אוניברסיטת חיפה

הפקולטה למדעי החברה
החוג למדעי המחשב

מתמטיקה דיסקרטית, סמסטר א׳ תשס״ח – מבחן סופי מועד א׳

תאריך: 25/01/2008 **מרצה: אמיר רובינשטיין**

מספר הקורס: 203.1850 **מתרגל: עידו ניסנבוים**

מספר תעודת הזהות:

הנחיות:

1. **יש לרשום את מספר תעודת הזהות במקום המיועד בעמוד זה.**
2. **משך הבחינה שלוש שעות.**
3. **בטופס הבחינה 10 עמודים (כולל עמוד זה) – וודאו כי כולם ברשותכם.**
4. **יש לכתוב את התשובות על גבי טופס הבחינה, במקומות המיועדים לכך בלבד.**
5. **שימו לב: תשובות לא מסודרות או בכתב יד לא ברור לא תיבדקנה.**
6. **חומר העזר היחיד המותר הוא דף עזר אישי בגודל A4.**
7. **20% מהניקוד בכל סעיף יינתנו אם התשובה היחידה בסעיף תהיה ״לא יודע/ת״.**
8. **מותר להשתמש בכל טענה או משפט שלמדתם בהרצאות או בתרגולים (אך לא בתרגילי בית או מקורות אחרים) מבלי להוכיח אותם, בתנאי שמצטטים אותם באופן מדוייק וברור.**

בהצלחה!!!

שאלה	ערך	ניקוד
1	30	
2	35	
3	20	
4	15	
בונוס	5	
סה״כ	105	

שאלה 1 (30 נקודות)

נתון היחס הבא $R \subseteq (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$: $R=\{((a,b),(c,d)) \mid a=c\}$ (הערה: $\mathbb{Z}$ היא קבוצת השלמים).

א. הוכיחו כי R הוא יחס שקילות.

הוכחה:

ב. מהן מחלקות השקילות שמשרה היחס R על $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$? הסבירו.

תיאור מחלקות השקילות:

ג.   ציינו מה עוצמתה של קבוצת המנה $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/R$ והוכיחו את תשובתכם.

ד.   נתון היחס $S \subseteq (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$: $S=\{((a,b),(c,d)) \mid a=c \quad \vee \quad b=d\}$.

מצאו את S^* , הסגור הטרנזיטיבי של S, והוכיחו תשובתכם.

<u>רמז</u> : מהו S^2?

$S^* =$

<u>הוכחה</u> :

שאלה 2 (35 נקודות)

נתונה הקבוצה $\Sigma=\{1,2,3,4\}$.

נסמן ב- Σ_n את קבוצת המחרוזות באורך n המורכבות מספרות מתוך Σ (כלומר את קבוצת ה-n-יות הסדורות המורכבות מהספרות 1, 2, 3 ו- 4).

ענו על כל אחד מהסעיפים הבאים במקומות המיועדים, ותנו הסבר <u>קצר</u> לפתרון שלכם. מותר להשאיר בפתרון מקדמי בינום (ביטויים מהצורה $\binom{x}{y}$), אולם אסור להשאיר סימני סכימה ($\sum$).

<u>הערה</u>: בכל הסעיפים בשאלה זו נדרש פתרון מפורש ולא רקורסיבי, למעט סעיף ד'.

א. מה מספר המחרוזות ב- Σ_n ?

<u>הסבר</u>:

ב. מה מספר המחרוזות ב- Σ_n שמכילות בדיוק $\frac{n}{2}$ פעמים 1 ו- $\frac{n}{2}$ פעמים 2 (n זוגי) ?

<u>הסבר</u>:

ג. מה מספר המחרוזות ב- Σ_n שמכילות בדיוק פעמיים 1 ושבע פעמים 3 ($n\geq 9$) ?

הסבר:

ד. נסמן ב- $\alpha(n)$ את מספר המחרוזות ב- Σ_n שלא מכילות את הרצף 11. תנו נוסחה רקורסיבית ל- $\alpha(n)$.

הסבר:

ה. מה מספר המחרוזות ב- Σ_n שהן מונוטוניות עולות ? (מחרוזת היא מונוטונית עולה אם כל איבר בה גדול או שווה לקודמו. למשל 222334 היא מונוטונית עולה, אבל 233434 לא).

הסבר:

ו. מה מספר המחרוזות ב- Σ_n שמכילות את כל אחת מהספרות שב- Σ לפחות פעם אחת ($n\geq4$) ?

הסבר :

ז. כעת נכליל את סעיף ו' : נתון k טבעי כלשהו, ו- $\Sigma=\{1,2,3,...,k\}$. ענו שוב על סעיף ו'. בסעיף זה מותר להשאיר סימני סכימה ($\sum$) בפתרון.

הסבר :

שאלה 3 (20 נקודות)

בכל הסעיפים בשאלה זו G הוא גרף פשוט ולא מכוון.

תזכורת: שני גרפים פשוטים ולא מכוונים $G_1=(V_1,E_1)$ ו- $G_2=(V_2,E_2)$ נקראים איזומורפיים אם קיימת פונקציה חד-חד-ערכית ועל $f: V_1\to V_2$ כך ש- a ו- b שכנים ב- G_1 אס"ם $f(a)$ ו- $f(b)$ שכנים ב- G_2. פונקציה כזאת נקראת איזומורפיזם מ- G_1 ל- G_2.

בכל אחד מהסעיפים הבאים ענו על השאלה: כמה פונקציות שהן איזומורפיזם קיימות מגרף G לעצמו? תנו הסבר קצר לתשובתכם.

שתי דוגמאות להבהרה:

- כאשר G הוא מעגל בגודל 4, קיימות 8 פונקציות שהן איזומורפיזם מ- G לעצמו.
- כאשר G הוא גרף מלא בעל n צמתים, קיימות $n!$ פונקציות שהן איזומורפיזם מ- G לעצמו (גרף מלא הוא גרף פשוט עם קשת בין כל שני צמתים שונים).

(לשתי דוגמאות אלה לא יינתן הסבר במהלך המבחן – עליכם להבין אותן לבד).

א. כאשר G הוא גרף המכיל בסה"כ 7 צמתים המסודרים בשני מעגלים זרים, אחד בגודל 3 והשני בגודל 4 (מעגלים זרים הם מעגלים שאין להם אף צומת משותף).

הסבר:

ב. כאשר G הוא גרף המכיל בסה"כ 6 צמתים המסודרים בשני מעגלים זרים, כל אחד בגודל 3.

הסבר:

ג. כאשר G הוא גרף <u>מלא</u> בעל n צמתים שמחקו ממנו קשת אחת כלשהי.

<u>הסבר</u>:

ד. כאשר G הוא גרף <u>מלא</u> בעל n צמתים שמחקו ממנו שתי קשתות סמוכות (קשתות הן סמוכות אם יש להן צומת משותף).

<u>הסבר</u>:

שאלה 4 (15 נקודות)

שימו לב: אין קשר בין שני סעיפי השאלה.

א. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: קבוצת כל הסדרות האינסופיות של אותיות מתוך הקבוצה $\{a,b,c\}$ היא בת מנייה. עליכם להקיף בעיגול את תשובתכם ולהוכיח אותה במדוייק.

הטענה נכונה / אינה נכונה (הקיפו בעיגול)

ב. תהי A הקבוצה הבאה: $A = \{\, P(\emptyset) \times P(\{1,2,5\})\,\} - \{\, (\emptyset,\emptyset), (\emptyset,1), (\emptyset,\{1\}), (\emptyset,\{\{1\}\})\,\}$.

מבין ארבעת הסעיפים הבאים, בדיוק אחד הוא נכון. הקיפו בעיגול סעיף זה. אין צורך להוכיח.

I. $|A| = 4$

II. $|A| = 6$

III. $|A| = 10$

IV. $|A| = 12$

שאלת בונוס (5 נקודות)

הקשר בין יחס הזהב וסדרת פיבונאצ׳י הוא (הקיפו בעיגול את התשובה היחידה הנכונה):

1. תוצאת החלוקה של שני איברים עוקבים בסדרת פיבונאצ׳י שואפת ליחס הזהב.
2. יחס הזהב מופיע בביטוי המפורש לאיבר הכללי בסדרת פיבונאצ׳י.
3. תשובות 1 ו- 2 נכונות.
4. פיבונאצ׳י זוכה כיום ליחס של הערכה רבה מצד מתמטיקאים בעולם, ויחס זה מכונה יחס הזהב.

בהצלחה!!