אוניברסיטת חיפה

Department of Computer Science
CS

הפקולטה למדעי החברה
החוג למדעי המחשב

10.07.2007

מתמטיקה דיסקרטית, סמסטר ב' תשס"ז – מועד א'

מספר הקורס: 203.1850.ב.1

מרצה: ד"ר שירלי הלוי-גינסברג

מתרגל: מר אריאל גורפינקל

הנחיות:

1. **משך המבחן 3 שעות.**
2. **הבחינה ללא חומר עזר (למעט דפי הנוסחאות המחולקים יחד עם טופס הבחינה).**
3. **במבחן 3 שאלות. יש להשיב על כולן.**
4. **מותר להסתמך על טענות שהוכחו בהרצאות/תרגולים/תרגילי הבית בתנאי שמנסחים אותן במדויק.**
5. **תשובה ללא נימוק אינה מזכה בנקודות.**
6. **מותר להסתמך על סעיפים קודמים גם אם לא הצלחתם לפתור אותם.**
7. **במידה ומסתמכים על סעיף קודם של הוכח/הפרך, טעות בסעיף עליו מסתמכים תגרור טעות בסעיף החדש. כלומר, במקרה זה תינתנה נקודות רק עבור טעות נגררת.**
8. **ניתן לכתוב "לא יודע" על כל סעיף בנפרד. סעיף ש<u>התשובה היחידה</u> בו תהיה "לא יודע" יקבל 20% מהנקודות.**
9. **כתבו בכתב יד קריא, מסודר ונקי.**

בהצלחה!!!

שאלה 1: (36 נקודות)

בקורס במתמטיקה דיסקרטית מתקיימים שלושה תרגולים. לקורס רשומים 80 סטודנטים והם מתחלקים בין 3 התרגולים.

סעיף א: (6 נקודות)

מהו מספר האפשרויות של הסטודנטים להתחלק בין התרגולים, בהנחה שכל סטודנט הולך לתרגול יחיד?

סעיף ב: (6 נקודות)

מהו מספר האפשרויות של הסטודנטים להתחלק בין התרגולים, בהנחה שסטודנט יכול ללכת לכמה תרגולים שירצה?

כעת נניח כי גודל כיתה הוא 30 מקומות בלבד.

סעיף ג: (6 נקודות)

מהו מספר האפשרויות של הסטודנטים להתחלק בין התרגולים, בהנחה שכל סטודנט הולך לתרגול יחיד? (מומלץ לרשום את התשובה כסכום. השתדלו להגיע לסכום פשוט ככל הניתן)

סעיף ד: (6 נקודות)

מהו מספר האפשרויות להושיב את הסטודנטים בכיתות, בהנחה שכל סטודנט הולך לתרגול יחיד? כלומר, הסטודנטים מתחלקים לתרגולים, ואז בוחרים סידורי ישיבה בכיתות, והשאלה היא כמה אפשרויות ישנן בסה"כ לישיבה בכיתות?

נניח כעת שלפני כל תרגול המתרגל בוחר מתוך קבוצת 80 הסטודנטים את 30 הסטודנטים שיכנסו לתרגול, כלומר יתכן סטודנט שיבחר לכל שלושת התרגולים, וסטודנט שלא יבחר כלל.

סעיף ה: (6 נקודות)

מהו מספר האפשרויות של המתרגל לבחור סטודנטים לשלושת התרגולים?

סעיף ו: (6 נקודות)

מהו מספר האפשרויות של המתרגל לבחור סטודנטים לשלושת התרגולים, כך שכל סטודנט יבחר לפחות לתרגול אחד?

<u>שאלה 2: (40 נקודות)</u>

השאלה עוסקת ביחסים דו-מקומיים המוגדרים מעל הטבעיים.

נגדיר לכל i טבעי את היחס: $R_i=\{(i,i)\} \cup (N/\{i\} \times N/\{i\})$

<u>סעיף א</u>: (5 נקודות)

הראו כל לכל i: R_i הינו יחס שקילות וכתבו את מחלקות השקילות.

<u>סעיף ב</u>: (5 נקודות)

מהו $R_5 \cap R_6$? האם הוא יחס שקילות ואם כן מהן מחלקות השקילות?

כעת מגדירים באינדוקציה קבוצה של יחסים דו-מקומיים מעל הטבעיים:

B (הבסיס) = $\{R_i \mid i\in N\}$

F (הפעולות) = $\{P_\cap\}$, כאשר $P_\cap(R`,R``) = R`\cap R``$.

נסמן ב-X את הקבוצה $X(B,F)$ המתקבלת עבור B ו-F הנ"ל.

עבור כל אחד מהיחסים הבאים קבעו האם הוא איבר ב-X, והוכיחו את תשובתכם:

<u>סעיף ג</u>: (10 נקודות)

עבור k טבעי כלשהו:

$R=\{(1,1),...,(k,k)\} \cup (N/\{1,...,k\} \times N/\{1,...,k\})$

<u>סעיף ד</u>: (10 נקודות)

$I_N=\{(i,i) \mid i\in N\}$

<u>סעיף ה</u>: (10 נקודות)

$R=\{(1,2), (2,3), (3,1)\} \cup (N/\{1,2,3\} \times N/\{1,2,3\})$

<u>שאלה 3: (24 נקודות)</u>

עבור גרפים פשוטים לא מכוונים $G=(V,E)$, ו- $G`=(V`,E`)$, נאמר ש-G, ו-`G איזומורפיים, אם קיימת פונקציה $f:V\to V`$ חח"ע ועל המקיימת לכל $u,v\in V$:

$\{u,v\}\in E \Leftrightarrow \{f(u),f(v)\}\in E`$.

נגדיר את היחס R מעל קבוצת הגרפים, באופן הבא:

$(G_1,G_2)\in R \Leftrightarrow$ G_1, G_2 איזומורפיים זה לזה.

הוכיחו ש-R הוא יחס שקילות.

פתרון שאלה מס' 1.

א. מס' האפשרויות לבחירה עבור סטודנט וחוג -

$\binom{3}{1}$ בחירת תרגיל אחד מתוך 3.

מאחר וכל בחירה של כל אחד מהסטודנטים מבחירה תלויה שונה לחלוטין הבחירות של הסטודנטים נקבע על פי חוק המכפלה. לכן, מספר האפשרויות לחלוקה הוא

מס' אפשרויות לסטודנט מס' 1 $\cdot$ מס' אפשרויות לסטודנט 2 $\cdot \ldots\ldots \cdot$ מס' אפשרויות לסטודנט מס' 80 =

$$\binom{3}{1}^{80} = 3^{80}$$

ב. במקרה זה מס' האפשרויות לבחירה עבור סטודנט וחוג הוא מס' האפשרויות של הסטודנט לבחור תרגיל אחד או לבחור שני תרגילים או שלושה תרגילים או לא לבחור בתרגילים כלל.

מאחר והמקרים זרים ניתן לסכום את מס' האפשרויות בכל אחד המקרים:

לבחור שלושה תרגילים $\binom{3}{3}$

לבחור שני תרגילים $\binom{3}{2}$

לבחור תרגיל אחד $\binom{3}{1}$

לבחור לא לבחור תרגיל $\binom{3}{0}$

סה"כ $\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i} = 2^3 = 8$

כעת, מס' האפשרויות עבור כל הסטודנטים הוא
עפ"י חוק המכפלה
8^{80}.

ב. כעת מניחים כי גודל כל מחזור חסום ב-30.
ונבדוק כמה סטודנטים יכולים להיות במחזור.

במחזור הראשונה יכולים להיות בין 20 ל-30 סטוד'.
הסיבה היא כי מנתוני השאלה יכולים להיות לכל היותר
30 סטודנטים במחזור לכן ואם נפחית את 20 ונשארו לנו את 60
במחזור השנייה (מחזורות הנותרות) יכולים להיות לכל היותר 30 סטודנטים,
אולם ברור שסכום הסטודנטים במחזור הראשונה
והשנייה חייב להיות לפחות 50 (שכן אחרת יהיו
יותר מ 30 סטודנטים שנותרים למחזור
השלישית).

למחזור השלישית נשארו כל הסטודנטים שלא נשארו
לראשונה ולשנייה.

לכן, מספר האפשרויות לחלוקה:

$$\sum_{i=20}^{30}\left[\binom{80}{i}\cdot\sum_{j=50-i}^{30}\binom{80-i}{j}\cdot 1\right]$$

סטודנטים
למחזור ראשונה

ד. במקרה זה רוצים שכל שמושב את הסט' ברוחות

אם כן יש לבחור לאילו 80 מושבים מתוך 90
המושבים שישבו סך הכל בשלוש הרוחות.

מספר האפשרויות לעשות זאת

$$P(90,80) = \frac{90!}{10!}$$

(חשוב לשים לב שיש כאן חשיבות לסדר בחירת
המושבים מאחר והסטודנטים שונים)

ה. כעת המתרגל בוחר לפני כל תרגול 30 סט'
לתרגול.

מס' הבחירות האפשריות לתרגול הראשון $\binom{80}{30}$

מס' הבחירות האפשריות לתרגול השני $\binom{80}{30}$

מס' הבחירות האפשריות לתרגול השלישי $\binom{80}{30}$

לפי חוק המכפלה מס' האפשרויות לשלוש הבחירות
הוא $\binom{80}{30}^3$

ו. מספר האפשרויות של המתרגל לבחור סטודנטים
לשלושת התרגולים כך שכל סטודנט, יבחר
לתרגול אחד לפחות:

נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

נגדיר - A_i - הסטודנט ה-i לא נבחר אף פעם.

אנחנו מחפשים את $|A_1^c \cap \cdots \cap A_{80}^c|$

ולפי עקרון ההכלה וההפרדה שווה לזה הינו

$$\sum_{i=0}^{80}(-1)^i W(i)$$

נשאר לחשב הגדלים

ה-$W(0) = \binom{80}{30}^3$ ברור

$|A_1|$:

מספר האפשרויות של המתרגל לבחור 30 סטודנטים של תרגיל רק שסטודנט מס' 1 לא נבחר אף פעם הינו

$$\binom{79}{30}^3.$$

מאחר ועבור כל סטודנט אחר השיקולים דומים, נקבל לכל j $|A_j| = \binom{79}{30}^3$

ולכן

$$W(1) = \underbrace{\binom{80}{1}}_{\text{בחירת הסטודנט}} \cdot \binom{79}{30}^3$$

באופן כללי, אם מדובר על $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ אנחנו רוצים לספור את מספר האפשרויות של המתרגל לבחור 30 סטודנטים רק שאף אחד מ-k הסטודנטים $i_1, \ldots, i_k$ לא נבחר. כלומר, לבחור 30 סטודנטים מתוך $80-k$. ולכן מספר הבחירות

$$\binom{80-k}{30}^3$$

כעת, אנו שם לבחור את k הסטודנטים ואז כן

$$W(k)=\binom{80}{k}\binom{80-k}{30}^3$$

ולכן ואם נציב נקבל

$$\sum_{k=0}^{80}(-1)^k W(k)=\sum_{k=0}^{80}(-1)^k\binom{80}{k}\binom{80-k}{30}^3$$

שאלה מס' 2:

א. צ"ל R_i יחס שקילות ולרשום את מחלקות השקילות

$$R_i=\{(i,i)\}\cup(\mathbb{N}\setminus\{i\}\times\mathbb{N}\setminus\{i\})$$

נשאר להוכיח כי R_i יחס שקילות-
לשם כך עלינו להוכיח כי R_i מקיים רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות.

• רפלקסיביות - צריך להראות כי לכל $j\in\mathbb{N}$ מתקיים $(j,j)\in R_i$.
עבור $j=i$, ומהגדרת R_i הנ"ל $(i,i)\in R_i$
עבור $j\neq i$, ומתקיים $j\in\mathbb{N}\setminus\{i\}$ ולכן
$(j,j)\in\mathbb{N}\setminus\{i\}\times\mathbb{N}\setminus\{i\}$

• סימטריות - יהי $(x,y)\in R_i$, נבחין בין שני מקרים.
- אם $x=y=i$ אזי גם $(y,x)=(i,i)\in R_i$
- אחרת $(x,y)\in\mathbb{N}\setminus\{i\}\times\mathbb{N}\setminus\{i\}$, כלומר
$x\in\mathbb{N}\setminus\{i\}$ וגם $y\in\mathbb{N}\setminus\{i\}$
ולכן גם $(y,x)\in\mathbb{N}\setminus\{i\}\times\mathbb{N}\setminus\{i\}$
ומכאן $(y,x)\in R_i$

• טרנזיטיביות - יהיו $(x,y),(y,z)\in R_i$ נראה כי גם
$(x,z)\in R_i$

באופן נבחין כי לא יתכן ש $(x,y)\in\{(i,i)\}$
ו $(y,z)\in\mathbb{N}\setminus\{i\}\times\mathbb{N}\setminus\{i\}$ או להפך.

לכן נתבונן בשתי אפשרויות:

- $(x,y),(y,z)\in\{(i,i)\}$ אזי $x=y=z=i$
ומכאן $(x,z)\in R_i$

- $(x,y),(y,z)\in\mathbb{N}/\{i\}\times\mathbb{N}/\{i\}$ ומכאן $x,y,z\in\mathbb{N}/\{i\}$
אזי גם $(x,z)\in\mathbb{N}/\{i\}\times\mathbb{N}/\{i\}$
ולכן $(x,z)\in R_i$

כעת, נשאר לתאר את מחלקות השקילות
של R_i שהם מחלקות שקילות $\{i\},\mathbb{N}/\{i\}$

ד. מצאו את $R_5\cap R_6$:

$$R_5\cap R_6=\{(5,5),(6,6)\}\cup(\mathbb{N}/\{5,6\}\times\mathbb{N}/\{5,6\})$$

ראינו בתרגול בכיתה כי חיתוך של שני יחסי שקילות הוא
יחס שקילות. מאחר ובסעיף א ראינו ש R_5,R_6
הם יחסי שקילות גם $R_5\cap R_6$ יחס שקילות.

נתאר את מחלקות השקילות: $\{5\},\{6\},\mathbb{N}/\{5,6\}$

ה. מצפורים באונפוקציה קבוצה וחסום פו אקוויום
את הסימונים: $B=\{R_i \mid i\in\mathbb{N}\}$
$F=\{P_n\}$

נראה כי היחס הבא, נסמנו ב R^k:
$$R=\{(1,1),\dots,(k,k)\}\cup\mathbb{N}/\{1,\dots,k\}\times\mathbb{N}/\{1,\dots,k\}$$
נמצא ב X של k.

בנוסף נבחין כי $R^k=\bigcap_{i=1}^{k}R_i$

(נותן לסדרות את הקונפקציה הרצויה של X אבל אין הכרח).

כעת נראה סדרת יצירה עבור R^k

$1.\ R_1$ בסיס

$2.\ R_2$ בסיס

$\vdots$ $\vdots$

$k.\ R_k$ בסיס

$k+1\quad R_1 \cap R_2\quad 1,2$ של P_1

$k+2\quad R_1 \cap R_2 \cap R_3\quad k+1,3$ של P_1

$\vdots$

$2k-1\quad R^k\quad 2k-2,k$ של P_1

3. נראה כי הפחס $I_N = \{(i,i) \mid i \in N\}$ אינו ב- X.

• נבחר תכונה: מספר מחלקות שקילות סופי.

I הפחס I_N אינו מקיים את התכונה מאחר ויש בו אינסוף מחלקות שקילות

II נראה באינדוקציה כי כל אברי X מקיימים את התכונה. הוכחה תהיה של מבנה הקבוצה X.

בסיס: כל אבר בבסיס R_i, מתקיים של R_i שתי מחלקות שקילות (גודל סופי k).

צעד: נניח כי ל R' ו R'' יש מספר סופי של מחלקות שקילות (הנחת האינדוקציה)
ונראה כי ל $R=R'\cap R''$ יש מספר סופי של מחלקות שקילות

נסמן ב n_1 את מספר מחלקות השקילות של R'
ונסמן ב n_2 את מספר מחלקות השקילות של R''.

לפי אומר $\forall i\in\mathbb{N}$ מתקיים $[i]_R=[i]_{R'}\cap[i]_{R''}$.

זאת מאחר ובמקרה של האיברים אותם מצא i בתוכם
$R'\cap R''$ הם אלו של האיברים אותם מצא i בתוכם
R' ובתוכם R'' וזו הגדרת החיתוך.
כלומר,

$$[i]_R=\{j \mid (i,j)\in R\}=\{j \mid (i,j)\in R'\cap R''\}=$$
$$\{j \mid (i,j)\in R' \text{ וגם } (i,j)\in R''\}=$$
$$\{j \mid (i,j)\in R'\}\cap\{j \mid (i,j)\in R''\}=$$
$$[i]_{R'}\cap[i]_{R''}$$

ולכן מספר מחלקות השקילות ב R הוא לכל היותר מספר החיתוכים האפשריים של מחלקות שקילות
והוא $n_1\cdot n_2$ - מספר סופי.

ומכיוון שכל רלציה ב X מתקיים שמספר מחלקות השקילות סופי.

∘ תכונה נוספת לשאלה - קיים $k\in\mathbb{N}$ כך שלכל $x,y\geq k$
מתקיים $(x,y)\in R$
(במילים אחרות קיים k כך ש
$(\mathbb{N}\setminus\{0,\ldots,k\}\times\mathbb{N}\setminus\{0,\ldots,k\} \ldots$

ה. נשים כי $R=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}\cup \mathbb{N}\setminus\{1,2,3\}$
$\times\mathbb{N}\setminus\{1,2,3\}$

אינו איבר ב- X.

נבחר תכונה: R רלציית שקילות

I. R אינו יחס שקילות
R אינו יחס רפלקסיבי לדוגמא $(1,1)\notin R$.

II. נוכיח כי כל רלציה ב X מקיימת את התכונה.
נעשה זאת באינדוקציה על המבנה של X.

בסיס: עבור איברי הבסיס - כל איברי הבסיס מהצורה R_i ונשים לב כי R_i יחס שקילות לכל i.

צעד: נניח כי R', R'' הם יחסי שקילות ונראה ש $R=R''\cap R'$ יחס שקילות

ראינו בכתה כי חיתוך של יחסי שקילות הוא יחס שקילות ולכן הדרישה מתקיימת

מכאן שכל איברי X יחסי שקילות

ולכן R שהגדרנו אינו איבר ב X.

תשובה לשאלה 3 – מבחן מועד א׳

השאלה:

תזכורת:

עבור גרפים פשוטים לא מכוונים $G=(V,E)$, ו- $G`=(V`,E`)$, נאמר ש-$G$, ו-$G`$ איזומורפיים, אם

קיימת פונקציה $f:V\rightarrow V`$ חח״ע ועל המקיימת לכל $u,v\in V$:

$\{f(u),f(v)\}\in E` \Leftrightarrow \{u,v\}\in E$. (➔ ״תכונת השכנות״)

נגדיר את היחס R מעל קבוצת הגרפים, באופן הבא:

$(G_1,G_2)\in R \Leftrightarrow G_1, G_2$ איזומורפיים זה לזה.

הוכיחו ש-R הוא יחס שקילות.

פתרון:

יש להראות שהיחס R הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

<u>רפלקסיביות</u>: צ״ל שלכל גרף $G=(V,E)$ מתקיים ש-$(G,G)\in R$

יהי G גרף כלשהו.

נבחן את פונקצית הזהות על הקודקודים: $f:V\rightarrow V$, ולכל קודקוד $u\in V$ מתקיים: $f(u)=u$.

ידוע שלכל קבוצה, פונקצית הזהות עליה היא חח״ע ועל.

יהיו $u,v\in V$ זוג קודקודים המקיימים $\{u,v\}\in E \Leftrightarrow$ (לפי הגדרת f מתקיים $f(u)=u,\ f(v)=v$)

$\{f(u),f(v)\}\in E$

מצאנו f חח״ע ועל מ-V ל-V השומרת על תכונת השכנות, ולכן G איזומורפי ל-G. מ.ש.ל.

<u>סימטריות</u>:

צ״ל שלכל זוג גרפים $G_1,=(V_1,E_1),\ G_2=(V_2,E_2)$ המקיימים $(G_1,G_2)\in R$, מתקיים: $(G_2,G_1)\in R$.

יהיו G_1,G_2 גרפים כלשהם עבורם מתקיים $(G_1,G_2)\in R$.

לפי הגדרת היחס קיימת פונקציה $f:V_1\rightarrow V_2$ חח״ע ועל המקיימת לכל $u,v\in V_1$:

$\{f(u),f(v)\}\in E_2 \Leftrightarrow \{u,v\}\in E_1$.

לפי המשפט: פונקציה היא חח״ע ועל $\Leftrightarrow$ הפונקציה היא הפיכה, נובע ש- f היא הפיכה.

f^{-1} היא פונקציה הפיכה מ-V_2 ל-V_1. לפי המשפט הנ״ל היא חח״ע ועל.

נראה ש- f^{-1} מקיימת את ״תכונת השכנות״:

יהיו $u,v\in V_2$ כלשהם המקיימים $\{u,v\}\in E_2$. נסמן $x=f^{-1}(u)$, $y=f^{-1}(v)$

לפי הגדרת פונקציה הופכית- לכל $a\in V_2$ מתקיים: $f(f^{-1}(a))=a$,

ולכן $f(x)=f(f^{-1}(u))=u$, $f(y)= f(f^{-1}(v))=v$.

f מקיימת את תכונת השכנות, ולכן מכיוון שנתון ש-$\{f(x),f(y)\}=\{u,v\}\in E_2$, אז מתקיים ש-

$\{x,y\}=\{f^{-1}(u),f^{-1}(v)\}\in E_1$. מ.ש.ל.

מצאנו פונקציה חח״ע ועל מ-V_2 ל-V_1 המקיימת את תכונת השכנות. ולכן $(G_2,G_1)\in R$.

<u>טרנזיטיביות</u>:

צ״ל שלכל G_1,G_2,G_3 המקיימים $(G_1,G_2)\in R$, וגם $(G_2,G_3)\in R$ מתקיים $(G_1,G_3)\in R$.

יהיו G_1,G_2,G_3 גרפים כלשהם המקיימים $(G_1,G_2)\in R$, וגם $(G_2,G_3)\in R$.

מכיוון ש-$(G_1,G_2)\in R$, ולפי הגדרת R נובע שקיימת פונקציה $f_1:V_1\rightarrow V_2$ חח״ע ועל המקיימת את תכונת השכנות.

מכיוון ש-$(G_2,G_3)\in R$, ולפי הגדרת R נובע שקיימת פונקציה $f_2:V_2\rightarrow V_3$ חח״ע ועל המקיימת את תכונת השכנות.

נוכיח שאם $f_1:V_1\rightarrow V_2$ חח״ע ועל וגם $f_2:V_2\rightarrow V_3$ חח״ע ועל, אז גם פונקצית ההרכבה $f_1\circ f_2:V_1\rightarrow V_3$ היא חח״ע ועל. לאחר מכן נראה שפונקצית ההרכבה מקיימת את תכונת השכנות.

(נוכיח בכלליות) תהיינה $f:A\rightarrow B,\ g:B\rightarrow C$ פונקציות חח״ע ועל כלשהן. נסמן ב-h את הרכבתן.

נראה ש- $h:A\rightarrow C$ היא <u>חח״ע</u>, כלומר $\forall a,b\in A.\ a\neq b \rightarrow h(a)\neq h(b)$.

יהיו $a,b\in A$ כלשהם השונים זה מזה. מנתון זה, ומכיוון ש-f היא חח״ע מתקיים ש- $f(a)\neq f(b)$.

נסמן: $c=f(a),\ d=f(b)$. $c,d\in B$ ושונים זה מזה,

ולכן מכיוון ש-g היא חח״ע מתקיים ש- $g(c)\neq g(d)$ $\Leftrightarrow$ (לפי הסימון) $g(f(a))\neq g(f(b))$

$\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת הרכבת h) מתקיים $h(a)\neq h(b)$. מ.ש.ל.

נראה ש- h היא <u>על</u>, כלומר שמתקיים: $\forall c\in C\ \exists a\in A.\ h(a)=c$.

יהי $c\in C$ כלשהו. מכיוון ש-g היא פונק׳ על קיים $b\in B$ המקיים $g(b)=c$.

מכיוון ש-f היא על, אז עבור b קיים $a\in A$ המקיים $f(a)=b$.

לפי הגדרת h מתקיים: $h(a)=g(f(a))$, לכן לפי הנ״ל מתקיים: $h(a)=g(f(a))=g(b)=c$, כלומר מצאנו $a\in A$ המקיים את הנדרש.

נראה ש-f_3 מקיימת את תכונת השכנות.

יהיו $u,v\in V_1$ כלשהם המקיימים $\{u,v\}\in E_1$. $\Leftrightarrow$

(מכיוון ש-f_1 מקיימת את תכונת השכנות) $\{f_1(u),f_1(v)\}\in E_2$ $\Leftrightarrow$

(מכיוון ש-f_2 מקיימת את תכונת השכנות) $\{f_2(f_1(u)),f_2(f_1(v))\}\in E_3$.

לפי הגדרת f_3 מתקיים: $f_3(u)=f_2(f_1(u)),\ f_3(v)=f_2(f_1(v))$, ומכאן ש- $\{f_2(f_1(u)),f_2(f_1(v))\}\in E_3$

$\Leftrightarrow$ $\{f_3(u),f_3(v)\}\in E_3$. מ.ש.ל.