

מתמטיקה דיסקרטית, סמסטר א' תשס"ח - בוחן אמצע

תאריך: 19/12/2007

מספר הקורס: 203.1850

מרצה: אמיר רובינשטיין

מתרגל: עידו ניסנבוים

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

מספר תעודת הזהות:

הנחיות:

1. יש לרשום את מספר תעודת הזהות במקום המיועד בעמוד זה.
2. משך הבחינה שתיים.
3. בטופס הבחינה 9 עמודים (כולל עמוד זה) – וודאו כי כולם ברשותכם!
4. יש לכתוב את התשובות על גבי טופס הבחינה, במקומות המיועדים לכך בלבד.
5. שימו לב: תשובות לא מסודרות או בכתב יד לא ברור לא תיבדקנה.
6. אסור שימוש בחומר עזר כלשהו.
7. 20% מהניקוד בכל סעיף יינתנו אם התשובה היחידה בסעיף תהיה "לא יודע/ת".
8. מותר להשתמש בכל טענה או משפט שלמדתם בהרצאות או בתרגולים (אך לא בתרגילי בית או מקורות אחרים) מבלי להוכיח אותם, בתנאי שמצטטים אותם באופן מדויק וברור.

בהצלחה!!!

שאלה	ערך	ניקוד
1	25	
2	25	
3	25	
4	25	
בונוס	5	
סה"כ	105	



שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $A = \mathcal{R} - \{0\}$ (קבוצת הממשיים פרט ל-0).

נתון היחס הבא מעל A ($R \subseteq A \times A$): $R = \{(x, y) \mid x \cdot y > 0\}$.

א. הוכיחו כי R הינו יחס שקילות.

הוכחה:

$$|A/R| =$$

ב. ציינו מה עוצמתה של קבוצת המנה A/R :

ג. מהן מחלקות השקילות שמשרה R על A ? הסבירו בקצרה.



ד. נתון היחס $R' = \{(x, y) \mid x \cdot y > 1\}$, גם כן מעל A .

הקיפו בעיגול את כל המשפטים הנכונים מבין המשפטים הבאים:

1. R' יחס שקילות.
2. R' אינו יחס שקילות כי הוא אינו רפלקסיבי.
3. R' אינו יחס שקילות כי הוא אינו סימטרי.
4. R' אינו יחס שקילות כי הוא אינו טרנזיטיבי.



שאלה 2 (25 נקודות)

שימו לב: בשאלה זו מספר סעיפים שאינם קשורים זה לזה.

א. הוכיחו או הפריכו את השקילות הלוגית הבאה, עבור פסוקים p_1, \dots, p_n, q כלשהם ו- n שלם חיובי

$$(p_1 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q \equiv (p_1 \rightarrow q) \vee \dots \vee (p_n \rightarrow q) \quad \text{כלשהו:}$$

עליכם להקיף בעיגול את התשובה הנכונה ולהוכיח את תשובתכם.

הפסוקים שקולים / אינם שקולים (הקיפו בעיגול)

הוכחה:

ב. תהי $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ (כאשר \mathbb{Z}^+ היא קבוצת השלמים החיוביים).

$$\text{נגדיר } g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+ \text{ ע"י: } g(k) = f(k) + f(k+2).$$

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם f חד-חד-ערכית, אז g חד-חד-ערכית.

הקיפו בעיגול את התשובה הנכונה והוכיחו תשובתכם (אין צורך להוכיח כי g הינה פונקציה).

הטענה נכונה / אינה נכונה (הקיפו בעיגול)

הוכחה:



ג. נתונה הקבוצה $S = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \leq y\}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים כולל 0).
הוכיחו כי $|S| = \aleph_0$ (קבוצה אינסופית בת מנייה).

הוכחה:



שאלה 3 (25 נקודות)

הגדרה: יחס R מעל קבוצה A כלשהי ייקרא א-סימטרי אם הוא מקיים שאם $(a,b) \in R$ אז $(b,a) \notin R$.

עבור יחס R מעל קבוצה A כלשהי הוכיחו כי שלוש הטענות הבאות הן טענות שקולות:

1. יחס א-סימטרי.

2. $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

3. $I_A \cap R^2 = \emptyset$ כאשר I_A הוא יחס הזהות על A : $I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

הוכחה:



המשך ההוכחה:



שאלה 4 (25 נקודות)

הגדרה: עבור קבוצה A לא ריקה שאיבריה הם קבוצות, נגדיר את $\cup A$ כאיחוד כל הקבוצות ששייכות ל- A , ואת $\cap A$ כחיתוך כל הקבוצות ששייכות ל- A . שימו לב ש- $\cup A$ ו- $\cap A$ הן בעצמן קבוצות.
לדוגמא: עבור $A = \{N, N_{\text{even}}, N_{\text{odd}}\}$, מתקיים $\cup A = N$, $\cap A = \emptyset$.

תהי S הקבוצה הבאה: $S = \{B \mid B \subseteq \mathbb{Z}^+, \text{ סופית, } B\}$
ותהי A תת קבוצה לא ריקה של S ($A \neq \emptyset$ וגם $A \subseteq S$).

א. הראו קבוצה A המקיימת: $|\cup A| = 3$ וגם $\cap A = \emptyset$.

$A =$
$\cup A =$

ב. הראו קבוצה A המקיימת: $|\cup A| = 3$ וגם $\cap A \neq \emptyset$.

$A =$
$\cup A =$
$\cap A =$

ג. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (הקיפו בעיגול את התשובה הנכונה והוכיחו תשובתכם):
1. לכל A , $\cup A$ קבוצה סופית.

הטענה נכונה / אינה נכונה (הקיפו בעיגול)

הוכחה:



2. לכל A , $A \cap A$ קבוצה סופית.

הטענה נכונה / אינה נכונה (הקיפו בעיגול)

הוכחה:

שאלת בונוס (5 נקודות)

מקור הסימון \aleph_0 אותו טבע קנטור הוא (הקיפו בעיגול, ישנה רק תשובה אחת נכונה):

1. יהדותו של קנטור והתעניינותו בשפה העברית.
2. קנטור סבר כי כבר נעשה שימוש נרחב מידי באותיות האלף-בית היווני והרומי במתמטיקה, ולכן בחר באות עברית.
3. קנטור טען כי הוא חווה התגלות אלוהית בחלום, שם הצטווה לבחור באות אלף.
4. אלף היא האות הראשונה בשם "אמיר", ואין לכך כל קשר למתמטיקאי קנטור.

בהצלחה!

