אוניברסיטת חיפה
הפקולטה למדעי חברה
החוג למדעי המחשב

מתמטיקה דיסקרטית, סמסטר א' תשס"ח – מבחן סופי מועד ג'

תאריך: 16/03/2008 **מרצה: אמיר רובינשטיין**

מספר הקורס: 203.1850 **מתרגל: עידו ניסנבוים**

הנחיות:

1. **משך הבחינה שלוש שעות.**
2. **בטופס הבחינה 10 עמודים (כולל עמוד זה) – וודאו כי כולם ברשותכם.**
3. **יש לכתוב את התשובות על גבי טופס הבחינה, במקומות המיועדים לכך בלבד.**
4. **שימו לב: תשובות לא מסודרות או בכתב יד לא ברור לא תיבדקנה.**
5. **חומר העזר היחיד המותר הוא דף עזר אישי בגודל A4.**
6. **20% מהניקוד בכל סעיף יינתנו אם התשובה היחידה בסעיף תהיה "לא יודע/ת".**
7. **מותר להשתמש בכל טענה או משפט שלמדתם בהרצאות או בתרגולים (אך לא בתרגילי בית או מקורות אחרים) מבלי להוכיח אותם, בתנאי שמצטטים אותם באופן מדוייק וברור.**

בהצלחה!!!

שאלה	ערך	ניקוד
1	20	
2	20	
3	20	
4	20	
5	20	
בונוס	5	
סה"כ	105	

שאלה 1 (20 נקודות)

בעל קניון מעונין לשבץ 12 חנויות בקניון שלו. הוא צריך לשבץ 2 חנויות מכל אחד מהסוגים הבאים: נעליים, מזון, בגדים, מוצרי חשמל, ריהוט, וספרים.

א. כמה אפשרויות יש לו לסדר את החנויות בשורה אם כל החנויות שונות זו מזו?

תשובה:

ב. כמה אפשרויות יש לו לסדר את החנויות בשורה אם חנויות מאותו סוג נחשבות זהות?

תשובה:

הסבר:

ג. כמה אפשרויות יש לו לסדר את החנויות בשורה, אם חנויות מאותו סוג נחשבות זהות, ואסור שיהיו שתי חנויות מאותו סוג סמוכות זו לזו?

תשובה :

הסבר :

ד. כעת מעוניין בעל הקניון לפזר את 12 החנויות בין 3 קומות הקניון (ולא לסדרן בשורה כמו בסעיפים הקודמים). אין חשיבות לסדר הפנימי בכל קומה. אם חנויות מאותו סוג נחשבות זהות, כמה אפשרויות יש לו לעשות זאת?

תשובה :

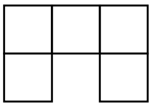
הסבר : עבור כל סוג חנויות, מדובר בחלוקת 2 אלמנטים זהים ל-3 תאים שונים.

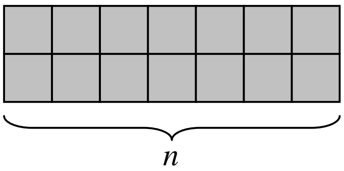
שאלה 2 (20 נקודות)

שימו לב: אין קשר בין סעיפי השאלה.

סעיף א'

נתונים שני סוגי מרצפות:

- מרצפת שחורה בגודל 1x1. 
- מרצפת גדולה המורכבת מ-5 מרצפות לבנות בגודל 1x1 המסודרת בצורת "ח". 



נסמן ב- $f(n)$ את מספר הדרכים השונות לריצוף משטח בגודל nx2 בעזרת סוגי המרצפות הנתונות (אין הגבלה על מספרן).

מצאו נוסחת נסיגה ל- $f(n)$. הסבירו את תשובתכם.

נוסחת הנסיגה:

$f(n) =$

תנאי ההתחלה (יש לתת תנאי התחלה מספיקים והכרחיים, כלומר לא מיותרים):

הסבר:

סעיף ב׳

הוכיחו את הזהות הבאה בדרך קומבינטורית: $\binom{4n}{2}-4\binom{n}{2}=\binom{4}{2}n^2$.

עליכם לנסח שאלה קומבינטורית, שניתן לפתור אותה בשתי דרכים, האחת מייצגת את צד שמאל של השיוויון הנ״ל, והשנייה מייצגת את צד ימין.

השאלה הקומבינטורית:

שאלה 3 (20 נקודות)

שימו לב: אין קשר בין סעיפי השאלה.

סעיף א'

כמה גרפים פשוטים ולא מכוונים שונים שקבוצת צמתיהם היא $\{1, 2, ..., n\}$ קיימים?

הקיפו בעיגול את התשובה התשובה הנכונה והסבירו.

א. $2^{\binom{n}{2}}$ ב. $n^2 - 1$ ג. $\binom{n}{2}$ ד. אף תשובה אינה נכונה.

הסבר:

סעיף ב'

תזכורת: שני גרפים פשוטים ולא מכוונים $G=(V,E)$ ו- $G' = (V', E')$ נקראים איזומורפיים אם קיימת פונקציה חד-חד-ערכית ועל $f : V \to V'$ כך ש- a ו- b שכנים ב- G אס"ם $f(a)$ ו- $f(b)$ שכנים ב- G'.

תהי G_3 קבוצת הגרפים הפשוטים הלא מכוונים בני 3 צמתים. נגדיר יחס שקילות $R \subseteq G_3 \times G_3$ ע"י:

$(G, G') \in R$ אס"ם G ו- G' איזומורפיים.

מהן מחלקות השקילות שמשרה R על G_3 ומה מספרן? בתשובתכם רצוי להיעזר באיורים. אין חובה לרשום את מחלקות השקילות בכתיב פורמלי, אולם תיאור המחלקות חייב להיות ברור וחד משמעי.

מספר מחלקות השקילות: ______

שאלה 4 (20 נקודות)

הגדרות:

- נאמר שיחס R מעל קבוצה A הוא אנטי-סימטרי כאשר $(a,b)\in R \wedge (b,a)\in R \rightarrow a=b$.
- נאמר שיחס R מעל קבוצה A הוא אנטי-רפלקסיבי כאשר $\forall a\in A \quad (a,a)\notin R$.
- הגדרות יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי הן ההגדרות הרגילות כפי שנלמדו בכיתה.

תהי A קבוצה כלשהי ו- $R\subseteq A\times A$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות והוכיחו את תשובתכם.

שימו לב: בסעיפים בהם אתם מוכיחים טענה, נדרשת הוכחה הכתובה באופן פורמלי.

א. אם R סימטרי ואנטי-סימטרי אז $R\subseteq\left\{(x,x)\mid x\in A\right\}$.

הטענה נכונה / לא נכונה (הקיפו בעיגול)

הוכחה:

ב. אם R אנטי-רפלקסיבי וטרנזיטיבי אז R אנטי-סימטרי.

הטענה נכונה / לא נכונה (הקיפו בעיגול)

הוכחה:

ג. קיימים קבוצה A ויחס $R \subseteq A \times A$ כך ש- R גם רפלקסיבי וגם אנטי-רפלקסיבי.

<u>הטענה נכונה / לא נכונה (הקיפו בעיגול)</u>

<u>הוכחה:</u>

ד. אם R אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי אז R רפלקסיבי.

<u>הטענה נכונה / לא נכונה (הקיפו בעיגול)</u>

<u>הוכחה:</u>

שאלה 5 (20 נקודות)

תהיינה A ו- B קבוצות כלשהן, ותהי f פונקציה $f: A \to B$ המקיימת לכל $b \in B$:

$$\exists a\ f(a) = b \quad \to \quad |\{a \mid a \in A \wedge f(a) = b\}| = 2.$$

הערה: במבחן המקורי הופיעה הגדרה שונה במעט.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות. הקיפו בעיגול את בחירתכם והוכיחו.

<u>שימו לב</u>: בסעיפים בהם אתם מוכיחים טענה, נדרשת <u>הוכחה הכתובה באופן פורמלי</u>.

א. אם A ו- B קבוצות סופיות אז $|A| = 2|B|$.

<u>הטענה נכונה / לא נכונה (הקיפו בעיגול)</u>

<u>הוכחה</u>:

ב. אם A ו- B קבוצות סופיות וגם $|A| = 2|B|$ אז f על.

<u>הטענה נכונה / לא נכונה (הקיפו בעיגול)</u>

<u>הוכחה</u>:

ג. אם A ו- B קבוצות אינסופיות, אז בהכרח יש להן אותה עוצמה.

<u>הטענה נכונה / לא נכונה (הקיפו בעיגול)</u> <u>הוכחה:</u>

ד. אם A ו- B קבוצות אינסופיות, אז בהכרח יש לכל אחת עוצמה שונה.

<u>הטענה נכונה / לא נכונה (הקיפו בעיגול)</u> <u>הוכחה:</u>

<u>שאלת בונוס (5 נקודות)</u>

לפי משפטי אי השלמות של גדל (Gödel's Incompleteness Theorem):

1. ישנן תורות מתמטיות, שיש בהן פסוקים שלא ניתן להוכיח וגם לא ניתן להפריכם.
2. המספרים השלמים אינם ניתנים לכתיבה כמספרים עשרוניים בעלי אינסוף ספרות.
3. בין עוצמת קבוצה לעוצמת קבוצת המנה שלה אין עוצמות נוספות.
4. אדם לא יכול להיות מאושר אם אינו שלם עם עצמו.

בהצלחה!!