Figura 35(b), o resultado obtido por Tian, Zuo e Wu (2012).

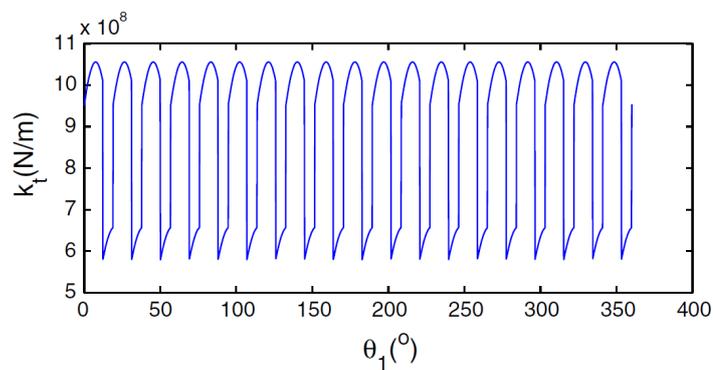
Para a validação dos cálculos da rigidez com o termo de rigidez de fundação, o mesmo procedimento foi realizado, porém, com os dados referentes ao Sistema III, incluindo o termo adicional de rigidez. O resultado dos cálculos é exibido na Figura 36(a) que é posto em comparação com o resultado obtido por Chen e Shao (2011), exibido na Figura 36(b).

Figura 35: Rigidez de engrenamento pelo método da energia - Sistema II.

(a) Rigidez calculada sem o termo de rigidez de fundação.



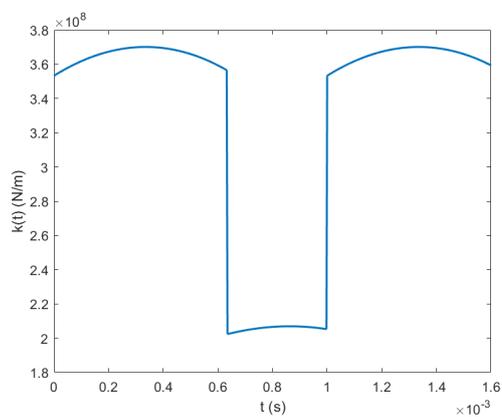
(b) Rigidez de referência sem o termo de rigidez de fundação. Fonte: Tian, Zuo e Wu (2012).



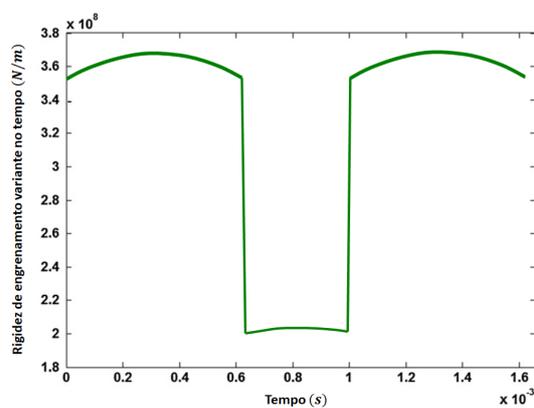
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 36: Rigidez de engrenamento pelo método da energia - com o termo de rigidez de fundação - Sistema III.

(a) Rigidez calculada com o termo de rigidez de fundação.



(b) Rigidez de referência com o termo de rigidez de fundação. Fonte: Adaptado de Chen e Shao (2011).

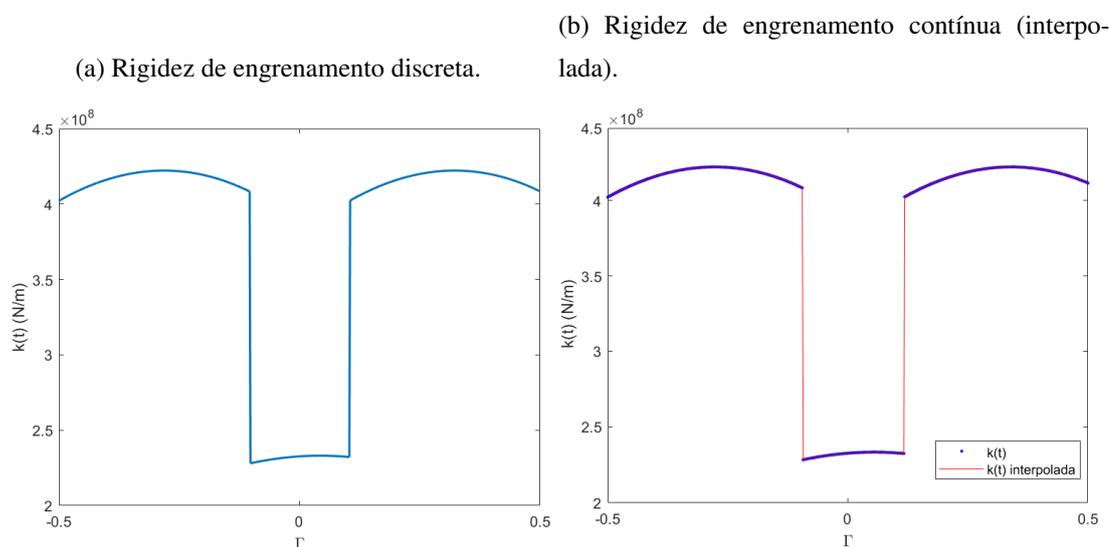


Fonte: Elaborado pelo autor.

Visualmente, os gráficos não apresentam nenhuma diferença significativa, possuindo a mesma ordem de grandeza e comportamento no tempo/rotação da engrenagem, o que permite-se assumir que os cálculos realizados são válidos. Assim, foi possível seguir com o estudo referente ao Sistema I. Tendo em vista que as simulações são feitas com referência a esse, os demais sistemas não serão mais utilizados no decorrer do trabalho.

A rigidez de engrenamento do Sistema I é então calculada pelo método da energia de deformação, cujo resultado é exibido na Figura 37(a). O resultado da interpolação da função discreta é exibido na Figura 37(b)

Figura 37: Rigidez de engrenamento pelo método da energia de deformação Sistema I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A diferença dos valores da rigidez pelo método de Ishikawa (Figura 34) e pelo método da energia (Figura 37(a)), em que a primeira possui valores entre  $6 \times 10^8$  e  $6,5 \times 10^8$  (N/m) para a fase de engrenamento duplo e  $3,5 \times 10^8$  e  $4 \times 10^8$  (N/m) na fase de engrenamento simples, enquanto que a última possui valores entre  $4 \times 10^8$  e  $4,5 \times 10^8$  (N/m) na fase de engrenamento duplo e  $2 \times 10^8$  e  $2,5 \times 10^8$  (N/m) na fase de engrenamento simples.

Essa diferença deve-se ao fato de que a rigidez pelo método de Ishikawa, apresentado por Shi *et al.* (2013), não possui o termo de deformação devido à força axial atuando no dente, assim, quanto menos deformação, maior o valor da rigidez. Além disso, percebe-se também uma diferença no formato, enquanto a de Ishikawa possui

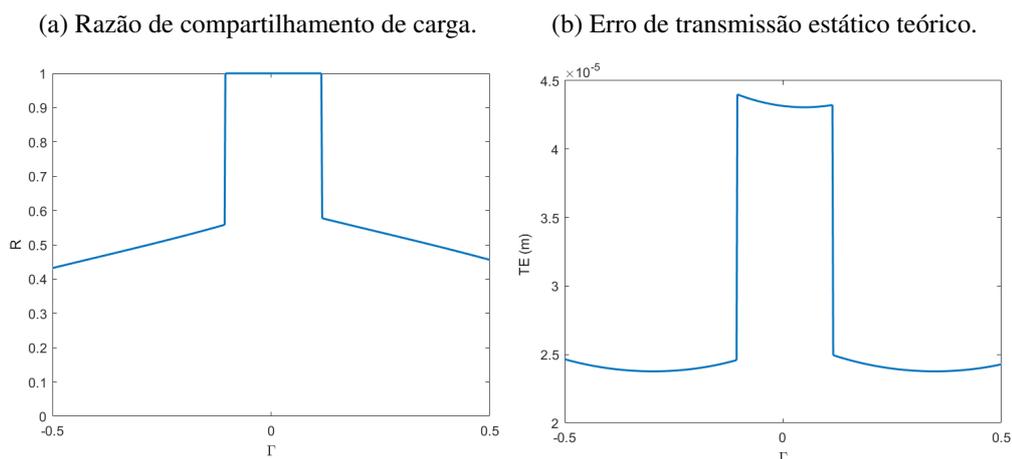
um formato simétrico, a da energia não, como pode ser bem visualizado na Figura 35(a). Por conta destas diferenças e, dado o refino no cálculo da rigidez pelo método da energia, este é adotado para as simulações do Sistema I.

Uma relação relevante é obtida após o cálculo da rigidez de engrenamento, a qual é exibida na Figura 38(a), demonstrando a distribuição de carga estática sobre os pares de dentes engrenados, chamada de razão de compartilhamento de carga. Esta é calculada a partir dos valores da rigidez, segundo Sánchez, Pleguezuelos e Pedrero (2017), como:

$$R_j = \frac{F_j}{F} = \frac{k_j}{\sum_{j=1}^2 k_j}, \quad (4.1)$$

em que  $R_2 = 1 - R_1$ , sendo  $F$  a força estática atuante na linha de ação e  $F_j$  a força estática atuando sobre o par de dentes  $j$  em contato.

Figura 38: Relações estáticas do engrenamento - Sistema I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

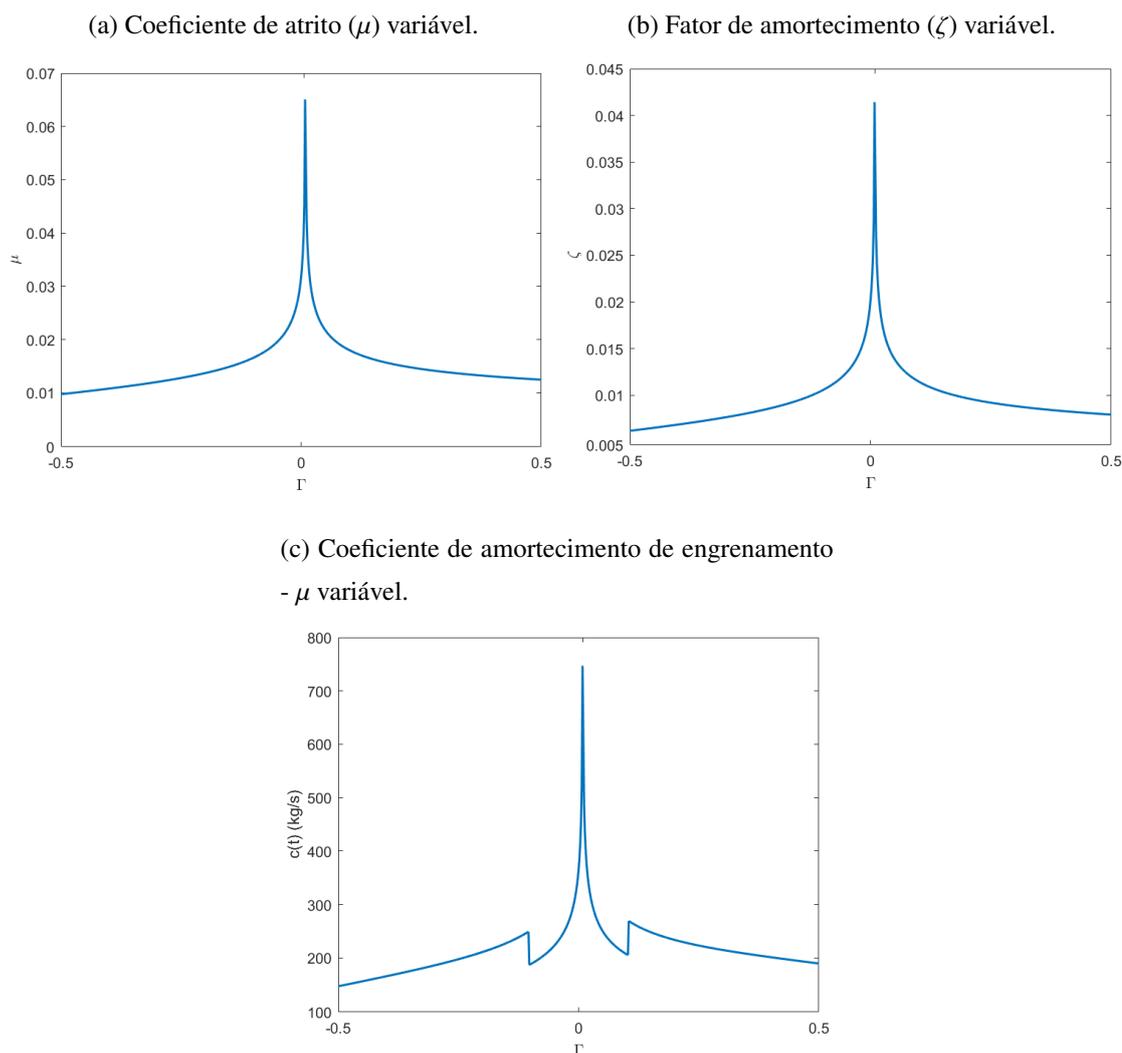
O erro de transmissão estático teórico do sistema é representado na Figura 38(b). Essa relação exibe a deformação estática do dente. Percebe-se a diferença dos valores de deformação entre as regiões de contato duplo e simples, que ocorre devido ao compartilhamento da carga no contato duplo (observado na Figura 38(a)), assim, a deformação sofrida por um par de dentes (fase duplo) é menor.

#### 4.1.4.1 Amortecimento

Antes de calcular o coeficiente de amortecimento, define-se o fator de amortecimento. Como comentado na Subseção 2.3.1, este também tem grande influência sobre

o comportamento do sistema. O comportamento do coeficiente de atrito é dependente da velocidade relativa e força normal no contato dos dentes. Para o Sistema I, este é exibido na Figura 39(a). A aplicação do coeficiente de atrito variável resulta no fator de amortecimento exibido na Figura 39(b) e, por sua vez, no coeficiente de amortecimento exibido na Figura 39(c).

Figura 39: Parâmetros e coeficiente de amortecimento com  $\mu$  variável - Sistema I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com o trabalho de Luo e Li (2019b), fixa-se o valor de  $\mu$  referente ao ponto primitivo (em que:  $v_{rel} = 0 \rightarrow \mu_{max}$ ), que conseqüentemente gera um  $\zeta$  constante e o coeficiente de amortecimento herda o formato da rigidez de engrenamento (Figura 40a). A utilização de um valor de  $\mu$  constante também é assumida em outras literaturas, como no estudo de He, Gunda e Singh (2007), e o valor escolhido (no ponto de contato – o valor máximo) produz um fator de amortecimento de 0,0414 (4,14%), ou seja,

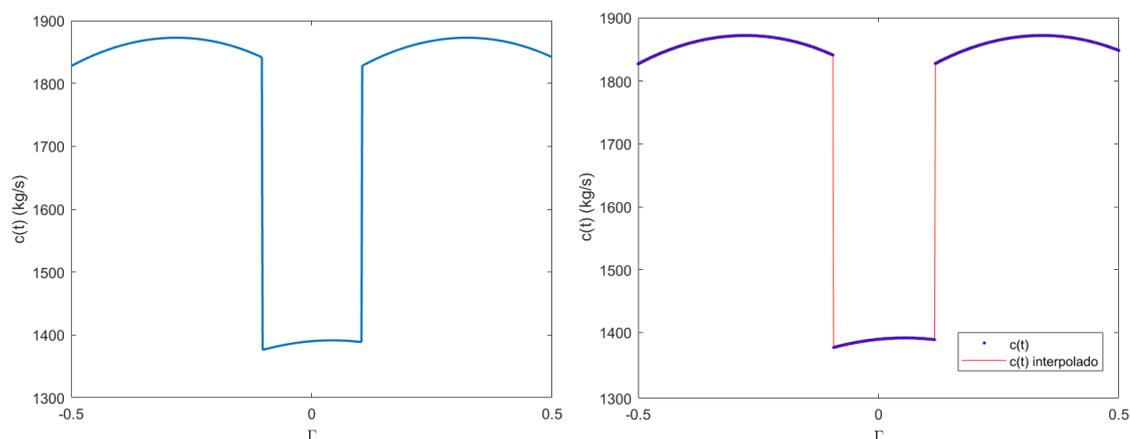
dentro da faixa de valores geralmente utilizadas nestes sistemas que, como afirmam Gkimitis *et al.* (2021), valores entre 4 e 8%. A utilização do atrito variável não resulta em valores de  $\zeta$  dentro desta faixa (com exceção do valor máximo).

Marques, Martins e Seabra (2015) afirmam que a consideração do coeficiente de atrito constante ocasiona uma distribuição de carga no caminho de contato com formato não ótimo, com variações exageradas de carga perto do ponto primitivo. E recomenda a utilização do coeficiente de atrito variante para o estudo das forças de atrito como potencial fonte de excitação dinâmica. Contudo, como os modelos dinâmicos utilizados neste trabalho não abrigam esforços provenientes do atrito, julga-se razoável a suposição do coeficiente de atrito constante, tendo em vista também os resultados obtidos condizentes com a literatura referenciada.

O resultado do cálculo do coeficiente de amortecimento de engrenamento com  $\mu$  constante é exibido na Figura 40(a). Do mesmo princípio comentado sobre a rigidez, a função interpolada deve ser estabelecida, cujo resultado é dado na Figura 40(b).

Figura 40: Coeficiente de amortecimento de engrenamento variante no tempo - Sistema I.

(a) Coeficiente de amortecimento de engrenamento discreto ( $\mu$  constante). (b) Coeficiente de amortecimento de engrenamento interpolado.



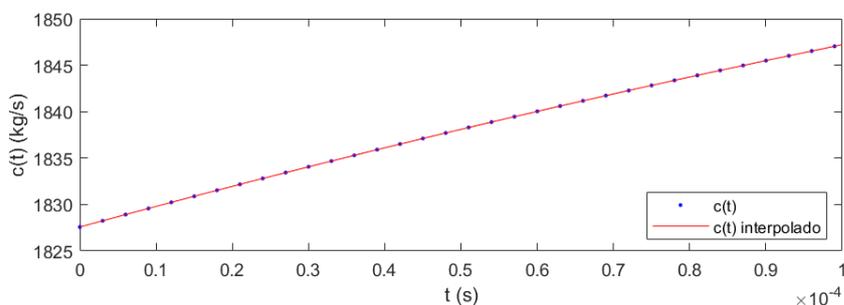
Fonte: Elaborado pelo autor.

Através da Figura 40(a) percebe-se que o coeficiente de amortecimento do engrenamento, quando  $\mu$  constante é utilizado, possui o mesmo padrão de comportamento que a rigidez. Fato devido a direta relação entre as grandezas.

Tanto para o cálculo da TVMS quanto do TVMD foram utilizados 10 000 pontos discretos para uma revolução do pinhão. Quanto maior a densidade de pontos, me-

nor os erros de interpolação, em contrapartida, mais lento o processo de cálculos e otimização. Uma visualização da qualidade da interpolação é exibida na Figura 41.

Figura 41: Qualidade da interpolação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

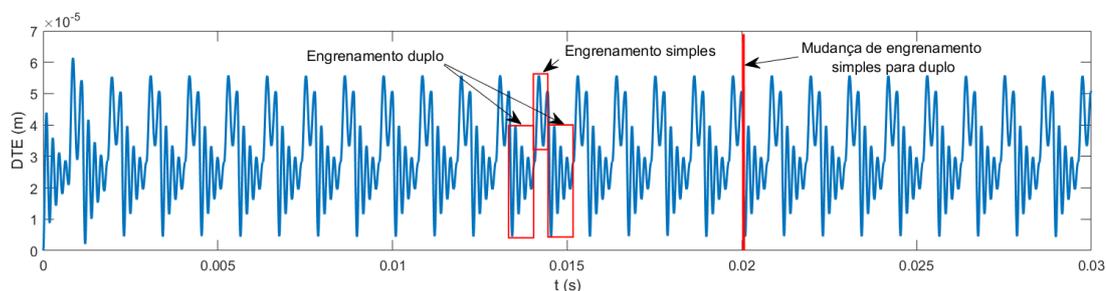
## 4.2 Simulação dos modelos dinâmicos

A solução do modelo fornece os estados do sistema, que se referem ao erro de transmissão dinâmico (Figura 42(a)), que é a deformação dinâmica do dente durante o engrenamento, e a taxa de variação desse erro é exibida na Figura 42(b). A Figura 42(d) representa então a força dinâmica do engrenamento, sendo a flutuação da força na linha de ação durante o engrenamento. Essas são as respostas dinâmicas do sistema original, utilizadas como base comparativa para os resultados obtidos após a otimização.

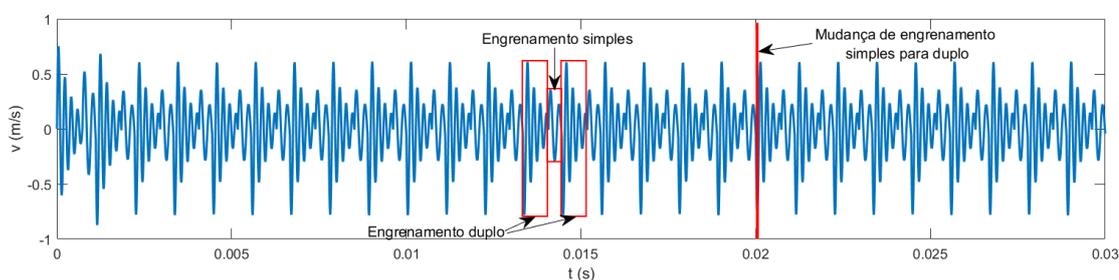
O erro de transmissão dinâmico apresenta uma amplitude pico-a-pico de  $5,14 \times 10^{-5}$  m em regime permanente. Da Figura 42(a) pode-se observar a quantidade de deformação que ocorre diferentemente entre as fases de engrenamento simples e duplo, sendo a de engrenamento simples a região que possui maior valor de deformação, dado o não compartilhamento da carga. Da Figura 42(b) observa-se as variações da velocidade com a mudança de fase de engrenamento simples para dupla. Este comportamento é justificado pelo pico de aceleração (Figura 42(c)) causado pela flutuação da força (Figura 42(d)) quando ocorre a troca de fases. Porém, essa observação não é a mesma na troca de fase dupla para simples, pois nessa ocorre o fim do ciclo, enquanto que na mencionada anteriormente ocorre o engajamento de um novo par de dentes, que causa o distúrbio.

Figura 42: Respostas dinâmicas - Sistema I.

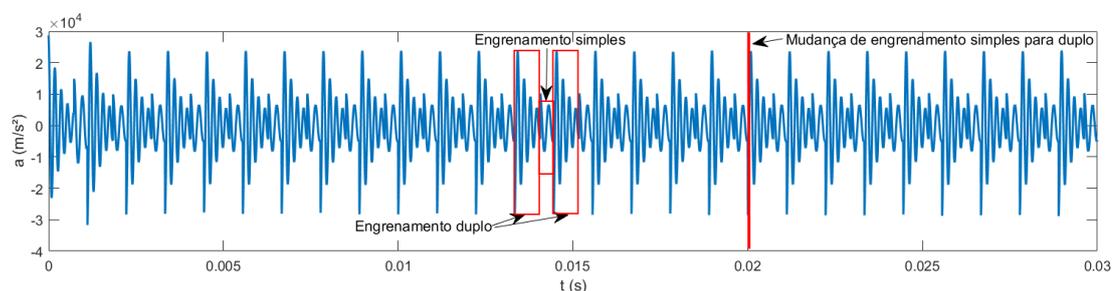
(a) Erro de transmissão dinâmico.



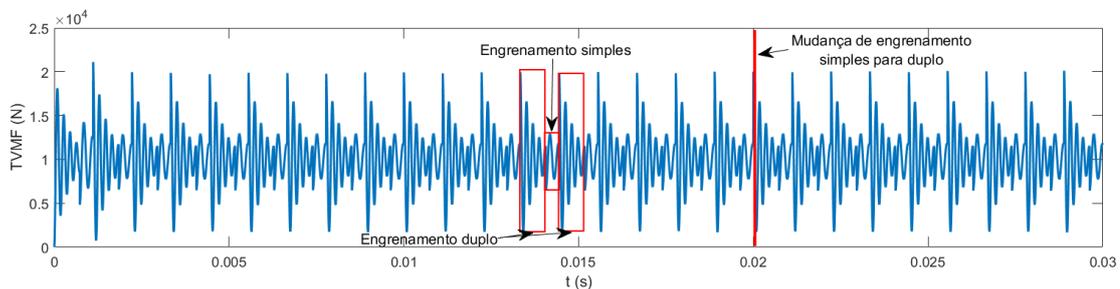
(b) Taxa de variação do erro de transmissão.



(c) Aceleração do erro de transmissão.



(d) Força dinâmica atuante no engrenamento.



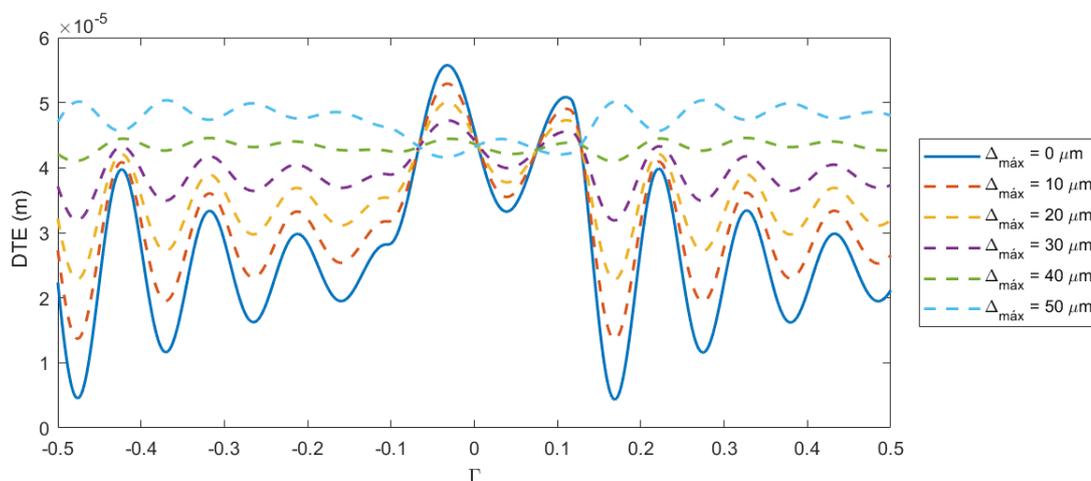
Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4.2.1 Método I

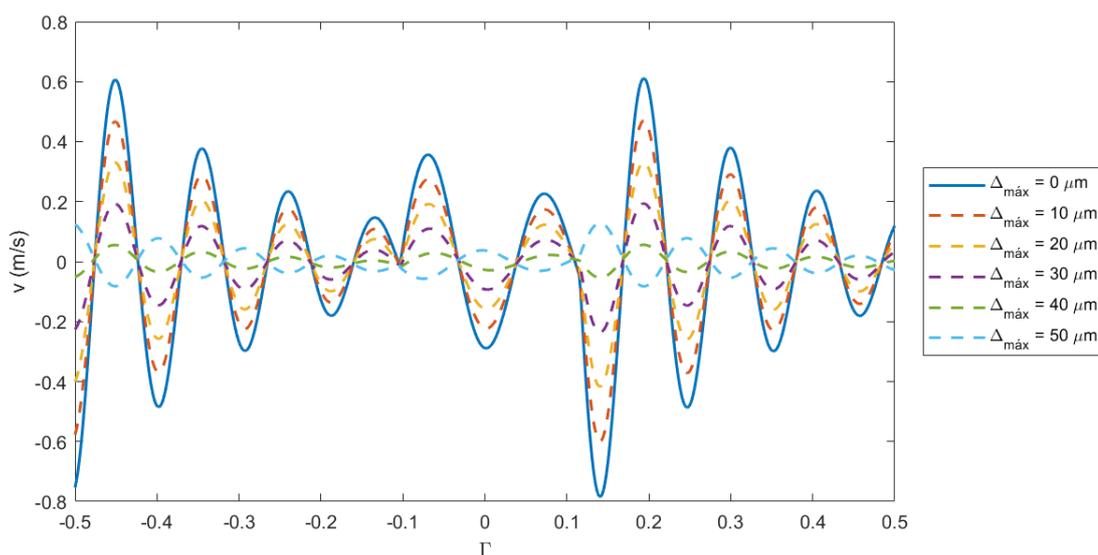
Solucionando a equação (3.3), as respostas das simulações para várias quantidades de modificação são exibidas sobre um ciclo do dente nas Figuras 43 e 44.

Figura 43: Respostas dinâmicas (a) - Sistema I com modificação.

(a) Erro de transmissão dinâmico com modificação.



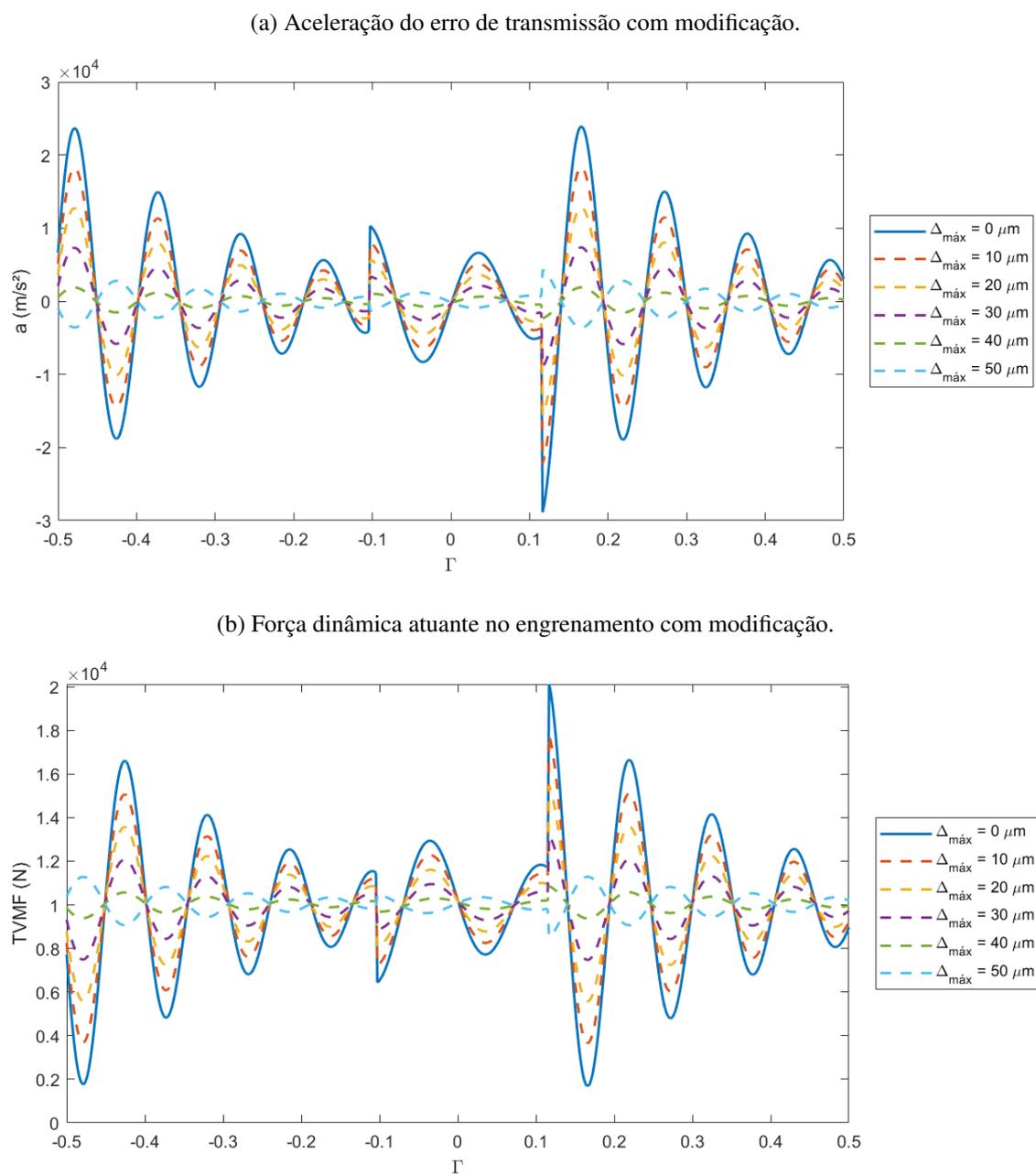
(b) Taxa de variação do erro de transmissão com modificação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se pela Figura 43 o aumento da quantidade máxima de modificação até certo ponto leva o sinal do DTE a um ponto de equilíbrio (quando  $\Delta_{max} \approx 40 \mu m$ ). E a continuação do aumento provoca o afastamento do ponto deste equilíbrio (quando  $\Delta_{max} > 40 \mu m$ ). Esse ponto de equilíbrio está dentro da faixa de valores do erro de transmissão estático na região de engrenamento simples (Figura 38(b)). Da taxa de variação do DTE, Figura 43(b), o ponto de equilíbrio é o próprio zero, ou seja, caso estático.

Figura 44: Respostas dinâmicas sobre um ciclo de contato do dente (b) - Sistema I com modificação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

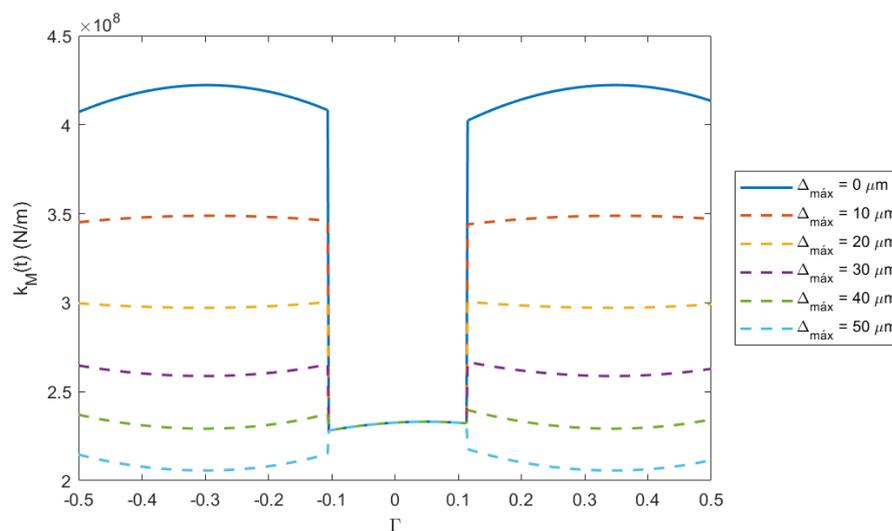
Outrossim ao caso da taxa de variação do DTE, a aceleração tem seu ponto de equilíbrio em torno do zero (Figura 44(a)). E o ponto de equilíbrio da TVMF é em torno de  $10\text{ kN}$ , sendo a força de engrenamento estática calculada de  $10,04\text{ kN}$ .

Do sistema modificado, extrai-se os valores de amplitude máxima da região em regime permanente do sinal do DTE, que é então utilizada como função objetivo.

## 4.2.2 Método II

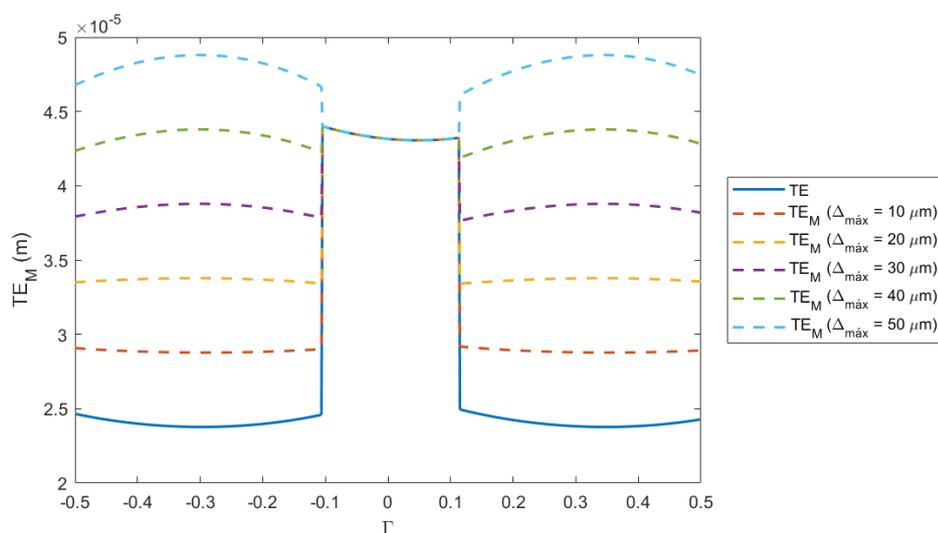
As Figuras 45, 46 e 47 ilustram a influência da quantidade de modificação respectivamente na rigidez equivalente, erro de transmissão estático modificado e o erro de transmissão dinâmico quando aplicada a rigidez equivalente no modelo dinâmico.

Figura 45: Rigidez equivalente - Sistema I.



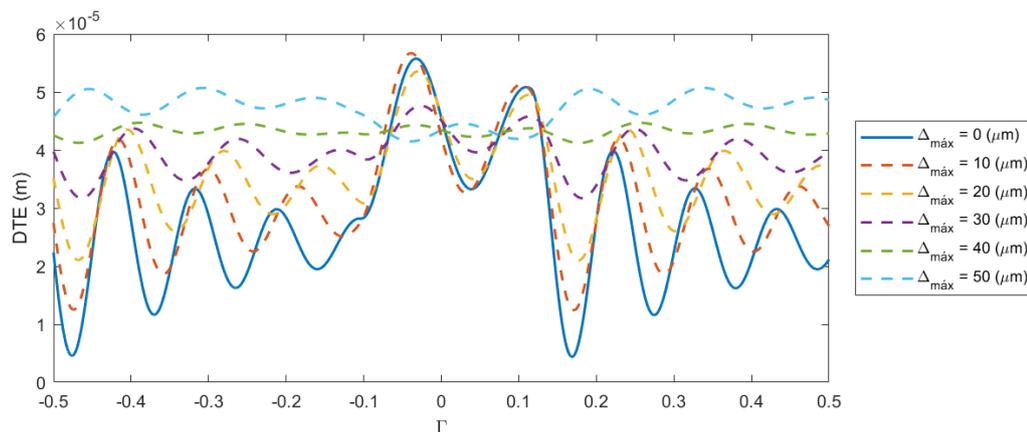
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 46: Erro de transmissão estático com modificação - Sistema I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 47: Erro de transmissão dinâmico obtido através do Método II - Sistema I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

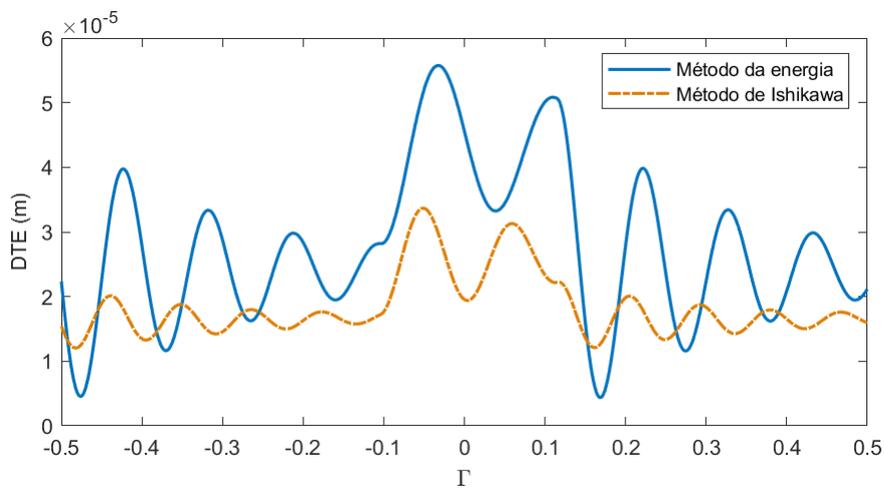
Resultados similares são exibidos em Ghosh e Chakraborty (2016) (Figuras 10(a), 10(b), 11(b) e 11(c)) e Luo e Li (2019b) (Figura 8(a)). Estas relações mostram que pelo tanto pelo Método I quanto pelo Método II, a modificação linear de adendo tende a trazer as características dinâmicas do engrenamento para próximo do valor estático, ou seja, tendem a reduzir as discrepâncias dessas características entre as fases de engrenamento duplo e simples.

Da Figura 47 observa-se uma diferença entre o DTE obtido pelo Método I (Figura 43(a)). Esta diferença é uma mudança na frequência da resposta dinâmica do sistema, ocasionada pela redução da rigidez de engrenamento dado o aumento da quantidade de modificação na região de duplo contato (equação (2.81)).

A Figura 48 apenas traz um comparativo entre as rigidezes obtidas pelo método da energia e Ishikawa. Dadas as diferenças entre as grandezas, a amplitude vibracional do sinal obtido pelo método de Ishikawa é menor (pois possui maior valor de rigidez), mas o comportamento dos sinais é semelhante.

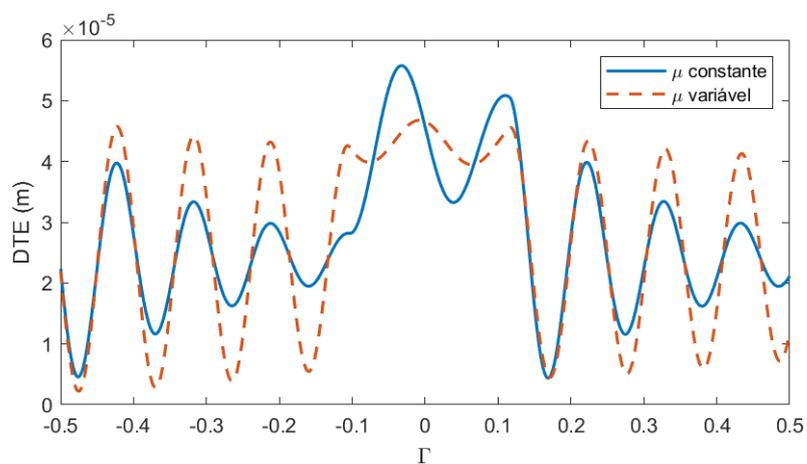
A Figura 49 ilustra a dinâmica do engrenamento sob condição de atrito variável. Percebe-se através da Figura 39(c) que o coeficiente de amortecimento é grandemente reduzido na região de duplo contato e tem um pico no ponto primitivo, o que é reflexo do comportamento do coeficiente de atrito variante e influencia na resposta dinâmica, como observado. Vale salientar novamente que utilizando o coeficiente  $\mu$  variável,  $\zeta$  fica fora da região mencionada por Gkimisis *et al.* (2021).

Figura 48: Erro de transmissão dinâmico pelo método da energia vs método de Ishikawa - Sistema I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 49: Erro de transmissão dinâmico sob condição de atrito variável - Sistema I.

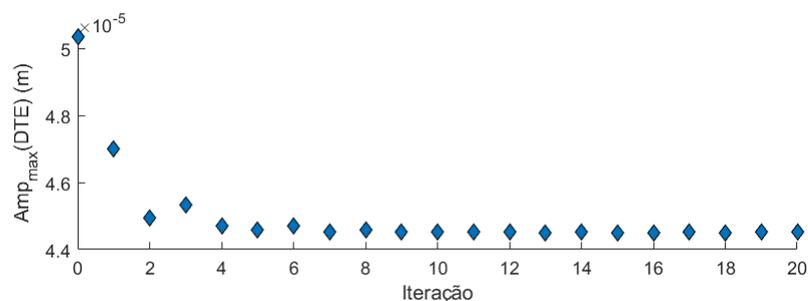


Fonte: Elaborado pelo autor.

### 4.3 Otimização

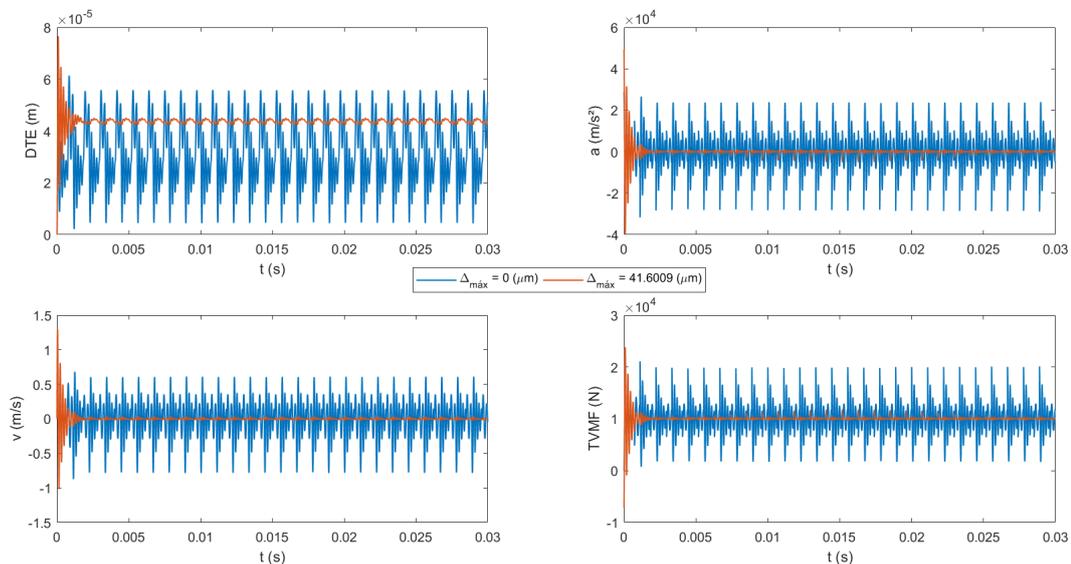
Da aplicação do algoritmo de otimização (Figura 29), 21 pontos são avaliados em aproximadamente 32 minutos. Ao fim do processo, o valor ótimo de  $\Delta_{max} = 41,6009 \mu\text{m}$  é então aplicado no modelo dinâmico e simulado para comparação com o as respostas do modelo original, ilustradas na Figura 51.

Figura 50: Iterações do processo de otimização.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 51: Respostas dinâmicas - Sistema I otimizado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

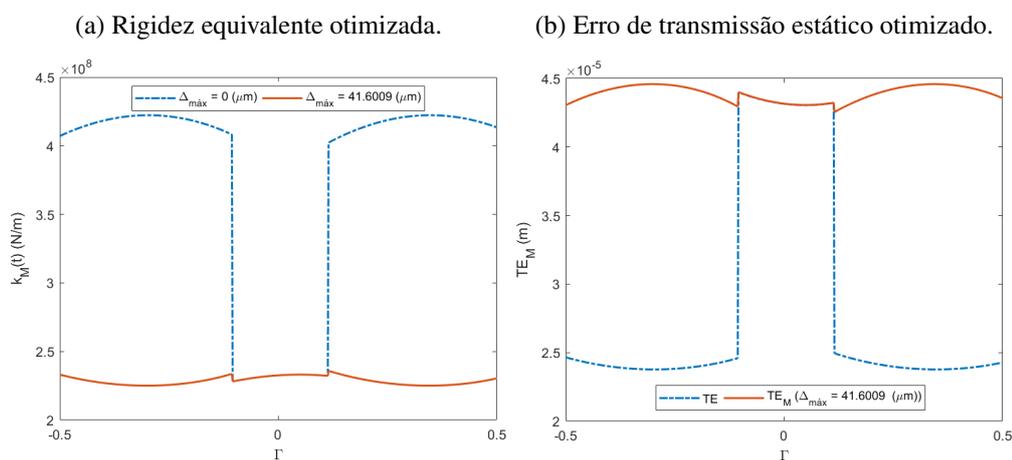
A Figura 51 ilustra a efetividade da otimização em aproximar as dinâmicas vibracionais aos correspondentes estáticos, reduzindo a flutuação das respostas à valores quase-constantes em regime permanente. A amplitude de pico-a-pico do sinal do erro de transmissão dinâmico do sistema otimizado foi reduzida a  $2,59 \times 10^{-6} \text{m}$ , ou seja, uma redução de 95,0% em comparação com o sistema sem modificação. Entretanto, é

notória a maior amplitude em regime transiente do sistema modificado em comparação com o sistema original, diferença de 24,7% a mais para o DTE.

Além disso, a escolha da avaliação quantitativa do sinal do DTE através amplitude pico-a-pico ao invés do valor RMS (*Root Mean Square* - valor quadrático médio ou valor eficaz), que é geralmente utilizado na análise de vibrações, pode ser justificada tendo em vista que o valor do RMS do DTE aumenta com a modificação ótima, o que não traz resposta otimizada coerente quando este é utilizado na avaliação, provendo um valor de  $\Delta_{max} = 30 \mu\text{m}$ , que não otimiza o sistema. Para utilizar o RMS, a dinâmica avaliada deve ser a taxa de variação do erro de transmissão, a aceleração ou força de engrenamento.

Outro paralelo é feito ao Método II, onde a rigidez equivalente e o erro de transmissão estático modificado com a quantidade de modificação ótima são exibidos na Figura 52. Como esperado, a modificação ótima pelo Método I assemelha-se à melhor redução da variação da rigidez entre as diferentes fases de engrenamento (Método II), saindo de uma variação de  $1,94 \times 10^8$  para  $0,11 \times 10^8$  (N/m), ou seja, uma redução de 94,4% na variação da rigidez entre as fases. Semelhantemente ao erro de transmissão estático, com redução de 89,9%.

Figura 52: Erro de transmissão e rigidez equivalente - Sistema I otimizado.

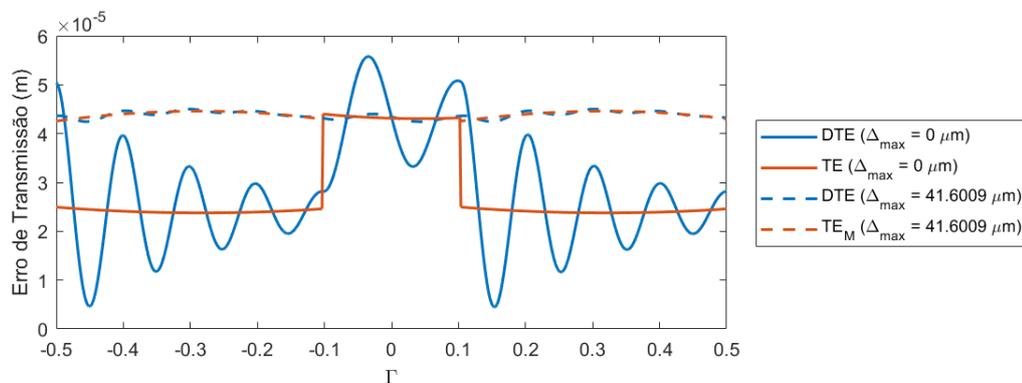


Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 53 são comparados os erros estáticos com os dinâmicos, antes e depois da otimização, podendo-se observar novamente a equivalência entre os métodos discutidos. Nota-se, o leve comportamento oscilatório do erro de transmissão dinâmico, também observado na Figura 51, semelhante ao comportamento do erro de transmis-

são estático da Figura 52(b). Essa oscilação não é “eliminada” pela otimização, que demonstra que o limite de melhoria é dado pelo caso estático.

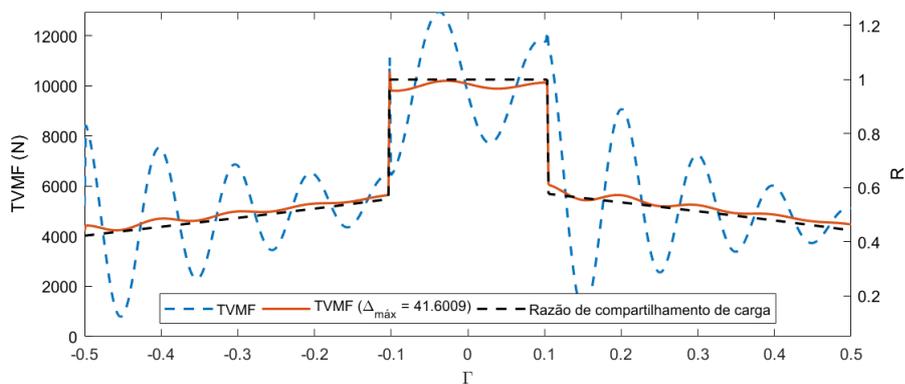
Figura 53: Erros de transmissão - Sistema I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A força atuando no par de dentes é obtida através da multiplicação da razão de compartilhamento de carga pela TVMF, ou seja,  $TVMF_j = R_j TVMF$ . A TVMF do sistema original e otimizado são comparadas com relação à razão de compartilhamento de carga, através da Figura 54.

Figura 54: Força dinâmica atuando em um par de dentes - Sistema I otimizado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que a TVMF otimizada tem sua forma aproximada à razão de compartilhamento de carga, enquanto que a TVMF original possui flutuações mais acentuadas, com cerca de 847,1% da amplitude do sistema otimizado. Em comparação com o sistema original, a TVMF do sistema modificado possui amplitude 88,2% menor, corroborando os demais resultados.

## 4.4 Influência das diferentes condições de operação

A Figura 55 ilustra o mesmo sistema (Sistema I) com metade dos valores de potência e velocidade angular, a Figura 56 com três vezes os valores e a Figura 57 com alteração não proporcional, utilizando o valor ótimo encontrado para as condições de  $P = 80 \text{ kW}$  e  $\omega = 2000 \text{ rpm}$ .

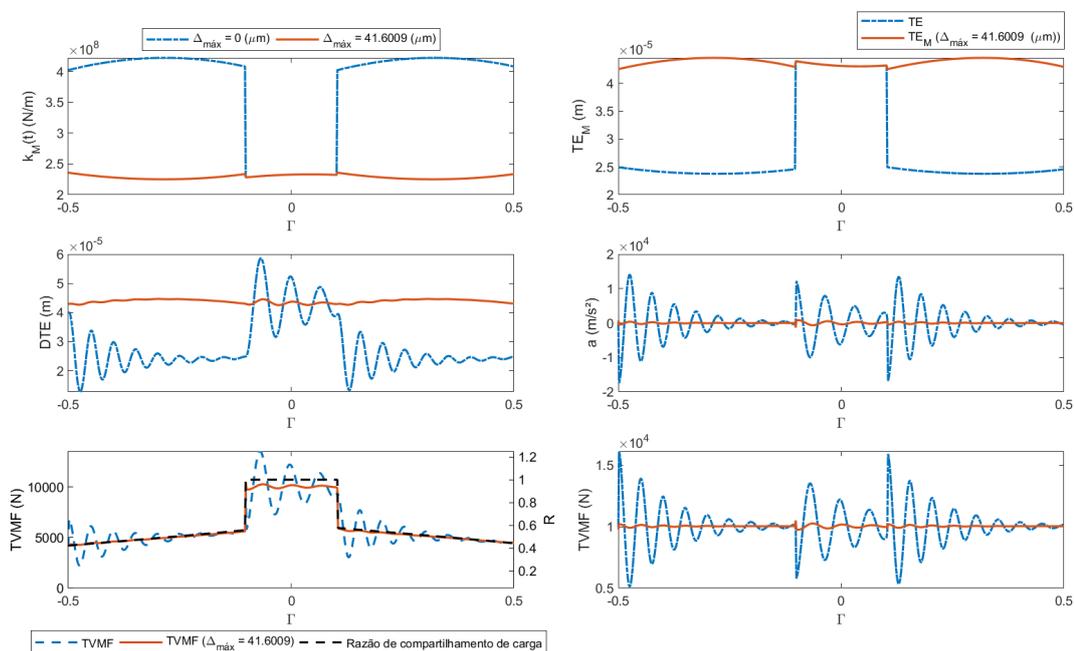
Com ambos parâmetros variados sofrendo alteração simultaneamente proporcional, a quantidade de modificação ótima não é significativamente alterada. Caso contrário, a quantidade ótima calculada não irá satisfazer as novas condições do sistema. Isto pode ser claramente observado através do Método II com a rigidez equivalente, a partir da equação (2.81), na qual a força estática possui influência direta e esta é calculada com base na potência de entrada (Watts) e na velocidade de rotação (rpm), da forma:

$$F = \frac{60}{2\pi} \frac{P}{r_{b1}\omega_1}. \quad (4.2)$$

Ou seja, sem alterações na força, a deformação permanecerá a mesma dada a modificação realizada, observado comparando as Figuras 55 e 56 com a Figura 57. A última, neste caso, apresenta uma amplitude de vibração e rigidez equivalente entre fases menor que a do sistema original, mas não ótima, pois a quantidade de modificação ótima para este caso é de  $\Delta_{max} = 102,9341 \mu\text{m}$ .

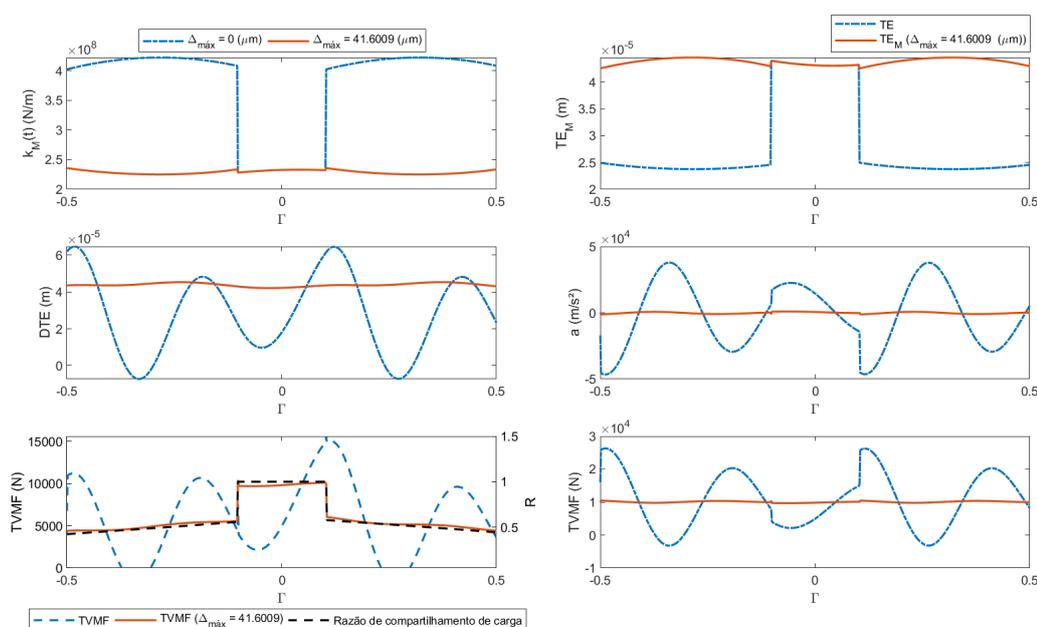
Entretanto, podem haver casos de alteração dos parâmetros de operação que fazem a modificação ótima, anteriormente calculada, agravar os esforços dinâmicos, cumprindo papel oposto ao propósito designado. Contudo, uma nova otimização pode ser realizada para reverter essa situação.

Figura 55: Respostas dinâmicas sob outras condições de operação ( $P = 40$  kW e  $\omega = 1000$  rpm;  $\Delta_{max} = 41,6009 \mu\text{m}$ ) - Sistema I.



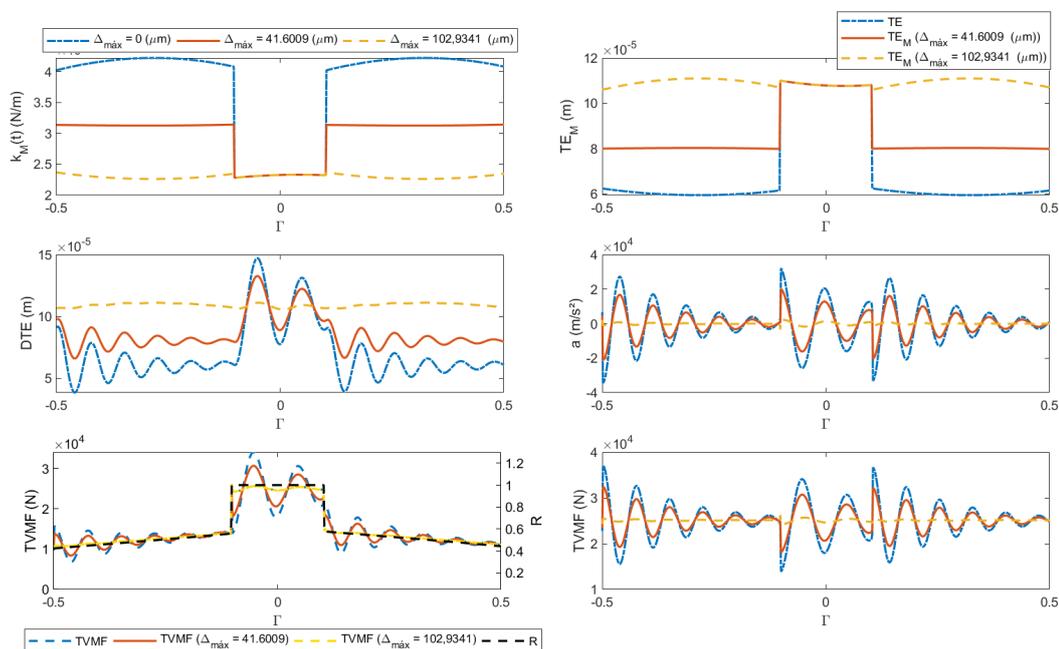
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 56: Respostas dinâmicas sob outras condições de operação ( $P = 240$  kW e  $\omega = 6000$  rpm;  $\Delta_{max} = 41,6009 \mu\text{m}$ ) - Sistema I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 57: Respostas dinâmicas sob outras condições de operação ( $P = 150$  kW e  $\omega = 1500$  rpm;  $\Delta_{max} = 41,6009 \mu\text{m}$ ;  $\Delta_{max,opt} = 102,9341 \mu\text{m}$ ) - Sistema I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 Conclusões

O modelo dinâmico torcional foi estabelecido conforme a proposta de Luo e Li (2019b), sendo a modificação do perfil do dente incluída como um termo de excitação externa. O sistema foi simulado com e sem modificação de adendo, a fim de averiguar sua influência nas respostas dinâmicas. A quantidade de modificação ótima foi obtida com sucesso, minimizando o erro de transmissão dinâmico, com redução de 95,0% de sua amplitude vibracional em regime permanente, além da redução com semelhante ordem de grandeza de outras respostas dinâmicas, evidenciadas na Figura 51. Contudo, alterações dos parâmetros de operação podem requerer nova otimização, dada a mudança provocada na força estática do engrenamento caso a alteração dos parâmetros não seja diretamente proporcional.

Concluiu-se que a modificação ótima de adendo do dente das engrenagens aproxima o comportamento das respostas dinâmicas às condições estáticas. Foram também apresentadas semelhanças entre os Métodos I e II na avaliação da modificação.

Notou-se maior praticidade no cálculo computacional através do Método I, sendo necessário calcular a rigidez e amortecimento de engrenamento uma vez para determinado sistema, enquanto apenas recalcula a quantidade de modificação referente ao ponto de contato dado o valor de modificação máxima para realizar ao processo de otimização, o que reduz significativamente o tempo de otimização necessário, dada a redução do custo computacional, oferecendo cálculos mais rápidos. Porém, devido a realização simultânea dos cálculos dos Métodos I e II, de forma a permitir a visualização de suas semelhanças, esta vantagem não foi agregada ao código utilizado.

Neste trabalho, vários conceitos e métodos foram abordados com grande quantidade de detalhes, a fim de concentrar o núcleo de conhecimento necessário sobre o assunto para a reprodução do desenvolvimento. As literaturas referentes à rigidez de engrenamento podem ser complexas à primeira vista e, pensando nisso, grande parte das ilustrações contidas neste trabalho foram elaboradas visando a demonstração mais clara das relações envolvidas no processo.

Uma metodologia para contabilizar a alteração da massa equivalente foi desenvolvida com base no modelo de dente aproximado do método de Ishikawa, introduzindo um ponto de melhoria no método de avaliação da dinâmica do engrenamento com modificações nos dentes, apesar da pouca influência sobre os resultados para pequenas quantidades de modificação.

Vale salientar que a dinâmica vibracional em regime transiente não foi analisada, tendo em vista que nenhuma literatura mencionada sobre modificação de adendo se tratou desta fase da resposta. Tanto pelo procedimento de otimização quanto por tentativa e erro, não foi possível encontrar um valor de modificação que surtisse efeito simultâneo na minimização das respostas transiente e permanente, visto que a melhora das respostas em regime permanente acaba por piorar as de regime transiente.

## **5.2 Sugestões para trabalhos futuros**

Com o objetivo de dar continuidade à pesquisa abordando aspectos não estudados no presente trabalho, além de melhorar as análises apresentadas, faz-se seguir algumas sugestões e considerações para trabalhos futuros:

- a) Aplicar modificação não-linear de adendo;
- b) Aplicar o procedimento abordado para engrenagens helicoidais;
- c) Utilizar métodos mais sofisticados no cálculo do amortecimento;
- d) Analisar as dinâmicas do sistema sob condição de regime transiente;
- e) Considerar montagem da caixa de engrenagem completa (com eixos e rolamentos acoplados) no modelo dinâmico;
- f) Validar experimentalmente dos resultados da dinâmica de engrenamento do sistema modificado.

## REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas—Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais**. 3. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2007. 51–62 p.

BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. **Shigley's mechanical engineering design**. New York: McGraw Hill, 2020. v. 11.

CASH, J. Modified extended backward differentiation formulae for the numerical solution of stiff initial value problems in odes and daes. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 125, n. 1-2, p. 117–130, 2000.

CHEN, Z.; SHAO, Y. Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth. **Engineering failure analysis**, Elsevier, v. 18, n. 8, p. 2149–2164, 2011.

CONRY, T. F.; SEIREG, A. A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact. 1971.

CONRY, T. F.; SEIREG, A. A mathematical programming technique for the evaluation of load distribution and optimal modifications for gear systems. 1973.

FLORES, P.; GOMES, J. Cinemática e dinâmica de engrenagens. **Service Point**, p. 6, 2015.

GEMAQUE, M. **Abordagem para solução de um problema metrológico na indústria: medição de engrenagens. 2004. 132 f.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

GHOSH, S.; CHAKARBORTY, G. The influence of friction force on modified gear teeth and its effect on bearing force. In: **1st International and 16th National Conference on Machines and Mechanisms**. Roorkee: Indian Institute of Technology, Kharagpur, 2013. p. 202–210.

GHOSH, S.; CHAKRABORTY, G. On optimal tooth profile modification for reduction of vibration and noise in spur gear pairs. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 105, p. 145–163, 2016.

GKIMISIS, L. *et al.* A fast, non-implicit sdof model for spur gear dynamics. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 160, p. 104279, 2021.

HE, S.; GUNDA, R.; SINGH, R. Effect of sliding friction on the dynamics of spur gear pair with realistic time-varying stiffness. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 301, n. 3-5, p. 927–949, 2007.

HU, Z. *et al.* Effects of tooth profile modification on dynamic responses of a high speed gear-rotor-bearing system. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 76, p. 294–318, 2016.

HUANG, K.; LIU, T. Dynamic analysis of a spur gear by the dynamic stiffness method. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 234, n. 2, p. 311–329, 2000.

HWANG, Y. W.; HSIEH, C. F. Geometric design using hypotrochoid and nonunder-cutting conditions for an internal cycloidal gear. 2007.

INMAN, D. J. **Engineering vibration**. New Jersey: Pearson Education, 2014. v. 4. 24 p.

JUVINALL, R. C.; MARSHEK, K. M. **Machine component design**. 6. ed. New Jersey: Wiley, 2013.

LI, S. A thermal tribo-dynamic mechanical power loss model for spur gear pairs. **Tribology International**, Elsevier, v. 88, p. 170–178, 2015.

LI, S.; KAHRAMAN, A. A spur gear mesh interface damping model based on elastohydrodynamic contact behaviour. **International Journal of Powertrains**, Inderscience Publishers, v. 1, n. 1, p. 4–21, 2011.

LITVIN, F. L.; FUENTES, A. **Gear geometry and applied theory**. 2. ed. New York: Cambridge university press, 2004. 106–293 p.

LITVIN, F. L. *et al.* Computerized simulation of meshing of conventional helical involute gears and modification of geometry. **Mechanism and machine theory**, Elsevier, v. 34, n. 1, p. 123–147, 1999.

LOUZADA NETO, J. M. **Métodos de prognóstico híbrido baseados em filtro de partículas aplicados em uma caixa de engrenagens**. 2019. 103 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amazonas, 2019.

LUENBERGER, D. G. **Linear and nonlinear programming** David G. Luenberger, Yinyu Ye. Switzerland: Springer, New York, third edition. edition, 2008.

LUO, B.; LI, W. Influence factors on bulk temperature field of gear. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 231, n. 8, p. 953–964, 2017.

LUO, B.; LI, W. Experimental study on thermal dynamic characteristics of gear transmission system. **Measurement**, Elsevier, v. 136, p. 154–162, 2019.

LUO, B.; LI, W. Research on tooth profile modification based on system dynamic characteristics under thermoelastic coupling condition. **Meccanica**, Springer, v. 54, n. 10, p. 1499–1513, 2019.

MA, H. *et al.* Evaluation of optimum profile modification curves of profile shifted spur gears based on vibration responses. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 70, p. 1131–1149, 2016.

MARQUES, P. M.; MARTINS, R. C.; SEABRA, J. H. Load distribution in spur gears including the effects of friction. In: **New trends in mechanism and machine science**. Switzerland: Springer, 2015. p. 789–797.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G.; BOLTON, J. N. **Engineering mechanics: dynamics**. 8. ed. Virginia: John Wiley & Sons, 2020. 627–632 p.

MOHAMMED, O. D. *et al.* Vibration signal analysis for gear fault diagnosis with various crack progression scenarios. **Mechanical systems and signal processing**, Elsevier, v. 41, n. 1-2, p. 176–195, 2013.

MURARO, M. A. *et al.* The influence of contact stress distribution and specific film thickness on the wear of spur gears during pitting tests. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, SciELO Brasil, v. 34, p. 135–144, 2012.

MUSKHELISHVILI, N. I. *et al.* **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity**. Tbilisi: Noordhoff Groningen, 1953. v. 15. 230–249 p.

NORTON, R. L. **Projeto de máquinas**. 4. ed. Porto Alegre: Editora Bookman, 2013. 685–694 p.

PROVENZA, F. **Desenhista de máquinas**. 46. ed. São Paulo: Pro-Tec, 1987. 163–170 p.

RADZEVICH, S. P. **Dudley's handbook of practical gear design and manufacture**. [S.l.]: CRC press, 2016.

RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. New Jersey: Pearson Education, 2011. v. 5. 158–164 p.

SAINOT, P.; VELEX, P.; DUVERGER, O. Contribution of gear body to tooth deflections—a new bidimensional analytical formula. **J. Mech. Des.**, v. 126, n. 4, p. 748–752, 2004.

SÁNCHEZ, M. B.; PLEGUEZUELOS, M.; PEDRERO, J. I. Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 109, p. 231–249, 2017.

SHAMPINE, L. F.; REICHEL, M. W. The matlab ode suite. **SIAM journal on scientific computing**, SIAM, v. 18, n. 1, p. 1–22, 1997.

SHI, J. L. *et al.* Meshing stiffness analysis of gear using the ishikawa method. In: TRANS TECH PUBL. **Applied Mechanics and Materials**. Switzerland, 2013. v. 401, p. 203–206.

SIMON, V. Optimal tooth modifications for spur and helical gears. 1989.

THOMSON, W. T. **Theory of vibration with applications**. 4. ed. Santa Barbara: CrC Press, 2018.

TIAN, X. **Dynamic simulation for system response of gearbox including localized gear faults**. 2004. 109 f. Dissertação (Mestrado) — University of Alberta, 2004.

TIAN, X.; ZUO, M. J.; FYFE, K. R. Analysis of the vibration response of a gearbox with gear tooth faults. In: **ASME international mechanical engineering congress and exposition**. Anaheim: ASME, 2004. p. 785–793.

TIAN, Z.; ZUO, M. J.; WU, S. Crack propagation assessment for spur gears using model-based analysis and simulation. **Journal of Intelligent Manufacturing**, Springer, v. 23, n. 2, p. 239–253, 2012.

WANG, C. Optimization of tooth profile modification based on dynamic characteristics of helical gear pair. **Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering**, Springer, v. 43, n. 1, p. 631–639, 2019.

WANG, C. Multi-objective optimal design of modification for helical gear. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 157, p. 107762, 2021.

WANG, C. Study on 3-d modification for reducing vibration of helical gear based on tca technology, Itca technology and system dynamics. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 146, p. 106991, 2021.

WANG, C.; SHI, Z. A dynamic calculation method of sliding friction losses for a helical gear pair. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer, v. 39, n. 5, p. 1521–1528, 2017.

WANG, Y. Optimized tooth profile based on identified gear dynamic model. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 42, n. 8, p. 1058–1068, 2007.

WEBB, K. **Numerical Methods with MATLAB**. 2015. Disponível em: <[https://web.engr.oregonstate.edu/~webbky/MAE4020\\_5020.htm](https://web.engr.oregonstate.edu/~webbky/MAE4020_5020.htm)>. Acesso em: 31 de julho de 2022.

WU, S.; ZUO, M. J.; PAREY, A. Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 317, n. 3-5, p. 608–624, 2008.

XIANG, C. *et al.* Effects of tooth modifications on the mesh and dynamic characteristics of differential gearbox used in electric vehicle. **Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering**, Springer, v. 43, n. 1, p. 537–549, 2019.

XIAO, Z. *et al.* Effects of oil film stiffness and damping on spur gear dynamics. **Non-linear Dynamics**, Springer, v. 96, n. 1, p. 145–159, 2019.

YANG, D.; LIN, J. Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics. 1987.

ZHAN, J.; FARD, M.; JAZAR, R. A cad-fem-qa integration technique for determining the time-varying meshing stiffness of gear pairs. **Measurement**, Elsevier, v. 100, p. 139–149, 2017.

ZHAO, F. **Integrated prognostics for component health management. 2015. 199 f.** Tese (Doutorado) — University of Alberta, 2015.

ZHOU, X. *et al.* Time-varying meshing stiffness calculation and vibration analysis for a 16dof dynamic model with linear crack growth in a pinion. **Journal of Vibration and Acoustics**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 134, n. 1, 2012.

## APÊNDICE A

Momento de inércia de massa é a resistência à mudança de aceleração de um corpo sólido. Semelhantemente à inércia de uma massa, quando mais pesada, mais difícil de acelerá-la. No momento de inércia a ideia é semelhante porém se tratando de rotações, ou seja, acelerações angulares. Matematicamente, de acordo com Meriam, Kraige e Bolton (2020), o momento de inércia de massa é definido como:

$$I = \int r^2 dm \quad (\text{A.1})$$

Em que  $r$  é a distância do elemento de massa  $dm$  ao centro de gravidade ( $CG$ ) do corpo. E para um corpo com densidade  $\rho$  constante, o momento de inércia se torna:

$$I = \rho \int r^2 dV \quad (\text{A.2})$$

Onde  $dV$  é o elemento de volume, no qual é usualmente mais fácil de ser calculado que o elemento de massa. Além disso, muitas vezes se faz necessário descrever a o momento de inércia através de outra referência que não seja o  $CG$  e através do teorema dos eixos paralelos tem-se:

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (\text{A.3})$$

Em que  $\bar{I}$  é o momento de inércia do corpo com relação ao  $CG$  e  $d$  a distância entre os eixos (distância entre o novo ponto de referência e o  $CG$ ).

O centroide de uma área refere-se ao ponto no qual se define o centro geométrico dela, para uma área arbitrária, a localização do centroide  $C$  é determinada pelas formulas:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}, \quad \bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \quad (\text{A.4})$$

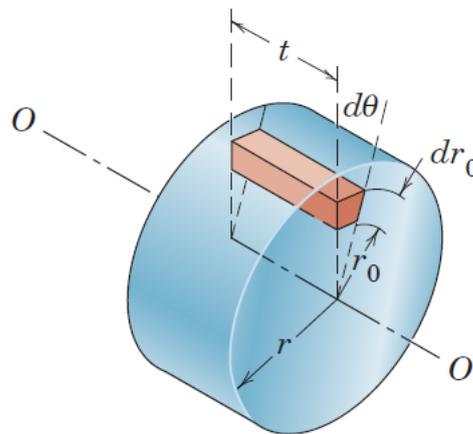
Para áreas conhecidas, pode-se simplificar as integrais na forma de somatórios finitos:

$$\bar{x} = \frac{\sum xA}{\sum A}, \quad \bar{y} = \frac{\sum yA}{\sum A} \quad (\text{A.5})$$

No caso de corpos homogêneos, ou seja, densidade  $\rho$  constante o centroide de área de um corpo irá coincidir com o  $CG$  desde que uma das dimensões que descrevem o volume permaneça constante. Como por exemplo um cilindro de raio  $r$  e altura  $t$  mostrado na Figura 58, seu momento de inércia é dado por:

$$I = \int r_0^2 dm = \rho t \int_0^{2\pi} \int_0^r r_0^3 dr_0 d\theta = \rho t \frac{\pi r^4}{2} = \frac{1}{2} m r^2 \quad (\text{A.6})$$

Figura 58: Momento de inércia de massa de um cilindro



Fonte: (MERIAM; KRAIGE; BOLTON, 2020).

## APÊNDICE B

Aqui estão disponíveis os códigos utilizados no cálculo de todas as etapas deste trabalho.

O algoritmo é apresentado para auxiliar na compreensão das relações entre as funções dentro do código, como mostra a Figura 29, está organizado da seguinte maneira:

**Otimizacao:** Contém as propriedades utilizadas na função de otimização e tem como objetivo avaliar o código principal para encontrar o valor ótimo de  $\Delta_{max}$ ;

**Simulacao:** É o código raiz, onde está contido os valores constantes, utilizados para determinar a geometria das engrenagens, condições de operação e contém os resultados das demais funções descritas a partir daqui;

**Engrenagens:** Função utilizada para calcular as dimensões das engrenagens dadas as entradas escolhidas na seção de constantes do código *Principal*;

**Operacao:** Calcula as relações de operação dadas as entradas do código *Principal*;

**Engrenamento:** Realiza o cálculo dos parâmetros do engrenamento dadas as dimensões das engrenagens e condições de operação;

**Massa:** Realiza o cálculo da massa equivalente do sistema dadas as dimensões das engrenagens e de modificação do perfil;

**Integ:** Apenas realiza o cálculo da integral da fórmula da TVMS pelo método da energia;

**Energia:** Função que realiza o cálculo da TVMS e amortecimento, tanto original quanto modificado;

**Interp:** Dados os pontos discretos obtidos na função *Energia*, interpola os valores para obter uma função "contínua" (entre os pontos de continuidade) para posterior utilização na função da solução do modelo, *Modelo*.

**Modelo:** Esta função retorna os valores das variáveis de estado (calculada na função *Dinamica*, juntamente com a aceleração (calculada na função *aceleracao*) e a TVMF do sistema original e modificado;

**Dinamica:** Resolve o modelo dinâmico original e provê os valores das variáveis de estado;

**Dinamicatpm:** Resolve o modelo dinâmico modificado e provê os valores das variáveis de estado;

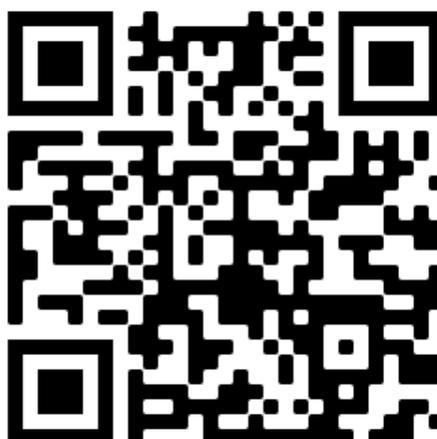
**Aceleracao:** Com os valores das variáveis de estado, calcula o valor da aceleração do sistema original e modificado;

**Sinal:** Calcula parâmetros do sinal dado as variáveis de estado, aceleração e TVMF;

**Plots:** Apenas gera gráficos úteis para as análises.

Os arquivos dos códigos utilizados estão disponíveis na plataforma GitHub<sup>1</sup>, e podem ser acessados através do QR-Code disponível na Figura 59.

Figura 59: QR-Code do repositório com os códigos



Fonte: Elaborado pelo autor.

---

<sup>1</sup><https://github.com/flaviohasd/TPM-Vibration>