תרגול מס' 2 - מכפלה קרטזית + יחסים

הגדרות:

* **זוג סדור** הוא רשימה (a,b) של 2 איברים כשהסדר חשוב.

* **n-יה סדורה** היא רשימה $(a_1,\dots,a_n)$ של n איברים כשהסדר חשוב.

* **המכפלה הקרטזית** של 2 הקבוצות A ו-B היא קבוצת כל הזוגות הסדורים אשר הראשון שבהם שייך לA והשני שייך לB.

$$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A,\ b\in B\}$$

* המכפלה הקרטזית של n קבוצות $A_1,\dots,A_n$ היא הקבוצה:

$$A_1\times A_2\times\dots\times A_n=\{(a_1,\dots,a_n) \mid a_1\in A_1,\dots,\ a_n\in A_n\}$$

שאלה 1. נתון: $B=\{16,17\}$, $C=\{x\in \mathbb{N} \mid 2\le x\le 4\}$, חשב את: $B\times C,\ C\times B,\ B^2,\ B^3$

פתרון: $B\times C=\{(16,2),(16,3),(16,4),(17,2),(17,3),(17,4)\}$

$C\times B=\{(2,16),(3,16),(4,16),(2,17),(3,17),(4,17)\}$

מסקנות:

* $B\times C\neq C\times B$ כלומר, <u>מכפלה קרטזית אינה קומוטטיבית</u>

* $|B\times C|=|C\times B|=|C|\times|B|$ (כפל מספרים טבעיים הוא כן קומוטטיבי)

$$B^2=B\times B=\{(16,16),(16,17),(17,16),(17,17)\}$$

$$B^3=\{(16,16,16),(16,16,17),\dots,(17,17,17)\}$$

שאלה 2. הוכח או הפרך: $A^2\times A=A\times A^2=A^3$

פתרון:

$A^2\times A=\{(x,y) \mid x\in A^2,\ y\in A\}=\{((a,b),y) \mid a,b,y\in A\}$

$A\times A^2=\{(x,y) \mid x\in A,\ y\in A^2\}=\{(x,(a,b)) \mid x,a,b\in A\}$

$A^3=\{x,y,z \mid x,y,z\in A\}$

שאלה 3. תהיינה X,Y,Z קבוצות כלשהן. הוכח או הפרך:

א. $X\cup(Y\times Z)=(X\cup Y)\times(X\cup Z)$

ב. $(X\times X)\cup(Y\times Z)=(X\cup Y)\times(X\cup Z)$

פתרון:

א. $x=\{1\}\ ,\ y=\{2\}\ ,\ z=\{3\}$

$$\left.\begin{array}{l} x\cup(y\times z)=\{1\}\cup\{(2,3)\}=\{1,(2,3)\} \\ (x\cup y)\times(x\cup z)=\{1,2\}\times\{1,3\}=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\} \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x\cup(y\times z)\neq \\ (x\cup y)\times(x\cup z)\end{array}$$

ב. $x=\{1\}\ ,\ y=\{2\}\ ,\ z=\{3\}$

$$\left.\begin{array}{l} (x\times x)\cup(y\times z)=\{(1,1),(2,3)\} \\ (x\cup y)\times(x\cup z)=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\} \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} (x\times x)\cup(y\times z)\neq \\ (x\cup y)\times(x\cup z)\end{array}$$

ג. נוכיח: $x\times(y\cup z)=(x\times y)\cup(x\times z)$

$(a,b)\in x\times(y\cup z) \longleftrightarrow a\in x$ וגם $b\in y\cup z$

-"- $\longleftrightarrow a\in x$ וגם ($b\in y$ או $b\in z$)

-"- $\longleftrightarrow$ ($a\in x$ וגם $b\in y$) או ($a\in x$ וגם $b\in z$)

-"- $\longleftrightarrow (a,b)\in x\times y$ או $(a,b)\in x\times z$

-"- $\longleftrightarrow (a,b)\in(x\times y)\cup(x\times z)$ מש"ל

<u>הגדרה</u>: תהיינה A ו-B קבוצות. יחס בינארי R מ-A ל-B הינו תת-קבוצה של המכפלה הקרטזית $A\times B$, כלומר: $R\subseteq A\times B$.

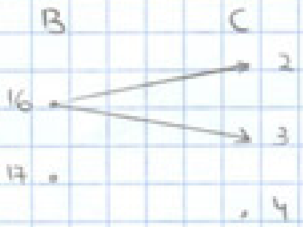
* אם $A=B$ ($R\subseteq A\times A$) אז R נקרא יחס על A.

* אם $(a,b)\in R$ נאמר ש-a מתייחס ל-b ונסמן זאת ע"י aRb.

דוגמה 4. תהיינה B ו-C כמו בדוגמה 1: $B=\{16,17\}\ ,\ C=\{2,3,4\}$

אז: $R_1=\{(16,2),(16,3)\}$ הינו יחס מ-B ל-C, $R_2=\{(17,2),(3,16)\}$ <u>אינו</u> יחס מ-B ל-C.

דיאגרם של R_1:



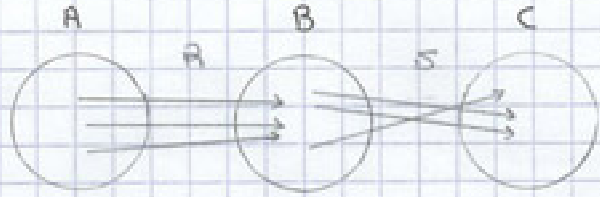
דוגמה 5. $A=\{$ יוסי, דני, רן $\}$, $B=\{$ היסטוריה, אנגלית, גאוגרפיה $\}$

$R=\{(a,b)\in A\times B \mid$ a-ש מעוניין ב-b $\}=\{($רן, היסטוריה$)$, $($דני, אנגלית$)$, $($יוסי, גאוגרפיה$)\}$

הגדרה: יהי R יחס מ-A ל-B, ויהי S יחס מ-B ל-C.

המכפלה (הרכבה) $R\circ S$ היא יחס מ-A ל-C המוגדר כך:

$$R\circ S = \{(a,c) \mid \exists b \ (a,b)\in R \text{ וגם } (b,c)\in S\}$$



שאלה 6. א. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,8,\alpha\}$, $C=\{k,l,m,p\}$

$R=\begin{bmatrix} a & a & b & c \\ 1 & 8 & \alpha & 2 \end{bmatrix}$ יחס מ-A ל-B.

$S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & \alpha \\ k & l & k & p \end{bmatrix}$ יחס מ-B ל-C.

מהו היחס $R\circ S$?

פתרון: $R\circ S = \begin{bmatrix} a & b & a \\ k & p & l \end{bmatrix}$

ב. נתונים הקבו' הבאות והיחסים הבאים:

$A=\{a,b,c\}$

$B=\{1,2,3,4\}$

$C=\{w,x,y,z\}$

$D=\{20,30,40\}$

$R_1=\{(a,3),(c,2),(c,4)\}$

$R_2=\{(1,y),(1,z),(4,z),(3,x)\}$

$R_3=\{(w,20),(x,20),(y,20),(z,30)\}$

מצא את: $(R_1\circ R_2)\circ R_3$, $R_1\circ(R_2\circ R_3)$

פתרון:

$R_1\circ R_2=\{(a,x),(c,z)\}$

$(R_1\circ R_2)\circ R_3=\{(a,20),(c,30)\}$

$R_2\circ R_3=\{(1,20),(1,30),(4,30),(3,20)\}$

$R_1\circ(R_2\circ R_3)=\{(a,20),(c,30)\}$

$\rightarrow R_1\circ(R_2\circ R_3)=(R_1\circ R_2)\circ R_3$ אסוציאטיבי!

7. הוכח שכפל יחסים הוא אסוציאטיבי, כלומר שאם 4 קבוצות A,B,C,D ונתונים 3 יחסים $R_1\subseteq A\times B$, $R_2\subseteq B\times C$, $R_3\subseteq C\times D$ מתקיים: $(R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ(R_2\circ R_3)$

פתרון: $(a,d)\in(R_1\circ R_2)\circ R_3 \iff$ קיים $c\in C$ כך ש:

$(a,c)\in R_1\circ R_2$

וגם $(c,d)\in R_3$

$\iff$ קיים $b\in B$ ו- $c\in C$ כך ש:

$(a,b)\in R_1$

וגם $(b,c)\in R_2$

וגם $(c,d)\in R_3$

$\iff$ קיים $b\in B$ כך ש:

$(a,b)\in R_1$

וגם $(b,d)\in R_2\circ R_3$

$\iff (a,d)\in R_1\circ(R_2\circ R_3)$ מש"ל

שאלה ד. תהיינה A,B,C,D קבוצות כלשהן. הוכח או הפרך:

א. עבור $R_1\subseteq A\times B$, $R_2,R_3\subseteq B\times C$ מתקיים: $R_1\circ(R_2\cup R_3)=(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$

ב. עבור $R_1\subseteq A\times B$, $R_2,R_3\subseteq B\times C$ מתקיים: $R_1\circ(R_2\oplus R_3)=(R_1\circ R_2)\oplus(R_1\circ R_3)$

פתרון: א. נראה הכלה כפולה:

יהי $(x,y)\in R_1\circ(R_2\cup R_3)$. נוכיח $(x,y)\in(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$

$(x,y)\in R_1\circ(R_2\cup R_3) \rightarrow \exists b\in B: (x,b)\in R_1,\ (b,y)\in R_2\cup R_3$

$\rightarrow \exists b: [(x,b)\in R_1]\cap[(b,y)\in R_2 \cup (b,y)\in R_3]$

$\rightarrow \exists b: [(x,b)\in R_1 \cap (b,y)\in R_2]\cup$

$[(x,b)\in R_1\cap(b,y)\in R_3]$

$\rightarrow (x,y)\in(R_1\circ R_2)\cup(x,y)\in(R_1\circ R_3)$

$\rightarrow (x,y)\in(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$

יהי $(x,y)\in(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$. נוכיח ש- $(x,y)\in R_1\circ(R_2\cup R_3)$

$(x,y)\in(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3) \rightarrow (x,y)\in(R_1\circ R_2)$ או $(x,y)\in(R_1\circ R_3)$

$\rightarrow$ $\exists b_1\in B: (x,b_1)\in R_1$ וגם $(b_1,y)\in R_2$

$\exists b_2\in B: (x,b_2)\in R_1$ וגם $(b_2,y)\in R_3$

$\rightarrow \exists b\in B: (x,b)\in R_1$ וגם $(b,y)\in R_3\cup R_2$

אזי $\longrightarrow (x,y) \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$

ט. דוגמא נגדית:

$$A = B = C = \{a, b, c, d\}$$

$$R_1 = \{(a,b), (a,d)\}$$

$$R_2 = \{(b,c)\}$$

$$R_3 = \{(d,c)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} R_2 \oplus R_3 = \{(b,c), (d,c)\} \\ R_1 \circ (R_2 \oplus R_3) = \{(a,c)\} \\ R_1 \circ R_2 = \{(a,c)\} = R_1 \circ R_3 \\ (R_1 \circ R_2) \oplus (R_1 \circ R_3) = \emptyset \end{array}\right\} \rightarrow R_1 \circ (R_2 \oplus R_3) \neq (R_1 \circ R_2) \oplus (R_1 \circ R_3)$$

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות. יחס $F \subseteq A \times B$ נקרא פונקציה מ-A ל-B אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ אחד ויחיד כך ש-$(a,b) \in F$.

* אם $(a,b) \in F$ אומרים $\underbrace{f(a)}_{\text{מקור}} = \underbrace{b}_{\text{תמונה}}$

* הקבוצה A נקראת התחום של הפונקציה f.

* הטווח של הפונקציה f הוא קב׳ כל האיברים ב-B שהם תמונה של איבר כלשהו ב-A.

* לכל $a \neq b$ ← $f(a) \neq f(b)$

לכל $f(a) = f(b)$ ← $a = b$

סוגי יחסים.

<u>הגדרה</u>: תהיינה A,B,C קבוצות ותהיינה: $f:A\to B$, $g:B\to C$ פונקציות.

ההרכבה $f\cdot g$ היא פונקציה מ-A ל-C.

<u>סימון</u>: $f\cdot g(x)=g(f(x))$

① תהיינה f,g פונקציות. מצא את $g\cdot f(x)$ ואת $f\cdot g(x)$

כאשר: $f,g\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}\begin{cases} g(x)=2x+5 \\ f(x)=4x+3\end{cases}$

<u>פתרון</u>:

$g\cdot f(x)=f(g(x))=f(2x+5)=4(2x+5)+3=8x+23$

$f\cdot g(x)=g(f(x))=g(4x+3)=2(4x+3)+5=8x+11$

<u>מסקנה</u>: הרכבת פונקציות אינה פעולה קומוטטיבית.

② תהיינה f,g פונקציות: $g:X\to Y$, $f:Y\to Z$

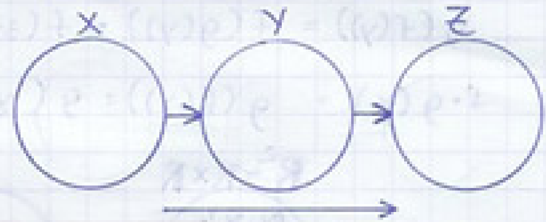
הוכח או הפרך:

א- $g\cdot f$ חח"ע אם f חח"ע ו-g חח"ע

ב- $g\cdot f$ על אם f על ו-g על.

<u>פתרון</u>:

א-

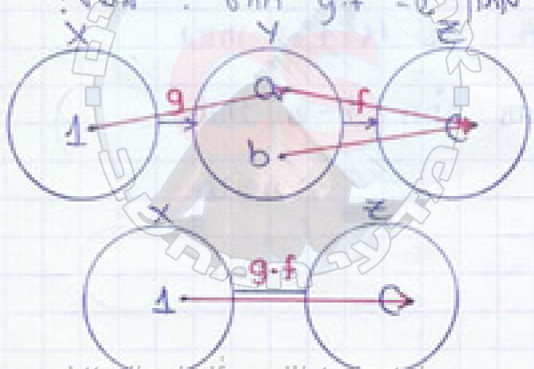


נתון: f חח"ע ו-g חח"ע
צ"ל: $g\cdot f$ חח"ע

נתון: $g\cdot f$ חח"ע
צ"ל: f חח"ע ו-g חח"ע

<u>פתרון</u>: נניח בשלילה ש-g אינה חח"ע. אז קיימים $x_1\neq x_2$ כך ש: $g(x_1)=g(x_2)$. נפעיל את f

ונקבל: $f(g(x_1))=f(g(x_2))$, כלומר סתירה לנתון ש-$g\cdot f$ חח"ע. מצא!



$X=\{1\}$ $Y=\{a,b\}$ $Z=\{c\}$

f אינה בהכרח חח"ע: $g=\{1\to a\}$

$f=\{a\to c,\ b\to 1\}$

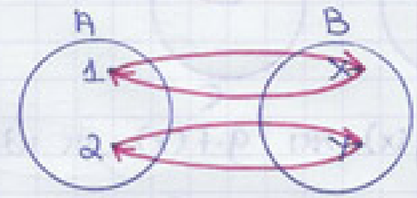
$g\cdot f=\{1\to c\}$

הגדרה: תהינה A, B קבוצות ותהי $f: A \to B$ פונקציה. 3/11/04

הפונקציה f **הפיכה** אם קיימת פונקציה $g: B \to A$ כך שלכל $a \in A$, $b \in B$ מתקיים:

$$g(f(a)) = a$$
$$f(g(b)) = b$$

הפונקציה g נקראת **הפונקציה ההופכית** ל-f ומסומנת f^{-1}

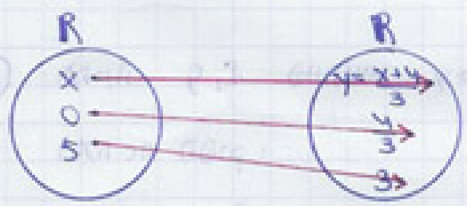


③ מצא את הפונקציה ההופכית של:

א- $f(x) = \frac{x+4}{3}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ב- $h(x,y) = (x+y+1, x+1)$ $\quad h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

פתרון:



א- $y = \frac{x+4}{3}$

$3y = x+4$

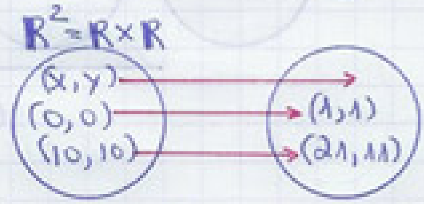
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(y) = 3y-4 \Leftarrow \boxed{x = 3y-4}$

בדיקה:

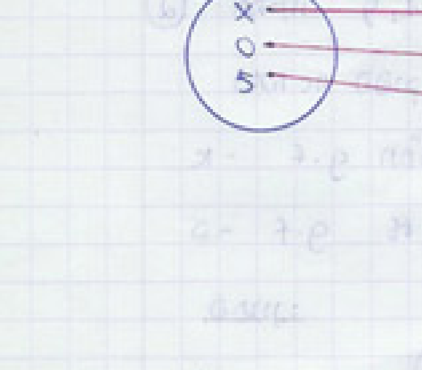
$$g \circ f(y) = f(g(y)) = f(3y-4) = \frac{3y-4+4}{3} = y$$

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+4}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x$$

ב- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



④ הוכח שהפונקציה f הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.



פתרון: נניח ש-f חח"ע ועל, ונבנה את הפונקציה f^{-1}.

יהי $b \in B$.

מאחר ש-f על ישנו $\tilde{a} \in A$ כך ש: $f(\tilde{a}) = b$

מאחר ש-f חח"ע, הוא היחיד שמקיים זאת. לכן נגדיר $f^{-1}(b) = \tilde{a}$

בדיקה:

$$f(\underbrace{f^{-1}(b)}_{\tilde{a}}) = b$$

$$f^{-1}(\underbrace{f(a)}_{\tilde{b}}) = a$$

3/11/04   VI

<u>טרנזיטיביות</u>: כן, כי אם $a,b\in\mathbb{Q}$ $|a|\le|b|$ וגם $|b|\le|c|$

אז $|a|\le|c|$.

<u>אנטיסימטריות</u>: לא. דוגמה נגדית: $|3|\le|-3|$
וגם $|-3|\le|3|$
אבל $3\ne-3$

ב- $A=\mathbb{N}$ $R_2=\{(a,b)\mid a|b$ b מתחלק ב-a$\}$

$R_2=\{(2,10),(3,27),(4,40)\dots\}$

<u>רפלקסיביות</u>: כן. כל מספר טבעי (חיובי) מתחלק בעצמו. $\forall a\in\mathbb{N}\ a|a$

<u>סימטריות</u>: לא. דוגמה נגדית. $3|27$ אבל $27\nmid3$

<u>טרנזיטיביות</u>: כן, מאחר שאם $a|b$ ו- $b|c$ אז $a|c$

<u>אנטיסימטריות</u>: כן. אם $a,b\in\mathbb{N}$ $a|b$ וגם $b|a$ אז $a=b$

ג- $A=P(\{1..8\})$ $R_3=\{(x,y)\mid x\subseteq y\}$

$R_3\subseteq P(\{1..8\})\times P(\{1..8\})$

$\{\emptyset,\{1\}\dots\{3,4,5\}\dots\}\times\{\emptyset,\{1\}\dots\{3,4,5\}\dots\}$

$R_3=\{(\{1,2\},\{1,2,4,5\}),(\emptyset,\{1\})\dots\}$

$(\{1\},\{1\})\dots(\{1,2,3\},\{1,2,3\})\dots$

<u>רפלקסיביות</u>: כן, כי כל קבוצה מוכלת בעצמה, בפרט אם היא תת הקבוצה.

<u>סימטריות</u>: לא. דוגמה נגדית: $\{1\}\subseteq\{1,2\}$

$\{1,2\}\not\subseteq\{1\}$

<u>טרנזיטיביות</u>: כן אם $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq C$ אז $A\subseteq C$

<u>אנטיסימטריות</u>: כן אם, $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$ אז $A=B$ עפ"י הגדרה.

תמשיך.
נניח ש- f הפיכה ו- f^{-1} ההופכית שלה.

נראה כי f על:

יהי $b\in B$. עפ"י הגדרת f^{-1} קיים $a\in A$ כך ש $f^{-1}(b)=a$. פירוש הדבר הוא ש- $f(a)=b$. כאמור קיים a כנדרש.

נראה ש- f חח"ע:
נשתמש בהגדרות:
$x_1\neq x_2 \rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

$f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1=x_2$ // הגדרה שקולה.

נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$ ונראה ש $x_1=x_2$

$$f^{-1}(f(x_1))=f^{-1}(f(x_2))$$

$x_1=x_2$ מש"ל!

<u>הגדרות:</u> תהי A קבוצה ו- R יחס מעל A $(R\subseteq A\times A)$

- R יקרא רפלקסיבי אם לכל $a\in A$ מתקיים aRa
- R ייקרא סימטרי אם לכל $a,b\in A$ מתקיים $aRb \rightarrow bRa$
- R ייקרא טרנזיטיבי אם לכל $a,b,c\in A$ מתקיים $(aRb$ וגם $bRc) \rightarrow aRc$
- R ייקרא אנטיסימטרי אם לכל $a,b\in A$ מתקיים $(aRb$ וגם $bRa) \rightarrow a=b$

<u>דוגמא:</u> $A=\{1,2,3,4\}$

$$R_3=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$$

יחס זה הינו רפלקסיבי וסימטרי.
יחס זה <u>אינו</u> טרנזיטיבי.
(היחס אינו אנטיסימטרי. בגלל $(1,2)$ $(2,1)$ ביחס)

$$R_4=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

לא רפלקסיבי.
לא סימטרי.
כן טרנזיטיבי.
כן אנטי סימטרי.

(5) נתח את תכונותיהם של היחסים הבאים:

א- $A=\mathbb{Q}$ $\quad R_1=\{(a,b)\mid |a|\leq|b|\}$

$$R_1=\{(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}),(3,8),(\tfrac{4}{7},-6),(3,-3),(-3,3)\dots\}$$

<u>רפלקסיביות:</u> כן. כי לכל $q\in\mathbb{Q}$ מתקיים $|q|=|q|$ ובפרט $|q|\leq|q|$

<u>סימטריות:</u> לא. דוגמא נגדית: $|1|\leq|3|$ $|3|\not\leq|1|$ לכן $1R_3$ אבל לא $3R_1$.

10/11/04

תרגול מס' 4 - יחסי שקילות וסדר.

הגדרה: יהי R יחס על הקבוצה A. אם R יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. אזי הוא נקרא יחס שקילות.

- לכל $a \in A$ נגדיר את מחלקת השקילות של a על היחס R כקבוצה:

$$[a]_R = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$$

- קבוצת כל מחלקות השקילות של R נקראת קבוצת המנה של A מעל השקילות R.

סימון: A/R

שאלה 1: תהי A קבוצת כל המילים בעברית באורך סופי. כאשר $l(x)$ הוא מספר האותיות במילה x.

נגדיר את היחס R באופן הבא: $R = \{(a,b) \in A \times A \mid l(a) = l(b)\}$

א - הוכח ש-R יחס שקילות

ב - מהן מחלקות השקילות של R?

פתרון:

א - נבדוק רפלקסיביות, טרנזיטיביות וסימטריות.

רפלקסיביות: מאחר שלכל מילה a מתקיים $l(a)=l(a)$ אזי לכל a מתקיים aRa.

סימטריות: נניח ש- aRb אזי עפ"י ההגדרה $l(a)=l(b)$ מכאן ש $l(b)=l(a)$. לכן bRa

טרנזיטיביות: נניח ש- aRb ו- bRc. לכן $l(a)=l(b)$ וגם $l(b)=l(c)$

שמתקיים $l(a)=l(b)=l(c)$ כלומר aRc

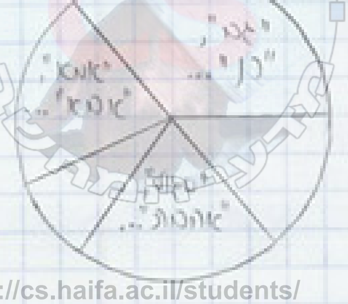
$\leftarrow$ R יחס שקילות.

ב - מחלקת שקילות של מילה כלשהיא x, היא קבוצת כל המילים בעלות אותו מספר אותיות כמו של x.

לכן, היחס R מחלק את המילים במילון למחלקות שקילות עפ"י מספר האותיות בכל מילה.

כלומר, קבוצת כל המילים באורך 1, קבוצת כל המילים באורך 2 וכו'

לדוגמא: ["סוס"] = {"ארון", "שמש", "אהבה"...}



שאלה 2: יהי R יחס מעל השלמים כך ש aRb אמ"מ $a=b$ או $a=-b$

האם R יחס שקילות? אם כן, מהי מחלקות השקילות של מספר שלם כלשהו לפי יחס זה?

פתרון: נוכיח שזהו יחס שקילות.

רפלקסיביות: כן, מאחר שכל מספר שלם שווה לעצמו.

סימטריות: יהי $(a,b)\in R$ אזי $a=b$ או $a=-b$ לכן $b=a$ או $\underline{\underline{b=-a}}$.

לכן עפ"י ההגדרה $(b,a)\in R$

טרנזיטיביות: נוכיח שאם $a=\pm b$ וגם $b=\pm c$ אזי $a=\pm c$

<u>ישנן 4 אפשרויות:</u>

aRb	bRc		
$a=b$	$b=c$	$a=c$	
$a=b$	$b=-c$	$a=-c$	לכן מוגדר aRc
$a=-b$	$b=c$	$a=-c$	
$a=-b$	$b=-c$	$a=--c=c$	

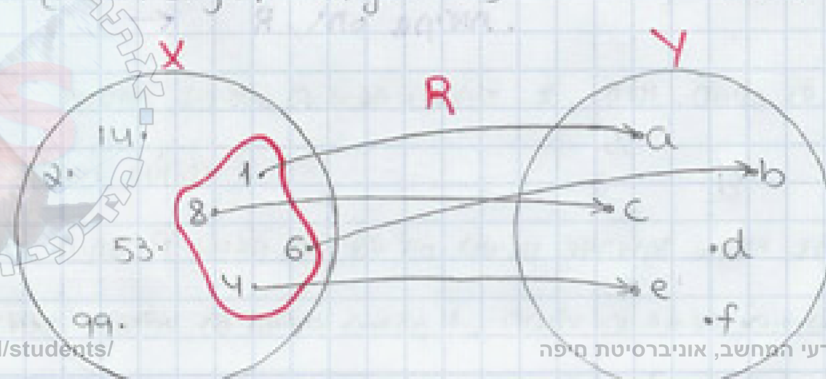
$\Leftarrow$ R יחס שקילות

מחלקות שקילות: כל מספר שלם נמצא בקשר עם עצמו או עם הנגדי שלו. לכן מחלקת השקילות של מספר שלם תכלול <u>שני איברים</u>: $[a]=\{a,-a\}$

לדוגמא: $[7]=\{7,-7\}$, $[-5]=\{-5,5\}$, $[0]=\{0\}$

* הבעיה היא $x=0$ תכלול מחלקת השקילות איבר אחד - $\{0\}$

הגדרה: $R\subseteq X\cdot Y$ $\quad Dom(R)=\{x\in X \mid \exists y\in Y \ (x,y)\in R\}$



Dom(R) = {

שאלה 3.

תהי A קבוצה כלשהי ותהא B קבוצת כל הרלציות מעל A, כלומר: $B=P(A\times A)$

(נגדיר רלציה מעל B (שימו לב: איברי T הם זוגות של רלציות מעל A)

$$T=\{(R,S)\mid Dom(R)=Dom(S)\}$$

א- הוכיחו כי T יחס שקילות

ב- תהא A הקבוצה $\{1,2\dots10\}$. כתבו 3 איברים השייכים למחלקת השקילות של הרלציה $R=\{(1,2)\}$

ג- עבור R ו-A מסעיף ב, מהו מספר של מחלקות השקילות של R?

פתרון:

א- נוכיח ש-T יחס שקילות.

רפלקסיביות: לכל $R\in B$ מתקיים $Dom(R)=Dom(R)$

סימטריות: אם $Dom(R)=Dom(S)$ אז גם להיפך.

טרנזיטיביות: לכל $R,S,Q\in B$ מתקיים:

$$Dom(R)=Dom(Q)\;\begin{cases} Dom(R)=Dom(S) \\ Dom(S)=Dom(Q)\end{cases}$$

ב- $[\{(1,2)\}]_T=\{\{(1,2)\},\{(1,2),(1,8)\},\{(1,5)\}\dots\}$

$Dom(R)=\{(1,2)\}=\{1\}$

ג- מחלקת השקילות של R מכילה את כל הרלציות שהתחום שלהם הוא הקבוצה $\{1\}$.

כל רלציה כזאת היא תת-קבוצה של: $\{1\}\times A=\{(1,1),(1,2),\dots(1,10)\}$

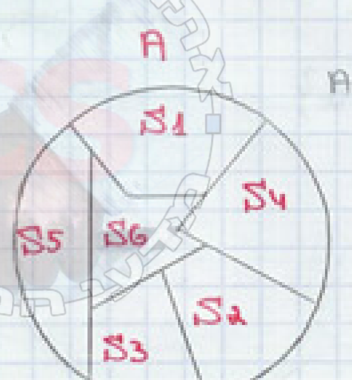
לכן מחלקת השקילות היא $P(\{1\}\times A)$, וגודלה - 2^{10}

הגדרה: תהי A קבוצה לא ריקה. משפחה S של קבוצות היא <u>חלוקה</u> של A אם:

(1) $S_i\neq\emptyset$ לכל קבוצה $S_i\in S$

(2) הקבוצות ב-S זרות זו לזו.

(3) הקבוצות ב-S מכסות את A. $A=\bigcup_{s\in S} S_i$



דוגמא: $S=\{S_1,S_2\dots S_6\}$

הגדרה: תהי A קבוצה לא ריקה ותהי S חלוקה (פירוק) של A. היחס המושרה ע"י החלוקה S הוא היחס R שמוגדר ע"י $(x,y)\in R$ אם"ם x ו-y שייכים לאותה קבוצה ב-S בחלוקה של S.

שאלה 4.

נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$

א – הגדירו 3 חלוקות שונות של A ורשמו את יחסי השקילות המתאימים.

ב – רשמו יחס שקילות מעל A וציינו את הקבוצה המנה של A לפי היחס.

פתרון:

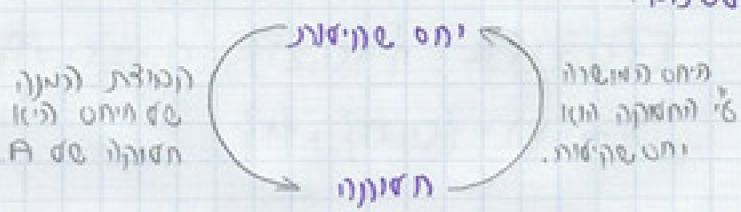
א – דוגמה לחלוקה של A: $S=\{\{1\},\{2,4\},\{3,5\}\}$

היחס המושרה ע"י חלוקה זו: $E=\begin{bmatrix}1&2&2&4&4&3&3&5&5\\1&2&4&2&4&3&5&3&5\end{bmatrix}$

ב – $E=\begin{bmatrix}1&2&2&3&3&4&5\\1&2&3&2&3&4&5\end{bmatrix}$

הקבוצה המנה: $A/E=\{\{1\},\{2,3\},\{4\},\{5\}\}$

סיכום:



יחסי סדר + קס"ח

הגדרה: יחס בינארי R, מהקבוצה A נקרא יחס סדר חלקי אם הוא רפלקסיבי, אנטיסימטרי וטרנזיטיבי. הזוג הסדור (A,R) נקרא "קבוצה סדורה חלקית" (קס"ח).

* יחס סדר חלקי R נקרא <u>יחס סדר מלא</u> (או יחס סדר קווי) אם לכל $a,b\in A$ מתקיים $(a,b)\in R$ או $(b,a)\in R$. במקרה זה, הזוג הסדור (A,R) היא קבוצה סדורה קווית.

דוגמאות: $R_1=\{(a,b)\in N^+\times N^+ \mid$ a מחלק את b$\}$

$R_1=\{(5,20),(3,30),(3,27)\dots\}$

10/11/04

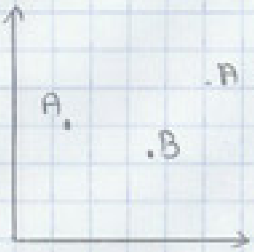
שאלה 5.

נגדיר את יחס הסדר הקרטזי מעל $\mathbb{N}\bullet\mathbb{N}$

$(a,b) \le_{cart} (c,d)$ אמ"מ $a \le c$ וגם $b \le d$.

האם זהו יחס סדר חלקי? יחס סדר מלא?

פתרון: $\mathbb{N}\bullet\mathbb{N}$ - קבוצות הנקודות במישור (רביע I)



$A \le_{cart} B$ אמ"מ הנקודה B ממוקמת למעלה וימינה מנקודה A.

<u>נוכיח שזהו יחס סדר חלקי:</u>

רפלקסיביות: לכל $(a,b) \in \mathbb{N}\bullet\mathbb{N}$ מתקיים $b \le b$ וגם $a \le a$

לכן $(a,b) \le_{cart} (a,b)$

טרנזיטיביות: יהיו $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}\bullet\mathbb{N}$

צ"ל: $[(a,b) \le (c,d) \wedge (c,d) \le (e,f)] \rightarrow [(a,b) \le (e,f)]$

נניח $b \le d \wedge a \le c \wedge d \le f \wedge c \le e$

אזי: $a \le e \wedge b \le f$, לכן: $(a,b) \le (e,f)$ מש"ל

אנטיסימטריות: $(c,d) \le (a,b)$ וגם $(a,b) \le (c,d)$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$a \le c \wedge b \le d \qquad c \le a \wedge d \le b$$

$$a = c \qquad b = d$$

$$\downarrow$$

$$(a,b) = (c,d)$$

זהו לא יחס סדר מלא! דוגמא נגדית: $(2,500) \geq (3,300)$

17/11/04

יחסים - המשך.

נגדיר יחס S מעל Z.

$$S=\{(x,y)\mid(|x|<|y|)\vee(|x|=|y|\wedge x\leq y)\}$$

(דוגמא: $S=\{(1,2),(1,-2),(-1,\frac{1}{3}),(-2,2),(6,6)\ldots\}$)

הראו כי S הינו יחס סדר מלא וכי הקבוצה (Z,S) היא קבוצה סדורה היטב

(לכל תת-קבוצה סופית קיים איבר מינימלי יחיד)

פתרון: ראשית נראה ש-S הינו יחס סדר חלקי:

רפלקסיביות: לכל $a\in Z$ מתקיים $a\leq a\wedge|a|=|a|$ לכן aSa

אנטיסימטריות: נתון: aSb וגם bSa

צ"ל: $a=b$

נעזר במעין "טבלת אמת":

	aSb	bSa	
	$\|a\|<\|b\|$	$\|b\|<\|a\|$	אפשרות לא הגיונית
	$\|a\|<\|b\|$	$\|b\|=\|a\|\wedge b\leq a$	אפשרות לא הגיונית
	$\|a\|=\|b\|\wedge a\leq b$	$\|b\|<\|a\|$	אפשרות לא הגיונית
	$\|a\|=\|b\|\wedge a\leq b$	$\|b\|=\|a\|\wedge b\leq a$	$a=b$

טרנזיטיביות: אם aSb וגם bSc אזי יש 4 אפשרויות:

aSb	bSc	aSc
$\|a\|<\|b\|$	$\|b\|<\|c\|$	$\|a\|<\|c\|$
$\|a\|<\|b\|$	$\|b\|=\|c\|\wedge b\leq c$	$\|a\|<\|c\|$
$\|a\|=\|b\|\wedge a\leq b$	$\|b\|<\|c\|$	$\|a\|<\|c\|$
$\|a\|=\|b\|\wedge a\leq b$	$\|b\|=\|c\|\wedge b\leq c$	$\|a\|=\|c\|\wedge a\leq c$

הוכחנו יחס סדר חלקי!

- נראה שזהו יחס סדר מלא, כלומר לכל שני מספרים שלמים a ו-b ניתנים להשוואה אחד עם השני.

יהיו $a,b\in Z$. ישנן האפשרויות:

I. $a=b$ ⇐ $a\leq b\wedge|a|=|b|$, לכן מתקיים $(a,b)\in S$ או $(b,a)\in S$

ה.ה.ה.

II. $a<b$ ⇐ ① a ו-b הם שווים אחד עם השני, ואז: $a\leq b\wedge|a|=|b|$ כלומר $(a,b)\in S$

② a ו-b אינם שווים אחד עם השני, ואז $\underbrace{|a|<|b|}_{(a,b)\in S}$ או $\underbrace{|b|<|a|}_{(b,a)\in S}$

III. $b<a$ ⇐ הוכחה כמו בסעיף II

כי שמראות ש $(Z,\leq)$ היא הקבוצה סדורה היטב (ראו בהרצאה) כדי שנקבל את המינימום בכל תת-קבוצה. מחשבים את הערכים המוחלטים של תת-הקבוצה. האיבר המינימלי יהיה זה שהערך המוחלט שלו הוא הקטן ביותר. אם יש שני מספרים שונים הערך המוחלט שלהם הוא המינימלי אז לוקחים את הקטן מביניהם (השלילי).

17/11/04

קומבינטוריקה.

תהי A קבוצה בת n איברים, n-יה סדורה, ללא חזרות, של איברי A תקרא **תמורה**.

הגדרה: תמורה היא סידור של n עצמים בשורה.

תרגיל 1

א) בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים על ספסל?

$\underline{\ \ }_1 \ \underline{\ \ }_2 \ \underline{\ \ }_3 \ \underline{\ \ }_4 \ \dots \ \underline{\ \ }_{n-2} \ \underline{\ \ }_{n-1} \ \underline{\ \ }_n$

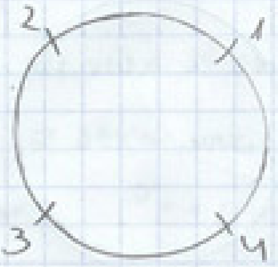
$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 1 = n!$$

ב) בכמה תמורות של 8 האותיות A, B, C, D, E, F, G, H האותיות G,H צמודות זו לזו?

אותן ל-H ו-G דרכים שונות להיות צמודות, נתייחס אליהן כאל פשוט אחד. יש שתי דרכים לסידור הפנימי של הפשוט, יש !7 דרכים לסדר את שבעת העצמים השונים. לכן, מספר האפשרויות הוא: $2\cdot 7!$

ג) בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים במעגל?

$$\text{מספר האפשרויות לסדר n אנשים במעגל} = \frac{\text{כל אפשרויות לסדר n אנשים על ספסל}}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$



2 3 4 1
3 4 1 2
4 1 2 3
1 2 3 4

תרגיל 2

נתונות הספרות 0,1,2,3,4,5,6

א) כמה מספרים בעלי 7 ספרות **שונות** ניתן לסדר כאשר המספר אינו יכול שיתחיל באפס?

פתרון: $\underline{6}\cdot 6!$

הספרה הכי שמאלית.

ב) כמה מספרים בעלי 7 ספרות שונות ניתן לסדר כאשר המספרים הנ"ל מתחלקים ב-5 ללא שארית? (לא כולל מספר שמתחיל באפס)

סה"כ מספרים תקניים = מס' המספרים שמסתיימים בספרה חמש + מס' המספרים המסתיימים בספרה אפס $= 5\cdot 5! + 6!$

תרגיל 3

(א) מה מספר האפשרויות שבוחר k עצמים מתוך n עצמים?

פתרון: צריך להגדיר:

- האם מותרות חזרות בבחירת האיברים?
- האם יש חשיבות לסדר האיברים?

(ב) כמה אפשרויות יש לבחירת 4 שירים מתוך השירים a,b,c,d,e,f?

פתרון: מקרה ראשון: כשיש חשיבות לסדר ומותרות חזרות: $6\cdot6\cdot6\cdot6=6^4$

חליפה ← מקרה שני: כשיש חשיבות לסדר ואסורות חזרות: $6\cdot5\cdot4\cdot3=\frac{6!}{(6-4)!}$

צירוף ← מקרה שלישי: כשאין חשיבות לסדר ואסורות חזרות: $\frac{6!}{(6-4)!4!}=\binom{6}{4}$

מקרה רביעי: כשאין חשיבות לסדר ומותרות חזרות: $\binom{6+4-1}{4}$

סידורים עם חזרות

בחירת 4 שירים מתוך 6: 6^4

תרגיל 4

(א) בכמה אפשרויות ניתן למלא טור של טוטו?

פתרון: בוחרים 16 פעמים מתוך הקבוצה של 3 עצמים $\{1,2,x\}$ כאשר מותרות חזרות

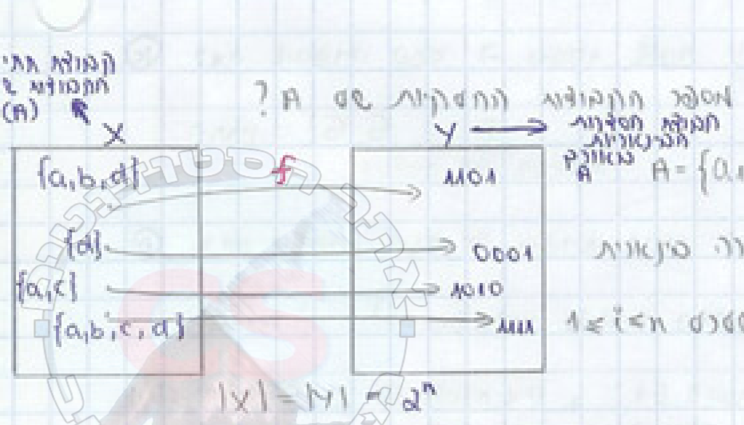
ויש חשיבות לסדר. $3\cdot3\cdot3\cdots3=3^{16}$

(ב) מהו מספר הסדרות הבינאריות באורך k?

פתרון: 2^k

תרגיל 5

(א) תהי A קבוצה בת n איברים. מהו מספר הקבוצות החלקיות של A?



$|X|=|Y|=2^n$

פתרון: נסמן את איברי A. $A=\{a_1\ldots a_n\}$

לכל תת-קבוצה B של A נתאים סידרה בינארית

באורך n - $b_1\ldots b_n$ המוגדרת כך לכל $1\le i\le n$

מתקיים: $a_i\in B\longleftrightarrow b_i=1$

ההתאמה הזו היא הפיכה ועל כן חח"ע ועל.

לכן, מספר הקבוצות החלקיות הוא כמספר הסדרות הבינאריות באורך n - 2^n

ב) יהי $x\in A$. כמה תת-הקבוצות של A שיש בהן האיבר x?

פתרון: מספר תת-הקבוצות ש-x לא שייך אליהן הוא כמספר תת-הקבוצות של הקבוצה $A\setminus\{x\}$

כלומר 2^{n-1}. לכן מספר הקבוצות אליהן הוא שייך: $\boxed{2^{n-1}}=2^n-2^{n-1}$

תשובה: תמורות בלי חזרות כשהסדר חשוב.

הנוסחה: $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$. כמו בדוגמא השיניים: $\frac{6!}{(6-4)!}=6\cdot5\cdot4\cdot3$

תרגיל 6

יש להושיב 4 גברים שונים ו-3 נשים שונות על כיסאות המוצבים בשורה. בכמה אופנים ניתן לעשות זאת במקרים הבאים:

א) ללא הגבלה.

ב) כך שכל הגברים ישבו זה ליד זה וכל הנשים תשבנה זו ליד זו.

ג) כך ששני גברים ישבו בנקודה האחת ושני הגברים האחרים בקצה השני

פתרון:

א) אין הגבלה על המיקום, ולכן:

ב) יש לנו: -גוש של גברים
-גוש של נשים
-שורה כסאות שונים

חמישה פריטים בצידים.

הכוונה פה זה מה!

$$\frac{5!\,3!\,4!}{3!}$$

3! - נחלק ב-3!

בגלל סדר הנשים

ג) $4!\frac{6!}{(6-3)!}$

תרגול מס' 6 - המשך מבוא לקומבינטוריקה

24/11/04

① מצא בכמה אופנים ניתן לסדר בשורה 10 כדורים, מהם: 5 שחורים, 3 ירוקים ו-2 אדומים שמקיימים התנאים:

א. ללא הגבלה

ב. שכל 3 הירוקים נמצאים זה ליד זה.

ג. ש-2 האדומים אינם נמצאים זה ליד זה.

פתרון:

א. $\frac{10!}{5!3!2!}$ ב. $\frac{8!}{5!2!}$ ג. $\frac{10!}{5!3!2!} - \frac{9!}{5!3!}$

צירוף - r-combination

בחירה בלי חזרות כשהסדר חשוב.

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

* בחירת 4 שירים מתוך 6 כאשר אין חזרות ואין חשיבות לסדר: $\binom{6}{4} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$

למשל, אם יש את השירים: $\{a,b,c,d,e,f\}$ ניתן לבחור כל מיני קבוצות:

$$\left.\begin{matrix} b,d,f,a \\ b,f,a,d \\ f,d,b,a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{a,b,d,f\}$$

משמעו בדיוק אותה בחירה.

② בקופסה 20 תוספות, היא רוצה לקחת מהן 7 סוגים לפיצה. בכמה דרכים היא יכולה לבחור את 7 התוספות?

פתרון: סדר בחירת התוספות אינו משנה כי ממילא הן נכנסות לאותה [illegible].

כמו-כן, לא אפשר לבחור את אותה תוספת פעמיים.

$$\binom{20}{7} = 77,520$$

③ בכמה דרכים יש לבחור ועדה לפיתוח ופרויקטים קומבינטוריים את הוועדה צריכה להרכיב 3 מומחים מהטכניון ו-4 מאוניברסיטת חיפה, כאשר יש 9 מומחים בטכניון ו-11 מומחים באוניברסיטת חיפה?

אין תלות בבחירה של המומחים מכל מוסד.

מומחים מהטכניון × מומחים מהאוניברסיטה

פתרון: $\binom{9}{3} \times \binom{11}{4} = 27,720$

כופלים כי מסתכלים על זה כתור "ועדה"

4) א. בכמה אופנים ניתן לבחור ועד של 3 תלמידים בכיתה בת 32 תלמידים אם תלמיד x אינו מוכן שייבחר אם תלמיד y נבחר?

ב. כמה ועדים כאלה ניתן לבחור אם מחלקים בין 3 הנבחרים תפקידים: יו"ר, מזכיר וגזבר?

פתרון: א. מספר הועדים ש-x ו-y מופיעים יחד הוא 30 (כי יש 30 אפשרויות לבחירת החבר השלישי). מס' הועדים הכולל הינו $\binom{32}{3}$ אכן נקבל: $\binom{32}{3}-30=4930$

<u>דרך אינטואיטיבית לפתרון:</u>

מס' הועדים המכילים את x.

$$\boxed{\binom{30}{2}}+\binom{30}{2}+\binom{30}{3}$$

x כבר נבחר, ולכן צריך לבחור עוד 2 מתוך 30.

ב. $$\left[\binom{32}{3}-30\right]\cdot 3!$$

מס' האפשרויות לחלק תפקידים בתוך כל ועד

5) א. מהו מספר הסדרות הבינריות עם s אפסים ו-t אחדים?

ב. כמה מחרוזות ניתן להרכיב מ-k סימני ⊕ ו-n-1 סימני '|'?

ג. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+x_2+\dots+x_n=k$ כאשר המשתנים $x_1\dots x_n$ מקבלים ערכים <u>שלמים</u> <u>אי-שליליים</u>?

פתרון: א. $\underbrace{\underset{1}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{4}{\overset{1}{\_}}\ \underset{5}{\_}\ \underset{6}{\overset{1}{\_}}\ \underset{7}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{9}{\overset{1}{\_}}}_{s+t}\dots$ ← נבחר אינדקסים. $\binom{t+s}{t}=\binom{t+s}{s}$

ב. קיבלנו את אותו פתרון של סעיף א'. כלומר, ניתן להחליף את s ו-t ב-⊕ ו-'|' ולכן: $\binom{k+n-1}{k}=\binom{k+n-1}{n-1}$

ג. תהי A קבוצת הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשוואה $x_1+x_2+\dots+x_n=k$

ותהי B קבוצת המחרוזות המורכבות מ-k סימני ⊕ ו-'|':

<u>דוגמא:</u> עבור n=4, k=8

קבוצת הפתרונות השלמים והאי-שליליים של A: $x_1+x_2+x_3+x_4=8$	A	g	B	קבוצת המחרוזות הבנויות מ-8 סימני ⊕ ו-3 סימני '|'
	(0,0,0,8)	→	⊕⊕|⊕⊕|⊕⊕|⊕⊕	
	(2,2,2,2)	→	⊕⊕|⊕⊕⊕||⊕⊕⊕	
	(2,3,0,3)	→	⊕⊕⊕⊕|||⊕⊕⊕⊕	

-3- 24/10/

נגדיר פונקציה $g: A \to B$ חח"ע ועל באופן הבא:

יהי $V=(x_1 \dots x_n)$ פתרון ב-A ($V \in A$). נגדיר את $g(V)$ להיות הסידרה

של-x_1 המקומות הראשונים בה מופיע הסימן ⊕, ואחר מכן מופיע הסימן '|', ב-x_2

המקומות הבאים מופיע שוב הסימן ⊕ וכו'. הסידרה תסתיים ב-x_n סימני ⊕.

$$|A| = |B| = \binom{k+n-1}{n-1}$$

עפ"י סעיף ב'

<u>בחירה עם חזרות כשהסדר אינו חשוב</u>

(6) כמה אפשרויות יש בבחירת 4 שירים מתוך השירים a,b,c,d,e,f כאשר מותר שאותו שיר יבחר יותר מפעם אחת וסדר הבחירה אינו חשוב?

פתרון: $D(n,k) = \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{6+4-1}{5}$

(7) משה רוצה לקנות 10 חולצות אולם רק הצבעים אדום, לבן וסגול באים בחשבון... ☹ כמה אפשרויות בחירה עומדות לפניו?

פתרון: $n=3$, $K=10$

בחירת 10 עצמים מתוך הסוג של 3 עצמים כאשר מותרת חזרה ואין חשיבות לסדר:

$$\binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2}$$

<u>דרך שניה</u>: כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש למשוואה: $x_1+x_2+x_3=10$?

(8) בבנין גרים 4 דיירים. יש לחלק ביניהם 7 בקבוקי חלב זהים. מה האפשרויות אם:

א. אין הגבלה   ב. כל דייר חייב לקבל לפחות בקבוק אחד.

פתרון: א. $x_1+x_2+x_3+x_4=7 \Leftarrow \binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7}$

ב. $y_1+y_2+y_3+y_4=3 \Rightarrow \binom{6}{3}$

<u>דרך מעט ארוכה יותר לפתרון סעיף ב'</u>:

נגדיר
$$\begin{cases} x_1 = y_1+1 \\ x_2 = y_2+1 \\ x_3 = y_3+1 \\ x_4 = y_4+1 \end{cases}$$

x_i - מספר הבקבוקים שקבל הדייר ה-i בסה"כ

y_i - מספר הבקבוקים שקבל הדייר ה-i בסיבוב השני

$$\underbrace{x_1}_{(y_1+1)} + \underbrace{x_2}_{(y_2+1)} + \underbrace{x_3}_{(y_3+1)} + \underbrace{x_4}_{(y_4+1)} = 7$$

תשובה: $y_1+y_2+y_3+y_4 = 7-4 \rightarrow \binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3}$

(9) כמה פתרונות שלמים יש למערכת $x_1+x_2+x_3+x_4=70$ אם:

א. $x_i \ge 0$ לכל $1 \le i \le 4$

ב. $15 \le x_1$, $-5 \le x_2$, $10 \le x_3$, $0 \le x_4$

ג. $0 \le x_1 \le 20$, $0 \le x_2, x_3, x_4$

פתרון: א. בחירה של 70 עצמים מתוך קבוצה של 4 עצמים כאשר מותרות חזרות ואין חשיבות לסדר:
$$\binom{70+4-1}{70} = \binom{73}{70}$$

ב. נגדיר:
$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 15 \\ x_2 = y_2 - 5 \\ x_3 = y_3 + 10 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

נחפש את מספר הפתרונות השלמים (הא-שליליים) של המשוואה:
$$(y_1+15)+(y_2-5)+(y_3+10)+y_4=70 \quad y_i \ge 0$$
$$y_1+y_2+y_3+y_4=50$$
תשובה:
$$\binom{50+4-1}{50} = \binom{53}{50}$$

ג. (מספר הפתרונות המבוקש) = (מספר הפתרונות האפשריים) − (מספר הפתרונות בהם $x_1 \ge 21$)

נחשב תחילה את מספר הפתרונות השלמים הא-שליליים של המשוואה:
$$x_1+x_2+x_3+x_4=70 \text{ כאשר } x_1 \ge 21 ,\ x_2,x_3,x_4 \ge 0$$
$$(y_1+21)+y_2+y_3+y_4=70$$
תשובה:
$$\binom{49+4-1}{49} = \binom{52}{49} \Leftarrow y_1+y_2+y_3+y_4=49$$

(10) בכמה אופנים שונים ניתן לסדר בטור, בזה אחר זה, 6 אנשים בעלי גבהים שונים כאשר:

א. הגבוה ביותר לא יעמוד ליד הנמוך ביותר.

ב. הנמוך ביותר יעמוד בטור לפני הגבוה ביותר (לאו דווקא בצמוד)

ג. שני התנאים מתקיימים יחד.

פתרון: א. $6! - \underbrace{2 \cdot 5!}_{\text{כן עומדים זה ליד זה}}$

ב. מס' האפשרויות שהנמוך חמישי + מס' האפשרויות שהנמוך רביעי + מס' האפשרויות שהנמוך שלישי + מס' האפשרויות שהנמוך שני + מס' האפשרויות שהנמוך ראשון = מס' האפשרויות החוקיות

$$= 5 \cdot 4! + 4 \cdot 4! + 3 \cdot 4! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 4!$$

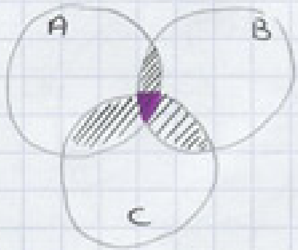
תרגול מס' 3 : עקרון ההכלה וההפרדה

1/12/04

תהינה A,B קבוצות סופיות כלשהן. אזי: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

האיברים שנספרו פעמיים

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$



1. כל תלמיד שנה א' לומד לפחות אחד משלושת הקורסים: אנגלית, מחשבים ומתמטיקה.

נתונה הטבלה:

שמות הקורסים	מס' תלמידים רשומים
מחשבים	$\|A\| = 25$
אנגלית	$\|B\| = 20$
מתמטיקה	$\|C\| = 33$
מחשבים ואנגלית	$\|A\cap B\| = 15$
מחשבים ומתמטיקה	$\|A\cap C\| = 25$
אנגלית ומתמטיקה	$\|B\cap C\| = 20$
אנגלית, מחשבים ומתמטיקה	$\|A\cap B\cap C\| = 15$

* כמה תלמידים יש בסה"כ בשנה א'?

פתרון: A - קבוצת התלמידים הלומדים מחשבים

B - קבוצת התלמידים הלומדים אנגלית

C - קבוצת התלמידים הלומדים מתמטיקה

תשובה: $|A\cup B\cup C|$

2. כמה מספרים בני 4 ספרות יש לפחות פעם אחת את הספרה 2, לפחות פעם אחת את הספרה 3 ולפחות פעם אחת את הספרה 4?

פתרון:
4223 - חוקי.
4731 - לא חוקי.
2222 - לא חוקי.

②

$$\text{פתרון} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{סה"כ המספרים}\\ \text{בני 4 ספרות}\end{pmatrix}}_{9\cdot 10^3} - \underbrace{\begin{pmatrix}\text{סה"כ המספרים בני 4 ספרות}\\ \text{אשר לפחות אחת מן הספרות}\\ \text{2,3,4 אינה מופיעה בהם.}\end{pmatrix}}_{|A\cup B\cup C|} = 198$$

סימון: A - קב' כל המספרים בני 4 ספרות שאין בהם את הספרה 2.

B - "-" "-" "-" "-" "-" 3.

C - "-" "-" "-" "-" "-" 4.

$|A| = 8\cdot 9^3 = |B| = |C|$

$|A\cap B\cap C| = 6\cdot 7^3$

$|A\cup B\cup C| = 3\cdot(8\cdot 9^3) - 3\cdot(7\cdot 8^3) + 6\cdot 7^3 = 8802$

תשובה סופית: $9\cdot 10^3 - 8802 = 198$

3. כמה מספרים בין 1 ל-3002 אינם מתחלקים ב-3 ואינם מתחלקים ב-5?

פתרון: $$\text{תשובה} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{סה"כ מספרים}\\ \text{בין 1 ל-3002}\end{pmatrix}}_{3002} - \underbrace{\begin{pmatrix}\text{סה"כ מספרים אשר מתחלקים}\\ \text{ב-3 או מתחלקים ב-5}\end{pmatrix}}_{1400} = 1602$$

A - קבוצת המספרים בין 1 ל-3002 שמתחלקים ב-3

B - "-" "-" "-" "-" "-" ב-5

$|A| = \left\lfloor\frac{3002}{3}\right\rfloor = 1000$

$|B| = \left\lfloor\frac{3002}{5}\right\rfloor = 600$

$|A\cap B| = \left\lfloor\frac{3002}{3\cdot 5}\right\rfloor = 200$

עקרון ההכלה וההפרדה

תהיינה $A_1, A_2, \ldots A_n$ קבוצות סופיות. אזי:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1}\underbrace{|A_1\cap A_2\cap\ldots A_n|}_{\text{זו העוצמה של הקבוצה הריקה שיש בה 0 איברים.}}$$

$$= n\cdot(n-1)^k - \binom{n}{2}\cdot(n-2)^k + \binom{n}{3}\cdot(n-3)^k + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\binom{1}{n}\cdot(n-n)^k$$

4. א. נתונים n סוגי כדורים (מספר בלתי מוגבל של כדורים מכל סוג). כמה אפשרויות יש לבחור k כדורים מתוכם?
מותרות חזרות

ולסדר בשורה / ולהכניס לשק

פתרון: $\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{k\ \text{פעמים}} = n^k$

$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$

אפשר להסתכל על זה כך: $x_1+x_2+x_3+\dots+x_n = k$
מס' הכדורים שלקחנו סה"כ — מס' הכדורים שלקחנו מכל סוג.
כלומר: x כדורים מסוג 1, x כדורים מסוג 2 וכו'...

ב. כנ"ל, אולם צריך לבחור לפחות כדור אחד מכל סוג

ולהכניס לשק: $\binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}$

פתרון: ולסדר בשורה
פתרון סידור בשורה: נסמן ב- A_i - הקבוצה של הסידורים בהם לא נבחרו כדורים מהסוג ה-i. $(1\le i\le n)$

תשובה - $n^k - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$

$$\sum_{i=1}^{n}|A_i| = n\cdot(n-1)^k \longleftrightarrow |A_i| = (n-1)^k$$

$A_i\cap A_j$ - קבוצה של הסידורים בהם לא נבחרו כדורים מהסוג ה-i ולא נבחרו כדורים מהסוג ה-j

$$\sum_{1\le i<j\le n} = \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{כמו}}\cdot\underline{(n-2)^k} \qquad |A_i\cap A_j| = (n-2)^k$$

מספר השורות שיהיו לנו.

$$= \binom{1}{0}(1-0)^k - \binom{1}{1}(1-1)^k + \binom{1}{2}(n-2)^k + \dots + (-1)^n\binom{1}{n}(n-n)^k =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k$$ תשובה סופית!

אי - סדר מלא / תמורות בלי נקודות שבת

א. בכמה אופנים ניתן לחלק n כובעים ל- n אנשים כך שאף אחד לא יקבל את כובעו?

ב. n אנשים נכנסים למסעדה, לכל אחד מהם מעיל ומטריה. בסוף הארוחה הם ממהרים ויוצאים ולוקחים מעיל ומטריה כלשהם. מה מספר האפשרויות שבהן אף אחד מהם לא יקבל הן את מעילו והן את מטריתו (יתכן שאחד מהם קיבל את המעיל או את המטריה אך לא את שניהם)?

ג. מה מס' האפשרויות שבהן אף אחד לא קיבל אף אחד מ-2 חפציו (לא את המעיל ולא את המטריה)?

פתרון:

א. $$\text{תשובה} = \underbrace{(\text{מספר הסידורים הכולל})}_{n!} - \underbrace{(\text{מספר הסידורים בהם לפחות אדם אחד קיבל את כובעו})}_{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|}$$

A_i – הקבוצה של הסידורים בהם האדם ה-i מקבל את כובעו. $1 \le i \le n$

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| = n \cdot (n-1)! \longleftarrow |A_i| = (n-1)!$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| = \binom{n}{2}(n-2)! \longleftarrow |A_i \cap A_j| = (n-2)!$$

$$= \binom{n}{0}(n-0)! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{-1^k}{k!}} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

ב. $$\text{תשובה} = (n!)^2 - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

A_i – הקבוצה של האפשרויות בהן הזוג ה-i קיבל את כובעו ואת מטרייתו.

$$|A_i| = [(n-1)!]^2 \Rightarrow |A_i \cap A_j| = [(n-2)!]^2$$

ולכן:

$$= \binom{n}{1}[(n-1)!]^2 - \binom{n}{2}[(n-2)!]^2 + \binom{n}{3}[(n-3)!]^2 + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}[(n-n)!]^2$$

ג. $$\left[n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right]^2$$

8/12/04 (1)

תרגול מס' 8 : זהויות קומבינטוריות

1. הוכח את הזהויות הבאות:

א. זהות פסקל : $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$

ב. יהיו $0\le m\le k\le n$ אזי: $\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$

ג. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

ד. $\binom{n}{r+1}(r+1)=\binom{n}{r}(n-r)$

ה. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}i=n\cdot 2^{n-1}$

ו. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

פתרון:

א. <u>הוכחה קומבינטורית</u> : יהי $x\in\{1\ldots n\}$

מספר תתי הקבוצות, בגודל k, ש-x שייך אליהן, ועוד מספר תתי הקבוצות בגודל k ש-x לא שייך אליהן, שווה למספר תתי הקבוצות (בגודל k) בכלל.

<u>הוכחה אלגברית</u>:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}=$$

$$=\underbrace{\frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)}}_{\text{הרחבה מונה ומכנה ב-}(n-k)}+\underbrace{\frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!}}_{\text{הרחבת מונה ומכנה ב-}k}=\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}\cdot(n-k+k)=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\binom{n}{k}$$ מש"ל

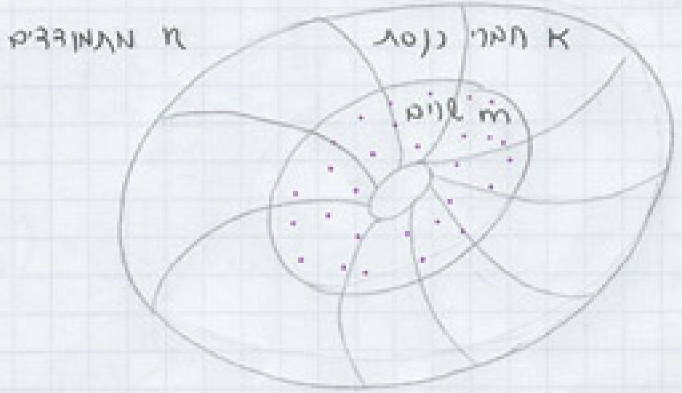
ב. <u>הוכחה אלגברית</u>:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{m!\,(k-m)!}=\frac{n!}{m!}\cdot\frac{1}{(k-m)!\,(n-k)!}=$$

$$=\underbrace{\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(k-m)!\,(n-k)!}}_{\text{נכפיל מונה ומכנה ב-}(n-m)!}=\binom{n}{m}\frac{(n-m)!}{[(n-m)-(k-m)]!\,(k-m)!}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

<u>הוכחה קומבינטורית:</u> שני הצדדים סופרים את מספר האפשרויות לבחור k חברי כנסת מתוך קבוצה של n מתמודדים ומתוך חברי הכנסת קבוצה של m שרים.

* בצד ימין בוחרים קודם m שרים מבין כלל המתמודדים, ואז בוחרים את שאר $k-m$ חברי הכנסת הרגילים מתוך $n-m$ המתמודדים הרגילים.



ו. <u>הוכחה אלגברית:</u>

תזכורת: $a,b \in \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N}$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k \cdot b^{n-k}$$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\cdot a^k \cdot b^{2-k} =$$

$$= \binom{2}{0}\cdot a^0 \cdot b^2 + \binom{2}{1}\cdot a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2}\cdot a^2 \cdot b^0 =$$

$$= b^2 + 2ab + a^2$$

נציב $a=1$, $b=1$ בנוסחת הבינום:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{1}{k}1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

<u>הוכחה קומבינטורית:</u> שני אגפי השוויון מציינים את מספר תתי הקבוצות של קבוצה בת n איברים.

אגף ימין = הוכחנו בעבר.

אגף שמאל = מספר תתי הקבוצות בגודל אפס + מספר תתי הקבוצות בגודל 1 + ... + מספר תתי הקבוצות בגודל n

3

3. **הוכחה קומבינטורית:** שני האגפים מונים את מספר האפשרויות לבחירת ועד בגודל

יו"ר מתוך כיתה של n תלמידים.

צד שמאל = בוחרים $r+1$ חברים ואז בוחרים יו"ר.

צד ימין = בוחרים ועד לחוד ואז יו"ר לחוד.

הוכחה אלגברית:

$$\binom{n}{r+1}(r+1) = \frac{n!\cdot(r+1)}{(r+1)!\,(n-r-1)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}\cdot\frac{n-r}{n-r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot(n-r) =$$

$$= \binom{n}{r}(n-r) \quad \text{מש"ל}$$

ה. **הוכחה אלגברית:** לפי נוסחת הבינום של ניוטון, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k \xrightarrow[\text{לפי } x]{\text{גזירת שני האגפים}} n\cdot(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot k\cdot x^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot k\cdot x^{k-1} \xrightarrow[\text{נציב } x=1]{} \boxed{n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot k}$$

הוכחה קומבינטורית: שני האגפים מונים את מספר האפשרויות לבחירת ועד

בגודל כלשהו אשר יש בו יו"ר (מתוך קבוצה של n תלמידים)

ו. **הוכחה אלגברית:** נציב בנוסחת הבינום של ניוטון את הערכים $b=1$, $a=-1$

$$\underline{0} = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cdot(1)^{n-k} = \underline{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}}$$

הוכחה קומבינטורית: מספיק להוכיח ש:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

כלומר, צ"ל שמספר תתי הקבוצות (של קבוצה בת n איברים) בגודל אי זוגי, שווה

למספר תתי הקבוצות (של קבוצה בת n איברים) בגודל זוגי.

E - קבוצת תתי הקבוצות בגודל זוגי של $\{1..n\}$

O - קבוצת תתי הקבוצות בגודל אי-זוגי של $\{1..n\}$

נגדיר פונקציה $f: E \to O$ חח"ע ועל באופן הבא:

לכל $B \in E$

$$f(B) = \begin{cases} B \setminus \{n\} & \text{אם } n \in B \\ B \cup \{n\} & \text{אם } n \notin B \end{cases}$$

התאמה זו היא חח"ע ועל ולכן $|E| = |O|$

דוגמא: עבור $n=5$ $\{1,2,3,4,5\}$

E		O
$\{1,4\}$	$\to$	$\{1,4,5\}$
$\{1,2,3,4\}$	$\to$	$\{1,2,3,4,5\}$
$\{3,5\}$	$\to$	$\{3\}$
$\{1,2,3,5\}$	$\to$	$\{1,2,3\}$
$\{2,3\}$	$\to$	$\{2,3,5\}$
$\{\ \}$	$\to$	$\{5\}$

2. א. מהו המקדם של $x^7 \cdot y^4$ בפיתוח $(x+a)^{11}$?

ב. מהו המקדם של $x^{12} \cdot y^{13}$ בפיתוח $(2x-3y)^{25}$?

פתרון: א.

$$(x+a)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} x^k \cdot a^{11-k} = \binom{11}{0} \cdot x^0 \cdot a^{11} + \binom{11}{1} x^1 \cdot a^{11-1} + \dots + \binom{11}{7} \cdot x^7 \cdot a^{\overbrace{11-7}^{4}} \dots$$

ולכן התשובה היא $\binom{11}{7}$

ב.

$$[2x + (-3y)]^{25} = \sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} \cdot (2x)^k (-3y)^{25-k}$$

כאשר $k=12$:

$$\binom{25}{12} (2x)^{12} (-3y)^{25-12} = \boxed{\binom{25}{12} \cdot 2^{12} \cdot (-3)^{13}} \cdot x^{12} \cdot y^{13}$$

תשובה

תרגול חזרה על קומבינטוריקה ...

3. כמה סידורים שונים יש לדגלים, אשר מכילים 4 דגלים כחולים, 2 צהובים ו-3 אדומים כאשר כל הדגלים מופיעים בכל סידור?

פתרון:
$$\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2} = \frac{9!}{4!\,5!}\cdot\frac{5!}{2!\,3!}\cdot 1 = \frac{6!}{4!\,2!}$$

4. כמה שלשות (קבוצות בנות 3 איברים) של מספרים <u>שונים</u> ניתן לבחור מהמספרים 1, 2, . . . , 20 אם אין אף שלשה שמכילה 2 מספרים עוקבים?

משל: {2, 18, 9} - חוקי, {3, 16, 4} - לא חוקי.

פתרון: (מספר השלשות הכולל) − (מספר השלשות המכילות זוגות עוקבים) = תשובה

$$\binom{20}{3} - (19\cdot 18 - 18)$$

תרגול מס' 9 : רקורסיה

הגדרה רקורסיבית של קבוצה נעשית ב 2 חלקים:

1. בסיס: הגדרה כי איברים מסוימים שייכים לקבוצה.
2. צעד רקורסיבי: שימוש באיברים שכבר ידוע שהם בקבוצה כדי להגדיר עוד איברים.

1. א. הגדירו באופן רקורסיבי את הקבוצה A של כל המספרים הטבעיים המתחלקים ב-5.

ב. הגדירו באופן רקורסיבי את הקבוצה B של כל השלמים הזוגיים.

פתרון: א. בסיס: $5\in A$

צעד רקורסיבי: אם $n\in A$ אז גם $n+5\in A$

ב. בסיס: $0\in B$

צעד רקורסיבי: אם $n\in B$ אז גם $n+2\in B$, $n-2\in B$

$B=\{0,2,-2,4,-4\dots\}$

2. הגדירו את הקבוצה D של כל המחרוזות המאוזנות של סוגריים.

דוגמא: $\underbrace{((()))}_{a}$ $\underbrace{((())())}_{b}$

פתרון: בסיס: המחרוזת הריקה שייכת ל-D.

צעד רקורסיבי: אם $a\in D,\ b\in D \Rightarrow (a)\in D \Rightarrow ab\in D$

נוסחאות נסיגה / נוסחאות רקורסיביות

תהי A קבוצה כלשהי ותהי $f:\mathbb{N}\to A$ פונקציה. הגדרה רקורסיבית של f תראה:

ערכי התחלה: הגדרת הערכים $f(0),f(1),\dots f(k)$ כאשר k מספר טבעי כלשהו.

צעד רקורסיבי: הגדרת $f(n)$ עבור $n>k$ בעזרת הערכים $f(n-1),f(n-2),\dots f(1),f(0)$

!!! בעזרת חלק מהם.

3. הגדירו באופן רקורסיבי את הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י: $f(n)=2^n$

פתרון: ערך התחלה: $f(0)=1$

צעד רקורסיבי: $f(n)=2f(n-1)$ עבור כל טבעי $n>0$

דוגמא:

$f(4)=2\cdot f(3)=2\cdot 2\cdot f(2)=2\cdot 2\cdot 2\cdot f(1)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot f(0)=2^4$

4. הגדירו באופן רקורסיבי את הפונקציה:

$$f(n) = \left(\begin{array}{c}\text{מספר האפשרויות לסדר} \\ \text{n ספרים על מדף כאשר} \\ \text{נתונים חשובים כך שהם} \\ \text{לא מאוחסנים זה ליד זה} \end{array}\right) = n!$$

פתרון: תנאי התחלה: $f(1) = 1$

צעד רקורסיבי: $f(n) = n \cdot f(n-1)$

5. תהי $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה המוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה הבאה:

תנאי התחלה: $f(0)=1$

צעד רקורסיבי: $f(n)=3 \cdot f(n-1)+5$ לכל $n \geq 1$.

הוכח כי $f(n)=\frac{7 \cdot 3^n - 5}{2}$ לכל $n \geq 0$

פתרון: נוכיח באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה: עבור $n=0$ אכן מתקיים $\underbrace{\frac{7 \cdot 3^0 - 5}{2}}_{\text{נוסחה מפורשת}} = 1$

עבור $n=1$: נוסחה מפורשת $\frac{7 \cdot 3^1 - 5}{2} = 8$

נוסחה רקורסיבית $f(1)= 3 \cdot f(0) + 5 = 8$

שלב האינדוקציה: נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n.

$$f(n) = 3 \cdot f(n-1) + 5 \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} 3 \cdot \frac{7 \cdot 3^{n-1} - 5}{2} + 5 =$$

$$= \frac{7 \cdot 3^n - 15}{2} + \frac{10}{2} = \frac{7 \cdot 3^n - 5}{2}$$ מש"ל

6. תהי $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה המוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה הבאה:

תנאי התחלה: $f(0,0)=1$

צעד רקורסיבי: $f(n,m) = 2 \cdot f(n-1, m)$ לכל $n>0, \ m \geq 0$

$f(n,m) = 3 \cdot f(n, m-1)$ לכל $n \geq 0, \ m>0$

הוכח כי $f(n,m) = 2^n \cdot 3^m$ לכל $n,m \geq 0$

דוגמה: $f(2,3) = 3 \cdot f(2,2) = 3 \cdot 3 \cdot f(2,1) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot f(2,0) =$

$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot f(1,0) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot f(0,0) = 3^3 \cdot 2^2$

פתרון:

הגדרה: $(a,b)<(c,d)$ אם $a\le c$, $b\le d$ אבל $(a,b)\neq(c,d)$

הוכחה באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: עבור $(0,0)$ $\quad \underbrace{f(0,0)}_{\text{נוסחת נסיגה}}=1=\underbrace{2^0\cdot 3^0}_{\text{נוסחה מפורשת}}$

שלב האינדוקציה: נניח נכונות עבור הזוגות (s,t) הקטנים מ- (n,m) ונוכיח ש- (n,m).

מכיוון ש $(0,0)<(n,m)$ אז או ש $n>0$ או ש $m>0$.

נניח ש $n>0$, לכן אפשר להשתמש בנוסחת הנסיגה ונקבל $f(n,m)=2f(n-1,m)$.

מכיוון ש $(n-1,m)<(n,m)$ אפשר להשתמש בהנחת האינדוקציה:

אזי $f(n,m)=2\cdot f(n-1,m)=2\cdot 2^{n-1}\cdot 3^m=\boxed{2^n\cdot 3^m}$

* אם מניחים ש $m>0$ משתמשים בענף הרקורסיבי השני ומקבלים אותה תוצאה.

ד. מצא נוסחה מפורשת עבור כל אחת מנוסחאות הנסיגה הבאות:

א. $f(2)=1$; $f(n)=f(\sqrt{n})+1$

ב. $f(2)=1$; $f(n)=2\cdot f(\sqrt{n})+1$

פתרון: א

$f(n)=f(n^{1/2})+1=[f(n^{1/4})+1]+1=f(n^{1/2})+2=$

$=f(n^{(1/2)\cdot 3})+3=\dots=\underline{f(n^{(1/2)i})+i}$

ידוע $f(2)=1$. נבדוק מתי $n^{(1/2)i}=2$, כלומר נבדוק מתי: $\log_2 n^{(1/2)i}=\log_2 2$

$f(n^{(1/2)i})+i=\dots=f(2)+\log\log n=1+\log\log n$

פתרון בעיית מניה ע"י נוסחאות נסיגה

8. מהו מספר הסדרות באורך n שניתן ליצור מאיברי הקבוצה $\{0,1,2\}$ כך שאין מופיעים שני איברים רצופים שווים?

פתרון "רגיל": $3\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}_{n-1}=3\cdot 2^{n-1}$

פתרון דרך נוסחת נסיגה: נגדיר את הנוסחה $g(n)$ באופן הבא:

$g(1)=3$; $g(n)=g(n-1)\cdot 2$ עבור $n>1$

$g(n)=2\cdot g(n-1)=2\cdot 2\cdot g(n-2)=\dots=\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}_{n-1}\cdot\underbrace{g(1)}_{3}=2^{n-1}\cdot 3$

הוכחה באינדוקציה:

בסיס: עבור $n=1$ $\quad g(1) \underset{\text{נוסחה}}{=} 3 \underset{\text{מפורשת}}{=} 2^{1-1}\cdot 3$ ✓

שלב האינדוקציה: $\quad g(n) = 2\cdot g(n-1) \underset{\text{עפ"י הנחת האינדוקציה}}{=} 2\cdot 3\cdot 2^{n-2} = 3\cdot 2^{n-1}$ ✓

9. כמה סדרות בינאריות קיימות באורך n, שבהן אין שני אפסים רצופים?

פתרון:

$f(0) = 1$

$f(1) = 2$

$f(2) = 3$

$f(3) = 5$

$\vdots$

$$f(n) = \begin{pmatrix}\text{מספר הסדרות ה"טובות"}\\ \text{באורך } n\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{מס' הסדרות}\\ \text{"הטובות"}\\ \text{המסתיימות ב-0}\end{pmatrix}}_{f(n-2)} + \underbrace{\begin{pmatrix}\text{מס' הסדרות}\\ \text{"הטובות"}\\ \text{המסתיימות ב-1}\end{pmatrix}}_{f(n-1)}$$

כשמתבוננים בסדרת פיבונאצ'י ניתן לראות שהערכים עולים, לכן:

$$f(n-1) > f(n-2)$$

נוסיף $f(n-2)$ לשני האגפים: $\underbrace{f(n-1)+f(n-2)}_{f(n)} > f(n-2)+f(n-2)$

$$f(n) > 2\cdot f(n-2)$$

באותו אופן ניתן היה להוסיף $f(n-1)$ לשני האגפים: $f(n-1)+f(n-1) > \underbrace{f(n-2)+f(n-1)}_{f(n)}$

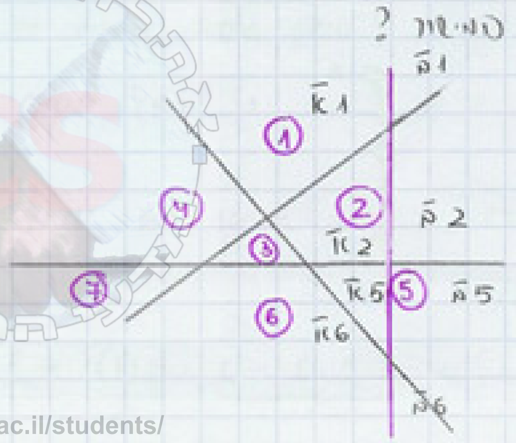
$$2\cdot f(n-1) > f(n)$$

לכן: $2\cdot f(n-2) < f(n) < 2\cdot f(n-1)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2^{n/2} < f(n) < 2^n}$$

10. מעבירים n ישרים במישור באופן שכל שני ישרים נחתכים, ואין שלושה שנחתכים בנקודה אחת. כמה איזורים נוצרים על המישור?



פתרון:

$f(0)=1$

$f(1)=2$

$f(2)=4$

$f(3)=7$

$\vdots$

22/12/04

תרגול מס' 10 - מבוא לתורת הגרפים

1. א. כמה קשתות יש בגרף (פשוט) מלא על n קודקודים?

ב. כמה גרפים (פשוטים) לא מכוונים, ללא לולאות, ישנם על n קודקודים?

פתרון:

א. זה בדיוק מס' האפשרויות לבחור 2 קודקודים מתוך n קודקודים, כאשר אין חשיבות לסדר. כלומר: $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n\cdot n-1}{2}$

הסבר אחר:

כל אחד מהקודקודים מחובר עם n-1 הקודקודים האחרים, לכן יש $\frac{n(n-1)}{2}$ קשתות.

החלוקה ב-2 מתבצעת היות שכל קשת נספרת פעמיים, פעם אחת עבור כל אחד מקצותיה.

ב. ישנן $\binom{n}{2}$ קשתות בגרף המלא. כל גרף הוא תת-גרף של הגרף המלא ולכן כל אחת מהקשתות הנ"ל יכולה להופיע או לא להופיע בו. לכן, יש $2^{\binom{n}{2}}$ גרפים לא מכוונים ללא לולאות.

משפט: בגרף לא מכוון, $G=(V,E)$, יש מספר זוגי של קודקודים בעלי דרגה אי-זוגית.

משפט: בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ מתקיים: $\sum_{v\in V} degree(v) = 2\cdot|E|$

(כל קשת נספרת פעמיים כי יש לה 2 קודקודים)

$V = O \cup E$
O - קבוצת הקודקודים שדרגתם אי-זוגית
E - קבוצת הקודקודים שדרגתם זוגית

$$\underbrace{\sum_{v\in O} deg(v)}_{\text{חייב להיות גם זוגי}} \Leftarrow \underbrace{+\sum_{v\in E} deg(v)}_{\text{זוגי}} = \underbrace{\sum_{v\in V} deg(v)}_{\text{זוגי } 2\cdot m}$$

2. לכל אחד מהסעיפים הבאים ציירו גרף (פשוט) כנדרש או הסבירו מדוע אין גרף כזה.

א. גרף שבו 6 קודקודים, כל אחד מדרגה 1

ב. גרף שבו 5 קודקודים, כל אחד מדרגה 3

ג. גרף שבו 6 קודקודים ו-16 קשתות.

פתרון:

א. 

ב. אין גרף כזה. מס' הקודקודים בעלי דרגה אי-זוגית חייב להיות זוגי ולכן כאן זה לא מתקיים.

ג. אין גרף כזה. בגרף המלא על 6 קודקודים יש $\binom{6}{2}$ קשתות. $\binom{6}{2}<16$ ולכן לא קיים גרף פשוט כנדרש.

3. יהי $G=(V,E)$ גרף המוגדר ע"י: $V=\{v_1,\dots v_n\}$, $E=\{\{v_i,v_j\} \mid j|i \text{ או } i|j\}$

מחלק

הוכח כי E קשיר.

פתרון:

יהיו $v_i,v_j\in V$. נראה כי קיים מסלול בין v_i ל- v_j.

$1|i$ ולכן $e_1 \triangleq \{v_1,v_i\}\in E$

$1|j$ ולכן $e_2 \triangleq \{v_1,v_j\}\in E$

$\Leftarrow$ סדרת המסלול $<e_1,e_2>$ הוא מסלול מ- v_i ל- v_j.

$<v_i, v_1, v_j>$ מש"ל

4. א. יהי G גרף לא מכוון שבו n קודקודים ו- m קשתות, כאשר $m<n-1$.

הוכח כי ב- G יש לפחות $n-m$ רכיבי קשירות.

ב. הוכח את המסקנה: G קשיר $\longleftrightarrow$ $m\ge n-1$ (יש ב- G לפחות $n-1$ קשתות)

פתרון:

א. באינדוקציה על m:

בסיס: $m=0$. מכיוון שבגרף עם n קודקודים ואפס קשתות יש לפחות $n-0$ רכיבי קשירות (בגרף ללא קשתות יש n רכיבי קשירות)

שלב האינדוקציה: נניח נכונות לגרפים עם $0<m-1$ קשתות ונוכיח לגרף עם m קשתות.

יהי G גרף עם m קשתות ותהי e קשת כלשהי ב- G. אזי מהנחת האינדוקציה יש בגרף $G\setminus\{e\}$ לפחות $n-(m-1)=n-m+1$ רכיבי קשירות.

נוסיף כעת את הקשת e בחזרה. ייתכנו 2 מקרים:

1) הקשת e מחברת 2 קודקודים השייכים לאותו רכיב קשירות ב- $G\setminus\{e\}$. הרי שגם ב- G יש לפחות $n-m+1$ רכיבי קשירות.

2) אם e מחברת 2 קודקודים השייכים ל- 2 רכיבי קשירות שונים ב- $G\setminus\{e\}$ אז ב- G יש רכיב קשירות אחד פחות מאשר ב- $G\setminus\{e\}$ כלומר ב- G יש לפחות $n-m$ רכיבי קשירות. (במקרה זה, גורמת הוספת הקשת לאיחוד של 2 רכיבי קשירות)

ב. נוכיח G קשיר $\longleftarrow$ $m\ge n-1$

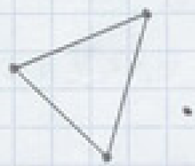
נניח בשלילה שקיים גרף קשיר שבו יש פחות מ- $n-1$ קשתות (כלומר $m\le n-2$)

אזי לפי סעיף א' יש בגרף לפחות $\underbrace{\underbrace{n}_{|V|}-\underbrace{(n-2)}_{|E|}}_{\text{רכיבי קשירות}}=2$ רכיבי קשירות בסתירה לכך שהגרף קשיר.

מש"ל

נפריך $m \geq n-1 \longrightarrow G$ קשיר ע"י דוגמא נגדית:

$m=3$
$n=4$



מתקיים: $m \geq n-1$ ולמרות זאת הגרף לא קשיר.
$3 \geq 4-1$

5. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט לא מכוון. נגדיר גרף חדש $\bar{G}=(V,\bar{E})$ פשוט, לא מכוון כך ש:

$$\bar{E}=\{\{x,y\} \mid x\neq y \quad x,y\in V \quad \{x,y\}\notin E\}$$

כלומר, $\bar{G}$ הוא גרף בעל אותם הקודקודים כמו G, שמכיל את כל הקשתות שאינן נמצאות ב-G.

א. הוכח שאם G אינו קשיר אז $\bar{G}$ קשיר.

ב. האם ייתכן שגם G וגם $\bar{G}$ קשירים?

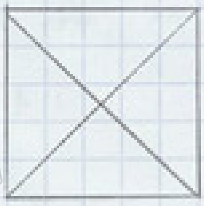
פתרון:

א. נתון ש-G אינו קשיר ולכן יש בו לפחות 2 רכיבי קשירות. יהי $x,y\in V$.
נראה שקיים מסלול מ-x ל-y ב-$\bar{G}$.
נתבונן ב-2 מקרים:

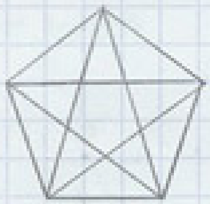
1) x ו-y נמצאים ברכיבי קשירות שונים ב-G. אזי, אין מסלול בין x ל-y ב-G ולכן ברור שאין קשת בין x ל-y ב-G, ולכן קיימת הצלע הזו ב-$\bar{G}$ וזהו מסלול מ-x ל-y ב-$\bar{G}$.

2) אם x ו-y באותו רכיב קשירות של G, אזי נבחר z מרכיב קשירות אחר של G (כאמור, קיים כזה כי G לא קשיר). אין מסלול בין x ל-z ב-G, ולכן ברור שאין קשת בין x ל-z ב-G ולכן קיימת הצלע הזו ב-$\bar{G}$. באופן דומה, קיימת קשת בין y ל-z ב-$\bar{G}$, ומכאן ש-$\langle x,z,y\rangle$ הוא מסלול מ-x ל-y ב-$\bar{G}$.

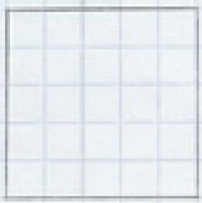
ב. דוגמא שבה G ו-$\bar{G}$ קשירים:



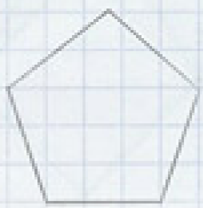
$\bar{G}$



$\bar{G}$



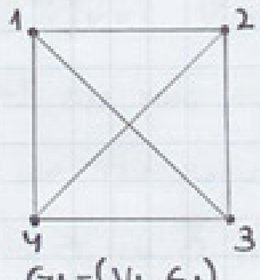
G



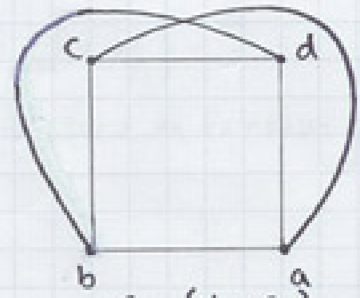
G

2 גרפים לא מכוונים $G=(V,E)$ ו- $G'=(V',E')$ הינם איזומורפיים אם קיימת פונקציה $f: V \to V'$ חח"ע ועל ומתקיים: עבור $u,v \in V$ $\{u,v\} \in E \longleftrightarrow \{f(u),f(v)\} \in E'$

6. האם הגרפים הבאים איזומורפיים?



$G_1=(V_1,E_1)$



$G_2=(V_2,E_2)$

פתרון:

כן, הגרפים איזומורפיים. נראה פונק' $f: V_1 \to V_2$ כנדרש.

מתקיים:

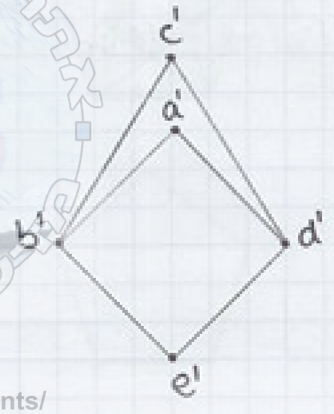
$$\left.\begin{array}{l} f(1)=c \\ f(2)=d \\ f(3)=a \\ f(4)=b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lcl} \{1,2\} \in E_1 & \longleftrightarrow & \{c,d\} \in E_2 \\ \{1,3\} \in E_1 & \longleftrightarrow & \{c,a\} \in E_2 \\ \{1,4\} \in E_1 & \longleftrightarrow & \{c,b\} \in E_2 \\ \{2,3\} \in E_1 & \longleftrightarrow & \{d,a\} \in E_2 \\ \{2,4\} \in E_1 & \longleftrightarrow & \{d,b\} \in E_2 \\ \{3,6\} \in E_1 & \longleftrightarrow & \{a,b\} \in E_2 \end{array}$$

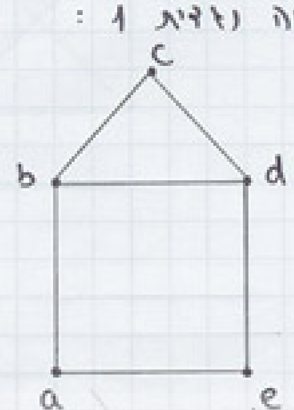
7. הוכח או הפרך: יהי $G_1=(V_1,E_1)$ ו- $G_2=(V_2,E_2)$ גרפים לא מכוונים ותהיה $f: V_1 \to V_2$ חח"ע ועל כך שמתקיים: $deg(v)=deg(f(v))$, $\forall v \in V_1$

אזי G_1 ו- G_2 איזומורפיים תחת f.

פתרון: לא נכון. זהו תנאי הכרחי אך לא מספיק.

דוגמה נגדית 1:





$f(a) = a'$ $\quad$ $deg(a) = 2 = deg(f(a)) = deg(a')$

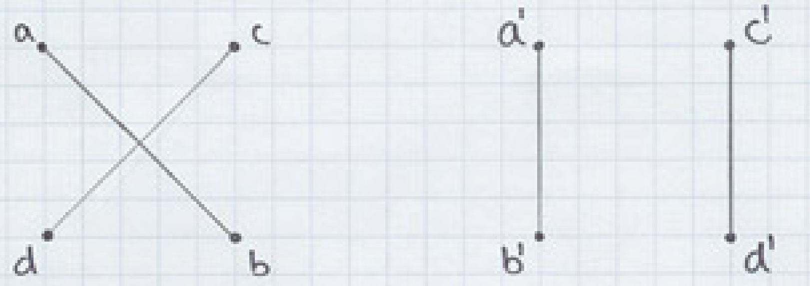
$f(b) = b'$ $\quad$ $deg(b) = 3 = deg(b')$

$f(c) = c'$ $\quad$ $deg(c) = 2 = deg(c')$

$f(d) = d'$ $\quad$ $deg(d) = 3 = deg(d')$

$f(e) = e'$ $\quad$ $deg(e) = 2 = deg(e')$

דוגמה 2 : $\quad$ * תיקון! הדוגמא הזו אינה מפריכה.



f פונק' חח"ע ועל: $f = \{(a,a'), (b,b'), (c,c'), (d,d')\}$

מתקיים:

$deg(a) = 1 = deg(a')$

$deg(b) = 1 = deg(b')$

$deg(c) = 1 = deg(c')$

$deg(d) = 1 = deg(d')$

אבל הגרפים לא איזומורפיים:

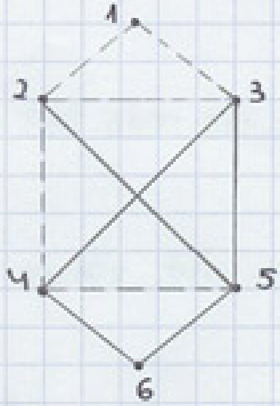
$\{a,c\} \in E_1$ אבל $\{f(a), f(c)\} \notin E_2$

29/12/04

תרגול מס' 11 - המשך תורת הגרפים

מסלול אוילר: מסלול $<V_0,V_1,\ldots V_n>$ נקרא מסלול אוילר אם כל צלע בגרף מופיעה בו בדיוק פעם אחת. כאשר $V_0=V_n$ זהו מעגל אוילר.

1. מצא מעגל אוילר בגרף הבא:



פתרון: מוצאים מעגל כלשהו ומורידים את צלעותיו מהגרף. אח"כ מוצאים מעגל נוסף ומשלבים אותו בתוך המעגל הקודם וכך הלאה...

תחילה נמצא את המעגל 1231 ונוריד את צלעותיו.

אח"כ נמצא את המעגל 2452

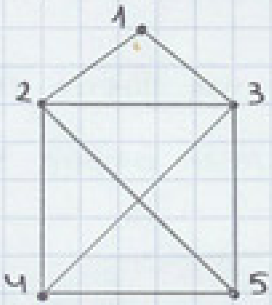
לאחר שילוב המעגלים נקבל: 1245231

אח"כ נמצא את המעגל: 46534

ומכאן, לאחר שילוב המעגלים נקבל מעגל אוילר: 12465345231

משפט: בגרף קשיר, לא מכוון יש מסלול אוילר אמ"מ יש בו אפס או 2 קודקודים בעלי דרגה אי-זוגית. אם יש אפס קודקודים עם דרגה אי זוגית אז יש בגרף מעגל אוילר.

דוגמא:



מסלול אוילר: 423125345

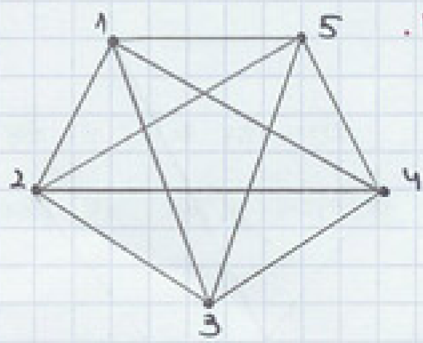
2. א. שרטט גרף מלא עם 5 קודקודים ומצא בו מעגל אוילר.

ב. שרטט גרף מלא עם 4 קודקודים ומצא בו מסלול אוילר

ג. הכלל את התוצאה.

פתרון:

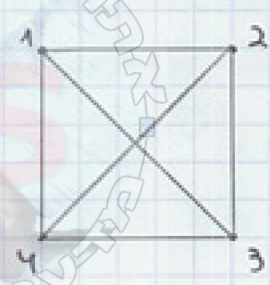
א.



123451
241352

עבור שילוב המעגלים: 1241352345

ב.



אין מסלול אוילר בגרף.

2. * כאשר n אי-זוגי - דרגת כל קודקוד $n-1$ היא זוגית.

לכן, עפ"י המשפט, יש מעגל אוילר.

* כאשר n זוגי - דרגת כל קודקוד הינה פרדית, לכן אין מעגל אוילר.

מסקנה: הגרף מלא עם $n>2$ קודקודים יש מעגל אוילר אמ"מ n אי-זוגי.

הגדרה: מעגל (מסלול) שעובר בכל קודקוד של הגרף בדיוק פעם אחת נקרא מעגל (מסלול) המילטון.

3. הוכח או הפרך: בגרף פשוט, לא מכוון, יש מעגל המילטון אמ"מ יש בו מעגל אוילר.

פתרון: הפרכה ע"י דוגמאות:

פה יש מעגל המילטון - 1 2 3 4 1 אבל אין מעגל אוילר.

פה יש מעגל אוילר אבל אין מעגל המילטון.

4. אילו מהטענות הבאות נכונות?

נכון * בגרף המלא K_n יש מעגל המילטון עבור כל $n\geq3$

נכון * אם G גרף פשוט עם $n\geq3$ קודקודים ודרגת כל קודקוד בו $\geq \frac{n}{2}$ אזי יש בו מעגל המילטון.

נכון * אם בגרף יש קודקוד עם דרגה 1 אז אין בו מעגל המילטון.

לא נכון * אם בגרף יש קודקוד עם דרגה 2 אז אין בו מעגל המילטון.

נכון * אם בגרף יש קודקוד עם דרגה 2 אזי שתי הצלעות שחלות עליו יהיו חלק מכל מעגל המילטון.

5. א. יהי $G=(V_1,V_2,E)$ גרף דו-צדדי פשוט לא-מכוון. הוכח או הפרך: אם בגרף יש מעגל המילטון אז מספר הקודקודים בגרף זוגי.

ב. הוכח שבגרף $G_{n,m}$ סריג יש מעגל המילטון אם n ו/או m זוגיים.

ג. הוכח שבגרף סריג $G_{n,m}$ אין מעגל המילטון אם n,m אי-זוגיים.

3

פתרון:

א. הטענה נכונה. מאחר ו-G גרף דו-צדדי, כל המעגלים בו, ובפרט מעגל המילטון, הם באורך זוגי. אורכו של מעגל המילטון הוא n, לכן n זוגי. מש"ל

ב. אם מס' השורות זוגי, נוכל שהתחיל מהפינה השמאלית העליונה, ללכת ימינה עד הסוף, ולהתקדם יחידה אחת כלפי מטה, ואז שמאלה עד הקודקוד האחד לפני השמאלי ביותר. נתקדם עוד למטה, יחידה אחת ושוב ימינה עד הסוף, שוב יחידה אחת למטה וכן הלאה. מאחר שמספר השורות זוגי, ומאחר שכל פעם שהתקדמנו שורה למטה ימינה התקדמנו בשורה שאחריה שמאלה, נחזור בסופו של דבר לצד שמאל, אל הפינה השמאלית התחתונה. נלך למעלה של עמודת הקודקודים השמאלית (באופן דומה אם מס' העמודות זוגי).

אבחנה: בגרף שריג יש $n \cdot m$ קודקודים.

אבחנה נוספת: גרף שריג הוא גרף דו-צדדי.

נניח בשלילה כי n, m אי-זוגיים ושיש מעגל המילטון. אזי לפי סעיף א' מס' הקודקודים בגרף זוגי, כלומר $n \cdot m$ מספר זוגי. אבל כפל מספרים אי-זוגיים לא יכול להיות זוגי ← סתירה.

ובצורה לוגית:

יש בגרף מעגל המילטון ← מס' הקודקודים זוגי

$a \rightarrow b$

$\bar{b} \rightarrow \bar{a}$

מס' הקודקודים אי-זוגי ← אין בגרף מעגל המילטון

עקרון שובך היונים

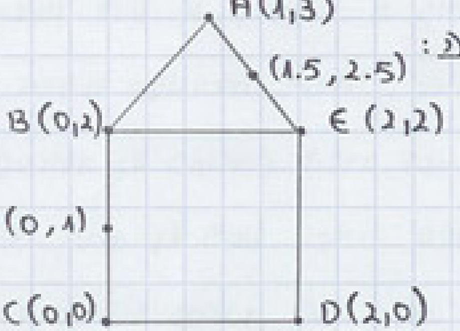
אם מכניסים $n+1$ יונים ל-n שובכים אזי קיים שובך אחד שבתוכו לפחות 2 יונים.

הוכחה: נניח בשלילה שבכל שובך יש לכל היותר יונה אחת. אז מספר היונים הכולל הוא לכל היותר n בסתירה להנחה.

ניסוח פורמלי יותר: אין פונקציה חח"ע מהקבוצה $\{1 \ldots n+1\}$ לקבוצה $\{1 \ldots n\}$

6. (4) קודקודיו של מחומש ABCDE הן נק' בעלות קואורדינטות שלמות. הראה שקיימים לפחות 2 קודקודים שנק' האמצע שלהם היא בעלת קואורדינטות שלמות.

המחשה:



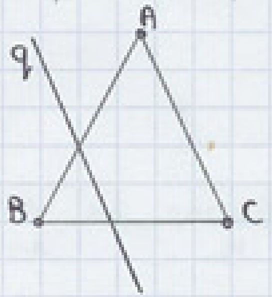
פתרון: נסווג את הנקודות של המחומש לפי זוגיותן:

(1) (זוגי, זוגי), (2) (זוגי, אי-זוגי), (3) (אי-זוגי, זוגי), (4) (אי-זוגי, אי-זוגי)

יש 4 סוגים ו-5 קודקודים, לכן לפחות ישנם 2 קודקודים מאותו הסוג (לפי עקרון שובך היונים).

סכום הרכיבים הראשונים של 2 הקודקודים אלה יהיו זוגי וכך גם סכום הרכיבים השניים שלהם. לפיכך, נק' האמצע היא בעלת קואורדינטות שלמות. מש"ל

7. נתון כי ישר q נמצא במישור המשולש ABC ואינו עובר דרך אף אחד מקודקודי המשולש. הוכח כי הישר אינו יכול לחתוך את כל צלעות המשולש.



פתרון: הישר q מחלק את המישור ל-2 חצאים. למשולש 3 קודקודים, לכן 2 מהם בצד אחד של הישר ו-1 בצד השני (לפי עקרון שובך היונים יש שני 3 קודקודים שמתחלקים ל-2 צדדים). מכאן, שאחת הצלעות מוכלת כולה באחד מהחצאים והישר q אינו יכול לחתוך את כל צלעות המשולש. מש"ל

8. יהי $G=(V,E)$ גרף סופי, לא מכוון. דרגת כל קודקוד ב-G היא לפחות K.

א. הוכח שיש בגרף מסלול בלי מעגלים (פשוט) שאורכו לפחות K.

ב. הוכח שיש בגרף מעגל פשוט שאורכו לפחות K+1.

פתרון:

א. דרגת כל קודקוד היא לפחות K, לכן יש לפחות K+1 קודקודים בגרף. נבחר קודקוד ונסמנו V_1. נבחר צלע כלשהי שחלה ב-V_1 ונסמן את הקודקוד השני שלה ב-V_2. V_2 מחובר לעוד לפחות $K-1$ קודקודים שלא ביקרנו בהם. נבחר אחד מהם ונסמנו ב-V_3. V_3 מחובר לעוד לפחות $K-2$ קודקודים שלא ביקרנו בהם ונמשיך כך הלאה. במקרה הכללי, V_i מחובר לעוד לפחות $K-(i-1)$ קודקודים שלא ביקרנו בהם. לכן, כשנגיע ל-V_K, יהיו שם $K-(K-1)=1$ קודקודים שלא ביקרנו בהם. לכן, יהיה לנו מסלול באורך K:

$V_1, V_2, \ldots, V_K, V_{K+1}$

נגדיר $f(n)$ מספר האיזורים הנוצרים במישור ע"י n ישרים.

הישר ה-n נחתך ע"י כל א $n-1$ הישרים ונחתכים בנקודה אחרת.

לכן הישר ה-n מחולק ל-n מקטעים: וכל מקטע כזה מחלק אזור קודם לשני איזורים.

לכן: $f(n)=f(n-1)+n$