# מתמטיקה דיסקרטית – אוסף תרגילים ופתרונות

**איסוף ועריכה: עילאי הנדין**

## תוכן עניינים

### סמסטר א' תשס"ו

**תרגיל מס' 1** ........ 3

**תרגיל מס' 2** ........ 6

**תרגיל מס' 3** ........ 9

**תרגיל מס' 4** ........ 12

**תרגיל מס' 5** ........ 16

**תרגיל מס' 6** ........ 20

**תרגיל מס' 7** ........ 23

**תרגיל מס' 8** ........ 26

**תרגיל מס' 9** ........ 29

### סמסטר א' תשס"ה

**תרגיל מס' 4 (יחסי שקילות ויחסי סדר)** ........ 32

**תרגיל מס' 5 (מבוא לקומבינטוריקה)** ........ 38

**תרגיל מס' 6 (עיקרון המשלים, עיקרון ההכלה וההפרדה)** ........ 44

**תרגיל מס' 7 (זהויות קומבינטוריות)** ........ 48

**תרגיל מס' 8 (רקורסיה)** ........ 54

**תרגיל מס' 9 (מבוא לתורת הגרפים)** ........ 57

**תרגיל מס' 10 (המשך תורת הגרפים)** ........ 60

**תרגיל מס' 11 (עצים, צביעת גרפים)** ........ 63

## סמסטר א' תשס"ג


תרגיל מס' 1 (לוגיקה, אינדוקציה) ........ 66

תרגיל מס' 2 (תורת הקבוצות, יחסים) ........ 72

תרגיל מס' 3 (יחסי שקילות, פונקציות, עוצמות) ........ 81

תרגיל מס' 4 (קומבינטוריקה) ........ 96

תרגיל מס' 5 (בינום, הכלה והפרדה) ........ 104

תרגיל מס' 6 (רקורסיה, עיקרון שובך היונים) ........ 108

תרגיל מס' 7 (תורת הגרפים) ........ 111

תרגיל מס' 8 (חזרה על החומר) ........ 116


## סמסטר ב' תשס"ב


תרגיל מס' 1 (לוגיקה, אינדוקציה) ........ 121

תרגיל מס' 2 (תורת הקבוצות, יחסים) ........ 124

תרגיל מס' 3 (פונקציות, עוצמות) ........ 129

תרגיל מס' 4 (פונקציות, יחסים, קומבינטוריקה) ........ 135

תרגיל מס' 5 (קומבינטוריקה) ........ 139

תרגיל מס' 6 (רקורסיה, עיקרון שובך היונים) ........ 147

תרגיל מס' 7 (תורת הגרפים) ........ 151

# תרגיל ראשון במתמטיקה דיסקרטית

הגשה בזוגות בלבד, עד ל- 14.11.2005 בשעה 12:00 לתא הקורס.
הערה: הסימונים $\Leftrightarrow$ (מהתרגול), ו- $\equiv$ (מההרצאה) מסמנים את פעולת השקילות. למען העקביות נשתמש בסימון מההרצאה בלבד.

1) (20 נקודות) ציינו אלו מהקבוצות הבאות שוות זו לזו:

* תזכורת: קבוצות שוות אם הן מכילות את אותן איברים)

א) $\{x \mid x = 2k, k \in Z, 0 < k < 10\}$
ב) $\{8,6,2,4\}$
ג) {x | x < 10 ,x זוגי}
ד) $\{4,8,6,4,4,8,6,3,8\}$
ה) $\{4,6,2,6,2,4,8,4,2,6,6,4,2\}$
ו) $\{x \mid x = 2k, k \in N, k < 10\}$
ז) {x | x = k+1 ,k < 10 ,k הוא ראשוני}

2) (40 נקודות) היעזרו בטבלת אמת בכדי להוכיח את שקילות הטענות הבאות:

* תזכורת מההרצאה: טבלת האמת של "אם-אז" היא הטבלה הבאה:

| a | b | $a \to b$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

א) $T \equiv ((a \to b) \to a) \to a$
ב) $T \equiv (a \wedge (a \to b)) \to b$
ג) $a \to b \equiv \sim b \to \sim a$
ד) $(a \wedge b) \to c \equiv a \to (b \to c)$

3) (40 נקודות) הוכיחו בעזרת עקרון ההחלפה את הטענות הבאות:
א) $a \wedge (b \wedge (\sim c)) \equiv (a \wedge b) \wedge (\sim (a \wedge c))$
ב) $a \wedge (\sim (b \wedge (\sim c))) \equiv (a \wedge (\sim b)) \vee (a \wedge c)$

(רמז: השתמשו בחוקי הקיבוץ (אסוציאטיביות), הפילוג (דיסטריביוטיביות), ובחוקי דה-מורגן)
(החוקים מופיעים בשקף 33 של ההרצאה הראשונה של עודד)

# פתרון תרגיל ראשון במתמטיקה דיסקרטית

תשובה לשאלה 1:

הקבוצות א', ו-ו' הן שוות זו לזו. הקבוצות ב',ו-ה', הן זוג נוסף, ו-ד', ו-ז' אף הן, שוות זו לזו. ג' אינה שווה לאף קבוצה (מכילה איברים שלילים).

תשובה לשאלה 2:

א.

| a | b | $a\to b$ | $(a\to b)\to a$ | $((a\to b)\to a)\to a$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | **T** |
| T | F | F | T | **T** |
| F | T | T | F | **T** |
| F | F | T | F | **T** |

ב.

| a | b | $a\to b$ | $a\wedge(a\to b)$ | $(a\wedge(a\to b))\to b$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | **T** |
| T | F | F | F | **T** |
| F | T | T | F | **T** |
| F | F | T | F | **T** |

ג.

| a | b | **$a\to b$** | $\sim a$ | $\sim b$ | **$\sim b\to\sim a$** |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | **T** | F | F | **T** |
| T | F | **F** | F | T | **F** |
| F | T | **T** | T | F | **T** |
| F | F | **T** | T | T | **T** |

ד.

| a | b | c | $a\wedge b$ | **$(a\wedge b)\to c$** | $b\to c$ | **$a\to(b\to c)$** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | **T** | T | **T** |
| T | T | F | T | **F** | F | **F** |
| T | F | T | F | **T** | T | **T** |
| T | F | F | F | **T** | T | **T** |
| F | T | T | F | **T** | T | **T** |
| F | T | F | F | **T** | F | **T** |
| F | F | T | F | **T** | T | **T** |
| F | F | F | F | **T** | T | **T** |

3.

א. צ"ל (צריך להוכיח): $a \wedge (b \wedge (\sim c)) \equiv (a \wedge b) \wedge (\sim (a \wedge c))$

$(a \wedge b) \wedge (\underline{\sim (a \wedge c)}) =$ לפי דה-מורגן

$\sim (A \wedge B)$

$= (\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{(\sim a \vee \sim c)} =$ לפי חוקי האסוצאיטיביות

$(A \wedge B) \wedge \quad C$

$= a \wedge (\underline{b} \wedge (\underline{\sim a} \vee \underline{\sim c}) =$ לפי חוקי הדיסטריביוטיביות

$A \wedge ( B \vee C )$

$= \underline{a} \wedge (\underline{(b \wedge \sim a)} \vee \underline{(b \wedge \sim c)}) =$ לפי חוקי הדיסטריביוטיביות

$A \wedge ( \quad B \quad \vee \quad C \quad )$

$= (a \wedge (\underline{b} \wedge \underline{\sim a})) \vee (a \wedge (b \wedge \sim c)) =$ לפי חוקי הקומוטטיביות

$A \wedge B$

$= (\underline{a} \wedge (\underline{\sim a} \wedge \underline{b})) \vee (a \wedge (b \wedge \sim c)) =$ לפי חוקי האסוציאטיביות

$A \wedge ( B \wedge C)$

$= ((\underline{a} \wedge \underline{\sim a}) \wedge b) \vee (a \wedge (b \wedge \sim c)) =$ נעזר בחוק ש- $(a \wedge \sim a)$ הוא סתירה

$= (\underline{F} \wedge \underline{b}) \vee (a \wedge (b \wedge \sim c)) =$ נעזר ב"חוק השליטה"

$= \underline{F} \vee \underline{(a \wedge (b \wedge \sim c))} =$ נעזר ב"כלל הזהות"

$= a \wedge (b \wedge \sim c)$ מה שהיה להוכיח (מ.ש.ל.)

ב. צ"ל: $a \wedge (\sim (b \wedge (\sim c))) \equiv (a \wedge (\sim b)) \vee (a \wedge c)$

$a \wedge (\sim (\underline{b} \wedge \underline{(\sim c)})) =$ לפי חוקי דה-מורגן

$\sim (A \wedge \quad B \quad )$

$= a \wedge (\sim b \vee \underline{\sim(\sim c)}) =$ לפי "שלילה כפולה"

$= \underline{a} \wedge (\underline{\sim b} \vee \underline{c})) =$ לפי חוקי הדיסטריביוטיביות

$A \wedge ( B \vee C)$

$= (a \wedge (\sim b)) \vee (a \wedge c)$ מ.ש.ל.

## <u>תרגיל שני במתמטיקה דיסקרטית</u>

הגשה בזוגות בלבד עד ל-21.11.2005, בשעה 12:00 לתא הקורס.

1) (40 נקודות) בדקו האם כללי ההיסק הבאים נכונים, בעזרת טבלת אמת:

א. $a, a \to c \Rightarrow b \to c$

ב. $\sim a, a \vee b \Rightarrow c \to b$

ג. $a \to c, c \to b, a \Rightarrow c \wedge b$

ד. $a, c \to a, \sim b \to \sim a \Rightarrow c \vee \sim b$

2) (20 נקודות) נתונים כללי ההיסק הבאים:

**i.** $\mathbf{a,\ a \to b \ \Rightarrow\ b}$

ii. $a \Rightarrow b \to a$

**iii.** $\mathbf{a \to (b \to c) \Rightarrow (a \to b) \to (a \to c)}$

iv. $(\sim a \to \sim b) \Rightarrow (\sim a \to b) \to a$

הוכיחו בעזרת כללי ההיסק הנתונים בלבד את כללי ההיסק הבאים:

א. $b \to a, b \to (a \to c) \Rightarrow b \to c$

ב. $\sim b, \sim a \to b \Rightarrow a$

3) (30 נקודות) <u>קבעו</u> אילו מהפסוקים הבאים נכונים ואילו אינם, <u>ונמקו</u> למה:

א. $\varnothing \in \varnothing$

ב. $\varnothing \subseteq \varnothing$

ג. $\varnothing \in \{\varnothing\}$

ד. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

ה. $\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$

ו. $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$

ז. $\{1, \varnothing\} \subseteq \{1,\{1, \varnothing\}\}$

ח. $\{1, \varnothing\} \in \{1,\{1, \varnothing\}\}$

ט. $\varnothing \in \{1,\{\varnothing\}, 2\}$

י. $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{1,\{\varnothing\}, 2\}$

4) (10 נקודות) הוכיחו או הפריכו:

$$P(A) = P(B) \ \Rightarrow\ A = B$$

דף תרגילים 2- דף פתרונות

תשובה 1

א.

| a | b | c | $a \to c$ | $a \wedge a \to c$ | $b \to c$ | $(a \wedge a \to c) \to (b \to c)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | F | F | F | T |
| T | F | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T | T |
| F | T | T | T | F | T | T |
| F | T | F | T | F | F | T |
| F | F | T | T | F | T | T |
| F | F | F | T | F | T | T |

ב.

| a | b | c | ~a | $a \vee b$ | $\sim a \wedge (a \vee b)$ | $c \to b$ | $(\sim a \wedge (a \vee b)) \to (c \to b)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T | F | T | T |
| T | T | F | F | T | F | T | T |
| T | F | T | F | T | F | F | T |
| T | F | F | F | T | F | T | T |
| F | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | T | T | T | T | T |
| F | F | T | T | F | F | F | T |
| F | F | F | T | F | F | T | T |

ג.

| a | b | c | $a \to c$ | $c \to b$ | $(a \to c) \wedge (c \to b)$ | $a \wedge (a \to c) \wedge (c \to b)$ | $c \wedge b$ | $(a \wedge (a \to c) \wedge (c \to b)) \to c \wedge b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | F | T | F | F | F | T |
| T | F | T | T | F | F | F | F | T |
| T | F | F | F | T | F | F | F | T |
| F | T | T | T | T | T | F | T | T |
| F | T | F | T | T | T | F | F | T |
| F | F | T | T | F | F | F | F | T |
| F | F | F | T | T | T | F | F | T |

ד.

| a | b | c | ~a | ~b | c→a | ~b→~a | a∧(c→a) | a∧(c→a)∧(~b→~a) | c∨~b | (a∧(c→a)∧~b→~a) →(c∨~b) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | F | F | T | T | T | T | F | F |
| T | F | T | F | T | T | F | T | F | T | T |
| T | F | F | F | T | T | F | T | F | T | T |
| F | T | T | T | F | F | T | F | F | T | T |
| F | T | F | T | F | T | T | F | F | F | T |
| F | F | T | T | T | F | T | F | F | T | T |
| F | F | F | T | T | T | T | F | F | T | T |

תשובה 2

א.

3, b->(a->c) => (b->a)->(b->c)

(b->a), (b->a)->(b->c), 1 => (b->c)

ב.

2, ~b => ~a->~b

~a->~b, 4=> (~a->b)->a

1, (~a->b)->a, ~a->b =>a

תשובה 3

א. לא נכון. לקבוצה הריקה אין איברים (ובפרט "הקבוצה הריקה" אינה איבר בה).
ב. נכון. הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה.
ג. נכון. הקבוצה הריקה היא איבר ב- $\{\emptyset\}$.
ד. נכון. שוב, הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה.
ה. לא נכון. $\{\emptyset\}$ אינה איבר ב- $\{\emptyset\}$.
ו. נכון. כל איברי $\{\emptyset\}$ (כלומר $\emptyset$) הם איברים של $\{\emptyset\}$.
ז. לא נכון. $\emptyset$ אינו 1 ואינו $\{1, \emptyset\}$ ולכן אינו איבר ב- $\{1,\{1,\emptyset\}\}$.
ח. נכון. הקבוצה $\{1,\emptyset\}$ היא איבר בקבוצה $\{1,\{1,\emptyset\}\}$.
ט. לא נכון. $\emptyset$ אינו $\{\emptyset\}$ ולכן אינו שייך לקבוצה.
י. נכון. כל איברי $\{\{\emptyset\}\}$ (כלומר $\{\emptyset\}$ ) הם האיברים בקבוצה $\{1,\{\emptyset\},2\}$.

תשובה 4

יהי $a\in A$ כלשהו. $\Leftrightarrow$ (מהגדרת הכלה)

$\Leftrightarrow$ $\{a\}\subseteq A$ $\Leftrightarrow$ (מהגדרת קבוצת החזקה)

$\Leftrightarrow$ $\{a\}\in P(A)$ $\Leftrightarrow$ (מהנתון $P(A)=P(B)$)

$\Leftrightarrow$ $\{a\}\in P(B)$ $\Leftrightarrow$ (מהגדרת קבוצת החזקה)

$\Leftrightarrow$ $\{a\}\subseteq B$ $\Leftrightarrow$ (מהגדרת הכלה)

$\Leftrightarrow$ $a\in B$

# מתמטיקה דיסקרטית - דף תרגילים 3

הגשה עד יום שני (5.12.2005) בשעה 12:00.

שאלה 1. (10 נקודות)
נתונות הקבוצות: $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$ $C=\{3,4\}$. מהן הקבוצות הבאות:

א. $Ax(BxC) = ?$
ב. $AxBxC = ?$
ג. $Ax((BxA)xC) = ?$

שאלה 2. (90 נקודות)
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $A\cap B=\varnothing \;\Rightarrow\; P(A)\cap P(B) = \varnothing$
ב. $A\cap B = \{\varnothing\} \;\Rightarrow\; P(A)\cap P(B)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
ג. $A\cap(BxC) = (A\cap B)x(A\cap C)$
ד. $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$
ה. אם R הוא יחס סימטרי וטרנזיטיבי אז R הוא יחס רפלקסיבי.
ו. נתונים S,R יחסים סימטריים מעל A. RS הוא יחס סימטרי $\Leftrightarrow$ SR=RS
ז. אם R הוא יחס רפלקסיבי אז $R\subseteq R^2$.
ח. נתונים T,S,R יחסים. $R(S\cup T) = RS\cup RT$
ט. נתונים T,S,R יחסים. $R(S\cap T) = RS\cap RT$ (שאלת בונוס)

## מתמטיקה דיסקרטית – פתרונות לדף 3

שאלה 1.

א. $BxC = \{(2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$, ולכן

$Ax(BxC)=\{(1,(2,3)), (1,(2,4)), (1,(3,3)), (1,(3,4)), (2,(2,3)), (2,(2,4)), (2,(3,3)), (2,(3,4))\}$

ב. $AxBxC = \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,3), (1,3,4), (2,2,3), (2,2,4), (2,3,3), (2,3,4)\}$

ג. $BxA = \{(2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$

$(BxA)xC = \{((2,1),3), ((2,1),4), ((2,2),3), ((2,2),4), ((3,1),3), ((3,1),4), ((3,2),3), ((3,2),4)\}$

$Ax((BxA)xC) = \{(1, ((2,1), 3) ),\ (1, ((2,1), 4) ),\ (1, ((2,2), 3) ),\ (1, ((2,2), 4) ),$
$(1, ((3,1), 3) ),\ (1, ((3,1), 4) ),\ (1, ((3,2), 3) ),\ (1, ((3,2), 4) ),$
$(2, ((2,1), 3) ),\ (2, ((2,1), 4) ),\ (2, ((2,2), 3) ),\ (2, ((2,2), 4) ),$
$(2, ((3,1), 3) ),\ (2, ((3,1), 4) ),\ (2, ((3,2), 3) ),\ (2, ((3,2), 4) )\}$

שאלה 2.

א. הטענה אינה נכונה.

$\varnothing$ מוכל בכל קבוצה, ולכן הוא איבר בכל קבוצת חזקה,

כלומר $\{\varnothing\}\subseteq P(A) \cap P(B)$, ולכן $P(A) \cap P(B) \neq \varnothing$.

ב. הטענה נכונה. הוכחה ישירה:

יהיו B,A קבוצות כך ש- $A \cap B = \{\varnothing\}$.

נוכיח שמתקיים $P(A) \cap P(B) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

יהי $X\in P(A) \cap P(B)$ כלשהו. $\Leftrightarrow$ לפי הגדרת חיתוך קבוצות

$(X\in P(A)) \wedge (X\in P(B)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ לפי הגדרת קבוצת חזקה

$(X\subseteq A) \wedge (X\subseteq B) \Leftrightarrow$

אם $X=\varnothing$ אז מתקיים $(\varnothing\subseteq A) \wedge (\varnothing\subseteq B)$, ולכן $\varnothing\in P(A) \cap P(B)$.

אם $X\neq\varnothing$ אז מהגדרת הכלה נקבל $\forall x\in X.\ x\in A \wedge x\in B$. $\Leftrightarrow$ לפי הגדרת חיתוך

$x\in A \cap B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ מהנתון $A \cap B = \{\varnothing\}$

$X=\{\varnothing\} \Leftarrow x=\varnothing \Leftrightarrow$ (כי האיבר האפשרי היחיד של X הוא $\varnothing$)

ומכאן ש $\{\varnothing\}\in P(A) \cap P(B)$.

אין עוד אפשרויות אחרות ולכן הטענה נכונה.

ג. הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית: $A=B=C=\{1\}$

$A\cap(BxC) = \{1\} \cap \{(1,1)\} = \varnothing$

$(A\cap B)x(A\cap C) = (\{1\}\cap\{1\})\ x\ (\{1\} \cap \{1\}) = \{1\}\ x\ \{1\} = \{(1,1)\}$

ד. נוכיח בעזרת הכלה כפולה:

יהי $(x,y)\in(R\cup S)^{-1}$ $\Leftrightarrow$ לפי הגדרת יחס הופכי

$(y,x)\in(R\cup S) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ לפי הגדרת איחוד קבוצות

$((y,x)\in R) \vee ((y,x)\in S) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ לפי הגדרת יחס הופכי

$((x,y)\in R^{-1}) \vee ((x,y)\in S^{-1}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ לפי הגדרת איחוד קבוצות

$(x,y)\in R^{-1}\cup S^{-1} \Leftrightarrow$

ה. הטענה אינה נכונה.
דוגמא נגדית: היחס הריק הוא סימטרי וטרנזיטיבי, אך אינו רפלקסיבי.

ו. הוכחה ישירה. ראשית נוכיח $SR=RS \Rightarrow RS$ הוא יחס סימטרי.
יהי $(x,y) \in RS$ כלשהו. $\Leftrightarrow$ מהנתון $SR=RS$
$\Leftrightarrow (x,y) \in SR \Leftrightarrow$ $S,R$ סימטריים מעל $A$. $(R=R^{-1}, S=S^{-1})$
$\Leftrightarrow (x,y) \in S^{-1}R^{-1} \Leftrightarrow$ מהגדרת מכפלת יחסים
$\Leftrightarrow \exists a\in A.\ (x,a)\in S^{-1} \wedge (a,y)eR^{-1} \Leftrightarrow$ מהגדרת יחס הופכי
$\Leftrightarrow \exists a\in A.\ (a,x)\in S \wedge (y,a)eR \Leftrightarrow$ מהגדרת מכפלת יחסים
$\Leftrightarrow (y,x)\in RS$ מ.ש.ל.

כיוון שני: נוכיח שאם $RS$ סימטרי אז $SR=RS$.
יהי $(x,y) \in RS$ כלשהו. $\Leftrightarrow$ מהנתון ש- $RS$ סימטרי
$\Leftrightarrow (y,x) \in RS \Leftrightarrow$ מהגדרת מכפלת יחסים
$\Leftrightarrow \exists a\in A.\ (a,x)\in S \wedge (y,a)eR \Leftrightarrow$ מהגדרת יחס הופכי
$\Leftrightarrow \exists a\in A.\ (x,a)\in S^{-1} \wedge (a,y)eR^{-1} \Leftrightarrow$ מהגדרת מכפלת יחסים
$\Leftrightarrow (x,y) \in S^{-1}R^{-1} \Leftrightarrow$ $S$ ,$R$ סימטריים מעל $A$.
$\Leftrightarrow (x,y) \in SR$ מ.ש.ל.

ז. ההוכחה הישירה מופיעה בשקף 4 של הרצאה מספר 5.

ח. הוכחה ישירה ע"י "הכלה כפולה":
ראשית נוכיח: $R(S\cup T) \subseteq RS\cup RT$
יהי $(a,b) \in R(S\cup T)$ כלשהו $\Leftrightarrow$ לפי הגדרת מכפלת היחסים
$\Leftrightarrow \exists x.\ (a,x)\in R \wedge (x,b)\in(S\cup T) \Leftrightarrow$ לפי הגדרת איחוד
$\Leftrightarrow \exists x.\ (a,x)\in R \wedge (\ (x,b)\in S) \vee (\ (x,b)\in T) \Leftrightarrow$ לפי חוק הדיסטריביוטיביות
$\Leftrightarrow \exists x.\ ((a,x)\in R \wedge (x,b)\in S) \vee ((a,x)\in R \wedge (x,b)\in T) \Leftarrow$
$\Leftarrow (\exists x.\ (a,x)\in R \wedge (x,b)\in S)) \vee (\exists x.\ (a,x)\in R \wedge (x,b)\in T)) \Leftrightarrow$ לפי הגדרת מכפלת יחסים
$\Leftrightarrow ((a,b)\in RS) \vee ((a,b)\in RT) \Leftrightarrow$ לפי הגדרת איחוד
$\Leftrightarrow (a,b)\in RS\cup RT$ מ.ש.ל.

שנית נוכיח: $RS\cup RT \subseteq R(S\cup T)$
יהי $(a,b)\in RS\cup RT$ כלשהו $\Leftrightarrow$ לפי הגדרת איחוד
$\Leftrightarrow (a,b)\in RS \vee (a,b)\in RT \Leftrightarrow$ לפי הגדרת כפל יחסים
$\Leftrightarrow (\exists x.\ (a,x)\in R \wedge (x,b)\in S)) \vee (\exists y.\ (a,y)\in R \wedge (y,b)\in T)) \Leftarrow T,S \subseteq S\cup T$
$\Leftarrow (\exists x.\ (a,x)\in R \wedge (x,b)\in S\cup T)) \vee (\exists y.\ (a,y)\in R \wedge (y,b)\in S\cup T)) \Leftrightarrow$ לפי הגדרת כפל יחסים
$\Leftrightarrow ((a,b)\in R(S\cup T)) \vee ((a,b)\in R(S\cup T)) \Leftrightarrow a\vee a = a$
$\Leftrightarrow (a,b)\in R(S\cup T)$ מ.ש.ל.

ט. דוגמא נגדית: $R=\{(1,2), (1,3)\}, S=\{(2,4)\}, T=\{(3,4)\}$
נקבל: $RS=\{(1,4)\}, RT=\{(1,4)\}$, ולכן $RS\cap RT=\{(1,4)\}$,
אולם $S\cap T=\varnothing$, ולכן $R(S\cap T)=\varnothing$ אף הוא.

# מתמטיקה דיסקרטית - דף תרגילים 4

הגשה עד יום שני (12.12.2005) בשעה 12:00.

(20 נקודות) שאלה 1.
בידקו עבור היחסים (מעל A) הבאים, האם הם יחסי שקילות.
אם אכן מדובר ביחס שקילות, רשמו את קבוצת המנה שלו.
אחרת, מצאו את $B \subseteq A$ שגודלה מקסימלי, כך ש-R יהיה שקילות מעל B.

א. $A=\{1,2,3,4\}, R=\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
ב. $A=Z, R=\{(x,y) | (x-y) \bmod 5=0\}$
ג. $A=P(\{1,2\}), R=\{(X,Y) | X \subseteq Y\}$
ד. $A=Z, R=\{(x,y) | \exists k \in Z. (x-y)=5k\}$

(**20+10** נקודות) שאלה 2.
בידקו עבור היחסים (מ-A ל-B) האם הם פונקציות חח"ע והאם הם פונקציות על.
אם היחס אינו פונק' חח"ע או על, הסבירו אילו שינויים צריכים לבצע ב-A וב-B, על מנת שהיחס יהיה פונק' חח"ע ועל.

א. $A=\{5,...,100\}, B=\{1,...,105\}, R=\{(x,y) | x=y-5\}$
ב. $A=N, B=Z, R=\{(x,y) | y=5\}$
ג. $A=Z, B=N, R=\{(x,y) | y=x^2\}$
ד. $A=\{x | (2x) \in N\}, B=N, R=\{(x,y) | (y+3x+0.5) \in N\}$

(10 נקודות) שאלה 3.
נתונים S,R יחסי שקילות מעל A. האם $S \cap R$, ו- $S \cup R$ הם גם יחסי שקילות?

(**50+5** נקודות) שאלה 4.
נתונות $f:A \to B, g:B \to C$ פונקציות.

א. אם f,g פונק' חח"ע, האם fg היא חח"ע?
ב. אם f,g פונק' על, האם fg היא על?
ג. אם fg היא חח"ע האם מתקיים (f היא על אם"ם g היא חח"ע)?
ד. נניח ש- C=A, וכן ש- $fg=I_A$. האם $g=f^{-1}$?

# מתמטיקה דיסקרטית – פתרונות לדף 4

**שאלה 1**. (20 נקודות)

א. $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)$ שייכים ליחס ולכן הוא **רפלקסיבי**.

$(1,2)\notin R \wedge (2,1)\notin R$,
$(1,3)\notin R \wedge (3,1)\notin R$,
$(1,4)\in R \wedge (4,1)\in R$,
$(3,2)\in R \wedge (3,2)\in R$,
$(4,2)\notin R \wedge (2,4)\notin R$,
$(4,3)\notin R \wedge (3,4)\notin R$. ולכן **הסימטריות** מתקיימת.

$(1,4)\in R \Leftarrow (1,1)\in R,\ (1,4)\in R$
$(4,1)\in R \Leftarrow (4,1)\in R,\ (1,1)\in R$
$(1,4)\in R \Leftarrow (1,4)\in R,\ (4,4)\in R$
$(4,1)\in R \Leftarrow (4,4)\in R,\ (4,1)\in R$ ובאופן זהה מתקיים עבור 2,3, ולכן **הטרנזיטיביות** מתקיימת.

**קבוצת המנה**: $A/R = \{ \{1,4\}, \{2,3\} \}$

ב. **רפלקסיביות**: נראה $\forall x\in Z.(x,x)\in R$. יהי $x\in Z$ כלשהו. $(x-x)\text{mod}5=0 \text{ mod } 5 = 0$ ולכן הרפלקסיביות מתקיימת.

**סימטריות**: נראה $\forall x,y\in Z.(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R$.
יהי $x,y$ כלשהם המקיימים $(x,y)\in R$. $\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת היחס)
$\Leftrightarrow (x-y)\text{mod}5=0$ $\Leftrightarrow$ (אם $x-y$ מתחלק ב-5 ללא שארית, אז גם $(x-y)$- מתחלק ב-5)
$\Leftrightarrow (y-x)\text{mod}5=0$ $\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת היחס)
$\Leftrightarrow (y,x)\in R$. מ.ש.ל.

**טרנזיטיביות**: נראה $\forall x,y,z\in Z.(x,y)\in R \wedge (y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$
יהי $x,y,z\in Z$ כלשהם המקיימים: $(x,y)\in R \wedge (y,z)\in R$. $\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת היחס)
$\Leftrightarrow (x-y)\text{mod}5=0 \wedge (y-z)\text{mod}5=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((y-z)/5)\in Z \wedge ((x-y)/5) \in Z \Leftarrow$ (סגירות השלמים לחיסור)
$\Leftarrow [(x-y)/5 - (y-z)/5]\in Z \Leftrightarrow$ $( (x-z)/5=[(x-y)-(y-z)]/5 = [(x-y)/5 - (y-z)/5] )$
$\Leftrightarrow (x-z)/5\in Z \Leftrightarrow (x,z)\text{mod}5 = 0 \Leftrightarrow$ (לפי הגדרת היחס)
$\Leftrightarrow (x,z)\in R$

**קבוצת המנה**: $A/R=\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$,
כאשר $[0]=\{0,\pm5,\pm10,...\}$, $[1]=\{...,-9,-4,1,6,...\}$, $[2]=\{...,-8,-3,2,7,...\}$
$[3]=\{...,-7,-2,3,8,...\}$, $[4]=\{...,-6,-1,4,9,...\}$

ג. $(\{1\},\{1,2\})\in R$, אך $(\{1,2\},\{1\})\notin R$ ולכן היחס **אינו סימטרי**.
$A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.
כל $B\subseteq A$ המקיים $|B|=1$ יגרום ליחס להיות סימטרי (וכן היחס יהיה טרנזיטיבי ורפלקסיבי).
אך גם עבור $B=\{\{1\},\{2\}\}$, היחס יהיה סימטרי שכן $(\{1\},\{2\}), (\{2\},\{1\})\notin R$.

ד. **רפלקסיביות**: יהי $x\in Z$ כלשהו. $(x-x)=0=0*5$. (0 הוא ה-k שאת קיומו צריך להבטיח), ולכן הרפלקסיביות מתקיימת.

**סימטריות**: נראה $\forall x,y\in Z.(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R$.
יהי $x,y$ כלשהם המקיימים $(x,y)\in R$. $\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת היחס)
$\Leftrightarrow$ קיים $k$ שלם כך ש $(x-y)=5k$ $\Leftrightarrow$ (נכפיל ב: 1-)
$\Leftrightarrow$ קיים $k$ שלם כך ש $(y-x)=5(-k)$ $\Leftrightarrow$ (נסמן $z=-k$)
$\Leftrightarrow$ קיים $z$ שלם כך ש $(y-x)=5z$ $\Leftrightarrow$(לפי הגדרת היחס)
$\Leftrightarrow (y,x)\in R$. מ.ש.ל.

**טרנזיטיביות**:
נראה $\forall x,y,z\in Z.(x,y)\in R \wedge (y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$
יהי $x,y,z\in Z$ כלשהם המקיימים: $(x,y)\in R \wedge (y,z)\in R$. $\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת היחס)
$\Leftrightarrow$ קיימים $k_1,k_2$ המקיימים: $(x-y)=5k_1 \wedge (y-z)=5k_2$ $\Leftrightarrow$ (נחבר את 2 המשוואות)
$\Leftrightarrow$ קיימים $k_1,k_2$ המקיימים: $(x-z)=(x-y)+(y-z)=5*(k_1+k_2)$ $\Leftarrow$ (נסמן $k_3= k_1+k_2$)
$\Leftarrow$ קיים $k_3$ המקיים: $(x-z)=5k_3$ $\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת היחס)
$\Leftrightarrow (x,z)\in R$
**קבוצת המנה** המתקבלת היא בדיוק קבוצת המנה של סעיף ב'.

**שאלה 2**. (20 נקודות למי שהראה רק שינוי ספציפי + 10 נקודות למי שהראה את כל האפשרויות)

א. נוכיח שלכל $x\in A$ קיים $y\in B$ יחיד המקיים $y-5=x$, או לחלופין $y=x+5$.
**קיום**: יהי $x\in A$ כלשהו. $\Leftrightarrow$ $5\le x\le 100$, (x שלם) $\Leftrightarrow$ $10\le x+5\le 105$, (x שלם) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ נסמן $y=x+5$ ונקבל $10\le y\le 105$, (y שלם) ולכן קיים $y\in B$ מתאים.
**יחידות**: עבור $x\in A$ כלשהו, נניח (לשם הבאה לסתירה) שקיימים $y_1\neq y_2\in B$, כך ש-
$(x,y_1),(x,y_2)\in R$ $\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת היחס) $x=y_1-5, x=y_2-5$ $\Leftrightarrow$ $y_1-5=y_2-5$ $\Leftrightarrow$ $y_1=y_2$,
אך זו סתירה להנחה ש-$y_1\neq y_2$
ולכן מדובר **בפונקציה**.
נבדוק **חח"ע**: יהיו $x_1\neq x_2\in A$ כלשהם. קיימים עבורם $y_1,y_2\in B$, כך ש $(x_1,y_1)\in R$, $(x_2,y_2)\in R$.
$\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת היחס) $y_1=x_1-5, y_2=x_2-5$. נניח לשם הבאה לסתירה ש $y_1=y_2$,
ונקבל ש- $x_1-5=x_2-5$ $\Leftrightarrow$ $x_1=x_2$, בסתירה לנתון, ולכן $y_1\neq y_2$.
הפונקציה **אינה על**: ראינו קודם שלכל האיברים ב-B פרט ל- 1-9 יש מקור.
**השינוי** הנדרש הוא להסיר את 1 עד 9 מ-B (או להוסיף להם מקורות ב-A).

ב. היחס המדובר הוא **פונקציה**, שכן לכל $x\in A$ **קיימת תמונה** ($5\in B$), כך ש $(x,5)\in R$, ואין תמונה אחרת המתאימה ל-x (**יחידות**).
הפונק' **אינה חח"ע** מכיוון שלכל שני איברים שונים יש את אותה תמונה (5).
הפונק' **אינה על** מכיוון שלכל $y\in B$, שאינו 5 אין מקור.
לכן **השינוי** הנדרש- לצמצם את B להיות {5} ולצמצם את A להיות קבוצה בת איבר אחד.

ג. היחס המדובר **אינו פונקציה**, שכן ל-0 אין תמונה. פרט ל-0, לכל $x\in Z$ מתקיים ש- $x^2\in N$, וכן מתקיים ש- $x^2$ הוא יחיד. (עבור x אין שני מספרים השווים ל-$x^2$).
לכן אם נשמיט את 0 מ-A, (או שנוסיף את 0 לטווח B) תתקבל פונקציה.
הפונקציה אינה חח"ע בתחום המצומצם (ללא 0): עבור $y\in N$ מסויים המקיים $y=x^2$,
מתקיים $y=(-x)^2$, ולכן אם לתמונה קיים מקור, קיים לה מקור נוסף (הנגדי שלו).
הפונקציה (בתחום המצומצם) אינה על, מכיוון שלכל y שאינו ריבוע של מספר שלם (כדוגמת 3,5,6,7,8) אין מקור בתחום.
לכן השינוי הנדרש- להוציא את 0 מהתחום (או להוסיפו לטווח), להוציא את כל השליליים מהתחום (או להוציא את כל החיוביים, העיקר שמכל צמד מספרים $\pm x$ יישאר רק אחד), ולהוציא מהטווח את כל המספרים שאינם ריבוע של מספר שלם (או להוסיף את שורשיהם לתחום).

ד. ראשית נבחין שאם $x=k+0.5$, כאשר k שלם, אז לכל $y\in N$ מתקיים $y+3x+0.5\in N$,
ואם x שלם אז לכל $y\in N$ מתקיים $y+3x+0.5\notin N$. כלומר ל-x-ים מהסוג הראשון יש אינסוף תמונות (אין יחידות) ול-x-ים מהסוג השני אין אפילו תמונה אחת (אין קיום).
על מנת שיהיה מדובר בפונקציה, נצטרך להשמיט מהתחום את ה-x-ים מהסוג השני (או להוסיף לטווח את $k+0.5$ עבור k שלם כלשהו (יחיד), לדוגמא נוסיף את 0.5 לטווח), וכמו כן נצטרך להשאיר בטווח רק איבר אחד שיקיים עבור ה-x-ים מהסוג הראשון $y+3x+0.5\in N$, לדוגמא נשאיר רק את 1.
כעת שמדובר בפונקציה האם היא חח"ע והאם היא על?

מכיוון שלכל $y\in N$ ראינו שיש xים מהסוג הראשון שמתאימים לו, ונשארו עדיין x כאלה, אז הפונקציה תישאר על, גם אחרי צמצום הטווח.
הפונקציה אינה חח"ע מכיוון שלכל ה-xים מהסוג ראשון התאמנו את אותו איבר (בחרנו את 1) (ואם הוספנו את 0.5 לטווח, אז הוא התמונה של כל ה-xים מהסוג השני)
לכן, בכדי שהפונקציה תהיה גם חח"ע נאלץ להשאר עם איבר אחד מהסוג הראשון (אם הוספנו את 0.5 לטווח, אז נאלץ להשאר רק עם איבר אחד מהסוג השני).
לדוגמא אם נצמצם את התחום ל- $\{1.5, 2\}$ ונשנה את הטווח להיות $\{0.5, 1\}$, אז היחס יהיה פונקציה חח"ע ועל.

**<u>שאלה 3</u>** (10 נקודות)
נוכיח ש- $S\cap R$ הוא יחס שקילות.
**<u>רפלקסיביות</u>**: S ו-R הם רפלקסיביים ולכן $I_A\subseteq S,\ I_A\subseteq R$ <= $I_A\subseteq S\cap R$, כלומר $S\cap R$ רפלקסיבי.
**<u>סימטריות</u>**: יהי $(a,b)\in S\cap R$ כלשהו $\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת חיתוך)
$\Leftrightarrow (a,b)\in S \wedge (a,b)\in R \Leftrightarrow$ (נתון ש-S,R הם סימטריים)
$\Leftrightarrow (b,a)\in S \wedge (b,a)\in R \Leftrightarrow$ (לפי הגדרת חיתוך)
$\Leftrightarrow (b,a)\in S\cap R$
**<u>טרנזיטיביות</u>**: יהיו $(a,b), (b,c)\in S\cap R$ כלשהם. $\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת חיתוך)
$\Leftrightarrow [(a,b)\in S \wedge (a,b)\in R] \wedge [(b,c)\in S \wedge (b,c)\in R] \Leftrightarrow$ (לפי אסוציאטיביות)
$\Leftrightarrow [(a,b)\in S \wedge (b,c)\in S] \wedge [(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R] \Leftrightarrow$ (S,R טרנזיטיביים)
$\Leftrightarrow (a,c)\in S \wedge (a,c)\in R \Leftrightarrow$ (לפי הגדרת חיתוך)
$\Leftrightarrow (a,c)\in S\cap R$

גם $S\cup R$ הוא יחס רפלקסיבי וסימטרי, אך הוא אינו בהכרח טרנזיטיבי, ולכן אינו שקילות. **<u>דוגמא נגדית</u>**:
$A=\{1,2,3\},\ S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\},\ R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$
ונקבל: $S\cup R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(3,2),(2,1)\}$, אך $(1,3),(3,1)\notin S\cup R$.

**<u>שאלה 4</u>** (50 נקודות- כל השאלות שוות ניקוד + 5 נקודות בונוס אפשריות)

א. יהי $a_1\neq a_2\in A$ כלשהם. נתון ש-f היא חח"ע ולכן $f(a_1)\neq f(a_2)$.
מהעובדה ש- $f(a_1)\neq f(a_2)\in B$ ומהנתון ש-g היא חח"ע נובע ש $g(f(a_1))\neq g(f(a_2))$. מ.ש.ל.

ב. יהי $c\in C$ כלשהו. מכיוון ש-g על, נובע שקיים $b\in B$, כך ש- $g(b)=c$.
עבור b, מכיוון ש-f על, נובע שקיים $a\in A$, כך ש- $f(a)=b$.
כלומר לכל $c\in C$ קיים $a\in A$, כך ש $g(f(a))=g(b)=c$.

ג. (בונוס של 5 נקודות למי שהוכיח את <u>הכיוון הראשון</u>):
צ"ל אם fg חח"ע וגם f על, אז g חח"ע.
יהיו $b1\neq b2\in B$ כלשהם. מכיוון ש-f על, קיימים $a1,a2\in A$, כך ש- $f(a1)=b1$, $f(a2)=b2$. כמו כן מכיוון ש-f היא פונק' (תכונת ה-"יחידות") נובע $a1\neq a2$.
מכיוון ש-fg חח"ע $g(f(a1))\neq g(f(a2))$, כלומר $g(b1)\neq g(b2)$. מ.ש.ל.
(אפשר גם להוכיח כאן בשלילה)
<u>כיוון שני</u>- **דוגמא נגדית**: $A=\{1\},\ B=C=\{1,2\}$,
$f=\{(1,1)\},\ g=\{(1,1),(2,2)\},\ fg=\{(1,1)\}$.
g, fg הן חח"ע, אך f אינה על (ל-2 אין מקור ב-A).

ד. **דוגמא נגדית**:
$A=C=\{1\},\ B=\{1,2\},\ f=\{(1,1)\},\ g=\{(1,1),(2,1)\},\ fg=\{(1,1)\}=I_A$

# מתמטיקה דיסקרטית - דף תרגילים 5

הגשה עד יום שני (26.12.2005) בשעה 12:00.

שאלה 1.
תהי A קבוצת כל הפסוקים האריתמטיים המורכבים משני מספרים טבעיים וביניהם אחד הסימנים >, <, או =. (לדוגמא 34<54, 34>54, 223=223)
נגדיר על A את היחסים הבאים:

$S=\{(a,b)|\ (a\rightarrow b) = True\}$

$W=\{(a,b)|\ (a\wedge b) = True\}$

$R=\{(a,b)|\ (a\vee \sim b) \wedge (\sim a\vee b)\}$

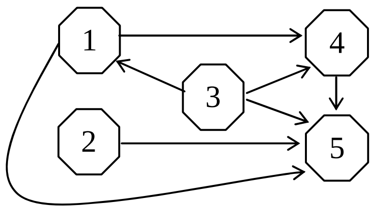
א. האם היחסים הנ"ל הם יחסי שקילות?
ב. האם היחסים הנ"ל הם יחסי סדר חלקי? והאם הם יחסי סדר מלא?

שאלה 2.
עבור היחסים הבאים קבעו האם הם יחסי סדר חלקי, והאם הם יחסי סדר מלא.
אם אכן מדובר ביחס סדר, מצאו את האיברים **המינימליים**, ואת **הגדולים ביותר** (אם קיימים)

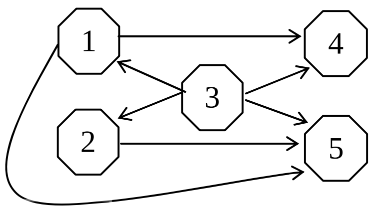
א. $R=\{((a,b),(c,d))\ |\ a+b \le c+d\}$ מעל $A=NxN$
ב. $R=\{((a,b),(c,d))\ |\ a \le c,\ \mathbf{d} \le \mathbf{b}\}$ מעל $A=NxN$
ג. $R=\{((a,b),(c,d))\ |\ a\le 5c,\ b\le 5d\}$ מעל $A=NxN$
ד. $R=\{((a,b),(c,d))\ |\ ab\le cd,\ a+b\le c+d\}$ מעל $A=\{1,2,3\}x\{6,9,18\}$

שאלה 3.
עבור הגרפים הבאים קבעו האם קבוצת הקשתות מהווה יחס סדר חלקי מעל קבוצת הקודקודים.
אם אכן מדובר ביחס סדר חלקי, מיהם הקודקודים המינימליים, ומיהו הקטן ביותר (אם קיימים).
(לצורך השאלה קיימת לולאה לכל קודקוד)

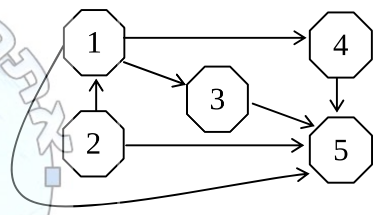
א.




ב.




ג.



שאלה 4.

א. עבור הגרסה הלא-מכוונת ומחוסרת הלולאות של כל אחד מהגרפים מהשאלה הקודמת, קבעו האם קיים בו מסלול אויילר, והאם קיים בו מעגל אוילר.
ב. מהו קוטרו של כל גרף (בגרסתו הלא-מכוונת)?

## <u>מתמטיקה דיסקרטית – פתרון לדף תרגילים 5</u>

**<u>שאלה 1</u>**. (30 נקודות)

א. **<u>S</u>** <u>אינו יחס שקילות</u>, כי הוא **אינו סימטרי**. **<u>דוגמא נגדית</u>**: אם ערך האמת של a הוא False, וערך האמת של b הוא True. מתקיים $(a,b)\in S, (b,a)\notin S$, כי $a\rightarrow b = True$, $b\rightarrow a = False$.

**<u>W</u>** <u>אינו יחס שקילות</u> כי **אינו רפלקסיבי**.

**<u>דוגמא נגדית</u>**: אם ערך האמת של a הוא False, אז $a\wedge a = False$, ולכן $(a,a)\notin W$.

**<u>R</u>** <u>הוא יחס שקילות</u>. (הגדרה שקולה של היחס: $R=\{(a,b)|\ (a\rightarrow b)\wedge(b\rightarrow a)\}$

ולכן הגדרה שקולה נוספת: $R=\{(a,b)|\ (a\leftrightarrow b)\}$, וברור שמדובר ביחס שקילות.)

**<u>רפלקסיביות</u>**: לכל a מתקיים $(a\vee{\sim}a)\wedge({\sim}a\vee a)$

**<u>סימטריות</u>**: יהי $(a,b)\in R$ כלשהו $\Leftrightarrow$ (לפי הגדרת היחס)

$\Leftrightarrow (a\vee{\sim}b)\wedge({\sim}a\vee b) \Leftrightarrow$ (מסימטריות של וגם)

$\Leftrightarrow (b\vee{\sim}a)\wedge({\sim}b\vee a) \Leftrightarrow$ (מהגדרת היחס)

$\Leftrightarrow (b,a)\in R$

**<u>טרנזיטיביות</u>**: יהיו $(a,b), (b,c)\in R \Leftrightarrow$ (לפי הגדרת היחס)

$\Leftrightarrow ((a\vee{\sim}b)\wedge({\sim}a\vee b))\wedge((b\vee{\sim}c)\wedge({\sim}b\vee c)) \Leftrightarrow$ (אסוציטיביות)

$\Leftrightarrow (({\sim}a\vee b)\wedge({\sim}b\vee c))\wedge((a\vee{\sim}b)\wedge(b\vee{\sim}c)) \Leftrightarrow$

(מדיסטריביוטיביות ומכלל ההיסק: $(x\vee y)\wedge{\sim}y = x$ )

$(({\sim}a\vee c)\wedge(a\vee{\sim}c)) \Leftrightarrow$ (מסימטריות [או מחילופיות של 'וגם'] ולפי ההגדרה)

$\Leftrightarrow (a,c)\in R$

ב. **S** אינו יחס סדר חלקי (ולכן גם אינו יחס סדר מלא), מכיוון <u>שאינו אנטי-סימטרי</u>.

**<u>דוגמא נגדית</u>**: עבור a,b שונים בעלי ערך אמת True, מתקיים $(a,b)\in S$, $(b,a)\in S$, כי מתקיים $a\rightarrow b = True$, $b\rightarrow a = True$ (אך a שונה מ-b).

**W** אינו יחס סדר חלקי מכיוון <u>שאינו רפלקסיבי</u> (ראה דוגמא נגדית לעיל)

**R** אינו יחס סדר חלקי, מכיוון <u>שאינו אנטי-סימטרי</u> (הדוגמא הנגדית של S טובה גם כאן)

**<u>שאלה 2</u>**. (30 נקודות)

א. יחס זה אינו אנטי-סימטרי ולכן אינו סדר חלקי: דוגמא נגדית $((5,6),(6,5))$,
$((5,6),(6,5))\in R$, כי $5+6=6+5$, אך $((5,6),(6,5))\neq((6,5),(5,6))$

ב. יחס זה הינו יחס סדר מלא.

**<u>רפלקסיביות</u>**: לכל $(a,b)\in NxN$ מתקיים: $a\leq a,\ b\leq b$ ולכן $((a,b),(a,b))\in R$.

**<u>אנטי-סימטריות</u>**:

יהיו $(a,b),(c,d)\in NxN$, כך שמתקיים $((a,b),(c,d))\in R\wedge((c,d),(a,b))\in R$. $\Leftrightarrow$

(לפי הגדרת היחס) $\Leftrightarrow (a\leq c\wedge d\leq b)\wedge(c\leq a\wedge b\leq d) \Leftrightarrow$ (אסוציאטיביות)

$\Leftrightarrow (a\leq c\wedge c\leq a)\wedge(d\leq b\wedge b\leq d) \Leftrightarrow (a=c)\wedge(b=d)$ כלומר $(a,b)=(c,d)$.

**<u>טרניזיטיביות</u>**:

יהיו $(a,b),(c,d),(e,f)\in NxN$, כך שמתקיים $((a,b),(c,d))\in R\wedge((c,d),(e,f))\in R$. $\Leftrightarrow$

(לפי הגדרת היחס) $\Leftrightarrow (a\leq c\wedge d\leq b)\wedge(c\leq e\wedge f\leq d) \Leftrightarrow$ (אסוציאטיביות)

$\Leftrightarrow (a\leq c\wedge c\leq e)\wedge(f\leq d\wedge d\leq b) \Leftarrow$

$\Leftarrow (a\leq e)\wedge(f\leq b) \Leftrightarrow$ (לפי הגדרת R) $((a,b),(e,f))\in R$.

**לא** מדובר **ביחס סדר מלא**. דוגמא נגדית: $(2,2),(1,1)$.

לא מתקיים: $(2\leq 1\wedge 1\leq 2)\vee(1\leq 2\wedge 2\leq 1)$. כלומר $((2,2),(1,1))\notin R$, $((1,1),(2,2))\notin R$

**לא קיים** איבר מינימלי- יהי $(a,b)\in NxN$ מתקיים: $((a,b+1),(a,b))\in R$.

**לא קיים** איבר מקסימלי (ולכן גם לא "גדול ביותר"), משיקול דומה: $((a,b),(a+1,b))\in R$

ג. יחס זה אינו אנטי-סימטרי ולכן אינו יחס סדר חלקי: הדוגמא הנגדית של סעיף א מתאימה גם כאן. $5*5>6$, $6*5>5$, ולכן $((6,5),(5,6))\in R$, $((5,6),(6,5))$, אך $(6,5)\neq(5,6)$.

ד. יחס זה הינו יחס סדר חלקי.

**<u>רפלקסיביות</u>**: לכל $(a,b)\in A$ מתקיים: $ab\le ab,\ a+b\le a+b$ ולכן $((a,b),(a,b))\in R$.

**<u>אנטי-סימטריות</u>**:

יהיו $(a,b),(c,d)\in A$, כך שמתקיים $((c,d),(a,b))\in R \wedge ((a,b),(c,d))\in R$. $\Leftrightarrow$

(לפי הגדרת היחס) $\Leftrightarrow (cd\le ab \wedge c+d\le a+b) \wedge (ab\le cd \wedge a+b\le c+d) \Leftrightarrow$

(אסוציאטיביות) $\Leftrightarrow (a+b\le c+d \wedge c+d\le a+b) \wedge (ab\le cd \wedge cd\le ab) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b=c+d) \wedge (ab=cd)$.

המקרים שעבורם מתקיים $a+b=c+d$ (עבור $(a,b),(c,d)\in A$ כלשהם) הם רק כאשר $(a,b)=(c,d)$, מכיוון שההפרש בין זוג איברים ב- $\{6,9,18\}$ הוא לפחות 3, וההפרש בין זוג איברים ב- $\{1,2,3\}$ הוא לכל היותר 2. ולכן האנטי-סימטריות מתקיימת.

**<u>טרנזיטיביות</u>**:

יהיו $(a,b),(c,d),(e,f)\in A$, כך שמתקיים $((c,d),(e,f))\in R \wedge ((a,b),(c,d))\in R$. $\Leftrightarrow$

(לפי הגדרת היחס) $\Leftrightarrow (cd\le ef \wedge c+d\le e+f) \wedge (ab\le cd \wedge a+b\le c+d) \Leftrightarrow$

(לפי אסוציאטיביות) $\Leftrightarrow (a+b\le c+d \wedge c+d\le e+f) \wedge (ab\le cd \wedge cd\le ef) \Leftarrow$

$\Leftarrow (a+b\le e+f) \wedge (ab\le ef) \Leftrightarrow$ (לפי הגדרת R) $((a,b),(e,f))\in R$.

לא **<u>סדר מלא</u>**: **דוגמא נגדית**: $((1,9),(3,6))\notin R$, $((3,6),(1,9))\notin R$, כי מתקיים: $(3+6\le 1+9) \wedge (1*9\le 3*6)$.

**מינימלי** (1,6) כי אין "קטנים" ממנו, **גדול ביותר** (3,18), כי ניתן "להשוות" אותו לכולם והוא "גדול" מכולם.

**<u>שאלה 3</u>**. (15 נקודות)

א. מדובר ביחס סדר חלקי. מינימלים- 2,3. קטן ביותר- אין.

ב. מדובר ביחס סדר חלקי. מינימלי וקטן ביותר- 3.

ג. לא מדובר ביחס סדר חלקי, כי היחס אינו טרניזיטיבי- דוגמא נגדית לטרנזיטיביות:(1,4),(2,1) שייכים ליחס, אך (2,4) לא שייך ליחס

**<u>שאלה 4</u>**. (10 נקודות סעיף א', 15 נקודות סעיף ב')

א. בגרף הראשון אין מסלול/מעגל אוילר. בגרף השני יש מסלול אוילר, ובגרף השלישי יש מסלול/מעגל אוילר.

ב. קוטרו של הגרף הראשון הוא 2.

כולם יכולים להגיע ל-5 בצעד אחד ולכל קודקוד אחר בצעד נוסף, כלומר כל מרחק $\le 2$, ולכן הקוטר $\le 2$.

כמו כן המרחק של 2 מ-4 הוא 2, ולכן $2 \le$ הקוטר.

קוטרו של הגרף השני הוא 2. כאן 3 משמש כמתווך. המרחק של 2 מ-4 הוא 2.

קוטרו של הגרף השלישי הוא 2. כאן 5 שוב משמש "מתווך". המרחק של 2 מ-4 הוא 2.

# <u>מתמטיקה דיסקרטית - דף תרגילים 6</u>

הגשה עד יום שני (2.1.2006) בשעה 12:00.

שאלה 1.
הוכיחו את המשפט הבא:
יהי G=(V,E) גרף <u>מכוון</u> קשיר חזק.
ב-G יש מעגל אויילר $\Leftrightarrow$ דרגת הכניסה של כל קודקוד שווה לדרגת היציאה שלו.

שאלה 2.
הוכיחו:
לכל עץ יש קודקוד שכל שכניו (פרט אולי לאחד) הם עלים.

שאלה 3.
הגדרה:
גרף K-צביע הוא גרף שבו ניתן לצבוע את כל קודקודיו ב-K צבעים שונים, כך שלכל קודקוד אין שכן בעל אותו צבע.
הוכיחו: עץ הוא 2-צביע.

<u>מתמטיקה דיסקרטית – פתרונות לדף תרגילים 6</u>

**תשובה לשאלה 1.** [הערה: ניתן להוכיח ללא קשירות חזקה]
<u>כיוון ראשון</u>: ב-G יש מעגל אוילר. (הוכחה אלגוריתמית)
נניח לשם הבאה לסתירה שיש קודקוד x שבו דרגת הכניסה שונה מדרגת היציאה. נניח ללא הגבלת הכלליות, שדרגת הכניסה של x גדולה מדרגת היציאה שלו.
נתחיל לנוע על המעגל אויילר הנתון מהקודקוד x ונסיר כל קשת שאנו עוברים עליה.
כל פעם שנצא מ-x נצטרך גם לחזור אליו על מנת להשלים מעגל, ולכן עבור כל קשת יוצאת שנסיר, נסיר גם קשת נכנסת אחת.
מכיוון שדרגת היציאה קטנה מדרגת הכניסה, בשלב מסוים דרגת היציאה תתאפס, אולם יוותרו לנו קשתות יציאה.
אם נעבור על אחת מהן לא נוכל לחזור ל-x, ולכן או שלא נוכל להשלים מעגל, או שלא ניתן לעבור על כל הקשתות, כלומר אין מעגל אויילר בגרף, וזאת סתירה.
<u>כיוון שני</u>: דרגת הכניסה של כל קודקוד שווה לדרגת היציאה שלו.
הוכחה באינדוקציה על מספר **<u>הקשתות</u>**:
<u>בסיס האינדוקציה</u>: לכל קודקוד בגרף יש קשת נכנסת אחת וקשת יוצאת אחת. הגרף הנידון חייב להיות מעגל פשוט- מכיוון שהגרף קשיר חזק יש מסלול מכל קודקוד לכל קודקוד אחר, ולכן יש לכל קודקוד מעגל המכיל אותו (מסלול מהקודקוד לקודקוד כלשהו ובחזרה). מכיוון שדרגת היציאה של כל קודקוד היא 1, אין אף קודקוד המתחיל שני מעגלים שונים, ולכן כל הקודקודים שייכים למעגל פשוט יחיד. במעגל זה נכנס אל קודקוד ונצא ממנו פעם אחת בדיוק, כלומר כל קשתות הגרף מכוסות על ידי מעגל זה. (כלומר יש מעגל אויילר).
<u>הנחת האינדוקציה</u>: לכל גרף המקיים את התנאים בעל לכל היותר m קשתות, יש מעגל אויילר.
<u>שלב האינדוקציה</u>: יהי גרף המקיים את התנאים, ובעל m+1 קשתות.
מכיוון שהגרף קשיר חזק- יש מסלול מכל קודקוד אל כל קודקוד, ולכן לכל קודקוד יש מעגל בגרף המכיל אותו (המעגל אינו בהכרח פשוט). יהי x קודקוד כלשהו ו-c מעגל המכיל אותו.
לכל קודקוד במעגל יש מספר שווה של קשתות כניסה ויציאה השייכות למעגל, ולכן אם נסיר את קשתותיו של המעגל c מהגרף, נוריד מכל קודקוד בו מספר שווה של קשתות כניסה ויציאה, ולכן לכל קודקוד עדיין יתקיים שדרגת הכניסה שלו שווה לדרגת היציאה שלו.
לכן לאחר הסרת c, לפי הנחת האינדוקציה בכל רכיב קשירות חזקה יש מעגל אויילר. המעגל c חיבר את הרכיבים הללו בגרף המקורי (הגרף היה קשיר חזק). נחזיר את c לגרף ונראה שקיים מעגל אויילר. נתחיל לנוע על c. כל פעם שנגיע לקודקוד מרכיב קשירות חזקה חדש, נעבור על המעגל האויילריאני שקיים ברכיב זה, עד שנחזור לקודקוד שיצאנו ממנו ב-c, ונמשיך לנוע על c.

מכיוון ש-c חיבר את כל רכיבי הקשירות החזקה, לא פספסנו אף רכיב קשירות חזקה. בכל רכיב קשירות חזקה, עברנו על כל קשתותיו במעגל אויילר שקיים בו. כמו כן עברנו על כל קשתותיו של c. אין עוד קשתות בגרף ולכן קיבלנו מעגל אויילר.

**תשובה לשאלה 2.**
צריך להוכיח: לכל עץ יש קודקוד שכל שכניו (פרט אולי לאחד) הם עלים.
עלה הוא קודקוד כזה מכיוון שדרגתו 1, ולפי משפט שניתן בתירגול מובטח שבעץ יש עלה.
נוכיח: שלכל עץ (n > 2) יש קודקוד, שאינו עלה, שכל שכניו (פרט אולי לאחד) הם עלים.
הוכחה: (באינדוקציה על מספר הקודקודים n)
<u>בסיס האינדוקציה</u>: n=3. העץ היחידי בעל 3 קודקודים הוא מסלול פשוט שבו יש שני עלים וקודקוד המחבר בינהם. ולכן בסיס האינדוקציה מתקיים.
<u>הנחת האינדוקציה</u>: לכל עץ בן N קודקודים יש קודקוד שכל שכניו (פרט אולי לאחד) הם עלים.

שלב האינדוקציה: (לפי משפט) בעץ יש עלה z - נסיר אותו. כעת לפי הנחת האינדוקציה (עדיין מדובר בעץ, וכעת יש קודקוד אחד פחות, ולכן ההנחה מתקיימת), יש קודקוד x שאינו עלה שכל שכניו (פרט אולי לאחד) הם עלים. נחזיר את z לגרף. אם z לא מחובר ל-x, ולא לאף אחד מעליו, אז x הוא הקודקוד המתאים. אם z מחובר ל-x, x עדיין מחובר רק לעלים (פרט אולי לקודקוד אחד). אם z מחובר לעלה y של x, נשים לב שכעת y מחובר רק ל-x ול-z. z הוא עלה ולכן y הוא קודקוד שאינו עלה, שכל שכניו פרט ל-x הם עלים.

**תשובה שאלה 3.**

צריך להוכיח: עץ הוא 2-צביע.
יהי x עלה כלשהו מהעץ (מובטח שיש כזה לפי משפט). נצבע אותו בצבע הראשון.
לכל קודקוד הצבוע בצבע מסויים, נצבע את כל שכניו בצבע האחר. נעבור לשכניו ונמשיך בתהליך עד שנצבע את כל הקודקודים בגרף. (מכיוון שהגרף קשיר וסופי נגיע לכל הקודקודים).
טענה: הצביעה הנ"ל היא "חוקית", כלומר אין קודקוד שיצבע בתהליך הנ"ל בשני צבעים שונים.
הסבר: מכיוון שבעץ אין מעגלים, מרגע שהגענו לקודקוד y כלשהו דרך מסלול מסויים, לא נחזור אליו דרך מסלול אחר (כי אחרת יש מעגל דרך y). בכל מסלול פשוט לא יהיו "התנגשויות" בבחירת הצבעים של הקודקודים, מכיוון שכל קודקוד מופיע במסלול פעם אחת בלבד.
ולכן הצביעה חוקית.

# <u>מתמטיקה דיסקרטית - דף תרגילים 7</u>

הגשה עד יום שני (9.1.2006) בשעה 12:00.

שאלה 1. הוכיחו / הפריכו:
בכל גרף פשוט עם n קודקודים, שבו סכום הדרגות של כל זוג קודקודים הוא לפחות n,
יש מעגל המילטוני.

שאלה 2. הוכיחו / הפריכו:
תהי d הדרגה המקסימלית של קודקוד כלשהו בגרף G. הוכיחו G הוא "d+1"-צביע.

שאלה 3. הוכיחו / הפריכו:

א. גרף הוא דו-צדדי ⇦ אין בגרף תת-גרף שלם מגודל 3.
ב. אין בגרף תת-גרף שלם מגודל 3 ⇦ גרף הוא דו-צדדי.

# מתמטיקה דיסקרטית - דף תרגילים 7

שאלה 1.
ראשית נוכיח שהגרף קשיר.
יהיו x,y זוג קודקודים כלשהם. אם הצלע $\{x,y\}$ שייכת לגרף אז יש מסלול בינהם.
אחרת נסמן ב-$|A|$ את קבוצת השכנים של x, וב-B את קבוצת השכנים של y.
נתון שסכום הדרגות של x,y הוא לפחות n, ולכן $|A|+|B|\ge n$.
הקודקודים x,y אינם שייכים ל-A או ל-B (הם לא שכנים זה של זה ולא של עצמם), ולכן $|A\cup B|\le n-2$. ממשפט $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$, נקבל ש $|A\cap B|>0$,
כלומר קיים קודקוד $z\in A\cap B$, כלומר $z\in A$ וגם $z\in B$. כלומר z הוא שכן של x וגם שכן של y, ולכן יש מסלול מ-x ל-y דרך z. (מ.ש.ל.)
הערה: נשים לב שאין קודקוד שדרגתו 0, שכן דרגה מקסימלית של קודקוד בגרף פשוט היא n-1 (הקודקוד מחובר לכל שאר הקודקודים), ולכן סכום הדרגות של קודקוד זה עם כל קודקוד אחר הוא קטן ממש מ-n.
כעת נוכיח את המשפט. (ע"י בנייה)
יהיה v קודקוד כלשהו. דרגתו של כל קודקוד היא לפחות 1, ולכן יש לו שכנים. נתחיל מסלול מ-v אל אחד משכניו, ונמשיך לבנות את המסלול ממנו. כל עוד יש לקודקוד הנוכחי שכן שאינו נמצא עדיין על המסלול, נמשיך את המסלול אל שכן זה. כאשר הקודקוד הנוכחי מקושר רק לקודקודים שנמצאים כבר על המסלול, ננסה באותו אופן להרחיב את המסלול מהקצה השני שלו (הקודקוד הראשון שבמסלול- כלומר כעת נוסיף קודקודים לתחילת המסלול).
כעת נבנה מעגל שיכיל את כל הקודקודים מהמסלול שהתקבל.
נקרא לקודקוד הראשון במסלול $x_1$, ולאחרון $x_m$.
אם $x_1$ מחובר בצלע ל-$x_m$ , הרי שיש לנו מעגל שמכיל את כל הקודקודים עד כה.
נבחן את המקרה שהם לא מחוברים בצלע. נסמן ב-A את קבוצת השכנים של x, וב-B את קבוצת השכנים של $x_m$. נסמן ב-C את קבוצת הקודקודים שהקודם להם במסלול מחובר ל-$x_m$ .
$x_1$ לא שייך ל-C כי אין לו קודקוד קודם במסלול. כמו כן מכיוון ש-$x_1$ לא מחובר בצלע ל-$x_m$ גם העוקב שלו אינו ב-C.
$|C|=|B|$, מכיוון שלכל קודקוד ב-B יש קודקוד יחיד העוקב לו במסלול, ולכן קודקוד זה שייך ל-C (היחידי שאין לו עוקב הוא $x_m$, ו-$x_m$ לא שייך ל-B מכיוון שהוא אינו שכן של עצמו).
מכיוון שלכל זוג קודקודים סכום דרגותיהם הוא לפחות n, נקבל ש- $|A|+|B|\ge n$, ולכן גם $|A|+|C|\ge n$. $x_1$ אינו שייך ל-A או ל-C, ולכן $|A\cup C|\le n-1$. ממשפט: $|A\cup C| = |A|+|C|-|A\cap C|$,
נקבל ש $|A\cap C|>0$, כלומר קיים $x_i$ השייך הן ל-A והן ל-C, כלומר $x_i$ הוא שכן של $x_1$, ו- $x_{i-1}$ הוא שכן של $x_m$. אם כן המעגל $(x_1, x_i, x_{i+1},..., x_m, x_{i-1}, x_{i-2},..., x_1)$ הינו מעגל חוקי, והוא מכיל את כל הקודקודים שנמצאו עד כה.
אם כל קודקודי הגרף נמצאים במעגל, זהו מעגל המילטוני, וסיימנו.
אם עדיין לא נמצאו כל קודקודי הגרף. מכיוון שהגרף קשיר (הוכחנו קודם) יש קודקוד z שאינו שעוד לא "התגלה" שמחובר לקודקוד $x_k$ במעגל.
אם $k<i$, נקבל את המסלול: $(z, x_k, x_{k-1},..., x_1, x_i, x_{i+1},..., x_m, x_{i-1}, x_{i-2},..., x_{k+1})$,
אחרת נקבל את המסלול: $(z, x_k, x_{k+1},..., x_m, x_{i-1}, x_{i-2},..., x_1, x_i, x_{i+1},..., x_{k-1})$.
קיבלנו מסלול ארוך יותר מהמסלול שהתחלנו ממנו ושמכיל אותו.
כעת נחזור על תהליך הגדלת המסלול והפיכתו למעגל. מכיוון שהגרף סופי התהליך יסתיים ויתקבל מעגל המילטוני.

שאלה 2:
תהי d הדרגה המקסימלית של קודקוד כלשהו בגרף G. הוכיחו G הוא "d+1"-צביע.
הוכחה ע"י "בנייה" (נראה צביעה שכזו)
נבחר בקודקוד כלשהו, ונצבע אותו בצבע כלשהו. נבחר בקודקוד אחר ונצבע אותו בצבע אחר מכל שכניו. מכיוון שיש לכל קודקוד לכל היותר d שכנים, ו-d+1 צבעים תמיד יש צבע פנוי שעוד לא השתמשנו בו. כך נמשיך עד שנצבע את כל קודקודי הגרף.

שאלה 3. הוכיחו / הפריכו:

א. גרף הוא דו-צדדי ⇦ אין בגרף תת-גרף שלם מגודל 3.
ב. אין בגרף תת-גרף שלם מגודל 3 ⇦ גרף הוא דו-צדדי.

א:
נתון G=((U,V),E).
נניח לשם הבאה לסתירה שיש תת-גרף שלם בגודל 3 בגרף. תת גרף זה לא יכול להיות כולו ב-U או ב-V, שכן אין צלעות בין קודקודים מאותה קבוצה. לכן קודקוד אחד מה"משולש" יהיה שייך לאחת הקבוצות (נניח ללא הגבלת הכלליות ל-U) והשניים האחרים לקבוצה האחרת (V). מכיוון שמדובר בתת-גרף מלא יש קשת בין זוג הקודקודים מ-V, אך זו סתירה לכל שאין קשתות בין קודקודים מאותה קבוצה. ולכן מ.ש.ל.

ב:
דוגמא נגדית: מעגל באורך 5 - (a,b,c,d,e,a). a,b שכנים ולכן הם שייכים לקבוצות שונות. b,c שכנים ולכן c חייב להשתייך לקבוצה של a. c,d שכנים ולכן d שייך לקבוצה של b. e שכן של d ולכן לא יכול להשתייך לקבוצתו, אולם הוא שכן גם של a, ולכן אינו יכול להשתייך לקבוצתו... אין לנו קבוצה לשייך אליה את c.

# מתמטיקה דיסקרטית - דף תרגילים 8

הגשה עד יום שני (16.1.2006) בשעה 12:00.

שאלה 1.
בכל המקרים הבאים הניחו שיש 4 קודקודים הממוספרים מ-1 עד 4, ושהגרפים פשוטים.

א. כמה גרפים כנ"ל הם מכוונים?
ב. ~~כמה גרפים כנ"ל הם מכוונים קשירים חזק?~~ **(בוטל)**
ג. כמה גרפים כנ"ל הם בלתי מכוונים?
ד. ~~כמה גרפים כנ"ל הם בלתי מכוונים קשירים?~~ **(בוטל)**
ה. ~~כמה גרפים כנ"ל הם מכוונים בעלי 2 רכיבי קשירות?~~ **(בוטל)**
ו. כמה גרפים כנ"ל הם לא מכוונים בעלי 2 רכיבי קשירות?
ז. כמה גרפים כנ"ל הם בלתי מכוונים ומכילים את המסלול (1,2,4)?
ח. כמה גרפים כנ"ל הם בלתי מכוונים ודו-צדדיים?
ט. ~~כמה גרפים כנ"ל הם בלתי מכוונים ו- 3-צביעים?~~ **(בוטל)**
י. כמה גרפים כנ"ל הם בלתי מכוונים ומכילים מעגל אויילר?

שאלה 2.
בכל המקרים הבאים הניחו שיש 4 קודקודים הממוספרים מ-1 עד 4, ושמדובר בפסאודו-גרף.

א. כמה גרפים כנ"ל הם לא מכוונים ובעלי 5 צלעות?
ב. ~~כמה גרפים כנ"ל הם לא מכוונים ובעלי לכל היותר 5 צלעות?~~ **(בוטל)**
ג. כמה גרפים כנ"ל הם מכוונים ובעלי לכל היותר 5 קשתות?
ד. ~~כמה גרפים כנ"ל הם לא מכוונים, בעלי לכל היותר 5 צלעות, וקשירים?~~ **(בוטל)**

~~שאלה 3.~~ **(בוטלה)**
במקרים הבאים הניחו שיש 4 קודקודים שלא ניתן להבדיל בינהם, ושמדובר בגרף פשוט.

א. ~~כמה גרפים כנ"ל הם עצים?~~ **(בוטל)**
ב. ~~כמה גרפים כנ"ל הם לא מכוונים?~~ **(בוטל)**
ג. ~~כמה גרפים כנ"ל הם מכוונים?~~ **(בוטל)**
ד. ~~כמה גרפים כנ"ל הם מכוונים ובעלי לכל היותר 5 צלעות?~~ **(בוטל)**
ה. ~~כמה גרפים כנ"ל הם בלתי מכוונים ובעלי מעגל שאורכו 4?~~ **(בוטל)**

שאלה לדוגמא:
כמה קשתות יש בגרף לא מכוון פשוט בן 10 קודקודים (שונים)?
או לחלופין- כמה קבוצות בנות 2 קודקודים (צלעות) ניתן ליצור מתוך קבוצה בת 10 קודקודים?
תשובה- 10 מעל 2.
דוגמא נוספת: כמה אפשרויות ישנן לחלק קבוצה בת 10 צלעות ל-2 קבוצות (בגרף ולא בגרף)?
תשובה: לכל צלע יש 2 אפשרויות ולכן יש 2*...*2 (10 פעמים) אפשרויות, כלומר $2^{10}$.

# **מתמטיקה דיסקרטית – דף פתרונות 8**

בשאלות 1-3 כל הקודקודים נמצאים בגרף, ולכן כמות הגרפים תלויה במספר הקשתות/צלעות.
שאלה 1.

א. נראה כמה קשתות אפשריות בגרף מכוון בן 4 קודקודים, כלומר כמה זוגות סדורים קיימים בין 4 קודקודים (ומכיוון שהגרף פשוט- אין לולאות, כלומר אין זוג סדור המכיל את אותו איבר פעמיים). עבור המקום הראשון יש 4 אפשרויות, ועבור המקום השני נותרים 3 אפשרויות ולכן סה"כ מספר הקשתות האפשריות בגרף הוא 4*3=12. (לפי עקרון המכפלה)
כל קשת יכולה להופיע או לא להופיע בגרף, ובכך ליצור גרף שונה. מספר האפשרויות של כל קשת הוא כאמור 2 ולכן סה"כ מספר הגרפים המכוונים האפשריים על 4 קודקודים הוא $\mathbf{2^{12}}$.

ב. בוטל

ג. נבחן את כמות הצלעות בגרף לא מכוון בן 4 קודקודים- זהו מספר הקבוצות בנות 2 קודקודים (צלע) שאפשר לבחור מקבוצה בת 4 קודקודים (אין לולאות). מספר אפשרויות הבחירה של 2 איברים מתוך 4 אפשריים הוא 2 מתוך 4, כלומר 6.
כמו מקודם, לכל צלע יש 2 אפשרויות- להופיע בגרף או לא, ולכן סה"כ האפשרויות הוא $2^6$.

ד. בוטל

ה. בוטל

ו. בכדי שבגרף יהיו 2 רכיבי קשירות, צריך לחלק את הקודקודים לשתי קבוצות לא ריקות של קודקודים.
<u>מקרה א'</u>: קבוצה אחת בת 3 קודקודים והקבוצה השניה בת קודקוד אחד.
מספר האפשרויות לחלוקת הקודקודים לשתי קבוצות כנ"ל הוא 4 (בחירת הקודקוד הבודד) לקודקוד הבודד לא מחוברות צלעות. בין שלושת הקודקודים שברכיב הקשירות האחר חייבות להופיע לפחות 2 צלעות מבין 3 הצלעות המחברות בינהם, על מנת שיהא זה רכיב קשירות.
יש אפשרות אחת שכל 3 הצלעות יופיעו, ויש 3 אפשרויות שיופיעו 2 צלעות בדיוק (בחירת 2 צלעות מתוך 3 שיופיעו), ולכן בסה"כ עבור מקרה זה יש 4*4 גרפים אפשריים.
<u>מקרה ב'</u>: שתי קבוצות בנות 2 קודקודים. נשים לב שהאפשרות שזוג קודקודים a,b נמצא בקבוצה אחת ו-c,d באחרת, זהה לאפשרות ש-c,d באחת, ו-a,b באחרת. (אין הבדל בין הקבוצות)
לכן מספר החלוקות האפשריות הוא בחירת 2 קודקודים מתוך 4 אפשריים, לחלק ב-2 (לא משנה לאיזה קבוצה נבחרו שני הקודקודים), כלומר 4 מעל 2 כפול חצי, שזה 3.
ברכיב קשירות בעל זוג קודקודים יש צלע אחת, ולכן מספר האפשרויות במקרה זה הוא 3.
המקרים א' וב' זרים ולכן נוכל להשתמש בעקרון הסכום- סה"כ האפשרויות הוא 16+3=19.

ז. בגרפים שבהם קיים המסלול (1,2,4) מופיעות הצלעות {1,2},{2,4}. ראינו ב-ב' שבגרף לא מכוון בן 4 קודקודים יש 6 צלעות. 2 הצלעות הנ"ל חייבות להופיע בכל גרף ולכן נותרו 4 צלעות שלהן נבחר האם הן בגרף או לא, ולכן מספר האפשרויות הוא $2^4$.

ח. גרף הוא דו-צדדי אם ניתן לחלק את קודקודיו ל-2 קבוצות, כך שאין צלעות המחברות בין קודקודים מאותה קבוצה. במקרה המשלים גרף הוא אפשרי, אם הוא מכיל מעגל באורך 3 (בין ארבעה קודקודים זהו המעגל הפשוט בעל האורך האי-זוגי היחיד).
מספר האפשרויות לגרפים בני 3 צלעות בעלי מעגל באורך 3 שווה לבחירת 3 קודקודים שיהיו במעגל = (4 מעל 3) = 4.
גרפים אפשריים בעלי 4 צלעות, הם גרפים בעלי מעגל באורך 3 ועוד צלע. מספר האפשרויות לבחירת המעגל הוא 4, ולהוספת צלע (מתוך 3 הצלעות שנותרו) יש (3 מעל 1) אפשרויות.
סה"כ 4*3=12 אפשרויות.

כל הגרפים בעלי 5 צלעות בהכרח מכילים 2 מעגלים באורך 3. מספר הגרפים הוא כמספר האפשרויות לבחירת 5 צלעות מתוך 6 אפשריות, כלומר 6.
גם הגרף המלא מכיל 2 מעגלים באורך 3.
סה"כ האפשרויות לגרף עם מעגל באורך 3, הוא 1+6+12+4=23.
ולכן סה"כ האפשרויות הוא 62-23=39.

ט. בוטל

י. תזכורת- משפט: גרף לא מכוון בעל מעגל אוילר הוא גרף שבו דרגות כל הקודקודים בו הן זוגיות. בגרף פשוט דרגה של קודקוד היא מספר בין 0 ל- n-1, ולכן במקרה שלנו בכדי שיהיה מעגל אוילר, דרגת קודקוד יכולה להיות 0 או 2. אם v הוא קודקוד כלשהו שדרגתו היא 2, כלומר הוא מחובר ל-2 קודקודים נוספים, אז דרגתם היא לפחות 1, ובמקרה שלנו- 2. 2 קודקודים אלה יכולים להתחבר בינהם (ואז דרגת הקודקוד הנוסף היא 0) או להתחבר אל הקודקוד הנוסף (ואז דרגת כל הקודקודים היא 2).
לכן המקרים האפשריים הם: (1) ארבעת הקודקודים בעלי דרגה 2. (2) 3 קודקודים בעלי דרגה 2 והרביעי בעל דרגה 0. (3) דרגת ארבעת הקודקודים היא 0.
למקרה 1 יש (3 מעל 2) אפשרויות- עבור קודקוד 1 נבחר את זוג שכניו מבין שאר הקודקודים.
במקרה 2 יש (4 מעל 3) אפשרויות לבחירת הקודקודים בעלי דרגה 2, כלומר 4 אפשרויות.
למקרה 3 יש אפשרות אחת- הגרף הריק.
סך כל האפשרויות הוא 1+4+3 = 8.

שאלה 2.

א. מספר הצלעות השונות הקיימות בגרף בן 4 קודקודים (עם לולאות) הוא 4+3+2+1. (לקודקוד הראשון יש 4 אפשרויות לבני זוג (כל זוג הוא צלע), לשני עוד 3 אפשרויות שונות...). דרך נוספת לחישוב כמות הצלעות- בגרף ללא לולאות היו 6 צלעות. כעת נוספו 4 לולאות עצמיות. כעת אנו צריכים לבחור 5 צלעות מתוך 10 "סוגי" צלעות אפשריות. מכיוון שמדובר בפסאודו-גרף אפשר לבחור "סוג" צלע מספר פעמים (יש חזרות). נשים לב שאם יש שתי צלעות בין אותו זוג קודקודים (2 צלעות מאותו "סוג"), הן נראות "זהות", כלומר אין חשיבות לסדר הבחירה. אם כך, אפשר לחשוב על הבעיה באופן הבא: כמה אפשרויות יש לחלק 5 צלעות שוות ל-10 סוגי צלעות. (5 כדורים ל-10 תאים). ולכן התשובה היא ((10-1)+5) מעל 5.

ב. בוטל.

ג. בגרפים מכוונים ללא לולאות היו 12 קשתות שונות אפשריות. נוספו לנו 4 קשתות נוספות (לולאות עצמיות) ולכן יש כעת 16 קשתות שונות. כעת נבחר מתוך קבוצת הקשתות את כמות הקשתות הרצויה. (גרפים בעלי 0 עד 5 קשתות), כמו בסעיף א'.
ונקבל: (16-1+0 מעל 0) + ... + (16-1+5 מעל 5).

ד. בוטל.

שאלה 3. (בוטלה)
א. (בוטל) תזכורת: עץ הוא גרף לא מכוון וקשיר. משפט: בעץ יש n-1 קשתות. כאן n=4. ולכן השאלה היא כמה גרפים פשוטים בעלי 4 קודקודים זהים מכילים 3 קשתות בדיוק? מכיוון שהקודקודים זהים, גם הקשתות "נראות" זהות, ולכן הדרך היחידה להבדיל בין גרפים היא לפי דרגת כל קודקוד. סכום הדרגות בגרף עם 3 קשתות הוא 6. כעת ישנן 2 אפשרויות- קודקוד אחד בעל דרגה 3 ששאר הקודקודים מחוברים רק אליו (דרגה 1 כל אחד), או שני קודקודים בעלי דרגה 2, המחוברים בינהם וכל אחד אל עלה אחר. כלומר סה"כ ישנם שני עצים שונים.

# <u>מתמטיקה דיסקרטית - דף תרגילים 9</u>

הגשה עד יום חמישי (26.1.2006) בשעה 16:00.
המלצה: שימרו העתק של תרגיל זה מכיוון שהוא לא יוחזר לפני הבחינה.

שאלה 1.
נתונים 12 מספרים טבעיים שסכומם הוא 100. האם מתחייב שמתוכם יש 4 מספרים שסכומם הוא לפחות 25?

שאלה 2.
כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש למשוואה הבאה: $x1+x2+x3+x4<5$.

שאלה 3.
כמה מספרים בין 77 ל-777 לא מתחלקים ב-7, וגם לא ב-11?
רמז: השתמשו בנוסחת אויילר או בהכלה והדחה.
בונוס של 5 נקודות יינתן להוכחה באמצעות שתי הדרכים.

שאלה 4.
בחוג למנהל עסקים שבו 80 סטודנטים מבצעים ניסוי: את הסטודנטים מחלקים ל-4 קבוצות בנות 19 איש. מתוך כל קבוצה בוחרים פועל אחד, 3 מפקחים, 6 יועצים ארגוניים, והשאר (9) מנהלים. כמה אפשרויות יש לחלוקת הסטודנטים בניסוי?
א. ללא הגבלה.
ב. כאשר חיים ומשה לא מוכנים להיות באותה קבוצה, וחיים מוכרח להבחר לקבוצה כלשהי (חיים לא נשאר בחוץ).

שאלה 5.
ארנב עומד בפני גרם מדרגות. הארנב מסוגל לקפוץ בכל שלב מדרגה אחת, שתי מדרגות, או שלוש מדרגות. כמה אפשרויות שונות עומדות בפני הארנב, אם ברצונו לעלות n מדרגות?
מצאו נוסחה רקורסיבית לבעיה. אין צורך למצוא נוסחה מפורשת.

שאלה 6.
מצאו נוסחה רקורסיבית לבעיה הבאה: בכמה סדרות באורך n, המורכבות מהספרות {0,1,2,3} הספרה 0 מופיעה מספר אי-זוגי של פעמים.

שאלה 7.
עבור הפונקציה הרקורסיבית הבאה, הוכיחו ש: $f(n)=2^n-1$ היא הנוסחה המפורשת שלה.
$f(1) = 1, f(n+1) = 2*f(n)+1$.

# מתמטיקה דיסקרטית – דף פתרונות 9

שאלה 1.
נחלק את 12 המספרים ל-3 קבוצות בנות 4 איברים. נניח לשם הבאה לסתירה שאין רביעייה שבה סכום האיברים גדול מ-25, אבל אז סכום שלושת הרביעיות הוא לכל היותר 75, ולכן סכום 12 המספרים הוא 75, אך זאת בסתירה לנתון שסכום 12 המספרים הוא 100.

שאלה 2.
מספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4<5$, זהה לסכום מספרי הפתרונות של המשוואות: $x_1+x_2+x_3+x_4=4$, $x_1+x_2+x_3+x_4=3$, $x_1+x_2+x_3+x_4=2$, $x_1+x_2+x_3+x_4=1$, $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, כלומר:
{[(4-1)+4] מעל 4} + {[(4-1)+3] מעל 3} + {[(4-1)+2] מעל 2} + {[(4-1)+1] מעל 1} +
{[(4-1)+0] מעל 0}.

שאלה 3.
הערה: אין דרך ישירה לפתור את השאלה לפי נוסחת אויילר.

נסמן ב-A את קבוצת המספרים בין 77 ל-777 המתחלקים ב-7.
נסמן ב-B את קבוצת המספרים בין 77 ל-777 המתחלקים ב-11.
אנו נשאלים: $|A^c \cap B^c| = ?$
לפי עקרון ההכלה וההדחה ידוע: $|A^c \cap B^c| = |U|-|A|-|B|+|A \cap B|$.
כמות המספרים בין 77 ל-777 הוא $701 = 777+1-77$.
כמות המספרים בין 77 ל-777 המתחלקים ב-7 הוא $1 + \lfloor 700 / 7 \rfloor = 101$. מכיוון ש-77 מתחלק ב-7
כמות המספרים בין 77 ל-777 המתחלקים ב-11 הוא $1 + \lfloor 700/11 \rfloor = 63$. מכיוון ש-77 מתחלק ב-11.
מספרים שמתחלקים גם ב-7 וגם ב-11 למעשה מתחלקים ב-77. כמות המספרים בין 77 ל-777 המתחלקים ב-77 הוא $1 + \lfloor 700 / 77 \rfloor = 10$.
ולכן נקבל: $|A^c \cap B^c| = 701-101-64+10 = 546$.

שאלה 4.
א. ראשית נחלק את הסטודנטים לקבוצות הניסוי, ואז נחלק כל קבוצה לתפקידים השונים.
מספר האפשרויות הוא: (80 מעל 19)*(61 מעל 19)*(42 מעל 19)*(23 מעל 19)*
$[(19$ מעל $9)*(10$ מעל $6)*(4$ מעל $3)]^4$.
(את קבוצת האנשים שאינם משתתפים בניסוי אין צורך לבחור- הם האנשים הנותרים. כמו כן את הפועל אין צורך לבחור, כי הוא האיש האחרון בקבוצה)
ב. נבחר לחיים קבוצת ניסוי. בקבוצה זו משה אינו משתתף, ולכן צריך לבחור אנשים לקבוצה זו משאר האנשים. החלוקה בתוך הקבוצות אינה משתנה.
לכן מספר האפשרויות הוא: (4 מעל 1)*(78 מעל 18)*(61 מעל 19)*(42 מעל 19)*(23 מעל 19)*
$[(19$ מעל $9)*(10$ מעל $6)*(4$ מעל $3)]^4$.

שאלה 5.
בפני הארנב עומדות n מדרגות, ובשלב זה שלוש אפשרויות- לקפוץ בין מדרגה אחת לשלוש.
אם יקפוץ מדרגה אחת, יישארו בפניו n-1 מדרגות.
אם יקפוץ שתי מדרגות, יישארו בפניו n-2 מדרגות.
אם יקפוץ שלוש מדרגות, יישארו בפניו n-3 מדרגות.
נסמן ב-f(n) את מספר האפשרויות שיש בפני הארנב לקפוץ n מדרגות. נקבל אם כך ש:
$f(n) = f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)$
על כן צריך למצוא 3 תנאים התחלתיים.
[אפשר לחשוב על f(0) – יש אפשרות אחת: לא לקפוץ מדרגות]
כאשר יש בפני הארנב מדרגה אחת, יש לו אפשרות אחת- לקפוץ אליה. $f(1)=1$

כאשר יש בפני הארנב 2 מדרגות יש בפניו 2 אפשרויות: הראשונה- לקפוץ בפעם אחת שתי מדרגות. השניה- לקפוץ מדרגה אחת פעמיים. לכן $f(2)=2$.
כאשר יש בפני הארנב 3 מדרגות, האפשרויות הן: הראשונה- לקפוץ בפעם אחת 3 מדרגות. השניה- לקפוץ בפעם הראשונה 2 מדרגות ואח"כ עוד מדרגה. השלישית- לקפוץ מדרגה אחת ואז שתי מדרגות. הרביעית- לקפוץ מדרגה-מדרגה. סה"כ $f(3)=4$.

שאלה 6.
נסמן ב-$f(n)$ את מספר הסדרות החוקיות באורך n.
עבור המקום הראשון יש 4 אפשרויות: 0-3.
אם נבחר ב-1,2, או 3, נשאר עם סדרה באורך n-1, ונרצה שמס' האפסים בה יהיה אי-זוגי.
אם נבחר ב-0, נשאר עם סדרה באורך n-1 ונרצה שמס' האפסים בה יהיה זוגי.
כמות הסדרות בהן מספר האפסים הוא זוגי = סך כל הסדרות האפשריות פחות כמות הסדרות בהן מספר האפסים הוא אי-זוגי.
ולכן נקבל: $f(n)=3*f(n-1)+[4^{n-1} - f(n-1)] = 2f(n-1)+ 4^{n-1}$.

שאלה 7.
נוכיח באינדוקציה.
נבדוק את התנאי ההתחלתי: $f(1)=2-1=1$. מתקיים.
נניח שמתקיים עבור n האיברים הראשונים, ונוכיח עבור האיבר ה-n+1.
לפי הגדרת הרקורסיה: $f(n+1)=2*f(n)+1$
לפי הנחת האינדוקציה: $2*[f(n)]+1= 2*[2^n-1]+1$.
$2*[2^n-1]+1 = [2^{n+1}-2]+1 = 2^{n+1}-1$. מ.ש.ל.

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ה
7.11.2004

להגשה עד 22.11.2004

# מתמטיקה דיסקרטית- תרגיל מס' 4: יחסי שקילות ויחסי סדר

1) להלן יחסים מעל קבוצת הפונקציות מ- $Z$ ל- $Z$. קבע איזה מהם הינם יחסי שקילות. ציין איזה תכונות חסרות ליחסים אשר אינם יחסי שקילות.

א. $\{(f,g) \mid f(1)=g(1)\}$

ב. $\{(f,g) \mid f(0)=g(0)\ \ Or\ \ f(1)=g(1)\}$

ג. $\{(f,g) \mid f(x)-g(x)=1\ \ for\ all\ \ x\in Z\}$

ד. $\{(f,g) \mid f(x)-g(x)=C\ \ for\ some\ C\in Z\ \ for\ all\ \ x\in Z\}$

ה. $\{(f,g) \mid f(0)=g(1)\ \ and\ \ f(1)=g(0)\}$

2) הוכח כי היחס הבא P הוא יחס שקילות מעל כל קבוצה $A \times A$, כאשר $A \subseteq R$:

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1)P(x_2, y_2)$$

עבור $A = \{0, 1, 2, 1/2, 1/4\}$, כתוב במפורש את קבוצת המנה של $A \times A$ ביחס ל- P.
כמו כן הגדר את קבוצת המנה כאשר $A = R$. צייר כל מחלקת שקילות כגרף במישור.

3) תהי $S = R^n$, כלומר קבוצת וקטורי העמודה באורך n שרכיביהם ממשיים. נסמן

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

ונגדיר את היחס P כדלקמן:

$(v,w)\in P$ אםם לכל $1 \le i \le n$ מתקיים: $(v_i = 0 \Leftrightarrow w_i = 0)$

הוכח כי P יחס שקילות והגדר את קבוצת המנה.
מהו מספר מחלקות השקילות השונות?

4) נגדיר יחסים $S_0, S_1, S_2$ על $N^2$ באופן הבא:

לכל $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in N^2$, $\quad (x_1,y_1)S_0(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2 \ \wedge y_1 \le y_2$

לכל $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in N^2$, $\quad (x_1,y_1)S_1(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2 \ \wedge y_1 \ge y_2$

לכל $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in N^2$, $\quad (x_1,y_1)S_2(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 \le x_2^2 + y_2^2$

לכל אחד מהיחסים הללו קבע והוכח:
האם זהו יחס סדר חלקי?
האם זהו יחס סדר מלא?

עבור סדר חלקי - האם קיים איבר מינימלי?
עבור סדר חלקי - האם מתקיים תנאי המינימליות?

5) R היא רלציה מעל קבוצה A . $A_1$ היא תת קבוצה של $A$ . הרלציה $R_1$ מוגדרת מעל $A_1$ ע"י:
$R_1 = R \bigcap A_1 \times A_1$ ( $R_1$ היא צמצום של $R$ לתת הקבוצה $A_1$ של $A$ ).
האם מתקיימות הטענות הבאות:
א. $R$ טרנזיטיבי $\leftarrow$ $R_1$ טרנזיטיבי .
ב. $R$ יחס סדר חלקי $\leftarrow$ $R_1$ יחס סדר חלקי.

בהצלחה!

2

החוג למדעי המחשב
סמסטר א׳ – תשס״ה
6.12.2004

# מתמטיקה דיסקרטית- פיתרון תרגיל מס׳ 4: יחסי שקילות ויחסי סדר

**1)**

א. יחס שקילות
ב. היחס אינו טרנזיטיבי.
ג. היחס אינו רפלקסיבי, אינו סימטרי ואינו טרנזיטיבי.
ד. יחס שקילות.
ה. היחס אינו רפלקסיבי ואינו טרנזיטיבי.

**2)**

<u>נראה כי P הוא יחס שקילות</u>:

*רפלקסיביות*: לכל $(x,y)\in R^2$ מתקיים $x+y=x+y$ ולכן $(x,y)P(x,y)$ .

*סימטריות*: אם $(x,y)P(z,w)$ אז $x+y=z+w$ ולכן $z+w=x+y$ ולכן . $(z,w)P(x,y)$

*טרנזיטיביות*: אם $(x,y)P(z,w)\wedge(z,w)P(k,l)$ זה אומר ש $x+y=z+w=k+l$ לכן: $x+y=k+l$ , כלומר $(x,y)P(k,l)$

$\Leftarrow$ <u>P יחס שקילות</u>.

עבור $A = \{0, 1, 2, 1/2, 1/4\}$, קבוצת המנה תהייה:

A/P = { {pairs that their sum is 0} , {pairs that their sum is 1/4},
{ pairs that their sum is 1/2} , { pairs that their sum is 3/4} ,
{ pairs that their sum is 1 } , { pairs that their sum is 5/4} ,
{ pairs that their sum is 6/4} , { pairs that their sum is 2},
{ pairs that their sum is 9/4 } , { pairs that their sum is 10/4} ,
{ pairs that their sum is 3} , { pairs that their sum is 4} }

<u>כאשר A = R:</u>

<u>הגדרת מחלקות השקילות</u>:

בשאלות מעין אלה כדאי להבין את משמעות היחס המוגדר, ולהבין את החלוקה שהוא יוצר בקבוצה. נסביר איך היחס המוגדר כאן מחלק את המישור $R^2$ .

לכל $(x_0,y_0)\in R^2$ אם $x_0+y_0=b$ אז האיברים $(x,y)$ ב- $R^2$ שיאמדו איתו ביחס הם אלה שמקיימים $x+y=b$ כלומר $y=-x+b$ כאשר $b$ הוא <u>קבוע</u>.

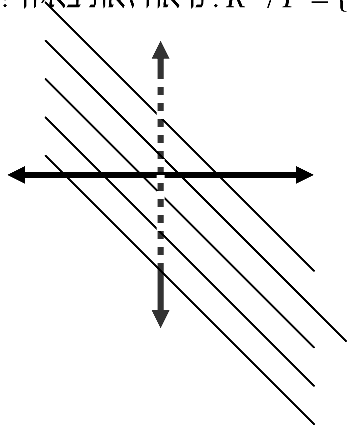
הנוסחה שקיבלנו מתארת ישר במישור ששיפועו (1-) ונק׳ החיתוך שלו עם ציר ה y היא b.
כלומר – כל מחלקת שקילות היא קו ישר בעל שיפוע (1-) , הקבוע b שמתחלף בין המחלקות השונות.

נקבל: $[(x_0,y_0)]=\{(x,y)\in R^2 \mid \textit{the piont } (x,y) \textit{ is on the staight line } \mathrm{y = -x + b}\}$

1

הגדרת קבוצת המנה:

לפי מה שהראינו, היחס P מחלק את המישור לקווים מקבילים ששיפועם 1- .
קבוצת המנה היא קבוצה הכוללת נציג אחד מכל מחלקת שקילות.
כדי להגדיר את קבוצת המנה, כדאי לבחור נקודה אחת מכל מחלקת שקילות בצורה קונסיסטנטית -כלומר למצוא דרך להביע את אוסף כל הנקודות שכל אחת מהן מייצגת מחלקת שקילות. אם ראינו כבר שהיחס מחלק את המישור לקווים ישרים ומקבילים, יהיה קל לבחור מכל קו נקודה אחת כך שכל הנציגים האלה נמצאים על ישר מאונך אחד. נקבל אם כן:
$R^2/P = \{[(0,b)] \mid b \in R\} = \{\{(x,y) \mid x+y=b\} \mid b \in R\}$ . נראה זאת באיור:
קבוצת המנה לקחנו כמייצגים של מחלקות השקילות
את אוסף הנקודות הנמצאות על ציר ה Y .
הערה: הקבוצה בזאת שקולה לקבוצת הממשיים.



**3)**

נוכיח ש P יחס שקילות:

*רפלקסיביות*: יהי $v \in P^n$ אזי לכל $1 \le i \le n$ מתקיים ש $v_i = v_i$ לכן $v_i = 0 \Leftrightarrow v_i = 0$ . לכן $vRv$ .

*סימטריות*: אם $vPw$ אז לכל $1 \le i \le n$ מתקיים ש $v_i = 0 \Leftrightarrow w_i = 0$ וברור שגם $w_i = 0 \Leftrightarrow v_i = 0$ לכן $wPv$ .

*טרנזיטיביות*: אם $vPw$ וגם $wPz$ אז $\forall 1 \le i \le n(v_i = 0 \Leftrightarrow w_i = 0 \wedge w_i = 0 \Leftrightarrow z_i = 0)$
לכן מתקיים: $v_i = 0 \Leftrightarrow z_i = 0$ ולכן $vPz$ .

$\Leftarrow$ P יחס שקילות.

מחלקות השקילות:

$$[v] = \{w \in R^n \mid \forall 1 \le i \le n(v_i = 0 \Leftrightarrow w_i = 0\}$$

כלומר, מחלקת השקילות של וקטור הינה כל קבוצת כל הוקטורים אשר הקורדינאטות שלהם מתאפסות באותם מקומות של הוקטור הנתון.

קבוצת המנה:

כאמור, כל קבוצת וקטורים אשר הקורדינאטות שלהם מתאפסות באותם מקומות מגדירה מחלקת שקילות.
לפי הבנת מחלקות השקילות, אנו רואים שכל מחלקה מאופיינת ע"י המיקומים $1 \le i \le n$ שבהם לוקטורים יש אפסים. יהיה טבעי לבחור כאן כמייצגים את הוקטורים הבינאריים (של אפסים ואחדים בלבד). נקבל לכן: $R^n / P = \{[v] \mid v \ \ is \ \ binary \ \ vector\}$ .

ישנם $2^n$ מחלקות שקילות שונות.

**4)**

א. לכל $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in N^2$ , $(x_1,y_1)S_0(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2 \wedge y_1 \le y_2$

זהו יחס סדר חלקי.

לא יחס סדר מלא כי $(2,3)$ ו $(4,1)$ אינם ניתנים להשוואה.

$(0,0)$ הוא האיבר המינימאלי היחיד (אין קטנים ממנו).

תנאי המינימאליות מתקיים מאחר שבכל תת קבוצה של זוגות סדורים כנ"ל יש איבר מינימאלי: מבין כל הנקודות בוחרים את זאת אשר ה x שלה הוא הקטן ביותר. אם יש כמה כאלה בוחרים מביניהן את הנקודה אשר ה -y שלה הוא הקטן ביותר. (הערה: יתכן שיהיה יותר מאיבר מינימאלי אחד)

ב. לכל $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in N^2$ , $(x_1,y_1)S_1(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \le x_2 \wedge y_1 \ge y_2$

כן יחס סדר חלקי.

לא יחס סדר מלא כי $(2,3)$ ו $(4,5)$ אינם ניתנים להשוואה

אין איבר מינימאלי .

תנאי המינימאליות לא מתקיים כי כבר בקבוצה עצמה אין איבר מינימאלי.

ג. לא יחס סדר כי האנטי סימטריות לא מתקיימת. יכולות להיות שתי נקודות **שונות** אשר יש להן אותו מרחק מהראשית.

**5)** נוכיח את נכונות שתי הטענות:

א. צ"ל: $R$ טרנזיטיבי $\leftarrow$ $R_1$ טרנזיטיבי

הוכחה: יהיו $a,b,c\in A_1$ .

נניח : $(a,b)\in R_1 \wedge (b,c)\in R_1$.

$R_1\subseteq R$ לכן : $(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R$

R טנזיטיבי לכן : $(a,c)\in R$ [*]

$a,c\in A_1$ לכן $(a,c)\in A_1\times A_1$ [**]

מ [*] ומ [**] נסיק ש $(a,c)\in R_1$

מ.ש.ל

ב. על מנת להוכיח ש $R_1$ יחס סדר חלקי נותר להראות רפלקסיביות ואנטי סימטריות.

<u>רפלקסיביות:</u> יהי $a\in A_1$ .

$A_1\subseteq A$ לכן : $a\in A$ .

R רפלקסיבי לכן : $(a,a)\in R$ [*]

מהנתון נובע : $(a,a) \in A_1 \times A_1$ [**]

מ [*] ומ [**] נסיק ש $(a,a) \in R_1$

מ.ש.ל

<u>אנטי סימטרית :</u> יהי $a,b \in A_1$ .

נניח : $(a,b) \in R_1 \wedge (b,a) \in R_1$.

$R_1 \subseteq R$ לכן : $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$

R אנטי סימטרי לכן : $a = b$

מ.ש.ל

להגשה עד 2.12.2004

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ה
23.11.2004 (עודכן ב 28.11.2004)

# מתמטיקה דיסקרטית- תרגיל מס' 5: מבוא לקומבינטוריקה

1)

א) מצא בכמה אופנים ניתן להכניס 5 כדורים שונים לתוך שני שקים כך שבכל שק לפחות כדור אחד ?
(רמז: מספר האפשרויות ללא ההגבלה הוא כמספר האפשרויות לבחור 5 עצמים מתוך קבוצה בגודל 2 כאשר מותרות חזרות ויש חשיבות לסדר.)

ב) כנ"ל אבל יש להכניס את חמשת הכדורים לשלושה שקים.

2) על מדף 10 ספרים שונים מהם 5 ספרים באלגברה , 3 ספרים בחדו"א, 2 ספרים במדעי המחשב. מצא בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף במקרים הבאים :

א) חמשת הספרים הראשונים משמאל הם באלגברה, שלושת האמצעיים הם ספרים בחדו"א, וכל הספרים מימין הם ספרים במדעי המחשב.

ב) הספרים בכל קורס יהיו סמוכים זה לזה.

ג) הספרים באלגברה ובמדעי המחשב יהיו סמוכים זה לזה ובנוסף לא כל הספרים בחדו"א יהיו זה סמוכים זה לזה.

3)

א) כמה מספרים בני 6 ספרות אפשר לייצר מהספרות $2,3,7$ ?

ב) כמה מהם זוגיים ?

ג) בכמה מהמספרים האלה מופיעה כל סיפרה בדיוק פעמיים ?

ד) כמה מהמספרים בסעיף ג זוגיים ?

4) במספר טלפון יש 7 ספרות.

א. בכמה סדרות מספרי טלפון יש בדיוק 2 או בדיוק 3 מופעים של אפס ?

ב. רוצים לחלק את מספרי הטלפון בין 3 חברות טלפון שונות. בכמה אופנים ניתן לעשות זאת אם אין הגבלה על כמות מהמספרים בכל חברה ?

ג. בכמה מספרי טלפון יש בדיוק 3 מופעים של אפס כשאף שניים מהם לא צמודים זה לזה ?

5)

א) בכיתה $2 \cdot n$ תלמידים ועליהם להגיש תרגילים בזוגות. כמה אפשרויות יש ליצירת הזוגות?

ב) כמה אפשרויות יש לחלק $n$ סטודנטים ו- $n$ סטודנטיות לזוגות מעורבים ?

ג) אם יש $n$ בנות ו- $n+2 \cdot k$ בנים , כמה אפשרויות יש לחלקם לזוגות כך שכל בת תהייה עם בן ושאר הבנים בזוגות ביניהם ? (רמז: העזר בסעיף א)

6) בכמה אופנים ניתן לבחור 5 נעליים מתוך 9 זוגות נעליים כך שלא ייבחר אף זוג?

1

7)

א. בכמה אופנים ניתן לחלק 10 כדורים <u>זהים</u> ל 4 קופסאות <u>שונות</u> כך ששלושת הקופסאות הראשונות אינן ריקות?

ב. בכמה דרכים ניתן לחלק 7 חפצים שונים ל 10 קופסאות שונות?

8) נתונה המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ . כמה פתרונות שלמים למשוואה כאשר :

א) הפתרונות אי שליליים?

ב) הפתרונות חיוביים ?

ג) $0 \le x_1$ , $3 \le x_2$ , $0 \le x_3$ , $8 \le x_4$ ?

ד) $1 \le x_1 \le 6$ , $0 \le x_2 \le 8$ , $-2 \le x_3 \le 3$ , $6 \le x_4 \le 10$ ? (על מנת לפתור סעיף זה צריך להשתמש בעקרון ההכלה וההדחה. לפיכך אין צורך להגישו בשלב זה )

9) על שולחן מלבני ארוך מונחות שתי שורות של צלחות , כל אחת באורך 10 צלחות. רוצים לשים 4 סופגניות בשורה הימנית ו- 6 סופגניות בשורה השמאלית (לכל היותר סופגנייה אחת בכל צלחת) כך שפעמיים תופענה צלחות עם סופגנייה זו מול זו. בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

10) תהא $A$ קבוצה כלשהיא ותהא $B$ קבוצת כל הרלציות מעל $A$ כלומר $B = P(A \times A)$ . נגדיר רלציה T מעל $B$ : $T = \{(R,S) | dom(R) = dom(S)\}$ .

( בתירגול הראנו ש T הינה רלציית שקילות. )

א. עבור $A = \{1,2,..10\}$ $R = \{(1,2)\}$ (כמובן ש $R \in B$ ) מה הוא גודלה של מחלקת השקילות של $R$ ?

ב. מהו מספר מחלקות השקילות השונות ביחס T אם A היא כפי שהוגדר בסעיף א ? (מהו גודל קבוצת המנה $B/T$ )

ג. האם מחלקות השקילות זהות בגודלן ?

ד. האם כל הפונקציות מעל A יושבות באותה מחלקת שקילות ?

בהצלחה!

2

החוג למדעי המחשב
סמסטר א׳ – תשס״ה
12.12.2004

## <u>מתמטיקה דיסקרטית- פיתרון תרגיל מס׳ 5: מבוא לקומבינטוריקה</u>

### 1)

א.

מספר האפשרויות ללא מגבלות הינו $2^5$ . מספר האפשרויות בהן קיים שק אשר אין בו שום כדור הינו 2 (כ״א מהתאים יכול להיות זה הריק).

לפיכך מספר האפשרויות החוקיות הינו : $2^5 - 2 = 30$

ב. מספר האפשרויות ללא מגבלות הינו $3^5$ . יש להחסיר את המקרים בהם יש שק אחד ריק ואת המקרים בהם יש שני שקים ריקים.

-- מספר המקרים בהם יש תא אחד ריק הוא $3 \cdot 30$ (עבור כ״א משלושת האפשרויות לבחירת התא הריק יש 30 אפשרויות להכנסת הכדורים לתוך שני התאים הנותרים – ראה סעיף א).

-- המקרים בהם יש שני תאים ריקים הם המקרים בהם כל הכדורים מוכנסים לתוך תא אחד בלבד. יש 3 אפשרויות כאלה.

לפיכך התשובה: $3^5 - (30 \cdot 3 + 3)$

### 2)

א. ישנן $5!$ אפשרויות לסידור הפנימי של ספרי האלגברה, $3!$ אפשרויות לסידור הפנימי של ספרי החדו״א $2!$ אפשרויות לסידור הפנימי של הספרים מדעי המחשב. לכן התשובה היא:
$5! \times 3! \times 2! = 1440$

ב. הסידורים הפנימיים הם לפי החישוב של סעיף א׳ , אולם כעת יש $3!$ אפשרויות לסידור ״הבלוקים״ השונים של הספרים. לכן נכפיל את התוצאה מסעיף ב $3!$. לכן התשובה היא
$3! \times (5! \times 3! \times 2!) = 8640$

ג. במקרה זה ישנו גוש של ספרי אלגברה, גוש של ספרי מדעי-המחשב ושלושה ספרי חדו״א. סה״כ חמישה עצמים בדידים אשר ניתן לסדרם ב $5!$ אפשרויות. יש להכפיל זאת בסידורים הפנימיים של הספרים באלגברה ובמדעי המחשב, לכן מספר האפשרויות בלי המגבלה של ספרי החדו״א הוא $5! \times 5! \times 2!$ . ממספר זה יש להפחית את מספר האפשריות בהם כל ספרי החדו״א סמוכים זה לזה, כלומר שהספרים בכל קורס סמוכים זה לזה (ואת זה בדיוק חישבנו בסעיף ב׳) .
לכן התשובה הסופית: $5! \times 5! \times 2! - 8640$ .

### 3)

א. בחירה של שישה עצמים מתוך שלושה עם חזרות ועם חשיבות לסדר: $3^6$ אפשרויות.
ב. כדי לקבל מספר זוגי יש לשים בסופו 2. לכן הבחירה היא של חמישה עצמים: $3^5$ אפשרויות.

ג. נבחר שני מקומות עבור הספרה 7: $\binom{6}{2}$ אפשרויות. עבור כ"א מהאפשרויות הנ"ל נבחר מבין ארבעת המקומות הפנויים שני מקומות עבור הספרה 3: $\binom{4}{2}$ אפשרויות. בכ"א משני המקומות הנותרים נציב את הספרה 2.

לפיכך, מספר האפשרויות הוא: $\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{2}$.

ד. כאמור, כדי לקבל מספר זוגי יש לשים בסופו 2. לפי השיטה שתוארה בסעיף קודם נקבל:
$\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}$

## 4)

א. $9^5\cdot\binom{7}{2} + 9^4\cdot\binom{7}{3}$

סידור שאר הספרות

בחירת מקומות לאפסים

ב. ישנם סה"כ $10^7$ מספרי טלפון. כל מספר "בוחר" חברה בלי הגבלה. לכן התשובה: $3^{\left(10^7\right)}$

ג. ניבחר מספר בן 4 ספרות בלי אפס ב $9^4$ אפשרויות. אח"כ ניבחר 3 מקומות לאפסים מתוך החמישה האפשריים. לכן התשובה: $\binom{5}{3}\cdot 9^4$

## 5)

א. נסדר את כולם בשורה ב $(2\cdot n)!$ אפשרויות. נחלק ב $n!$ סידורים בין הזוגות וב 2 עבור כל זוג (עבור הסדר בתוך הזוג) כלומר ב $2^n$ עבור כל הזוגות. לפיכך מספר האפשרויות הוא:
$$\frac{(2\cdot n)!}{n!\cdot 2^n}$$

ב. נעמיד את הבנים בשורה באופן אקראי (ללא תזוזה) ומולם נעמיד את הבנים כל פעם בסידור שונה. מספר האפשרויות הוא כמספר התמורות של קבוצה בת $n$ איברים: $n!$

ג. נבחר תחילה את הבנים שתהייה להם בת זוג ב $\binom{n+2\cdot k}{n}$ אפשרויות. אח"כ נסדר זוגות מעורבים עם הבנות ב $n!$ אפשרויות. בסוף נסדר את $2\cdot k$ הבנים שנותרו ב $\frac{(2\cdot k)!}{k!\cdot 2^k}$ אפשרויות (לפי הנוסחה של סעיף א). לכן מספר האפשרויות הינו:
$$\binom{n+2\cdot k}{n}\cdot n!\cdot\frac{(2\cdot k)!}{k!\cdot 2^k}$$

2

**(6**

נבחר חמש זוגות מתוך התשע ב- $\binom{9}{5}$ אפשרויות. לכל אחד מהזוגות נוציא את אחת הנעליים. יש שני אופנים לעשות זאת עבור כל זוג נעליים, לכן יש $2^5$ אפשרויות להוצאת נעל אחת מכל זוג. לכן התשובה: $\binom{9}{5}\cdot 2^5$.

**(7**

א. נשים בשלושת הקופסאות הראשונות כדור בכל קופסא. אתת יתר הכדורים נחלק בתאים ללא הגבלה. נקבל שמספר האפשרויות הוא כמספר האפשרויות לבחור 7 עצמים מתוך 4 עם חזרות ובלי חשיבות לסדר: $\binom{10}{7}$.

ב. כל חפץ יכול לבחור ללא הגבלה את הקופסא בה יהיה. נקבל לכן $10^7$ אפשרויות.

**(8**

<u>א.</u>

לפי הנוסחה של צירופים עם חזרות: $\binom{28}{25}=\binom{25+4-1}{25}$

<u>ב.</u>

נגדיר $y_1, y_2, y_3, y_4$ כך ש $x_i = y_i + 1 \quad i = 1,2,3,4$

מהמשוואה המקורית אנו מקבלים ש: $(y_1+1)+(y_2+1)+(y_3+1)+(y_4+1)=25$

כלומר: $y_1+y_2+y_3+y_4=21$

ע״פ הנוסחה של צירופים עם חזרות נקבל שהתשובה היא $\binom{24}{21}=\binom{21+4-1}{21}$

<u>ג.</u>

נגדיר $y_1, y_2, y_3, y_4$ כך ש

$x_1 = y_1$

$x_2 = y_2 + 3$

$x_3 = y_3$

$x_4 = y_4 + 8$

מהמשוואה המקורית אנו מקבלים ש: $y_1 + (y_2 + 3) + y_3 + (y_4 + 8) = 25$

כלומר: $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 14$

ע"פ הנוסחה של צירופים עם חזרות נקבל שהתשובה היא $\binom{14+4-1}{14} = \binom{17}{14}$

## 9)

ראשית בוחרים 2 מקומות בהם נשים סופגנייה גם בצלחת שבטור הימני וגם בצלחת שבטור השמאלי. יש $\binom{10}{2}$ אפשרויות לעשות זאת. לאחר מכן בוחרים מתוך 8 הצלחות שנותרו בטור השמאלי , 4 צלחות בהן תהייה סופגנייה יש $\binom{8}{4}$ אפשרויות לעשות זאת. סה"כ יהיו 6 סופגניות בטור השמאלי – כנדרש. לבסוף בוחרים 2 מבין 4 המקומות הפנויים בטור הימני.

לפיכך, התשובה היא $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{2}$

## 10)

א. מחלקת השקילות של R כוללת את כל הרלציות שהתחום שלהם הוא הקבוצה $\{1\}$. כל רלציה כזאת היא תת קבוצה של $\{1\} \times A = \{(1,1),(1,2),....,(1,10)\}$, אולם יש לשים לב שהרלציה הריקה אינה במחלקת השקילות הזאת . מחלקת השקילות של R הינה: $[R]_T = P(\{1\} \times A)/\phi$. גודלה של מחלקת שקילות זאת הוא $2^{10} - 1$ .

ב.
במחלקת שקילות נמצאות כל הרלציות שיש להן תחום זהה. לכן נבדוק מהו מספר התחומים שיתכנו.

כל תחום הוא תת קבוצה של A, לכן מספר התחומים הינו $2^{10}$ , וכך גם מספר מחלקות השילות (גודל קבוצת המנה $B/T$).

ג.
כמובן שלא. הרלציה הריקה נמצאת במחלקת שקילות נפרדת שגודלה 1 (בשונה למשל ממחלקת השקילות של R מסעיף א) .

ד.
כל ופונקצית מעל A יושבות באותה מחלקת שקילות מאחר שהתחום של כולן הוא A. נציין שבמחלקת שקילות זאת יש גם רלציות שאינן פונקציות (לדוגמה: $A \times A$).

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ה
29.11.2004

להגשה עד 9.12.2004

# מתמטיקה דיסקרטית- תרגיל בית מספר 6:
# עקרון המשלים, עקרון ההכלה וההפרדה

1) נתונה קבוצה סופית X בת n איברים. תהי Y תת קבוצה של X בת m איברים. מהו מספר תתי הקבוצות של X שחיתוכן עם Y אינו ריק?

2)
א. בכמה סידורים של הספרות 1,2,3,4,5,6,7 בשורה מופיעה תת הסדרה הרצופה 247?
ב. בכמה סידורים של הספרות 1,2,3,4,5,6,7 בשורה מופיעה תת הסדרה הרצופה 24 או מופיעה 27 או מופיעה 47?

3) 5 משפחות יצאו יחד למנגל והכינו 9 סטייקים **זהים** ו- 12 שיפודים **זהים**. המשפחות **אינן** נחשבות זהות.
א) בכמה ניתן לחלק את כל האוכל בין המשפחות? (ייתכן שמשפחה לא רוצה אוכל בכלל).
ב) בכמה דרכים ניתן לחלק את כל האוכל בין המשפחות אם כל משפחה חייבת לקבל לפחות סטייק אחד ובנוסף משפחת לוי חייבת לקבל לפחות 3 שיפודים?
ג) בסוף היום, החליטו המשפחות להחליף מכוניות. בכמה אופנים יכלו לנסוע הביתה אם אף משפחה לא נסעה במכונית שלה?

4)
בכמה אופנים ניתן לבחור 40 כדורים מתוך ערמת כדורים לבנים, שחורים ואדומים אם יש לכל היותר 10 כדורים לבנים, 20 כדורים שחורים ו – 30 כדורים אדומים?

5)
בכמה אפשרויות אפשר לסדר את האותיות $\{a,a,b,b,c,c,d,d\}$ כך שלא יהיה אף זוג צמוד של אותה אות?

6 ) תהי A קבוצה בת 10 איברים ותהי - B קבוצה בת חמישה איברים.
א. כמה פונקי' שונות ישנן מ- A ל B וכמה מ- B ל A?
ב. כמה פונקי' על ישנן של A ל B ושל B ל A?

בהצלחה!

1

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ה
20.12.2004

# מתמטיקה דיסקרטית- פיתרון תרגיל בית מס' 6
# עקרון ההכלה וההפרדה:

### 1)

"חיתוכן אינו ריק" משמעו שקיים לפחות איבר אחד של Y בתת הקבוצה. מספר תתי הקבוצות של X בהן אין אף איבר מY הוא $|P(X \setminus Y)| = 2^{|X \setminus Y|} = 2^{n-m}$. לכן ביתר תתי הקבוצות של X קיים לפחות איבר אחד מ Y, ולכן חיתוכן עם Y אינו ריק. נקבל בשיטת המשלים $2^n - 2^{n-m}$.

### 2)

א. נסדר את האיברים 1,247,3,5,6 בשורה. יש $5!$ אפשרויות לעשות זאת.

ב. נסמן A=מספר הסידורים שמופיע 24
B=מספר הסידורים שמופיע 27
C=מספר הסידורים שמופיע 47

ונחשב,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$
$$6! + 6! + 6! - 0 - 5! - 0 + 0 = 3 \cdot 6! - 5!$$

### 3)

א. * מספר האפשרויות לחלוקת הסטייקים הוא כמספר הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$, כלומר $D(5,9) = \binom{13}{9}$.

* מספר האפשרויות לחלוקת השיפודים הוא כמספר הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$, כלומר $D(5,12) = \binom{16}{12}$.

לפיכך, מספר האופנים בהם ניתן לחלק את האוכל הוא $\binom{13}{9} \cdot \binom{16}{12}$

ב. * כל משפחה חייבת לקבל לפחות סטייק אחד לכן מספר האפשרויות לחלוקת הסטייקים הוא כמספר הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 - 5$, כלומר $D(5,4) = \binom{8}{4}$.

* אחת המשפחות מקבלת לפחות 3 שיפודים לכן מספר האפשרויות לחלוקת השיפודים הוא
כמספר הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=12-3$ ,
כלומר $D(5,9)=\binom{13}{9}$ .

לפיכך, מספר האופנים בהם ניתן לחלק את האוכל הוא $\binom{8}{4}\cdot\binom{13}{9}$

ג. אי סדר מלא כאשר n=5 :

$$5!-\binom{5}{1}\cdot 4!+\binom{5}{2}\cdot 3!-\binom{5}{3}\cdot 2!+\binom{5}{4}\cdot 1!-\binom{5}{5}0! \quad =5!\cdot\sum_{k=0}^{5}\frac{(-1)^k}{k!} \quad =44$$

## (4

מספר האפשרויות לבחור 40 כדורים בצבעים הנ״ל, ללא מגבלות הוא כמספר הפתרונות השלמים
האי-שליליים של המשוואה $x_1+x_2+x_3=40$ , כלומר $D(3,40)=\binom{42}{2}$ .

מספר האופנים לבחור 40 כדורים כך שיהיו לפחות 11 כדורים לבנים הוא $D(3,29)=\binom{31}{2}$ .

מספר האופנים לבחור 40 כדורים כך שיהיו לפחות 21 כדורים שחורים הוא $D(3,19)=\binom{21}{2}$ .

מספר האופנים לבחור 40 כדורים כך שיהיו לפחות 31 כדורים אדומים הוא $D(3,9)=\binom{11}{2}$ .

מספר האופנים לבחור 40 כדורים כך שיהיו לפחות 11 כדורים לבנים ולפחות 21 שחורים הוא
$D(3,8)=\binom{10}{2}$ .

כל יתר האפשרויות לא תחתכנה.
נקבל מעקרון ההכלה וההפרדה, שמספר האפשרויות לבחור 40 כדורים כך שיהיו לכל היותר 10 לבנים, 20 שחורים ו30 אדומים הוא

$$\binom{42}{2}-\left[\binom{31}{2}+\binom{21}{2}+\binom{11}{2}\right]+\binom{10}{2}=176$$

## (5

מספר האפשרויות ללא המגבלה הינו $\frac{8!}{2^4}$

נסמן ב $A_i$ את אוסף התמורות של $\{a,a,b,b,c,c,d,d\}$ שבהן $ii$ צמודים. נחשב: $|A_i|=\frac{7!}{2^3}$

(כאשר מתייחסים ל ii כאל אות אחת בסידור). באותו אופן

$$|A_i \cap A_j| = \frac{6!}{2^2}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{5!}{2}$$

$$|A_a \cap A_b \cap A_c \cap A_d| = 4!$$

מעיקרון ההכלה וההוצאה נקבל שמספר האפשרויות הינו :

$$|A_a' \cap A_b' \cap A_c' \cap A_d'| = \frac{8!}{2^4} - \binom{4}{1}\frac{7!}{2^3} + \binom{4}{2}\frac{6!}{2^2} - \binom{4}{3}\frac{5!}{2} + \binom{4}{4}4! =$$

$$= \frac{8!}{2^4} - 4\frac{7!}{2^3} + 6\frac{6!}{2^2} - 4\frac{5!}{2} + 4! = 864$$

**6)**

א. $f: A \to B$ : כל איבר ב A יכול לעבור ע"י f לכל איבר מ B. לכן יש $5^{10}$ אפשרויות.

$f: B \to A$ : כל איבר ב B יכול לעבור ע"י f לכל איבר מ B. לכן יש $10^5$ אפשרויות.

ב. $f: B \to A$ על אין, כי $|B| < |A|$.

$f: A \to B$ על:

- סה"כ הפונק' השונות של A לתוך B הוא $5^{10}$
- מספר הפונק' השונות של A לתוך תת קבוצה של B בעלת 4 איברים הוא $4^{10}$, ויש 5 תת קבוצות כאלה.
- מספר הפונק' השונות של A לתוך תת קבוצה של B בעלת 3 איברים הוא $3^{10}$, ויש $\binom{5}{3}$ תת קבוצות כאלה.
- מספר הפונק' השונות של A לתוך תת קבוצה של B בעלת 2 איברים הוא $2^{10}$, ויש $\binom{5}{2}$ תת קבוצות כאלה.
- מספר הפונק' השונות של A לתוך תת קבוצה של B בעלת איבר אחד הוא 1, ויש 5 תת קבוצות כאלה.

מכיוון שבתוך ספירת הפונק' מA לתוך תת קבוצה של B בעלת i איברים נכללות גם כל הפונק' לתוך תת קבוצה קטנה יותר, צריך להשתמש כאן בעקרון ההכלה וההפרדה. נקבל את החישוב הבא :

$$5^{10} - 5\cdot 4^{10} + \binom{5}{3}\cdot 3^{10} - \binom{5}{2}\cdot 2^{10} + 5$$

החוג למדעי המחשב                                                    להגשה עד 16.12.2004

סמסטר א' – תשס"ה

5.12.2004

# <u>מתמטיקה דיסקרטית- תרגיל מס' 7: זהויות קומבינטוריות</u>

1)

א. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}3^i = 4^n$

ב. הוכח כי $a^2 = a + 2\cdot\binom{a}{2}$

ג. מהו המקדם של $x^2$ בפיתוח של $(1+\frac{\sqrt{x}}{2})^8$ ?

2) הוכח כי לכל n טבעי מתקיים : $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i = 3^n$

א. בצורה אלגברית

ב. בצורה קומבינטורית

3) הוכח **באינדוקציה** ש $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

4) תן הוכחה קומבינטורית לשוויון (הוכחה <u>אלטרנטיבית</u> להוכחה מהתירגול ) :

$$n + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1}$$

הדרכה : הראה ששני האגפים סופרים את מספר הסדרות באורך n המורכבות מהא"ב $\{0,1,a\}$ המכילות a יחיד.

5)

חשב את הסכומים הבאים :

א. $\sum_{k=0}^{n}3^k\cdot k\binom{n}{k}$

ב. $\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-5)^k$

6) הוכח את הזהות הבאה. העזר בעקרון ההכלה וההפרדה :

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n-i+k-1}{k} = \binom{k-1}{k-n}$$

1

רמז: הראה ששני הצדדים מונים את מספר האפשרויות לפזר k כדורים זהים ל-n תאים שונים כך שאף תא אינו ריק.

בהצלחה!

החוג למדעי המחשב
סמסטר א׳ – תשס״ה
26.12.2004

## מתמטיקה דיסקרטית- פיתרון תרגיל מס׳ 7
## זהויות קומבינטוריות:

<u>תזכורת , נוסחת הבינום של ניוטון :</u>

יהיו $a,b \in R$ ויהי $n \in N$ . אזי : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

### 1)

א. נציב $b=1$ ; $a=3$ בנוסחת הבינום של ניוטון ונקבל:

$$4^n = (3+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 3^k$$

ב. הוכחה אלגברית פשוטה:

$$a + 2 \cdot \binom{a}{2} = a + 2 \cdot \frac{a!}{(a-2)! \cdot 2!} = a + a \cdot (a-1) = a(1 + a - 1) = a^2$$

ג.

$$(1+\tfrac{\sqrt{x}}{2})^8 = \sum_{i=0}^{8} \binom{8}{i} 1^i \left(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^{8-i} = \sum_{i=0}^{8} \binom{8}{i} \left(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^{8-i}$$

אנו מעוניינים כאן באיבר $x^2$ המופיע בסכום זה כ $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^4$ שמקדמו הוא $\binom{8}{4}$. נקבל

$\binom{8}{4}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^4 = \binom{8}{4}\frac{x^2}{16} = \frac{70 \cdot x^2}{16} = \frac{35}{8} \cdot x^2$ . כלומר מקדמו של $x^2$ הוא $\frac{35}{8}$.

### 2)

צ״ל כי לכל n טבעי מתקיים : $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n$

א. מציבים $a=2, b=1$ בנוסחת הבינום.

ב. הוכחה קומבינטורית: שני צדדי הזהות מבטאים את מספר המחרוזות באורך n מעל הא״ב $\{0,1,2\}$ . צד ימין הוא לפי הנוסחה של חליפות עם חזרות (מספר האפשרויות לבחור n עצמים מתוך קבוצה של 3 עצמים כשר יש חזרות ויש חשיבות לסדר).
בצד שמאל בוחרים מקומות לאפסים ועבור כל בחירה כזאת מונים את מספר האפשרויות להציב את הספרות 1 ו-2 במקומות הנותרים.

1

**3)**

נוכיח ש $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ באינדוקציה על $n$.

<u>בסיס:</u>

עבור $n=0$ : $\binom{0}{0}=1=2^0$

עבור $n=1$ : $\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2=2^1$

עבור $n=2$ : $\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=1+2+1=2^2$

<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח עבור $n$ ונוכיח עבור $n+1$ .

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}$$
$$=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}+\binom{n}{n+1}\right]+\left[\binom{n}{-1}+\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}\right]$$
$$=\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}+\binom{n}{n+1}\right]+\left[\binom{n}{-1}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\right]=\left[2^n+0\right]+\left[0+2^n\right]$$
$$=2\cdot 2^n$$
$$=2^{n+1}$$

מ.ש.ל

**4)**

נוכיח את השוויון ע"י ספירת סדרות באורך n מעל הא"ב $\{0,1,a\}$ בעלות a יחיד. נראה שתי ספירות שונות:

צד ימין: נבחר מקום לספרה a מתוך n האפשרויות, וביתר המקומות נשים 0 או 1. בספירה זו נקבל $n\cdot 2^{n-1}=\binom{n}{1}2^{n-1}$.

צד שמאל: יש n סדרות שבהן יש רק אפסים ו-a אחד, $2\binom{n}{2}$ סדרות שבהן יש $n-2$ אפסים, 1 אחד ו a אחד, $3\binom{n}{3}$ סדרות שבהן יש $n-3$ אפסים, 2 אחדים ו a אחד , $k\binom{n}{k}$ סדרות שבהן $n-k$ אפסים, $k-1$ אחדים ו a אחד (בוחרים k מקומות בסדרה שלא יופיע בהם אחד,

ומתוכם בוחרים מקום אחד ל a)  וכן הלאה... ויש n סדרות שבהן יש 0 אפסים, n-1  אחדים ו a אחד. מכיוון שאפשרויות אלה זרות, נחבר ביניהם ונגיע לערך $n + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$ .

**5)**

א.   נוסחת הבינום של ניוטון :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i a^{n-i} = (x+a)^n .$$

נגזור את המשוואה פעם אחת לפי $x$ ונקבל:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i \cdot x^{i-1}a^{n-i} = n(x+a)^{n-1}$$

נציב : $x=3, a=1$ ונקבל:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i \cdot 3^{i-1} = n\cdot(3+1)^{n-1} = n\cdot 4^{n-1} .$$

נכפיל את שני צדי המשוואה ב 3 ונקבל:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot i \cdot 3^{i} = 3n\cdot 4^{n-1}$$

ב.   נציב $a=-5\,;\,b=1$ בנוסחת הבינום ונקבל :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-5)^k \cdot 1^{n-k} = (-5+1)^n = (-4)^n$$

**6)**

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n-i+k-1}{k} = \binom{k-1}{k-n}$$

שני הצדדים מונים את מספר האפשרויות לפזר k כדורים זהים ל-n  תאים שונים כך שאף תא אינו ריק.

<u>צד ימין :</u> הבעיה שקולה לבעיית מציאת מספר הפתרונות השלמים האי שליליים של המשוואה $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k-n$ . לכן מקבלים : $\binom{n+(k-n)-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}$

3

<u>צד שמאל:</u> מספר האפשרויות לפזר k כדורים זהים ל-n תאים שונים כך שאף תא אינו ריק שווה למספר האפשרויות לפזר k כדורים זהים ל-n תאים שונים (ללא הגבלה) פחות מספר האפשרויות לפזר k כדורים זהים ל-n תאים שונים כאשר יש לפחות תא אחד ריק. לפי עקרון ההכלה וההפרדה נגדיר:

S – קבוצת כל האפשרויות לפזר k כדורים זהים ל-n תאים שונים (**ללא הגבלה**).
$A_i$ - – קבוצת כל האפשרויות לפזר k כדורים זהים ל-n תאים שונים **כאשר התא ה-** $i$ **ריק.**

לפי הנוסחאות הפשוטות של צירופים עם חזרות מקבלים:

$$|S| = \binom{n+k-1}{k}$$

לכל $1 \le i \le n$ $\quad |A_i| = \binom{n-1+k-1}{k}$

לכל $1 \le i \ne j \le n$ $\quad |A_i \cap A_j| = \binom{n-2+k-1}{k}$

...
...
...

לכן שפי נוסחת עקרון ההכלה וההפרדה מקבלים שמספר האפשרויות לפזר k כדורים זהים ל-n תאים שונים כך שאף תא אינו ריק הינו $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n-i+k-1}{k}$

מ.ש.ל

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ה
13.12.2004

להגשה עד 23.12.2004

# מתמטיקה דיסקרטית- תרגיל בית מספר 8:
# רקורסיה (נוסחאות נסיגה)

1) סדרת פיבונאצ'י מוגדרת כך:

- $F(0)=1$
- $F(1)=1$
- $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$ לכל $n>1$

א. רשום את 10 האיברים הראשונים של הסדרה.

ב. הוכח באינדוקציה שעבור סדרת פיבונאצ'י מתקיים:

$F(n+4)=3F(n+2)-F(n)$ לכל $n\geq 0$

2)

בניסוי שנערך, קבוצה מסוימת של בקטריות מכילה בתחילה אוכלוסיה של 50000. כל שעה נערכת קריאה, ובסוף אינטרוול של כל שעה יש פי שלוש בקטריות מאשר קודם.

א. רשום הגדרה רקורסיבית עבור מספר הבקטריות הנוכחי בתחילת השעה ה- $n$.

ב. בתחילת איזה אינטרוול ישנם 1350000 בקטריות?

3) רשום יחס רקורסיבי לבעיה הבאה:

בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש $n$ אנשים היושבים על ספסל, כך שאף אדם לא יתרחק ביותר מכסא אחד ממקום ישיבתו המקורי (כלומר כל אדם יישאר במקומו, או שיעבור לכסא הסמוך מימינו או משמאלו). הסבר. (ספרו גם את הסידור המקורי).

4)
נהג אוטובוס משלם את כל אגרות המעבר ע"י מטבעות של 10 שקלים ו-5 שקלים בלבד, כאשר הוא משלשל כל פעם מטבע אחת בלבד למכונת האגרה.

א. מצא נוסחא רקורסיבית המתארת את מספר האפשרויות של הנהג לתשלום אגרה של $n$ שקלים, כאשר יש חשיבות לסדר ההכנסה של המטבעות. (שתי אפשרויות נחשבות שונות אם מספר המטבעות שונה או אם קיים $i$ כך שערך המטבע ה - $i$ בדרך הראשונה שונה מערכו בדרך השנייה).

ב. בכמה דרכים יכול הנהג לשלם אגרה של 45 שקלים?

בהצלחה!

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ה
02.01.2005

# מתמטיקה דיסקרטית- פיתרון תרגיל בית מס' 8
# רקורסיה (נוסחאות נסיגה):

**1)**

א. 55 34 21 13 8 5 3 2 1 1

ב. בסיס האינדוקציה: עבור n=0,n=1

n=0 $F(4)=3F(2)-F(0)$
$5=3*2-1$

n=1 $F(5)=3F(3)-F(1)$
$8=3*3-1$

נניח נכונות לכל $1 \le k \le n$ :
$F(k+4)=3F(k+2)-F(k)$

נוכיח ל $n+1$ . כלומר צ"ל:
$F(n+4+1)=3F(n+2+1)-F(n+1)$
$F(n+5)=3F(n+3)-F(n+1)$

מסדרת פיבונאצ'י:
$F(n+5)=F(n+4)+F(n+3)=3F(n+2)-F(n)+3F(n+1)-F(n-1)=$
$3(F(n+2)+F(n+1))-(F(n)+F(n-1))=3F(n+3)-F(n+1)$

**2)**

א. $A(1)=50000$
$A(n)=3A(n-1)$
כי מדובר על סוף התקופה ה n-1 שהיא תחילתה של התקופה ה-n .

ב. $50000*3^3=1350000$ לכן בתחילת האינטרוול הרביעי יהיו 1350000 בקטריות.

**3)**

א. נסמן ב $a_n$ את מספר הדרכים לסדר מחדש n אנשים היושבים על ספסל ,

כך שאף אדם לא יתרחק ביותר מכסא אחד ממקום ישיבתו המקורי .

נשים לב שהאדם בקצה (נניח הימני) יכול להישאר במקום או לזוז כיסא אחד

שמאלה. אם הוא נשאר במקומו אז יתר האנשים יכולים להסתדר ב $a_{n-1}$

אפשרויות, ואם הוא זז שמאלה אז בהכרח היושב משמאלו עובר לקצה הימני של

הספסל (זאת אומרת שהם מחליפים מקומות ביניהם). יתר האנשים יכולים

להסתדר ב $a_{n-2}$ אפשרויות. מכאן ש :

1

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$a_0 = a_1 = 1 .$$

**(4**

למעשה אנו סופרים כאן את כל הסדרות הבנויות מהאיברים $\{5,10\}$ כך שסכום איברי הסדרה הוא $5n$ , או באופן שקול, את כל הסדרות הבנויות מהאיברים $\{1,2\}$ כך שסכום איברי הסדרה הוא n .

א. נתייחס לניסוח האלטרנטיבי של הבעיה. כדי להרכיב סדרה כזאת שסכומה n , יש לנו שתי אפשרויות:

a) לקחת סדרה שסכומה n-1 שקלים ולהוסיף בסופה 1

b) לקחת סדרה שסכומה n -2 שקלים ולהוסיף בסופה 2

מכיוון שהאפשרויות האלה זרות, נקבל את הנוסחא הרקורסיבית הבאה:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ . (נבהיר ש $a_n$ הינו מספר האפשרויות לשלם n שקלים)

תנאי ההתחלה: סדרה שסכומה 0 יש רק אחת (הסדרה הריקה- בדומה לקבוצה ריקה שיש בה 0 איברים ויש רק אחת כזאת), וסדרה שסכומה 1 יש אחת – הסדרה "1".

$$\boxed{\begin{aligned} &a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ &a_0 = 1,\quad a_1 = 1 \end{aligned}}$$

ב. לפי המוסבר לעיל בעיה זו שקולה למספר הדרכים לשלם $\frac{45}{5} = 9$ שקלים באמצעות מטבעות של 1 שקל 2 שקלים בלבד. לפי נוסחת פיבונאצי נקבל שמספר האפשרויות הוא 55 .

$$a_9 = a_8 + a_7 = \ldots = 55$$

2

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ה
20.12.2004

להגשה עד 30.12.2004

# מתמטיקה דיסקרטית- תרגיל מס' 9: מבוא לתורת הגרפים

1) הוכח שבמסיבה שמשתתפים בה 101 אנשים, יש לפחות בן אדם אחד שמכיר מס' זוגי של אנשים אחרים (הנחה: אם a מכיר את b אזי b מכיר את a).

2) הוכח כי כל מעגל באורך אי זוגי מכיל מעגל פשוט באורך אי זוגי.

3) יהי G גרף שצמתיו $v_1, v_2 ..., v_n$ ( כך ש $n \geq 3$ ). הוכח שאם לפחות 2 מתוך תת הגרפים $G \setminus \{v_1\}, G \setminus \{v_2\}, \ldots, G \setminus \{v_n\}$ הם קשירים, אז G קשיר.

4) תהי $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ סדרת מספרים טבעיים כלשהם.

א. הוכח כי קיים גרף G שהסדרה D מהווה את סדרת דרגות צמתיו אם ורק אם $\sum_{i=1}^{n} d_i$ הוא זוגי.

ב. D נקראת גרפית אם קיים גרף G פשוט ש D מהווה את סדרת דרגות צמתיו. הראה כי הסדרות הבאות אינן גרפיות:

7,6,5,4,3,3,2
6,6,5,4,3,3,1

5) הוכח כי אם G גרף פשוט עם $n$ צמתים ודרגה מינימלית $\delta \geq (n-1)/2$ אז G קשיר.

6) הראה כי אם G גרף קשיר המכיל 4 צמתים בעלי דרגה אי-זוגית, אז אפשר לכסות את E(G) ע"י שני מסלולים זרים בקשתות.

7)
יהי G=(V,E) גרף פשוט מכוון, כך שדרגת הכניסה ודרגת היציאה של כל קודקוד בגרף היא 50.

<u>א.</u> הוכח שיש בגרף G מסלול פשוט באורך 50.

<u>ב.</u> הוכח שיש בגרף G מעגל פשוט באורך לפחות 50.

בהצלחה!

1

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ה
10.01.2005

# מתמטיקה דיסקרטית- פיתרון תרגיל מס' 9-
# מבוא לתורת הגרפים :

1)
נבנה גרף לא מכוון אשר קדקודיו הם משתתפי המסיבה. נעביר צלע בין v ל-u אמ"ם v מכיר את u. נקבל גרף שיש בו 101 צמתים. נניח בשלילה שאין בגרף זה קודקוד בעל דרגה זוגית. אזי זהו גרף עם 101 קודקודים בעלי דרגה אי-זוגית. לכן, סכום דרגות כל הקודקודים הינו אי-זוגי בסתירה למשפט הקובע כי בכל גרף לא מכוון מתקיים : $\sum_{v\in V}\deg ree(v) = 2\cdot|E|$

2)
יהי $\delta$ מעגל אי זוגי בגרף G כלשהו. אם $\delta$ הנו פשוט, אז סיימנו. אחרת יש $\delta$ חזרות, כלומר $\delta$ מתחלק לאוסף מעגלים (כל אחד מהם מהווה קטע במסלול של $\delta$ המתחיל ומסתיים באותה צומת). אם כל המעגלים המוכלים ב $\delta$ הם זוגיים, נקבל ש $\delta$ זוגי (כי ספירת צמתיו היא ספירת כל הצמתים על המעגלים המוכלים בו) בניגוד לנתון. לכן קיים מעגל המוכל ב $\delta$ והוא אי זוגי.

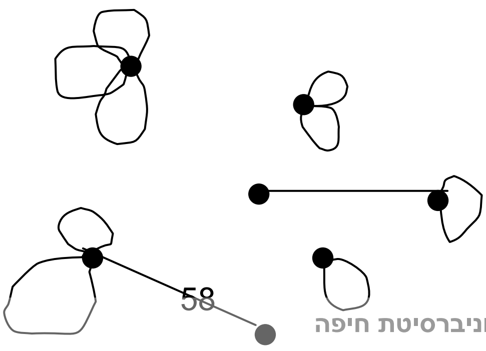
3)
נניח בלי הגבלת הכלליות ש $G\setminus\{v_1\}, G\setminus\{v_2\}$ הם קשירים, ונוכיח ש G קשיר.
$G\setminus\{v_1\}$ קשיר, לכן לכל $2\le i\ne j\le n$ קיים מסלול ב G בין $v_i, v_j$. כמו כן $G\setminus\{v_2\}$ קשיר, לכן לכל $i\ne 2\ne j$ $1\le i\ne j\le n$ קיים מסלול ב G בין $v_i, v_j$. נותר להוכיח כי קיים ב G מסלול בין $v_1, v_2$. יהי $w\in V\setminus\{1,2\}$ כלשהו.
$w\in V\setminus\{1\}$ לכן לפי הנחה קיים מסלול $\delta_1$ בין $v_2, w$.
$w\in V\setminus\{2\}$ לכן לפי הנחה קיים מסלול $\delta_2$ בין $v_1, w$.
לכן המסלול $\delta_1,\delta_2$ הוא מסלול ב G בין $v_1, v_2$.

מכאן ש G קשיר.

4) $\Leftarrow$ : צד זה של ההוכחה הוא משפט, שהרי $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E|$ וזהו מספר זוגי.

$\Rightarrow$ : נניח כי $D=\{d_1,d_2,\ldots d_n\}$ היא סדרת טבעיים כך ש $\sum_{i=1}^{n} d_i$ זוגי, ונוכיח כי קיים גרף G בעל n צמתים ש D מהווה את סדרת דרגותיו. נבנה את G כך : לכל $1\le i\le n$ נסמן $d_i = 1 + k_i\cdot 2$ (אם $d_i$ אי זוגי) או $d_i = k_i\cdot 2$ (אם $d_i$ זוגי). לכל $d_i$, נעביר $k_i$ לולאות מ $v_i$ לעצמו. מכיוון ש $\sum_{i=1}^{n} d_i$ הוא זוגי, אנו מקבלים שמספר ה $d_i$ האי זוגיים הוא זוגי. נחלק לזוגות את כל ה $v_i$ כך ש $d_i$ הוא אי זוגי, ובין כל זוג כזה נעביר קשת. נקבל בתהליך זה גרף G (לא בהכרח פשוט) כך ש $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d_i$ כדרוש.

המחשה:



ב) לגבי 7,6,5,4,3,3,2 : לא יכולה להיות צומת בגרף פשוט עם דרגה 7 , עם מספר הצמתים בגרף הוא 7. הדרגה הגבוהה ביותר האפשרית היא 6.
לגבי 6,6,5,4,3,3,1 : אם בגרף פשוט יש 7 צמתים, ושניים מהם בעלי דרגה 6, אזי לא תיתכן צומת בעלת דרגה 1 בגרף.

5)
נניח בשלילה כי G אינו קשיר. אז יש לו לפחות שני רכיבי קשירות. מבין כל רכיבי הקשירות נסתכל על רכיב קשירות H הקטן ביותר. הוא מכיל לכל היותר $n/2$ צמתים(אחרת סכום הצמתים בכל רכיבי הקשירות היה > n בניגוד לנתון). לכן דרגת כל צומת ב H היא לכל היותר $n/2$ -1 (כלומר $\delta \leq n/2$ -1 ) בסתירה לנתון לפיו $\delta \geq (n-1)/2$ . משל.

6)
א.
נניח כי $x_1, x_2, x_3, x_4$ הם 4 צמתים בעלי דרגה אי-זוגית. הדרך הקלה ביותר להוכיח את הדרוש היא להוסיף שתי קשתות $e_1 = (x_1, x_2), e_2 = (x_3, x_4)$ לגרף. בגרף החדש $G' = G + e_1 + e_2$ כל הצמתים הם בעלי דרגה זוגית. לפי משפט אוילר הוא מכיל מעגל אוילר C. עכשיו, אם נבטל את שתי הקשתות שהוספנו, המעגל C יתפרק לשני שבילים זרים המכסים את כל קשתות G.אפשר גם להוסיף צומת חדש המחובר לכל 4 הצמתים האי-זוגיים ולהשתמש במשפט אוילר בצורה דומה.
מי שניסה למצוא שביל $P$ המחבר שני צמתים איזוגיים, לבטל את קשתותיו ואח"כ לחפש שביל אוילר בגרף הנותר נתקל בבעיה כי יתכן כי $G - P$ לא קשיר.

7)
א.
נוכיח שקיים מסלול פשוט באורך 50 ע"י בנייתו. המסלול יתחיל מקדקוד כלשהו . מאחר שדרגת היציאה של קודקוד זה היא 50 , יש לנו 50 אפשרויות לבחירת הקודקוד השני במסלול.
מהקודקוד השני יוצאות 50 קשתות אשר לכל היותר אחת מהן מתחברת לקודקוד הראשון. יש לפיכך לפחות 49 אפשרויות לבחירת הקודקוד השלישי במסלול. במקרה הכללי, כשמגיעים לקודקוד ה- i בבניה, יש לפחות $50-(i-1)$ אפשרויות לבחירת הקודקוד ה- $i+1$ . לכן כשמגיעים לקודקוד ה- 50 נותר עדיין לפחות קודקוד אחד אשר יכול להיות הקודקוד ה-51 במסלול. משמעות הדבר היא שניתן לבנות מסלול פשוט שבו 50 קשתות.

מ.ש.ל

ב.

נתבונן בקודקוד ה-50 של המסלול שבנינו בסעיף א. אם מקודקוד זה יש קשת לקודקוד הראשון במסלול – סיימנו. אחרת נבחר את אחד הקודקודים הסמוכים אליו בהם טרם ביקרנו. אם כל 50 הקשתות היוצאות מהקודקוד אותו בחרנו מתחברות לקודקודים שכבר ביקרנו בהם במסלול אזי לפחות אחד מהם הוא במרחק גדול או שווה ל 50 – ולכן יש מעגל כנדרש. אם לא, נבחר מבין השכנים של הקודקוד אותו בחרנו קודם, קודקוד חדש אשר טרם ביקרנו בו, וכך נמשיך באותו האופן. מאחר שהגרף סופי , נגיע בסופו של דבר לקודקוד ממנו איננו יכולים להמשיך יותר, כלומר לקודקוד אשר כל 50 הקשתות היוצאות ממנו מתחברות לקודקודים שכבר ביקרנו בהם בעת בניית המסלול. מאחר שלפחות אחד מהם הוא במרחק גדול או שווה ל 50 יש מעגל כנדרש.

מ.ש.ל

2

החוג למדעי המחשב
סמסטר א׳ – תשס״ה
28.12.2004

להגשה עד 6.1.2005

# <u>מתמטיקה דיסקרטית- תרגיל מס׳ 10: המשך תורת הגרפים</u>

1) אוסף קדקודיו של הגרף הוא הקבוצה $\{(k,l) \mid k\in\{1,\dots,n\}, l\in\{1,\dots,m\}\}$ כאשר $m,n$ שני מספרים טבעיים. בין כל שני קדקודים $(k,l),(k',l')$ יש צלע אם ורק אם $k=k' \vee l=l'$.

א. עבור אלו ערכים של $m,n$ הגרף קשיר?
ב. עבור אלו ערכים של $m,n$ קיימת בגרף מסילת אוילר?

2) הראה כי בגרף דו צדדי פשוט מתקיים $|E| \le \frac{|V|^2}{4}$.

3)

<u>א.</u> יהי $G_1$ גרף מלא (פשוט) ולא מכוון עם n קדקודים. כמה מסלולים פשוטים, באורך 3 <u>צלעות</u>, שאינם מעגל, יש בגרף.

<u>ב.</u> יהי $G_2$ גרף עם n קדקודים, שמתקבל מ $G_1$ על ידי מחיקת צלע אחת ספציפית. כמה מסלולים פשוטים, באורך 3 <u>צלעות</u>, שאינם מעגל, יש בגרף.

4) במצולע משוכלל בעל $n$ קדקודים מתחו את כל האלכסונים,ומחקו את כל הצלעות.
א. עבור אלה ערכי $n$ בגרף שהתקבל יש מסילת אוילר?
ב. כמה מעגלים באורך 3 יש בכל גרף שהתקבל?

בהצלחה!

1

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ה
16.1.2005

# מתמטיקה דיסקרטית- פיתרון תרגיל מס' 10
# (תורת הגרפים- המשך):

1)

א. G קשיר עבור כל $m,n$, כי עבור כל שני קודקודים $(k,l),(k',l')$ בה"כ $k \le k', l \le l'$
המסילה $[(k,l),(k,l'),(k',l')]$ מחברת בין $(k,l)$.

ב. דרגת כל קודקוד ב-G $m+n$, לכן מסילת אוילר קיימת ב-G אם ורק אם $m+n$ זוגי (כלומר $m,n$ זוגיים או $m,n$ אי זוגיים).
כאשר $m=1; n=2$ או $m=2; n=1$ הגרף יהיה קשיר אפילו ש $m+n$ אי זוגי.

2) בגרף דו צדדי G מתקיים $|E| \le |V_1|\cdot|V_2|$ ושוויון מתקיים רק עבור הגרף הדו צדדי המלא $K_{V_1,V_2}$. נשים לב ש $|V_1|\cdot|V_2|$ מקבל את ערכו המקסימלי כאשר $|V_1|=|V_2|$ (ראה הוכחה בהמשך), כלומר כאשר $|V_1|=|V_2|=\frac{|V|}{2}$. מכאן נקבל מיידית ש $|E| \le V_1 \cdot V_2 \le \frac{|V|}{2}\cdot\frac{|V|}{2}=\frac{|V|^2}{4}$.

נוכיח כי $|V_1|\cdot|V_2|$ מקבל את ערכו המקסימלי כאשר $|V_1|=|V_2|$.
נתבונן במספר הטבעי $a$. נניח ש $b+c=2a$ עבור $b,c$ טבעיים כלשהם. בלי הגבלת הכלליות ניתן לומר ש קיים $i$ כך ש $b=a-i, c=a+i$. נכפול ונקבל:
$b\cdot c=(a+i)(a-i)=a^2-i^2 \le a^2$ ושוויון מתקיים רק כאשר $i=0$, כלומר ש $b=c=a$.

3)

א. כל רביעיה סדורה של קודקודים שונים זה מזה הינה מסלול פשוט באורך 3. לפיכך מספר המסלולים הנ"ל שקול למספר האפשרויות לבחור 4 קודקודים מתוך קבוצה של n קודקודים כאשר אין חזרות ויש חשיבות לסדר: $\frac{n!}{(n-4)!}$

ב.
כל קשת בגרף המלא שייכת ל $6\cdot(n-2)\cdot(n-3)$ מסלולים פשוטים באורך 3, לפיכך
מספר המסלולים הפשוטים באורך 3 בגרף $G_2$ הינו $\frac{n!}{(n-4)!}-6\cdot(n-2)\cdot(n-3)$

1

4)

א.

במצולע משוכלל בעל $n$ קודקודים מתחו את כל האלכסונים,ומחקו את כל הצלעות.

דרגת כל קודקוד בגרף שהתקבל הנה $n-3$ (הורדנו מכל קודקוד 2 צלעות) לכן תהיה מסילת אוילר (למעשה מעגל אוילר) אם ורק אם $n-3$ זוגי, כלומר $n>3$ אי-זוגי.

ב.

מספר המשולשים הכללי ב $k_n$ הוא $\binom{n}{3}$.

-- ישנם $n$ משולשים אשר בדיוק שתים מתוך שלושת הצלעות שלהם נמצאות על היקף המצולע.

-- ישנם $n\cdot(n-4)$ משולשים אשר בדיוק צלע אחת שלהם נמצאת על היקף המצולע.

לכן מספר המשולשים בגרף המתקבל לאחר מחיקת צלעות ההיקף הוא :

$$\binom{n}{3}-\left(n+n\cdot(n-4)\right)$$

2

החוג למדעי המחשב

סמסטר א׳ – תשס״ה

05.01.2005

להגשה עד 13.1.2005

# מתמטיקה דיסקרטית- תרגיל מס׳ 11: עצים + צביעת גרפים

1) הגדרה: גרף G שהנו אציקלי (חסר מעגלים) נקרא יער.

הוכח כי G יער אם ורק אם $|E|=|V|-w$, כאשר $w$ הוא מספר מרכיבי הקשירות של G.

2)

א) יהי G = (V, E) גרף לא מכוון וחסר מעגלים. ידוע כי הוספת כל צלע ל-E תגרום ל-G להכיל מעגל. הראה כי G הוא עץ.

ב) יהי G = (V, E) גרף לא מכוון וקשיר. ידוע כי הסרת כל צלע מ-E תהפוך את G ללא קשיר. הראה כי G הוא עץ.

3)

יהי G = (V, E) גרף לא מכוון. הוכח שאם הדרגה המקסימאלית של קודקודי הגרף היא $r$ אז $\chi(G) \le r+1$ (המספר הכרומטי של הגרף קטן או שווה לדרגה המקסימאלית ועוד אחד)

4) מהו המספר הקטן ביותר של צלעות שצריך להוריד מגרף פשוט, לא מכוון, מלא עם n קודקודים, כדי שהגרף יהיה 2 צביע?

בהצלחה!

החוג למדעי המחשב
סמסטר א׳ – תשס״ה
10.01.2005

# מתמטיקה דיסקרטית- פיתרון תרגיל מס׳ 11
# (עצים+ צביעת גרפים):

1) הוכחה:

$\Leftarrow$ :

נניח כי גרף G הוא יער. נתבונן בכל מרכיב קשירות של G שנסמנו $G_i=(E_i,V_i)$. הוא קשיר וחסר מעגלים ולכן הוא עץ. ע״פ משפט מתקיים לגביו ש $|E_i|=|V_i|-1$. מכיוון שמרכיבי הקשירות של G מהווים חלוקה של G, נקבל ש

$$|E|=|E_1|+|E_2|+\ldots+|E_w|=|V_1|+|V_2|+\ldots+|V_w|\underbrace{-1-1-1\ldots-1}_{\text{W פעמים}}=|V|-w$$

$\Rightarrow$ :

נניח ש G גרף כך ש $|E|=|V|-w$ ונוכיח שG יער.

באינדוקציה על $|V|$ :

<u>עבור</u> $|V|=1$ : מתקיים לפי הנחה ש $|E|=1-1=0$ ולכן ברור ש G אציקלי.

<u>נניח</u> שגרף עם $n$ צמתים שבו מתקיים ש $|E|=|V|-w=n-w$ הוא אציקלי, ונוכיח שגרף בעל n+1 צמתים שבו מתקיים $|E|=|V|-w=n+1-w$ הוא אציקלי.

<u>הוכחה</u>:

נעיר תחילה שבגרף יש צומת בעלת דרגה 0 או בעלת דרגה 1: אחרת דרגת כל צומת היא לפחות 2, אבל אז נקבל ש $|E|\geq\frac{2|V|}{2}=|V|$ בניגוד לנתון. לכן קיים צומת כנ״ל.

אם קיימת צומת בעלת דרגה 0, נסיר אותה מהגרף ונקבל גרף בעל n צמתים, $|E|$ קשתות (כי לא החסרנו בתהליך אף קשת), ו $w-1$ מרכיבי קשירות (כי הצומת שהסרנו היוותה מרכיב קשירות של צומת מבודדת). כלומר $|E|=|V|-1-(w-1)=n-w$ ולפי הנחת האינדוקציה גרף זה הוא יער. ברור לכן שהחזרת הצומת בעלת דרגה 0 לא תוסיף מעגלים לגרף, ולכן הגרף אציקלי.

אם קיימת צומת בעלת דרגה 1, נסיר אותה מהגרף ונקבל גרף שבו n צמתים, $|E|-1$ קשתות, ו w מרכיבי קשירות. לכן $|E|-1=|V|-1-w$, כלומר $|E|=n-w$ לכן לפי הנחת האינדוקציה הגרף הנו אציקלי. ברור שהוספת צומת אחת ממנה יוצאת קשת אחת לא סוגרת שום מעגל, לכן הגרף בעל n+1 הצמתים הוא אציקלי.

2)

א.

יהי G = (V, E) גרף לא מכוון וחסר מעגלים. ידוע כי הוספת כל צלע ל-E תגרום ל-G להכיל מעגל. הראה כי G הוא עץ.

<u>הוכחה</u>: עץ הוא גרף קשיר וחסר מעגלים. לכן יש להוכיח כי G הוא קשיר. נתון כי הוספת כל צלע ל-E תגרום ל-G להכיל מעגל.

יהיו v,u ∍ V. קיימת מסילה בין v ל-u כי אחרת היינו יכולים להוסיף את הצלע (v, u) ל-G בלי לקבל מעגל. (ראה *)

לכן G הוא גרף קשיר. מ.ש.ל.

1

ב.

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון וקשיר. ידוע כי הסרת כל צלע מ-E תהפוך את G ללא קשיר. הראה כי G הוא עץ.

<u>הוכחה</u>: עץ הוא גרף קשיר וחסר מעגלים. לכן יש להוכיח כי G חסר מעגלים. נתון כי הסרת כל צלע מ-E תהפוך את G ללא קשיר.
נניח בשלילה כי קיים מעגל ב-G. יהיו u ו-v קודקודים שכנים הנמצאים על מעגל זה. נסיר את הצלע $(u, v)$ מ-G. נקבל כי עדיין קיימת מסילה בין u ל-v (ראה *). וזאת סתירה לנתון. מ.ש.ל.

(*) עובדה פשוטה: אם בגרף כלשהו G קיים מעגל שעובר דרך שני צמתים v ו-u אזי קיימים <u>שני</u> מסלולים זרים מ-v ל-u. (מסלולים זרים הם מסלולים שאין להם אף צלע משותפת)

3)

נבחר קדקוד כלשהו $x$ ונצבע אותו באחד הצבעים. נמשיך ונבחר קדקוד שאינו צבוע ונצבע אותו בצבע שונה משל כל שכניו. הדבר אפשרי כי יש לכל קדקוד לכל היותר $r$ שכנים ויש בידנו $r+1$ צבעים. נחזור על התהליך עד שנצבע את כל קדקודי הגרף.

4)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| מספר הצלעות המקסימאלי בגרף 2 צביע בו n קודקודים | - | מספר הצלעות בגרף המלא על n קודקודים | = | המספר הקטן ביותר של צלעות שצריך להוריד מגרף מלא עם n קודקודים כדי שהגרף יהיה 2 צביע |

מספר הצלעות המקסימאלי בגרף דוצ $K_{V_1, V_2}$ מתקבל כאשר זהו גרף דוצ מלא בו מתקיים:
$V_1 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ , $V_2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (ב.ה.כ). מכאן מקבלים מיידית שבגרף זה $E = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

מאחר שגרף הוא 2 צביע אםם הוא דוצ (נובע ישירות מההגדרות של דו-צדדיות ושל צביעה) נקבל שהתשובה הסופית הינה $\frac{n \cdot (n-1)}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ג
21/10/2002

להגשה עד 31.10.2002

# <u>מתמטיקה דיסקרטית – תרגיל בית מס' 1</u>
# <u>לוגיקה ואינדוקציה</u>

1) בכל אחד מהזוגות הבאים, בדוק אם שני הפסוקים שקולים לוגית. הוכח במקרה של שקילות והבא השמה לדוגמה במקרה של חוסר שקילות

א. $\neg(p \to q);\ p \to \neg q$

ב. $[p \to (q \vee r)] \wedge [(p \wedge r) \to q];\ p \to q$

2) עבור הפסוקים הבאים החלט אם הם טאטולוגיות, סתירות, או אף אחת מהן.

א) $[(p \to \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg p)] \to \neg(\neg p \vee q)$

ב) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

3) בטא בצורה שקולה את :

א. $(p \wedge q) \to (q \wedge r)$ באמצאות הקשרים $\neg, \vee$ בלבד.

ב. $(p \wedge q) \vee r$ באמצאות הקשרים $\neg, \to$ בלבד.

4) מצאו את שלילת הפסוקים הבאים (תרגום מילולי מספיק) :

א. כל הנחלים זורמים לים והים אינו מלא

ב. כל המספרים הזוגיים $n$ הם מהצורה $n = 2k$ ל $k$ טבעי כלשהו

ג. זה לא נכון שהיום הוא לא יום שישי

ד. חלק מהכלבים אוכלים דגים

+

5) לכל אחת מהטענות הבאות , מצא דוגמא עבורה הטענה נכונה, ודוגמא עבורה הטענה איננה נכונה :

א) $(\forall x)([A(x) \vee B(x)] \wedge [A(x) \wedge \neg B(x)])$

ב) $(\forall x)(\forall y)[P(x,y) \to P(y,x)]$

ג) $(\forall x)[P(x) \to (\exists y)Q(x,y)]$

6) הוכיחו באינדוקציה את נוסחת הטור הגיאומטרי

$$a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$ לכל מספר ממשי $a \neq 1$

7) הסבירו מהי הטעות בהוכחה הבאה שמנסה להוכיח באינדוקציה את הטענה :

$a^n = 1$ לכל $n \geq 0$ כאשר $a \neq 1$ מספר ממשי כלשהו.

ה"הוכחה" היא:

בסיס האינדוקציה: $n \equiv 0$, ואמנם $a^0 = 1$ לכל $a \neq 1$

שלב האינדוקציה: נניח נכונות ל 0,1,2,…n-1 ונוכיח ל- מ. ואכן,

$$a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

ולכן לפי עקרון האינדוקציה המלאה הטענה נכונה לכל $n \geq 0$ .

8) הוכיחו באינדוקציה כי אם n אנשים נפגשים וכל שניים לוחצים ידיים זה לזה אז מספר לחיצות הידיים הוא n(n-1)/2.

## **<u>בהצלחה!</u>**

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ג
6.11.2002

# מתמטיקה דיסקרטית – פתרון תרגיל מספר 1

1) (12 נקודות)

א. הפסוקים אינם שקולים. ההשמה p=F , q=F מספקת את הפסוק הראשון איך איננה מספקת את הפסוק השני.

ב. הפסוקים שקולים. הוכחה באמצעות הזהויות שנלמדו בכתה:

$a \to b \equiv \neg a \vee b$

אסוציאטיביות, דה-

$$[p \to (q \vee r)] \wedge [(p \wedge r) \to q] \equiv [\neg p \vee (q \vee r)] \wedge [\neg(p \wedge r) \vee q] \equiv [(\neg p \vee q) \vee r] \wedge [(\neg p \vee \neg r) \vee q] \equiv$$
$$[(\neg p \vee q) \vee r] \wedge [(\neg p \vee q) \vee \neg r] \equiv (\neg p \vee q) \wedge (r \vee \neg r) \equiv (\neg p \vee q) \wedge T \equiv p \to q$$

החוק הדיסריביוטיבי

2) (12 נקודות)

<u>צורה ראשונה : דרך טבלת אמת</u>

א. $[(p \to \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg p)] \to \neg(\neg p \vee q)$

| p | $\to$ | $\neg$ | $q$ | $\wedge$ | $q$ | $\leftrightarrow$ | $\neg$ | $p$ | $\to$ | $\neg$ | $\neg$ | $p$ | $\vee$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | F | F | T | F | T | F | F | T | T | F | F | T | T | T |
| T | T | T | F | T | F | T | F | T | T | T | F | T | F | F |
| F | T | F | T | T | T | T | T | F | F | F | T | F | T | T |
| F | T | T | F | F | F | F | T | F | T | F | T | F | T | F |

לפי טבלת האמת רואים כי זו לא טאוטולוגיה ולא סתירה.

ב. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

| $p$ | $\to$ | $q$ | $\wedge$ | $q$ | $\to$ | $r$ | $\to$ | $p$ | $\to$ | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | T | F | T | F | F | T | T | F | F |
| T | F | F | F | F | T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T | F | T | T | F | F |
| F | T | T | T | T | T | T | T | F | T | T |
| F | T | T | F | T | F | F | T | F | T | F |
| F | T | F | T | F | T | T | T | F | T | T |
| F | T | F | T | F | T | F | T | F | T | F |

אנו רואים לפי טבלת האמת כי זוהי טאוטולוגיה.

צורה שנייה – בדרך ה"הנחה בשלילה" שנילמדה בתירגול :

א. דרושות כאן שתי הוכחות שונות:

<u>נראה תחילה כי זו לא טאוטולוגיה:</u>

$$[(p \to \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg p)] \to \neg(\neg p \vee q)$$

נניח שנקבל F

וזה רק אם T F

כלומר T

נבחר למשל T T

זאת אומרת F T

ואז נקבל מימין

F T F T T T T T F

כלומר, עבור ההשמה p=F ,q=T מקבל הפסוק את הערך F . מכיוון שמצאנו הצבת ערכי אמת הנותנת את הערך F לפסוק, הרי שזו איננה טאוטולוגיה.

<u>נראה שזו גם לא סתירה:</u>

$$[(p \to \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg p)] \to \neg(\neg p \vee q)$$

נניח שנקבל T

אז למשל F

אז למשל F

וזה יתכן רק אם F T

כלומר F F

ואז מימין נקבל F T F T F

ואכן F T F

זאת אומרת שעבור ההשמה p=F , q=F נקבל ערך T עבור הפסוק, ולכן זוהי איננה סתירה.

ב. נוכיח שזוהי טאוטולוגיה:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

נניח שנקבל F

לכן בהכרח T F

לכן בהכרח בימין T F

ונקבל משמאל בהכרח T T T F

מה שמחייב ש T F

וזו כמובן סתירה.

לכן לא ניתן לקבל בטבלת האמת את הערך F, ולכן זוהי טאוטולוגיה.

3) (12 נקודות)

א.

$$(p \wedge q) \to (q \wedge r) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg q \vee \neg r)$$

$a \to b \equiv \neg a \vee b$

דה-מורגן

ניתן לבטא פסוק זה גם בצורה יותר מצומצמת: $(\neg p \vee \neg q) \vee r$

ב.

$$(p \wedge q) \vee r \equiv [\neg(p \wedge q)] \to r \equiv [\neg(\neg(q \to (\neg q)))] \to r = (p \to (\neg q)) \to r$$

$a \vee b \equiv (\neg a) \to b$

$p \wedge q \equiv \neg(p \to (\neg q))$

הורדת שלילה כפולה

4) (8 נקודות)

א. הפסוק הוא מהצורה $[\forall x P(x)] \wedge \neg Q(y)$ לכן שלילתו היא $[\exists x(\neg P(x))] \vee Q(y)$
שלילת הפסוק היא לפיכך: קיים נחל שלא זורם לים או שהים מלא.

ב. הפסוק הוא מהצורה $\forall n \exists k P(n,k)$ לכן שלילתו היא $\exists n \forall k \neg P(n,k)$ שלילת הפסוק היא לפיכך - קיים n זוגי כך שלכל ה k הטבעיים $n \neq 2k$.

ג. הפסוק הוא מהצורה $\neg\neg P(x)$ השקול ל $P(x)$, לכן שלילתו היא $\neg P(x)$. כלומר, השלילה היא - היום הוא לא יום שישי.

ד. המושג "חלק" שקול ל "קיים לפחות " לכן הפסוק הוא מהצורה $\exists x P(x)$ ושלילתו היא $\forall x \neg P(x)$. שלילת הפסוק היא לכן – כל הכלבים לא אוכלים דגים.

5) (15 נקודות)
הפרדיקטים שיוגדרו להלן מתייחסים לתחום ההגדה של קבוצת המספרים השלמים- Z.

א. הטענה נכונה עבור: $A(x) = (x + 0 = x), B(x) = (x^2 = 2)$
הטענה לא נכונה עבור $A(x) = (x \leq 0), B(x) = (x \geq 0)$
שימו לב שהפסוק שבשאלה שקול לפסוק $(\forall x)(A(x) \wedge \neg B(x))$

ב. הטענה נכונה: $P(x,y) = (x = y)$
הטענה לא נכונה עבור $P(x,y) = (x > y)$

ג. הטענה נכונה עבור: $P(x) = (x = 0), Q(x,y) = (x \cdot y = 0)$
הטענה אינה נכונה עבור $P(x) = (x = 0), Q(x,y) = (\frac{y}{x} = 2)$

6) (14 נקודות)

צ"ל: $a^0+a^1+a^2+\ldots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ לכל מספר ממשי $a\neq 1$

ההוכחה באינדוקציה על n:

<u>בסיס האינדוקציה:</u> עבור n=0 נקבל : $a^0=\frac{a^{0+1}-1}{a-1}=1$ . השוויון במקרה זה אכן מתקיים.

<u>שלב האינדוקציה</u>: עבור כל n>0, נוכיח שכונות הטענה עבור n-1 גוררת את נכונותה עבור n.

הנחת האינדוקציה הינה: $a^0+a^1+a^2+\ldots+a^{n-1}=\frac{a^{n-1+1}-1}{a-1}$ לכל מספר ממשי $a\neq 1$.

לכן:

$$a^0+a^1+a^2+\ldots+a^{n-1}+a^n=\frac{a^n-1}{a-1}+a^n=\frac{a^n-1}{a-1}+a^n\cdot\frac{a-1}{a-1}=\frac{a^n-1+a^{n+1}-a^n}{a-1}=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

מ.ש.ל

7) (14 נקודות)

הטעות ב"הוכחה" זו נובעת מכך שנכונות הטענה עבור הבסיס (n=0) אינה גוררת את נכונותה עבור n=1.
ב"הוכחה" משתמשים בעקרון האינדוקציה המלאה ולכן מניחים את נכונות הטענה גם עבור n-2 (במכנה של השבר). אולם, עבור n=1 , יוצא ש $n-2=-1$ , כלומר מניחים שהטענה נכונה גם עבור 1-. הנחה זו איננה סבירה כי בבסיס האינדוקציה ניבדק רק המקרה של n=0.
בנוסף, ברור שאין זה נכון ש $a^{-1}=0$.

8) (13 נקודות)

ההוכחה באינדוקציה על n (מספר האנשים בחדר):

<u>בסיס האינדוקציה:</u> עבור n=0 מתקיים $0\times(0-1)/2=0$ , ואכן בחדר ללא אנשים אין לחיצות ידיים בכלל. (הערה: אפשר לבצע את בסיס האינדוקציה עבור n=1 ולהיווכח שגם בחדר עם אדם אחד הטענה מתקיימת: אין לחיצות ידיים בכלל).

<u>שלב האינדוקציה:</u> נניח נכונות ל $n-1\geq 0$, כלומר שבחדר עם n-1 אנשים ישנן $\frac{(n-1)\times(n-2)}{2}$ לחיצות ידיים ונוכיח ל n.

כל קבוצה של n אנשים ניתן להפריד לקבוצה של n-1 אנשים ועוד איש אחד. בקבוצה הראשונה יש ע"פ הנחת האינדוקציה $\frac{(n-1)\times(n-2)}{2}$ לחיצות ידיים. האדם הנוסף מוסיף n-1 לחיצות מאחר שהוא לוחץ לכל האנשים בחדר חוץ מלעצמו.

לכן,מספר לחיצות הידיים בחדר יהיה:

$$\frac{(n-1)\times(n-2)}{2}+(n-1)=\frac{(n-1)\cdot(n-2)+2\cdot(n-2)}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

מ.ש.ל

החוג למדעי המחשב
סמסטר א׳ – תשס״ג

תאריך הגשה:
14.11.2002

# מתמטיקה דיסקרטית – תרגיל מס׳ 2: תורת הקבוצות, יחסים

1) תהיינה $A=\{1,2\}, B=\{a,b,c\}$ .
מצאו את אברי הקבוצות $(A\times A)\cup(B\times A)$ , $A\cup(B\times A)$

2) קבע עבור הקבוצות A ו B הבאות האם $A\subseteq B, A\in B, B\subseteq A, B\in A$ . (תתכן יותר מאפשרות אחת עבור כל מקרה). הסבר תשובותיך:

א. $A=\{1,2\}, B=\{\{2,3\},1,2\}$

ב. $A=\{1,2,3\}, B=\{\{1,2,3\},4\}$

ג. $A=\phi, B=P(\{1,2\})$

ד. $A=\{2\}, B=P(N)$

ה. $A=\phi, B=\{\phi,1,\{1,2\}\}$

3) הוכח או הפרך ע״י דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

א. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

ב. $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$

ג. $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

ד. $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

4) נתונות הקבוצות $A_1,A_2,\dots,A_n$ הוכיחו שאם $A_1\subseteq A_2\subseteq\dots\subseteq A_n$ אז:

א. $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_n$ , $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1$

ב. נתונות הקבוצות $Ai=\{-i,-i+1,\dots,i\}$ עבור $i=1,2,3,\dots,1000$ . מצאו מהן הקבוצות: $\bigcup_{i=1}^{100}A_i$ , $\bigcap_{i=1}^{100}A_i$ .

5) נגדיר את ההפרש הסימטרי של קבוצות A,B כך: $A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ . הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. $B\oplus A=A\oplus B$

ב. $A\oplus\phi=A$

ג. אם $B\oplus C=A\oplus C$ אזי $A=B$ .

6) א. הוכח או הפרך את השוויון $P(A)\setminus A=P(A)$

ב. הוכח או הפרך $P(A)\in P(B)\Rightarrow A\subseteq B$

ג. הוכח או הפרך $P(A)\subseteq P(B)\Rightarrow A\subseteq B$

7) לכל אחת מהנ"ל קבע האם היא קבוצת חזקה של קבוצה כלשהי. אם כן – רשום את הקבוצה. אם לא – הסבר מדוע:

א. $\phi$

ב. $\{\phi,\{a\}\}$

ג. $\{\phi,\{a\},\{\phi,a\}\}$

ד. $\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

8) תהי $X=\{a,b,c\}$ ונגדיר יחס הכלה S על קבוצת החזקה P(X) ע"י $S=\{(A,B)|A,B\in P(X), A\subseteq B\}$. מה הם איברי S ? מה מספרם ?

9) יהיה R יחס מעל N המוגדר ע"י $R=\{(a,b)|a,b\in N, b\equiv 0(\bmod a)\}$. האם R רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי, טרנזיטיבי? תנו שם אחר ליחס הזה.

10) הוכיחו שהיחס R הבא הוא יחס שקילות ב $N^+\times N^+$. היחס R מוגדר ע"י $(a,b)R(c,d)$ אם ורק אם $a\cdot d=b\cdot c$. הסבירו את הקשר בין היחס הזה לפעולת הצמצום של מספרים רציונאליים.

11) בשאלה זו יוצג הפרדוקס של ראסל. תהי S קבוצת כל הקבוצות אשר אינן כוללות את עצמן.בתור איבר. $S=\{x|x\notin x\}$.

א. הראה שההנחה ש S היא איבר ב S מביאה לסתירה.
ב. הראה שההנחה ש S איננה איבר ב S מביאה לסתירה.

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ג
19.11.2002

# <u>מתמטיקה דיסקרטית – פתרון תרגיל מספר 2</u>

1) $A=\{1,2\},B=\{a,b,c\}$

$$B\times A=\{\ (a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\ \}$$
$$A\times A=\{\ (1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\ \}$$

לכן:

$$A\cup(B\times A)=\{\ 1\ ,\ 2\ ,\ (a,1)\ ,\ (a,2)\ ,\ (b,1)\ ,\ (b,2)\ ,\ (c,1)\ ,\ (c,2)\ \}$$
$$(A\times A)\cup(B\times A)=\{\ (1,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\ ,\ (2,2)\ ,\ (a,1)\ ,\ (a,2)\ ,\ (b,1)\ ,\ (b,2)\ ,\ (c,1)\ ,\ (c,2)\ \}$$

2)

א. $A\subseteq B$ כי $1,2\in B$
ב. $A\in B$ כי היא מופיעה כפי שהיא ב B.
ג. $A\in B$ כי $\phi$ מוכלת בכל קבוצה (בפרט ברבוצה $\{1,2\}$ ), ולכן היא איבר של קבוצת החזקה של כל קבוצה. בנוסף $A\subseteq B$ מפני שקבוצת החזקה היא קבוצה לכל דבר ולכן $\phi$ מוכלת בה.
ד. $A\in B$ כי $2\in N$ לכן $\{2\}\subseteq N$ לכן $\{2\}\in P(N)$
ה. $A\in B$ מפני ש $\phi$ נמצאת בפירוט של אברי הקבוצה B.
$A\subseteq B$ מפני שהקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה.

3)

א.
הוכחה:

$$(A\setminus B)\cap(A\setminus C)\overset{\text{הגדרה}}{=}(A\cap B^c)\cap(A\ \ \cap C^c)\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}A\cap B^c\cap A\ \ \cap C^c\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}A\cap(B^c\cap C^c)$$
$$\underset{\text{דה מורגן}}{=}A\cap(B\cup C)^c\underset{\text{הגדרה}}{=}A\setminus(B\cup C)$$

ב.הוכחה:

$$x\in(A\setminus B)\cap(C\setminus D)\Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\wedge x\in(C\setminus D)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\in C\wedge x\notin D$$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in C\wedge x\notin B\wedge x\notin D\Leftrightarrow x\in(A\cap C)\wedge x\notin(B\cup D)\Leftrightarrow x\in(A\cap C)\setminus(B\cup D)$$

ג. צ"ל $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$
הוכחה:

$$(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)\Leftrightarrow(x\in A\cap B)\wedge(y\in C\cap D)\Leftrightarrow$$
$$(x\in A)\wedge(x\in B)\wedge(y\in C)\wedge(y\in D)\Leftrightarrow(\ (x\in A)\wedge(y\in C)\ )\wedge(\ (x\in B)\wedge(y\in D)\ )\Leftrightarrow$$
$$((x,y)\in A\times C)\wedge((x,y)\in B\times D)\Leftrightarrow(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$$

1

ד. $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = \{1,2\}; B = \{3\}; C = \{4\}; D = \{5\}$

$A \cup B = \{1,2,3\}$

$C \cup D = \{4,5\}$

לפיכך: $(A \cup B) \times (C \cup D) = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$

$A \times C = \{(1,3),(2,3)\}$

$B \times D = \{(3,5)\}$

לפיכך: $(A \times C) \cup (B \times D) = \{(1,3),(2,3),(3,5)\}$

אנו רואים בדוגמה נגדית זו שההכלה מתקיימת רק בכיוון אחד לכן הטענה אינה נכונה:
$(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$

(4

א. נתונות הקבוצות $A_1, A_2, ..., A_n$ כך ש $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n$

I) ראשית נוכיח ש $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n$ ע"י הכלה כפולה.

$\supseteq$

נשתמש בתכונה של הקשר הלוגי "או": אם פסוק אטומי $p_n$ הוא אמת אזי גם הפסוק $p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n$ הוא אמת.

לפיכך,

יהי $x \in A_n$ אזי $x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee ... \vee x \in A_n$ לכן ע"פ הגדרת איחוד קבוצות מתקיים: $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ .

לכן $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \supseteq A_n$ כנדרש.

$\subseteq$

יהי $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ אזי לפי איחוד קבוצות מתקיים: $x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee ... \vee x \in A_n$ . יהי $A_i$ אחת הקבוצות אשר x שייך אליהן (יש לפחות אחת כזאת). מנתוני השאלה נובע ש $A_i \subseteq A_n$ , לכן $x \in A_n$ .

משל.

II) כעת נוכיח $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1$ ע"י אינדוקציה.

במהלך ההוכחה נשתמש בכלל הבא: $X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Y = X$ לכל שתי קבוצות $X, Y$ .

<u>בסיס האינדוקציה</u>, עבור n=1 מתקיים: $A_1 = A_1$ .

2

שלב האינדוקציה: נניח $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i = A_1$ ונוכיח $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1$ .

מהגדרת חיתוך קבוצות נובע: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n$ .

מהנחת האינדוקציה אנו מקבלים ש $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_n$

לפי הנתון מתקיים: $A_1 \subseteq A_n$ לכן ניתן להשתמש בכלל שהוזכר בתחילת הוכחה זו להסיק ש $\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i = A_1$ כנדרש.

ב. נתונות הקבוצות $Ai = \{-i, -i+1, ..., i\}$ עבור $i = 1,2,3,...,1000$ . כלומר :

$A_1 = \{-1,0,1\}$

$A_2 = \{-2,-1,0,1,2\}$

...

...

...

$A_{1000} = \{-1000, -999, ..., 999, 1000\}$

מאחר שמתקיים $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n$ אפשר להשתמש בטענות שהוכחנו בסעיף א ולקבל

$$\bigcup_{i=1}^{100} A_i = A_{100} \;,\; \bigcap_{i=1}^{100} A_i = A_1$$

5)

א. שימו לב שהגדרת ההפרש הסימטרי היא סימטרית (לכן שמו). הדבר מרמז על נכונותו של השוויון.

נוכיח זאת:

קומוטטיביות של פעולת האיחוד

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \oplus A$$

ב. השוויון אכן מתקיים:

הגדרה

$$A \oplus \Phi = \underbrace{(A \setminus \Phi)} \cup \underbrace{(\Phi \setminus A)} = A \cup \Phi = A$$

פעולות הפרש עם הקבוצה הריקה

3

ג. נוכיח שגם פה השוויון אכן מתקיים

נתון: $B \oplus C = A \oplus C$ עבור $C$ מסוים.

נוכיח כי B=A. נניח, בשלילה כי $A \neq B$. אז או שקיים $x \in A - B$ או שקיים $x \in B - A$.

המקרים הם סימטריים, אז נניח כי קיים $x \in A - B$. ישנם שני מקרים:

א. $x \in C$. במקרה זה $x \notin A \oplus C$, ו- $x \in B \oplus C$, סתירה לנתון.

ב. $x \notin C$. במקרה זה $x \in A \oplus C$, ו- $x \notin B \oplus C$, ושוב קבלנו סתירה לנתון.

לכן נסיק כי B=A.

(6

א. הטענה $P(A) \setminus A = P(A)$ אינה בהכרח נכונה. דוגמה נגדית:

$$A = \{ x , \{x\} \}$$
$$P(A) = \{ \phi , \{x\} , \{\{x\}\} , \{ x , \{x\} \} \}$$
$$P(A) \setminus A = \{ \phi , \{\{x\}\} , \{ x , \{x\} \} \} \neq A$$

ב. הטענה $P(A) \in P(B) \Rightarrow A \subseteq B$ אינה נכונה. כאשר $B = P(A)$ מתקיים $P(A) \in P(B)$

אבל זה לא גורר ש $A \subseteq B$. לדוגמה:

$A = \{x\}$ כלומר $P(A) = \{ \phi , \{x\} \}$

$B = \{ \phi , \{x\} \}$ כלומר $P(B) = \{ \phi , \{\phi\} , \{\{x\}\} , \{\phi, \{x\}\} \}$

במקרה זה מתקיים: $\{\phi, \{x\}\} \in \{ \phi , \{\phi\} , \{\{x\}\} , \{ \phi , \{x\} \} \}$ אולם לא מתקיים

$\{x\} \subseteq \{\phi , \{x\}\}$.

ג. נוכיח את נכונות הטענה $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$:

נתון: $P(A) \subseteq P(B)$ כלומר, לכל X מתקיים: $X \in P(A) \rightarrow X \in P(B)$.

לפיכך ולפי הגדרת קבוצת החזקה מתקיים לכל X: $X \subseteq A \rightarrow X \subseteq B$.

כעת נוכיח את ההכלה הנדרשת: $A \subseteq B$

$$a \in A \Rightarrow \{a\} \subseteq P(A) \Rightarrow \{a\} \subseteq P(B) \Rightarrow a \in B$$

(7

א. לא יתכן, כי $|\phi| = 0$ ולא קיים $n \in N$ כך ש $2^n = 0$.

ב. כן. $\{\phi, \{a\}\} = P(\{a\})$

ג. לא, כי $|\{\phi,\{a\},\{\phi,a\}\}|=3$ ולא קיים $n\in N$ כך ש $2^n=3$.

ד. כן. $\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}=P(\{a,b\})$

8) נתון: $X=\{a,b,c\}$

לכן $P(X)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

אברי היחס S :

- הקבוצה הריקה מוכלת בכל 8 תתי הקבוצות של X. $(\phi,\phi),(\phi,\{a\})..(\phi,\{a,b,c\})$.

  סה"כ 8 זוגות סדורים מסוג זה.
- הקבוצה {a} מוכלת ב-4 תתי קבוצות של X: {a} , {a,b} , {a,c}, {a,b,c}

  באופן דומה ניתן לראות שגם {b} ו- {c} מוכלות ב 4 תתי קבוצות כ"א. סה"כ 12 זוגות סדורים מסוג זה.
- הקבוצה {a,b} מוכלת בשתי תתי קבוצות: {a,b,c} ו- {a,b}.

  כך גם לגבי הקבוצות {a,c} ו- {b,c}. סה"כ 6 זוגות סדורים מסוג זה.
- הקבוצה {a,b,c} מוכלת רק בעצמה – זוג סדור אחד.

לפיכך, מספר אברי S הינו: $8+12+6+1=27$

בתירגול הוכחנו שיחס זה הינו יחס שקילות.

9) ע"פ ההגדרה x שקול (קונגוארנטי) ל- y מודולו m אם המספר x-y מתחלק במספר m ללא שארית. הסימון הוא $x\equiv y(\mathrm{mod}\,m)$. לכן היחס $R=\{(a,b)|a,b\in N,b\equiv 0(\mathrm{mod}\,a)\}$ שקול למעשה ליחס

" a מחלק את b": $R=\{(a,b)|a,b\in N,a\,|\,b\}$ .

נבחן את תכונות היחס:

<u>רפלקסיביות:</u> היחס רפלקסיבי מאחר שכל מספר טבעי מחלק את עצמו.

<u>סימטריות:</u> יחס זה אינו סימטרי (ולכן איננו יחס שקילות). דוגמה נגדית: $(2,8)\in R$ מאחר ש-2 מחלק את 8. אולם 8 לא מחלק את 2 לכן $(8,2)\notin R$.

<u>אנטי סימטריות:</u> היחס אנטי-סימטרי מאחר שמספרים הטבעיים, אם a מחלק את b זה אומר ש- $a\geq b$. אם b מחלק את a זה אומר ש- $b\geq a$. אם מתקיימים שני התנאים יחד אזי a=b.

<u>טרנזיטיביות:</u> היחס טרנזיטיבי מאחר שאם a מחלק את b , וגם b מחלק את c אזי:

קיים $k_1\in N$ כך ש $b=a\cdot k_1$

5

קיים $k_2 \in N$ כך ש $c = b \cdot k_2$

לפיכך, קיימים $k_1, k_2 \in N$ כך ש $c = a \cdot (\ k_1 \cdot k_2\ )$ . כלומר a מחלק את c .

10) נוכיח ש R הינו יחס שקילות:

<u>רפלקסיביות:</u> היחס רפלקסיבי מאחר שלכל $(a,b) \in N^+ \times N^+$ מתקיים $a \cdot b = b \cdot a$ , לכן לפי הגדרת היחס מתקיים $(a,b)R(a,b)$.

<u>סימטריות:</u> יחס זה הינו סימטרי מאחר שאם $(a,b)R(c,d)$ אזי לפי הגדרת היחס $a \cdot d = b \cdot c$ . כפל בטבעיים הינו פעולה קומוטטיבית לכן מתקיים גם $c \cdot b = d \cdot a$. מכאן ע"פ הגדרה: $(c,d)R(a,b)$.

<u>טרנזיטיביות:</u> אם $(a,b)R(c,d)$ וגם $(c,d)R(e,f)$ אזי לפי הגדרת היחס:

I) $a \cdot d = b \cdot c \quad \Leftarrow$

II) $c \cdot f = d \cdot e$

מהמשוואה השנייה מקבלים ש $c = \dfrac{d \cdot e}{f}$

נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל $a \cdot d = b \cdot \left( \dfrac{d \cdot e}{f} \right)$

לפיכך נקבל: $a \cdot f = b \cdot e$ כלומר $(a,b)R(e,f)$ כנדרש.

הוכחנו שהיחס R הינו רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, לכן הוא יחס שקילות.

11) . תהי S קבוצת כל הקבוצות אשר אינן כוללות את עצמן בתור איבר. $S = \{x | x \notin x\}$ .

א. אם $S \in S$ אזי S כמו כל אברי S האחרים, איננה כוללת את עצמה בתור איבר, כלומר $S \notin S$ . זוהי סתירה להנחה ש $S \in S$ .

ב.אם $S \notin S$ אזי S עונה על ההגדרה של איבר השייך ל- S מפני שהיא איננה כוללת את עצמה בתור איבר. לכן $S \in S$ . בסתירה להנחה ש $S \notin S$ .

מתוך "המשפט האחרון של פרמה" / סימון סינג, הוצאת ידיעות אחרונות:

לעיתים קרובות מוסבר הפרדוקס של ראסל באמצעות הסיפור אודות הספרן הקפדן.

יום אחד כשהוא תועה בין המדפים, גילה הספרן אוסף של קטלוגים.היו שם קטלוגים נפרדים לרומנים, ספרות עזר, שירה וכו'.. הספרן שם לב לכך שחלק מן הקטלוגים כוללים את עצמם בעוד אחרים לא.

כדי לפשט את השיטה עוד יותר הכין הספרן שני קטלוגים נוספים, קטלוג אחד שמציין את כל הקטלוגים שמציינים את עצמם, ומעניין יותר, קטלוג שמציין את כל הקטלוגים שלא מציינים את עצמם.

עם גמר המלאכה עמדה בפני הספרן בעיה: האם הקטלוג שמציין את כל הקטלוגים שאינם מציינים את עצמם, צריך לציין את עצמו?

אם הוא מצויין בקטלוג, הרי שלפי ההגדרה הוא צריך שלא להיות מצויין. ואולם אם הוא אינו מצויין, הרי שלפי ההגדרה הוא צריך להיות מצויין. הספרן מוצא את עצמו במצב שאין בו פתרון נכון.

תאריך הגשה:
3.12.2002

# מתמטיקה דיסקרטית- תרגיל מס' 3: יחסי שקילות, פונקציות, עוצמות

1) הוכח כי היחס הבא הוא יחס שקילות, הגדר את מחלקות השקילות, ותאר את החלוקה שהוא משרה $S = R \times R$ $\quad x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1)P(x_2, y_2)$

2) יהי $S = R^n$. נסמן $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ונגדיר את היחס P כדלקמן:

$(v, w) \in P$ אמם לכל $1 \le i \le n$ מתקיים: $(v_i = 0 \Leftrightarrow w_i = 0)$

הוכח כי P יחס שקילות, רשום את מחלקות השקילות, ותאר את החלוקה.

3) ציינו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא חח"ע על או הפיכה. אם הפונקציה הפיכה- מצאו את ההופכית. הוכיחו תשובותיכם!

א. $f : Z \to N\ , \quad f(n) = n^2 + 1$

ב. $f : Q \to R\ , \quad f(n) = 2^n$

ג. תהי $f : N \to N$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(n) = n - 1$ אם n אי-זוגי, ו- $f(n) = n + 1$ אם n זוגי.

ד. תהי A קבוצה כלשהי ותהי $f : P(A) \to P(A)$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(B) = A \setminus B$ לכל $B \in P(A)$.

4) יהיו $f, g, h$ הפונקציות הבאות מ $Z$ ל $Z$:

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x^2 - 2$$

$$h(x) = \begin{cases} -x & ; x > 0 \\ x & ; x \le 0 \end{cases}$$

א. קבע עבור כל אחת מהן האם היא חח"ע

ב. קבע עבור כל אחת מהן האם היא על

ג. חשב את הפונקציות הבאות: $f^2, \quad f \circ g, \quad g \circ f, \quad g \circ h, \quad h \circ g, \quad h(g \circ f)$

5) יהיו $f : A \to B\ ,\ g : B \to C$ שתי פונקציות חח"ע ועל. הוכיחו ש: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

6) נתונות שתי קבוצות $A, B$, ועליהן שתי פונקציות $f : A \to B, g : B \to A$, וכמו כן נתון כי $g \circ f = I_A$. הוכח או הפרך ע"י דוגמא נגדית את כל אחת מהנ"ל:

1

א. $g = f^{-1}$
ב. $f$ היא חד חד ערכית
ג. $g$ היא חד חד ערכית
ד. $f$ היא על
ה. $g$ היא על

7) יהיו X, Y קבוצות ותהי $f : X \to Y$ פונקציה כלשהי. נגדיר פונקציה אחרת $F : P(X) \to P(Y)$ ע"י $F(A) = \{f(a) | a \in A\}$ לכל $A \in P(X)$.
א. מהי הקבוצה $F(\phi)$ ?
ב. האם בהכרח $F(X) \subseteq Y$ ?
ג. הוכיחו שאם f חח"ע אז F חח"ע.
ד. הוכיחו שאם f על אז F על.

8) תהי $A$ קבוצת כל הנקודות שעל מעגל ברדיוס $r_1$ סביב הנקודה (0,0) שבמישור, ו- $B$ היא קבוצת כל הנקודות שעל מעגל ברדיוס $r_2$ סביב הנקודה (0,1) שבמישור. קבע האם $A \sim B$. נמק!

9) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. הוכיחו:
א. אם $A \subseteq B$ אז $|A| \le |B|$.
ב. אם $|A| \le |B| < |C|$ אז גם $|A| < |C|$

10) א. הוכח שאם A אינסופית ו B בת מניה אז $A \cup B$ אינסופית
ב. הוכח ש $\{0 \le x \le 1 | x \in R\} \sim \{0 < x < 1 | x \in R\}$
ג. מהי עוצמת הקבוצות: 1. $\{3 \le x < 5 | x \in R\}$
2. $\{3 \le x < 5 | x \in Z\}$
ד. האם עוצמת קבוצת החזקה של N (הטבעיים) היא בת מניה?
נמק את כל הסעיפים!

11) נתונות שתי קבוצות $A, B$ כאשר $A$ בת מניה ו $B$ סופית. מה ניתן לומר על $|A \cup B|, |A \cap B|, |A \setminus B|$ ?

12) תהי $X \neq \phi$ קבוצה כלשהי. נסמן ב- $F^x$ את קבוצת כל הפונקציות מ-X לקבוצה $\{0,1\}$
הוכיחו כי $F^x$ ו - P(X) שוות עוצמה.

13) קבע את עוצמת הקבוצות הבאות (ונמק עבור כל אחת):
א. אוסף כל הסדרות הסופיות של "0" ו "1"
ב. קבוצת כל השלשות הסדורות (x,y,z) של מספרים ממשיים.
ג. קבוצת כל הסדרות הסופיות הלקוחות מאלף-בית שבו $\aleph_0$ אותיות.
ד. קבוצת כל הפונקציות מ- R לקבוצה {0,1}.

2

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ג
6.12.2002

# מתמטיקה דיסקרטית – פתרון תרגיל מספר 3

## (1

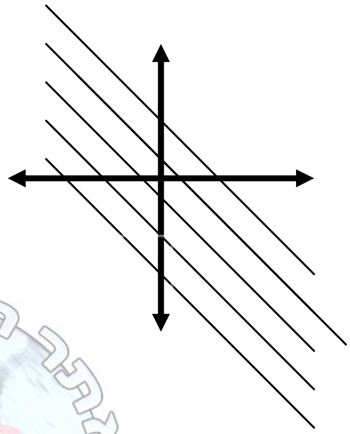
<u>נראה כי P הוא יחס שקילות:</u>
*רפלקסיביות:* לכל $(x,y)\in R^2$ מתקיים $x+y=x+y$ ולכן $(x,y)P(x,y)$ .
*סימטריות:* אם $(x,y)P(z,w)$ אז $x+y=z+w$ ולכן $z+w=x,y$ ולכן .
$(z,w)P(x,y)$
*טרנזיטיביות:* אם $(x,y)P(z,w)\wedge(z,w)P(k,l)$ זה אומר ש $x+y=z+w=k+l$ לכן:
$x+y=k+l$ , כלומר $(x,y)P(k,l)$
$\Leftarrow$ <u>P יחס שקילות.</u>

<u>הגדרת מחלקות השקילות:</u>
בשאלות מעין אלה כדאי להבין את משמעות היחס המוגדר, ולהבין את החלוקה שהוא יוצר בקבוצה.
נסביר איך היחס המוגדר כאן מחלק את המישור $R^2$ .
לכל $(x_0,y_0)\in R^2$ אם $x_0+y_0=b$ אז האיברים $(x,y)$ ב- $R^2$ שיאמדו איתו ביחס הם אלה שמקיימים $x+y=b$ כלומר $y=-x+b$ כאשר $b$ הוא <u>קבוע</u>.

הנוסחה שקיבלנו מתארת ישר במישור ששיפועו (1-) ונק' החיתוך שלו עם ציר ה y היא b.
כלומר – כל מחלקת שקילות היא קו ישר בעל שיפוע (1-) , הקבוע b שמתחלף בין המחלקות השונות.

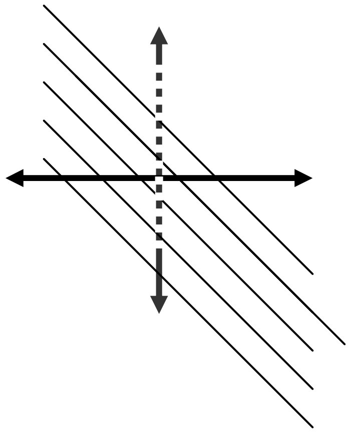
נקבל : $[(x_0,y_0)]=\{(x,y)\in R^2 \mid \textit{the piont } (x,y) \textit{ is on the staight line } \mathrm{y=-x+b}\}$

<u>החלוקה המושרית</u>
לפי מה שהראינו, היחס P מחלק את המישור לקווים מקבילים ששיפועם 1-
גיאומטרית, החלוקה המושרית נראית כך:



1

<u>הגדרת קבוצת המנה (הרחבה: אמנם לא הגדרנו מושג זה בתירגול אך מומלץ לדעת):</u>
קבוצת המנה היא קבוצה הכוללת נציג אחד מכל מחלקת שקילות.
כדי להגדיר את קבוצת המנה , כדאי לבחור נקודה אחת מכל מחלקת שקילות בצורה קונסיסטנטית - כלומר למצוא דרך להביע את אוסף כל הנקודות שכל אחת מהן מייצגת מחלקת שקילות. אם ראינו כבר שהיחס מחלק את המישור לקווים ישרים ומקבילים, יהיה קל לבחור מכל קו נקודה אחת כך שכל הנציגים האלה נמצאים על ישר מאונך אחד. נקבל אם כן: $R^2 / P = \{[(0,b)] | b \in R\}$ . נראה זאת באיור:
קבוצת המנה לקחנו כמייצגים של מחלקות השקילות את אוסף הנקודות הנמצאות על ציר ה Y .
הערה: הקבוצה בזאת שקולה לקבוצת הממשיים.



## 2)

<u>נוכיח ש P יחס שקילות:</u>

*רפלקסיביות:* יהי $v \in P^n$ אזי לכל $1 \le i \le n$ מתקיים ש $v_i = v_i$ לכן $v_i = 0 \Leftrightarrow v_i = 0$ . לכן $vRv$ .

*סימטריות:* אם $vPw$ אז לכל $1 \le i \le n$ מתקיים ש $v_i = 0 \Leftrightarrow w_i = 0$ וברור שגם $w_i = 0 \Leftrightarrow v_i = 0$ לכן $wPv$ .

*טרנזיטיביות:* אם $vPw$ וגם $wPz$ אז $\forall 1 \le i \le n (v_i = 0 \Leftrightarrow w_i = 0 \wedge w_i = 0 \Leftrightarrow z_i = 0)$
לכן מתקיים: $v_i = 0 \Leftrightarrow z_i = 0$ ולכן $vPz$.

$\Leftarrow$ P יחס שקילות.

<u>מחלקות השקילות:</u>

עבור יחס זה קשה למצוא תיאור "יפה" של המחלקות . נקבל עם כן:
$[v] = \{w \in R^n \mid \forall 1 \le i \le n (v_i = 0 \Leftrightarrow w_i = 0\}$
כלומר, מחלקת השקילות של וקטור הינה כל קבוצת כל הוקטורים אשר הקורדינאטות שלהם מתאפסות באותם מקומות של הוקטור הנתון.

<u>החלוקה המושרית:</u>
קבוצת כל הוקטורים בעלי n רכיבים (המרחב ה- n מימדי). כל קבוצת וקטורים אשר הקורדינאטות שלהם מתאפסות באותם מקומות מגדירה מחלקת שקילות.

<u>קבוצת המנה:</u>

לפי הבנת מחלקות השקילות, אנו רואים שכל מחלקה מאופיינת ע"י המיקומים $1 \le i \le n$ שבהם לוקטורים יש אפסים. יהיה טבעי לבחור כאן כמייצגים את הוקטורים הבינאריים (של אפסים ואחדים בלבד). נקבל לכן: $R^n / R = \{[v] | v \quad is \quad binaric \quad vector\}$ .

2

## 3)

### א.

<u>לא חח"ע.</u> דוגמה נגדית: $-5 \neq 5$ אבל $f(5)=f(-5)=26$

<u>לא על</u>. דוגמה נגדית: עבור המספר הטבעי 7 לא קיים מספר שלם x כך ש $x^2+1=7$

### ב.

<u>נוכיח ש f חח"ע.</u> לכל a חיובי ולכל x,y ממשיים אם $a^x=a^y$ אז $x=y$ . לכן $f(x)=f(y)$ גורר x = y כנדרש.

<u>לא על.</u> לכל *המספרים הממשיים הקטנים או שווים לאפס* אין איבר בתחום אשר מועבר אליהם ע"י הפונקציה.

**ג.** <u>נוכיח ש f חח"ע</u>: יהיו $n_1 \neq n_2$ .

אם שניהם זוגיים אזי $f(n_1) \neq f(n_2)$ מאחר ש $n_1+1 \neq n_2+1$.

אם שניהם אי זוגיים אז גם כן $f(n_1) \neq f(n_2)$ הפעם מאחר ש $n_1-1 \neq n_2-1$.

אם ב.ה.כ $n_1$ זוגי ו- $n_2$ אי-זוגי אזי $f(n_1)=n_1+1$ אי זוגי ו- $f(n_2)=n_2-1$ זוגי, לכן ברור שמתקיים: $f(n_1) \neq f(n_2)$ .

<u>נוכיח ש f על</u>: יהי $y \in N$ . אם $y$ זוגי אזי קיים $n \in N$ אי-זוגי כך ש $y=n-1$ .
אם $y$ אי-זוגי אזי קיים $n \in N$ זוגי כך ש $y=n+1$ . לכן לכל $y \in N$ קיים $n \in N$ כך שמתקיים : $f(n)=y$ .

<u>הפונקציה ההופכית:</u> במקרה זה הינה זהה לפונקציה f המקורית.

$$f^{-1}: N \to N \qquad f^{-1}(m)=\begin{cases} m-1 & ;when\ m\ is\ odd \\ m+1 & ;when\ m\ is\ even \end{cases}$$

צריך להוכיח שעבור כל $n,m \in N$ מתקיים: $f\left(f^{-1}(m)\right)=m$ , $f^{-1}\left(f(n)\right)=n$ .

ראשית נראה ש $f^{-1}\left(f(n)\right)=n$ מתקיים בכל אחד משני המקרים האפשריים: כאשר n זוגי וכאשר n אי-זוגי.

* אם n זוגי אז $f(n)=n+1$ הינו מספר אי-זוגי, לכן: $f^{-1}\left(f(n)\right)=f^{-1}(n+1)=(n+1)-1=n$

* אם n אי-זוגי אז $f(n)=n-1$ הינו מספר זוגי, לכן: $f^{-1}\left(f(n)\right)=f^{-1}(n-1)=(n-1)+1=n$

הוכחנו שבכל אחד משני המקרים האפשריים מתקיים: $f^{-1}\left(f(n)\right)=n$ .

באופן זהה מוכיחים ש $f\left(f^{-1}(m)\right)=m$ .

### ד.

*למי שמתקשה להבין את ההגדרה של פונקציה זו, מומלץ לבחון את הדוגמה בה* $A=\{1,2,3\}$ .

<u>נוכיח ש f חח"ע</u>:

נניח: $f(B_1)=f(B_2)$

כלומר: $A \setminus B_1 = A \setminus B_2$

3

לכן, $x \in A \wedge \neg(x \in B_1) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B_2)$

מכאן, $x \in B_1 \Leftrightarrow x \in B_2$

לפי הגדרה קיבלנו ש: $B_1 = B_2$.

<u>נוכיח ש f על:</u>

יהי $S \in P(A)$ כלומר $S \subseteq A$. אזי קיימת קבוצה הכוללת את אברי A אשר אינם בקבוצה S. כלומר קיים $C \subseteq A$ כך ש $C = A \setminus S$.

* אותו $C \in P(A)$ הוא האיבר בתחום אשר מועבר ל- S ע"י הפונקציה f.

** לכל שתי קבוצות X,Y מתקיים $X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y$. במקרה שלנו $S \subseteq A$ לכן $A \setminus (A \setminus S) = A \cap S = S$.

לפי * ו- ** אנו מקבלים: $f(C) = f(A \setminus S) = A \setminus (A \setminus S) = S$

מ.ש.ל

<u>הפונקציה ההופכית:</u> גם במקרה זה הפונקציה ההופכית זהה לפונקציה f המקורית:

$f^{-1} : P(A) \to P(A)$.

$f^{-1}(S) = A \setminus S$ לכל $S \in P(A)$.

בדיקה: לפי הגדרת $f$ ו- $f^{-1}$ ולפי ** אנו מקבלים:

$$f \circ f^{-1}(S) = f\left(f^{-1}(S)\right) = f(A \setminus S) = A \setminus (A \setminus S) = A \cap S = S$$

$$f^{-1} \circ f(B) = f^{-1}(f(B)) = f^{-1}(A \setminus B) = A \setminus (A \setminus B) = A \cap B = B$$

## (4

### א.

<u>f חח"ע.</u> הוכחה: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1$

<u>g איננה חח"ע</u>. דוגמא נגדית: $f(3) = f(-3) = 9 - 2 = 7$ אבל $3 \neq -3$.

<u>h איננה חח"ע</u> . דוגמא נגדית: $f(3) = f(-3) = -3$ אבל $3 \neq -3$.

### ב.

<u>f היא לא על</u>. דוגמא נגדית: עבור האיבר השלם 8 לא קיים איבר שלם x כך ש $8 = 2x + 1$.

<u>g איננה על</u>. דוגמא נגדית: עבור השלם 3 לא קיים איבר שלם x כך ש $3 = x^2 - 2$.

<u>h איננה על</u>. לכל השלמים הגדולים מאפס אין מקור תחת h .

**ג.** בדף הבא --->

4

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)^2-2=4x^2+4x-1$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-2)=2(x^2-2)+1=2x^2-3$$

$$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x^2-2)=\begin{cases}-x^2+2 & ;x^2-2>0\\ x^2-2 & ;x^2-2\le 0\end{cases}=\begin{cases}-x^2+2 & ;x>1\vee x<-1\\ x^2-2 & ;-1\le x\le 1\end{cases}$$

$$(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(\begin{cases}-x & ;x>0\\ x & ;\ x\le 0\end{cases})=g(\begin{cases}(-x)^2-2 & ;x>0\\ x^2-2 & ;\ x\le 0\end{cases})=x^2-2$$

$$h\circ(g\circ f)=h(4x^2+4x-1)=\begin{cases}-\left(4x^2+4x-1\right) & ;4x^2+4x-1>0\\ 4x^2+4x-1 & ;4x^2+4x-1\le 0\end{cases}$$

**5)**

נגדיר את הפונקציה $h:C\to A$ כדלקמן: $h\equiv f^{-1}\circ g^{-1}$ . נראה כי h היא ההופכית של $g\circ f$ .
למעשה צריך להוכיח ש: $h\circ(g\circ f)=I_A$ וש $(g\circ f)\circ h=I_c$.

נוכיח שלכל $a\in A$ מתקיים $h(g(f(a)))=a$

לפי הגדרת הפונקציה h , לכל $c\in C$ מתקיים: $h(c)=f^{-1}(g^{-1}(c))$ . לכן
$h(g(f(a)))=f^{-1}(g^{-1}(g(f(a))))$

g הפיכה (היא חח"ע ועל) לכן: $g^{-1}(g(f(a)))=f(a)$

מהמשואה הקודמת אנו מקבלים: $f^{-1}(g^{-1}(g(f(a)))) \quad = \quad f^{-1}(f(a))$

f הפיכה (חח"ע ועל) לכן: $f^{-1}(f(a))=a$

מכל האמור לעיל מקבלים את השוויון הנדרש: $h(g(f(a)))=f^{-1}(g^{-1}(g(f(a))))=a$ .

כלומר ש $h\circ(g\circ f)=I_A$ .
באופן דומה מוכיחים $(g\circ f)\circ h=I_c$ ומקבלים ש h היא ההופכית של $g\circ f$ .
מהגדרת h מקבלים ישירות $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ כנדרש.

5

## (6

**א.**

<u>דוגמא נגדית:</u>

$A = \{1,2,3\}, B = \{a, b, c, d\}$

$f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

$g = \{(a,1), (b,2), (c,3), (d,2)\}$

$f \circ g = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

מתקיים $g \circ f = I_A$ , אולם $g \neq f^{-1}$ .

**ב.**

<u>הוכחה</u>: אם f איננה חח"ע אזי קיימים $x_1 \neq x_2 \in A$ כך ש $f(x_1) = f(x_2)$ , ולכן $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$ וזו סתירה להנחה. לכן f חח"ע.

**ג.**

<u>דוגמא נגדית:</u> אותה דוגמא כמו ב א'. $g(b) = g(d)$ אבל $b \neq d$

**ד.**

<u>דוגמא נגדית:</u> אותה דוגמא כמו ב א'. ל d אין מקור תחת f.

**ה.**

<u>הוכחה:</u> יהי $a \in A$ כלשהו, אזי עבור $f(a) \in B$ מתקיים לפי הנחה ש $a = g(f(a))$ , ומכיוון ש $f(a)$ מוגדר, אז הוא האיבר ב B שהוא המקור של a.

## (7

**א.** $F(A) = \{f(a) | a \in A\}$ .

תהי $A \subseteq X$ קבוצה כלשהי. $F(A)$ הנה קבוצת כל הערכים של אברי A. אם $A = \phi$ אז אין ל-A איברים בכלל לכן קבוצת הערכים של אבריה תהיה קבוצה ריקה. כלומר $F(\phi) = \phi$ .

**ב.** כן.

<u>הגדרה:</u> עבור $A \subseteq X$ הקבוצה $\mathrm{Im}(A) = \{y \in Y | y = f(x); x \in A\}$ תקרא התמונה של A תחת f .

הקבוצה $F(A) = \{f(a) | a \in A\}$ היא למעשה התמונה של A תחת f לכן כל אבריה שייכים לקבוצה Y.

כלומר לכל $A \subseteq X$ מתקיים $F(A) \subseteq Y$ בפרט כאשר $A = X$ .

לכן: $F(X) \subseteq Y$ .

**ג.**

יהיו $A_1, A_2 \in P(X)$ כך ש $A_1 \neq A_1$ . אזי קיים $w \in X$ כך ש (ב.ה.כ): $w \in A_1 \wedge w \notin A_2$ .

f חח"ע לכן $\forall a \in A_2 : f(a) \neq f(w)$ כלומר לפי הגדרת הפונקציה F מתקיים: * $f(w) \notin F(A_2)$ .

6

$w\in A_1$ לכן לפי הגדרת F: ** $f(w)\in F(A_1)$ .

מהגדרת f מקבלים ש $f(w)\in Y$

מ * ומ- ** אנו מקבלים שקיים איבר ב- $P(Y)$ אשר שייך ל- $F(A_1)$ אולם אינו שייך ל- $F(A_2)$,

לכן ע"פ הגדרת שיוויון קבוצות מקבלים ש: $F(A_1)\neq F(A_2)$.

מ.ש.ל.

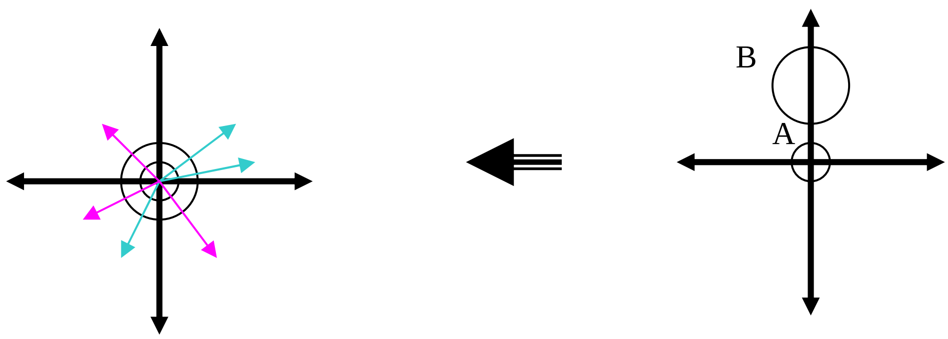
**ד.**

תהי $SY\in P(Y)$ . נוכיח שקיים $SX\in P(X)$ כך ש $F(SX)=SY$ .

f פונקציה על לכן לכל איבר $y\in SY$ קיים איבר ב $x\in X$ כך ש $f(x)=y$ . עובדה זאת מאפשרת לבנות את SX באופן הבא $SX=\{x\in X \mid f(x)\in SY\}$ . מהגדרת F מקבלים $F(SX)=SY$ נדרש.

## 8)

$A\sim B$ . נימוק: נבצע תחילה הזזה של כל הנקודות על המעגל B כך שמרכז המעגל יהיה בנקודה (0,0). (פעולה זו לא משנה את גודל הקבוצה) אח"כ נעביר קרן ממרכז המעגל לכל נקודה על המעגל A. קרן זו פוגעת בנקודה יחידה על המעגל B. פעולה זו מהווה פונקציה חח"ע של A ל B. באותו אופן נעביר קרניים ממרכז המעגל לכל נקודה על המעגל B. קרן זו תפגע בנקודה יחידה על המעגל A ולכן גם זו פונק' חח"ע של B לתוך A. לפי משפט קנטור ברנשטיין נקבל ש A ו B שוות עוצמה.




F פונק' חח"ע של A לתוך B

G פונק' חח"ע של B לתוך A

## 9)

ע"פ הגדרה (עמוד 34 בליניאל / פרנס) $|X|\le|Y|$ אםם קיימת פונקציה חח"ע מ X ל- Y. אם בנוסף לא קיימת פונקציה על מ X ל-Y אזי $|X|<|Y|$.

**א.**

על מנת להוכיח ש $|X|\le|Y|$ יש להראות פונקציה חח"ע מ A ל- B. פונקצית הזהות הינה פונקציה כזאת: $f:X\to Y$ , $f(x)=x$ .

**ב.**

7

<u>נתון:</u> $|A| \le |B| < |C|$

<u>צ"ל:</u> $|A| < |C|$

ע"פ הנתון קיימת פונקציה חח"ע מ A ל B וקיימת פונקציה חח"ע מ B ל- C. הרכבת הפונקציה הראשונה על השנייה נותנת פונקציה חח"ע מ- A ל- C . בכך הוכחנו את האי שוויון החלש: * $|A| \le |C|$.

משמעותו של אי שוויון (חלש) זה היא שהעוצמה של A קטנה **או שווה** לעוצמה של C. על מנת להוכיח את אי השוויון החזק יש להראות שהאפשרות שהעוצמה של A שווה שלעוצמה של C איננה קיימת.

לפיכך, נניח בשלילה שיתכן מצב בו $|A| = |C|$. אזי נתבונן בנתון: $|A| \le |B| < |C|$ , ונציב $|A|$ במקום $|C|$. נקבל ש $|A| \le |B| < |A|$ כלומר ש: $(|B| < |A|) \wedge (|A| \le |B|)$ זהו פסוק הטוען דבר והיפוכו ולכן זוהי סתירה.

מסקנה: ** ההנחה שהנחנו לפיה שיתכן מצב בו $|A| = |C|$ איינה נכונה.

מ- * ומ- ** אנו מקבלים ש $|A| < |C|$.

מ.ש.ל

## (10

### א.

נגדיר פונק' חח"ע $f: A \to A \cup B$ כך ש $f(a) = a$ . אזי לפי הגדרה $|A| \le |A \cup B|$. לכן הקבוצה $A \cup B$ היא גם כן אינסופית.

### ב.

<u>טענה:</u> תהי $A$ קבוצה אינסופית כלשהי ו – $B$ קבוצה סופית כלשהי זרה ל- $A$. אזי $|A \cup B| = |A|$ **.**

<u>הוכחת הטענה:</u> נבנה פונקציה חח"ע ועל מ- $A$ ל- $A \cup B$ .

בהרצאה הוכח שכל קבוצה אינסופית מכילה קבוצה בת מניה. לכן קיימת קבוצה בת מנייה $S = \{s_1, s_2, ...\}$ כך ש- $S \subseteq A$ .

נניח ב.ה.כ ש- $B$ קבוצה בת m איברים. נסמן: $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$

נגדיר פונקציה $f: A \to A \cup B$ באופן הבא:

עבור $a \in A$ קיימות שתי אפשרויות.

1- $a \notin S$ ואז נגדיר $f(a) = a$ .

2- $a \in S$ ואז נסמן $a = s_i$ ונגדיר:
$$f(s_i) = \begin{cases} b_i & ; 1 \le i \le m \\ s_{i-m} & ; i > m \end{cases}$$

פונקציה זאת הינה חח"ע ועל ולכן: $|A \cup B| = |A|$ . מ.ש.ל

(הערה: ניתן להוכיח גם טענה חזקה יותר האומרת כי הקבוצות לא חייבות להיות זרות ושהקבוצה $B$ יכולה להיות בת מניה)

<u>כעת לפתרון השאלה.</u>

בתירגול הוכחנו ש $\aleph = \{0 < x < 1 \,|\, x \in R\}$ לכן כמובן שזוהי קבוצה אינסופית. לפי הטענה שהוכחנו זה עתה, איחוד של קבוצה זו עם הקבוצה $\{0,1\}$ ייתן קבוצה שעוצמתה גם כן $\aleph$ . לכן:

$$\aleph \quad = \quad |\{0 < x < 1 \,|\, x \in R\}| \quad = \quad |\{0 < x < 1 \,|\, x \in R\} \cup \{0,1\}| \quad = \{0 \le x \le 1 \,|\, x \in R\}|$$

ראה הוכחה בתירגול

ע"פ הטענה שהוכחנו

מ.ש.ל

**ג.**

1. נשתמש שוב בטענה מהסעיף הקודם:

$$\aleph \quad = \quad |\{3 < x < 5 \,|\, x \in R\}| \quad = \quad |\{3 < x < 5 \,|\, x \in R\} \cup \{3\}| \quad = \quad |\{3 \le x < 5 \,|\, x \in R\}|$$

ראה הוכחה בתירגול

ע"פ הטענה שהוכחנו
בסעיף א

מ.ש.ל

2. כאן מדובר מקבוצת המספרים השלמים, לכן : $2 \; = \; |\{3,4\}| \quad = \quad |\{3 \le x < 5 \,|\, x \in Z\}|$

**ד.**

לא. לפי משפט קנטור, לכל קבוצה $A$ מתקיים $|A| < |P(A)|$ . לכן: $\aleph_0 = |N| < |P(N)|$.

## (11

$|A \setminus B|$ הינה בת מניה אינסופית כי פונקצית הזהות שלה לקבוצה A היא חח"ע, ומאידך אם נוריד מספר סופי של איברים מכל קבוצה אינסופית, עדיין יוותרו בידנו אינסוף איברים.

$|A \cap B|$ הוא 0 אם החיתוך ריק, או מספר סופי אם החיתוך אינו ריק, כי הוא תת קבוצה של B שהנה סופית.

$|A \cup B|$ הוא מספר בן מניה . כל הוספת מספר סופי למספר בן מניה משאיר אותו בן מניה.

## (12

שתי דרכים :

I) מספר הפונקציות מקבוצה בגודל m לקבוצה בגודל n הינו $n^m$ . לכן מספר הפונקציות מהקבוצה X לקבוצה בת שני איברים הינו $2^{|X|}$ . $F^x$ הינה קבוצת **כל** הפונקציות מ-X לקבוצה $\{0,1\}$ לכן עוצמתה הינה $2^{|X|}$. עוצמת קבוצת החזקה של X הינה גם כן $2^{|X|}$ . קיבלנו ש $F^x$ ו - P(X) שוות עוצמה.

מ.ש.ל

(II

9

עלינו להראות פונקציה חח"ע ועל מ- $P(X)$ ל- $F^X$. נוכיח שהפונקציה $g:P(X)\to F^X$ המוגדרת ע"י $g(A)=f_A$ היא פונקציה כזאת. ($f_A$ היא הפונקציה המציינת של הקבוצה A, ראה הגדרה בעמוד 24 בליניאל / פרנס).

<u>g חח"ע:</u>
יהיו $A_1,A_2\in P(X)$ כך ש $A_1\neq A_1$. אזי קיים $w\in X$ כך ש (ב.ה.כ): $w\in A_1\wedge w\notin A_2$.
לכן $f_{A_1}(w)=1$ ואילו $f_{A_2}(w)=0$. כלומר הפונקציה המציינת של $A_1$ שונה מהפונקציה המציינת של $A_2$. ע"פ הגדרת g מתקיים: $g(A_1)\neq g(A_2)$.

<u>g על:</u>
תהי h פונקציה כלשהי מהקבוצה X לקבוצה {0,1}. נוכיח שקיימת קבוצה $A_h\in P(X)$ המקיימת $f(A_h)=h$ ע"י כך שנבנה אותה באופן הבא: $A_h=\{x\in X \mid h(x)=1\}$. מהגדרת g נובע ישירות ש $g(A_h)=h$.

### *13)*

**א.**
לכל איבר בסדרה באורך n, יש שתי אפשרויות: 0 או 1. לכן מספר הסדרות באורך n הוא $2^n$. כדי לחשב את מספר הסדרות הסופיות נקבל את הטור $\sum_{n\in N} 2^n$. סכום זה אינו סופי, לכן עוצמת הקבוצה היא אינסופית.
מצד שני אוסף זה הוא תת קבוצה של האוסף בסעיף ג, לכן ניתן להגדיר את פונקצית הזהות מהסדרות של "0,1" לסדרות הסופיות של N ונקבל מכאן שעוצמת האוסף הנ"ל הוא אינסופי וקטן או שווה לבן מניה, ולכן הנו בן מניה.

**ב.**
לכל מקום בשלשה סדורה יש $|R|$ אפשרויות. לכן נקבל שסה"כ השלשות האפשריות הוא $|R|\cdot|R|\cdot|R|=|R|$.

**ג.**
ניתן תשובה לגבי סדרות סופיות ב N, ומכך ינבע מיידית התשובה הכללית:
קב' כל הסדרות הסופיות שאורכן 1 ניתן לזיהוי עם N ולכן יש בה $\aleph_0$ איברים.
קב' כל הסדרות הסופיות שאורכן 2 ניתן לזיהוי עם $N\times N$ ולכן יש בה $\aleph_0$ איברים.
באופן דומה בכל הסדרות הסופיות באורך n יש $|N|^n=\aleph_0{}^n=\aleph_0$ איברים.
קיבלנו אם כן שקבוצת הסדרות הסופיות של מספרים טבעיים היא איחוד של $\aleph_0$ קבוצות זרות בנות $\aleph_0$ איברים ועל כן היא מעוצמה $\aleph_0$.
נשים לב שהפתרון הכללי שקול, כי כל קבוצת איברים בת מניה שקולה ל N, ולכן גם אוסף הסדרות הסופיות ממנה שקול לאוסף הסדרות הסופיות של N.

**ד.**
שאלה זו הנה מקרה פרטי של מה שהוכחנו בשאלה 12. לכן ישירות נובע ש:
$2^{|R|}=|\{0,1\}|^{|R|}=|\{0,1\}^R|$.

10

החוג למדעי המחשב
סמסטר א׳ – תשס״ג

תאריך הגשה :
18.12.2002

## מתמטיקה דיסקרטית- תרגיל מס׳ 4: קומבינטוריקה

1) תנו דוגמה לקבוצה בת $n$ עצמים אשר ממנה בוחרים $k$ עצמים.

א) כמה אפשרויות בחירה ישנן אם **אין** חזרות **ויש** חשיבות לסדר ?
ב) כמה אפשרויות בחירה ישנן אם **אין** חזרות **ואין** חשיבות לסדר ?
ג) כמה אפשרויות בחירה ישנן אם **יש** חזרות **ויש** חשיבות לסדר ?
ד) כמה אפשרויות בחירה ישנן אם **יש** חזרות **ואין** חשיבות לסדר ?

(בחר דוגמה המקבילה לדוגמה עם השירים עליה הוסבר בתירגול. קבע מהם $n,k$ )

2) מסובבים סביבון חנוכה שעליו האותיות נ׳, ג׳, ה׳, פ׳ 3 פעמים. לאחר שהסביבון נופל בודקים מה האות שכתובה על הפאה העליונה של הסביבון. מתקבלת סדרה של 3 אותיות.
א) כמה סדרות כאלה אפשריות?
ב) בכמה מהסדרות הנ״ל כל האותיות שונות?
ג) בכמה תוצאות האות נ׳ מופיעה בדיוק פעמיים?

3) על שולחן מלבני ארוך מונחות שתי שורות של צלחות , כל אחת באורך 10 צלחות. רוצים לשים 4 סופגניות בשורה הימנית ו- 6 סופגניות בשורה השמאלית (לכל היותר סופגנייה אחת בכל צלחת) כך שפעמיים תופענה צלחות עם סופגנייה זו מול זו. בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

4)
נתונה שפה שבה 3 אותיות : א׳, ב׳, ג׳ . נסתכל על כל המילים באורך 8 בשפה זו.
א) מהו מספר המילים בקבוצה זו?
ב) כמה מילים מכילות בדיוק 4 פעמים א׳ ובדיוק 4 פעמים ב׳ ?
ג) כמה מילים מכילות בדיוק 3 אותיות א׳ ?
ד) כמה מילים מכילות לפחות א׳ אחת , ב׳ אחת, ו- ג׳ אחת? (רמז : ניתן להשתמש בשיטת המשלים)

5)

על מדף 10 ספרים שונים מהם 5 ספרים באלגברה , 3 ספרים בחדו״א, 2 ספרים במדעי המחשב.
מצא בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף במקרים הבאים :
א) חמשת הספרים הראשונים משמאל הם באלגברה, שלושת האמצעיים הם ספרים בחדו״א, וכל הספרים מימין הם ספרים במדעי המחשב.
ב) הספרים בכל קורס יהיו סמוכים זה לזה.
ג) הספרים באלגברה ובמדעי המחשב יהיו סמוכים זה לזה ובנוסף לא כל הספרים בחדו״א יהיו זה סמוכים זה לזה.

6) בכמה אופנים ניתן לבחור 5 נעליים מתוך 9 זוגות נעליים כך שלא ייבחר אף זוג?

7) בכמה אופנים שונים ניתן לסדר בשורה $n$ אחדים ו $m$ אפסים כך שלא יהיו שני אחדים רצופים?

1

8)

א. בכמה אופנים ניתן לחלק 10 כדורים <u>זהים</u> ל 4 קופסאות <u>שונות</u> כך ששלשת הקופסאות הראשונות אינן ריקות?

ב. בכמה דרכים ניתן לחלק 7 חפצים שונים ל 10 קופסאות שונות?

9) נתונה קבוצה סופית X בת n איברים. תהי Y תת קבוצה של X בת m איברים. מהו מספר תתי הקבוצות של X שחיתוכן עם Y אינו ריק?

10) ליוסי 8 סוגי מדבקות, 3 מדבקות זהות מכל סוג. אבא של יוסי מבקש שייתן 5 מדבקות מתוכן לאחותו הקטנה. בכמה אופנים יכול יוסי לעשות את המבוקש?

רמז: האחות יכולה לקבל את המדבקות בכמה אופנים. לדוגמה:

- שלוש מדבקות מסוג אחד ושתי מדבקות מסוג אחר
- חמש מדבקות, כל אחת מסוג אחר.
- ...

11) המלה PAPAPAPADAS מורכבת מ 11 אותיות. כמה מילים בנות 11 אותיות ניתן לקבל ע"י שינוי סדר האותיות אם:

א. אין הגבלות

ב. האות S חייבת להיות בסוף מילה

ג. **ארבע** האותיות PPPP חייבות לעמוד זו לצד זו

ד. המלה חייבת להתחיל באות A

12) ביום הרביעי של חג החנוכה מוציאים מקופסת הנרות 5 נרות. אם בקופסא יש 11 נרות **שונים** שמהם 4 כחולים והשאר (7) אדומים בכמה דרכים ניתן לעשות זאת אם:

א) אין הגבלה.

ב) שני נרות כחולים והשאר אדומים.

ג) לכל היותר שני נרות כחולים.

רמז: בעקבות הנתון שכל הנרות שונים, זאת הופכת להיות שאלה קלה של צירופים.

13)

א. כמה יחסים רפלקסיביים ניתן להגדיר על קבוצה בת n איברים?

ב. כמה יחסים סימטריים ניתן להגדיר על קבוצה בת n איברים?

2

14) יהיו $B=\{a,b,c,d,e\}$ $\quad A=\{1,2,\ldots 10\}$

א. כמה פונק' שונות ישנן של A ל B ושל B ל A?

ב. כמה פונק' חח"ע ישנן של A ל B ושל B ל A?

ג. כמה פונק' על ישנן של A ל B ושל B ל A? (רמז: העזר בעקרון ההכלה וההפרדה)

15) נתונה המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=25$ . כמה פתרונות שלמים למשוואה כאשר:

א) הפתרונות אי שליליים?

ב) הפתרונות חיוביים?

ג) $0\le x_1$ , $3\le x_2$ , $0\le x_3$ , $8\le x_4$ ?

ד) $1\le x_1\le 6$ , $0\le x_2\le 8$ , $-2\le x_3\le 3$ , $6\le x_4\le 10$ ?

16) לכמה מספרים טבעיים $1\le n\le 100,000$ יש סכום ספרות 7?

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ג
16.12.2002

# מתמטיקה דיסקרטית – פתרון תרגיל מספר 4

## 1)

<u>דוגמה:</u> בחירת חמישה חברים מתוך 120 חברי הפרלמנט.

א. מספר האפשרויות לבחור ועדה בת 5 חברים שונים מבין חברי הפרלמנט בה לכל חבר יש תפקיד כלשהו $120*119*118*117*116$

ב. מספר האפשרויות לבחור ועדה בת 5 חברים שונים מבין חברי הפרלמנט (ועדה בה אין תפקידים אלא רק זכות הצבעה) $\frac{120!}{5!*115!} = \binom{120}{5}$

ג. מספר האפשרויות לבחור חמישה חברים כאשר:

- הראשון הינו חבר הפרלמנט שהופיע במספר הרב ביותר של ישיבות.
- השני הינו חבר הפרלמנט שתרם הכי הרבה כסף לצדקה.
- השלישי הינו חבר הפרלמנט שצעק הכי הרבה
- הרביעי הינו חבר הפרלמנט שחוקק הכי הרבה חוקים
- החמישי הינו חבר הפרלמנט הוותיק ביותר

במקרה זה ישנן חזרות מאחר שכל חבר פרלמנט יכול להיבחר ביותר מקטגוריה אחת.
מספר האפשרויות הינו $120^5$ .

ד. מספר האפשרויות לבחור ועדה בת 5 חברים (לאו דווקא שונים !) כאשר בוועדה אין תפקידים אלא רק זכות הצבעה. אם למשל חבר מסוים נבחר פעמיים אזי יהיה לו זכות הצבעה כפולה. מספר האפשרויות הינו: $\binom{124}{5} = \binom{5+120-1}{5}$

## 2)

א. בכל פעם שהסביבון נופל יכולה לצאת אחת מארבע אותיות. מסובבים את הסביבון 3 פעמים לכן התשובה היא $4^3 = 64$

ב. 4 תוצאות אפשריות לפעם הראשונה שמסובבים את הסביבון, 3 תוצאות לפעם השנייה ו 2 תוצאות לפעם השלישית, לכן התשובה היא $4*3*2 = 24$

ג. ישנן $\binom{3}{2}$ אפשריות לבחירת שתי המקומות בסדרה בהם תצא האות "נ". יש 3 אפשריות לבחירת האות הנוספת ("ג" , "ה", "פ") . לכן התשובה היא $3 \cdot \binom{3}{2}$

1

## 3)

ראשית בוחרים 2 מקומות בהם נשים סופגנייה גם בצלחת שבטור הימני וגם בצלחת שבטור השמאלי. יש $\binom{10}{2}$ אפשרויות לעשות זאת. לאחר מכן בוחרים מתוך 8 הצלחות שנותרו בטור השמאלי , 4 צלחות בהן תהייה סופגנייה יש $\binom{8}{4}$ אפשרויות לעשות זאת. סה"כ יהיו 6 סופגניות בטור השמאלי – כנדרש.

לבסוף בוחרים 2 מבין 4 המקומות הפנויים בטור הימני.

לפיכך, התשובה היא $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{2}$

## 4)

א. חליפות עם חזרות: $3^8$ אפשרויות.

ב. למעשה עלינו לבחור 4 מקומות בסדרה שבהם נציב את האות א' , ובארבעת המקומות הנותרים תוצב האות ב' באופן אוטומטי. לכן התשובה היא $\binom{8}{4}=70$

ג. ישנן $\binom{8}{3}$ אפשרויות לבחירת המיקומים של בהם תהייה האות א' . בשאר חמשת המקומות במילה תהייה האות ב' או האות ג' . כלומר ישנן $2^5$ אפשרויות להשלים את המילה באופן חוקי. לכן התשובה היא $\binom{8}{3}\cdot 2^5$

ד. *יש להפחית ממספר המילים סה"כ (אותו מצאנו בסעיף א') את מספר המילים אשר אינן מכילות את האות א' או שאינן מכילות את האות ב' או שאינן מכילות את האות ג'.*

כדי לחשב את המשלים נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

ישנן $2^8$ מילים שאינן מכילות את האות א' (מילים שבנויות רק מהאותיות ב' ו- ג')
ישנן $2^8$ מילים שאינן מכילות את האות ב' (מילים שבנויות רק מהאותיות א' ו- ג')
ישנן $2^8$ מילים שאינן מכילות את האות ג' (מילים שבנויות רק מהאותיות א' ו- ב')

יש מילה אחת בלבד שאינה מכילה את האותיות א' ו- ב' (המילה היא "גגגגגגגג")
יש מילה אחת בלבד שאינה מכילה את האותיות א' ו- ג' (המילה היא "בבבבבבבב")
יש מילה אחת בלבד שאינה מכילה את האותיות ב' ו- ג' (המילה היא "אאאאאאאא")

לכן, לפי שיטת המשלים מקבלים שהתשובה הסופית היא : $3^8-\left(3\cdot 2^8-3\right)$

## 5)

א. ישנן !5 אפשרויות לסידור הפנימי של ספרי האלגברה, !3 אפשרויות לסידור הפנימי של ספרי החדו"א !2 אפשרויות לסידור הפנימי של הספרים מדעי המחשב. לכן התשובה היא:
$5!\times 3!\times 2!=1440$

ב. הסידורים הפנימיים הם לפי החישוב של סעיף א' , אולם כעת יש !3 אפשרויות לסידור "הבלוקים" השונים של הספרים. לכן נכפיל את התוצאה מסעיף ב !3. לכן התשובה היא
$3!\times(5!\times 3!\times 2!\ )=8640$

2

ג. במקרה זה ישנו גוש של ספרי אלגברה, גוש של ספרי מדעי-המחשב ושלושה ספרי חדו"א. סה"כ חמישה עצמים בדידים אשר ניתן לסדרם ב $5!$ אפשרויות. יש להכפיל זאת בסידורים הפנימיים של הספרים באלגברה ובמדעי המחשב, לכן מספר האפשרויות בלי המגבלה של ספרי החדו"א הוא $5!\times 5!\times 2!$ . ממספר זה יש להפחית את מספר האפשריות בהם כל ספרי החדו"א סמוכים זה לזה, כלומר שהספרים בכל קורס סמוכים זה לזה (ואת זה בדיוק חישבנו בסעיף ב' ) . לכן התשובה הסופית:
$5!\times 5!\times 2! - 8640$

## 6)

נבחר חמש זוגות מתוך התשע ב- $\binom{9}{5}$ אפשרויות. לכל אחד מהזוגות נוציא את אחת הנעליים. יש שני אופנים לעשות זאת עבור כל זוג נעליים, לכן יש $2^5$ אפשרויות להוצאת נעל אחת מכל זוג. לכן התשובה:
$\binom{9}{5}\cdot 2^5$ .

## 7)

נשים תחילה את m האפסים בשורה (יש רק אפשרות אחת לעשות זאת). כדי שלא יהיו שני אחדים רצופים, יש לפזר אותם בין האפסים. כלומר, צריך לבחור n מקומות מתוך ה m+1 מקומות המפרידים בין האפסים. התשובה היא אם כן $\binom{m+1}{n}$.

נשים לב שאם m+1<n אז נקבל ש $\binom{m+1}{n}=0$ לפי הגדרה.

## 8)

### א.

נשים בשלושת הקופסאות הראשונות כדור בכל קופסא. אתת יתר הכדורים נחלק בתאים ללא הגבלה. נקבל שמספר האפשרויות הוא $\binom{10}{7}$.

### ב.

כל חפץ יכול לבחור ללא הגבלה את הקופסא בה יהיה. נקבל לכן $10^7$ אפשרויות.

## 9)

"חיתוכן אינו ריק" משמעו שקיים לפחות איבר אחד של Y בתת הקבוצה. מספר תתי הקבוצות של X בהן אין אף איבר מY הוא $|P(X\setminus Y)|=2^{|X\setminus Y|}=2^{n-m}$. לכן ביתר תתי הקבוצות של X קיים לפחות איבר אחד מ Y, ולכן חיתוכן עם Y אינו ריק. נקבל בשיטת המשלים $2^n-2^{n-m}$ .

## 10)

1) פירוקים שונים של 5 לפי סוגים:

3

- 3+2 מס' האפשרויות הוא $8\cdot 7$ *(האחות תקבל שלוש מדבקות מסוג אחד ושתי מדבקות מסוג אחר)*
- 3+1+1 מס' האפשרויות הוא $8\cdot\binom{7}{2}$ *(האחות תקבל שלוש מדבקות מסוג אחד, מדבקה אחת מסוג שני ומדבקה אחת מסוג שלישי)*
- 
- 2+2+1 מס' האפשרויות הוא $8\cdot\binom{7}{2}$
- 2+1+1+1 מס' האפשרויות הוא $8\cdot\binom{7}{3}$
- 1+1+1+1+1 מס' האפשרויות הוא $\binom{8}{5}$

האפשרויות זרות, לכן מספר האופנים יהיה החיבור בין האפשרויות.

נקבל $8\cdot 7+8\cdot\binom{7}{2}+8\cdot\binom{7}{2}+8\cdot\binom{7}{3}+\binom{8}{5}$

## (11

א. נסדר את כולם בשורה ב $11!$ אופנים ונחלק בסידורים הפנימיים של האתיות החוזרות $(4\cdot P,5\cdot A)$. נקבל $\frac{11!}{4!5!}$.

ב. נשים את S בסוף ואת היתר נסדר כמו ב א'. נקבל $\frac{10!}{4!5!}$.

ג. ( היו כאן 4 אותיות P ולא 3 כפי שנרשם בהתחלה) נתייחס לרצף PPPP כעל אות אחת . נסדר כך בשורה את האיברים ב $8!$ ונחלק בסידורים הפנימיים של ה A. נקבל $\frac{8!}{5!}$

ד. נשים A כלשהי בהתחלה ונסדר את היתר בשורה. נקבל $\frac{10!}{4!4!}$.

## (12

א. כל הנרות שונים זה מזה ואין חשיבות לצבע. לכן: $\binom{11}{5}$

ב. בוחרים שנים מבין ארבעת הנרות הכחולים. על בחירה כזאת בוחרים 3 מבין הנרות האדומים. לכן התשובה הינה: $\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}$

ג. המשמעות של "לכל היותר שני נרות כחולים" הינה שמתקיימת אחת משלוש אפשרויות: אין נרות כחולים בכלל, יש נר כחול אחד , או שישנם שני נרות כחולים. בכל אחת משלושת האפשרויות האלה, נקבע מספרם של הנרות האדומים שיבחרו לפי מספרם של הכחולים שניבחרו. לכן התשובה:

$$\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}+\binom{7}{4}\cdot\binom{4}{1}+\binom{7}{5}$$

4

## 13)

### א.

מספר הזוגות הסדורים הקיימים במכפלה קרטזית של קב' בעלת n איברים הוא $n^2$. כדי שיחס כלשהו על הקבוצה יהיה רפלקסיבי אנו דורשים שכל זוג סדור מהצורה $(a,a)$ יהיה איבר ביחס. מספר הזוגות הנ"ל הוא n . נותרים בידנו $n^2-n$ זוגות סדורים שכל אחד מהם יכול להופיע או לא להופיע כאיבר ביחס. לכן ניתן להרכיב $2^{n^2-n}$ יחסים רפלקסיביים על קב' זו.

### ב.

בדומה לשיקול של תרגיל 1, אם הזוג $(a,b)$ מופיע ביחס כלשהו על הקבוצה, אזי מהסימטריות נובע שגם האיבר $(b,a)$ חייב להופיע ביחס הזה. ז"א שלכל שני זוגות מהסוג $\{(a,b),(b,a) \mid a\neq b\}$ צריך להחליט אם הם (גם יחד) יהיו איבר ביחס. מספר הצמדים האלה הוא $\frac{n^2-n}{2}$ , וכמו כן כל איבר מהסוג $(a,a)$ יכול להופיע או לא להופיע ביחס (לאיברים אלה אין "בן זוג"). נקבל מכאן שהרכבת יחס סימטרי יכול להתבצע ב $2^{\frac{n^2-n}{2}+n}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ אופנים

## 14)

א. $f:A\to B$ : כל איבר ב B יכול לעבור ע"י f לכל איבר מ B. לכן יש $5^{10}$ אפשרויות.

$f:B\to A$ : כל איבר ב B יכול לעבור ע"י f לכל איבר מ B. לכן יש $10^5$ אפשרויות.

ב. $f:A\to B$ חח"ע אין, כי $|B|<|A|$.

$f:B\to A$ חח"ע: נבחר תחילה 5 איברים מתוך A, ואח"כ נעמיד אותם בשורה מול איברי B, כך שכל איבר מB יעבור ע"י f לאיבר העומד מולו. סה"כ אפשרויות: $\binom{10}{5}\cdot 5!$ .

(זוהי למעשה חליפה של 5 איברים מתוך 10)

ג. $f:B\to A$ על אין, כי $|B|<|A|$.

$f:A\to B$ על:

- סה"כ הפונק' השונות של A לתוך B הוא $5^{10}$
- מספר הפונק' השונות של A לתוך תת קבוצה של B בעלת 4 איברים הוא $4^{10}$, ויש 5 תת קבוצות כאלה.
- מספר הפונק' השונות של A לתוך תת קבוצה של B בעלת 3 איברים הוא $3^{10}$, ויש $\binom{5}{3}$ תת קבוצות כאלה.
- מספר הפונק' השונות של A לתוך תת קבוצה של B בעלת 2 איברים הוא $2^{10}$, ויש $\binom{5}{2}$ תת קבוצות כאלה.
- מספר הפונק' השונות של A לתוך תת קבוצה של B בעלת איבר אחד הוא 1, ויש 5 תת קבוצות כאלה.

מכיוון שבתוך ספירת הפונק' מA לתוך תת קבוצה של B בעלת i איברים נכללות גם כל הפונק' לתוך תת קבוצה קטנה יותר, צריך להשתמש כאן בעקרון ההכלה וההפרדה. נקבל את החישוב הבא:

$$5^{10}-5\cdot 4^{10}+\binom{5}{3}\cdot 3^{10}-\binom{5}{2}\cdot 2^{10}+5$$

5

**(15**

<u>א.</u>

לפי הנוסחה של צירופים עם חזרות: $\binom{28}{25}=\binom{25+4-1}{25}$

<u>ב.</u>

נגדיר $y_1,y_2,y_3,y_4$ כך ש $x_i=y_i+1 \quad i=1,2,3,4$

מהמשוואה המקורית אנו מקבלים ש: $25=(y_1+1)+(y_2+1)+(y_3+1)+(y_4+1)$

כלומר : $y_1+y_2+y_3+y_4=21$

ע"פ הנוסחה של צירופים עם חזרות נקבל שהתשובה היא $\binom{24}{21}=\binom{21+4-1}{21}$

<u>ג.</u>

נגדיר $y_1,y_2,y_3,y_4$ כך ש

$x_1=y_1$

$x_2=y_2+3$

$x_3=y_3$

$x_4=y_4+8$

מהמשוואה המקורית אנו מקבלים ש: $25=y_1+(y_2+3)+y_3+(y_4+8)$

כלומר : $y_1+y_2+y_3+y_4=14$

ע"פ הנוסחה של צירופים עם חזרות נקבל שהתשובה היא $\binom{17}{14}=\binom{14+4-1}{14}$

<u>ד.</u>

נגדיר $y_1,y_2,y_3,y_4$ כך ש:

$x_1=y_1+1$ ===> $0\le y_1\le 5$

$x_2=y_2$ ===> $0\le y_2\le 8$

$x_3=y_3-2$ ===> $0\le y_3\le 5$

$x_4=y_4+6$ ===> $0\le y_4\le 4$

כזכור: $x_1+x_2+x_3+x_4=25$

כלומר: $25=(y_1+1)+y_2+(y_3-2)+(y_4+6)$

כלומר: $y_1+y_2+y_3+y_4=20$

מספר הפתרונות השלמים האי שליליים של המשוואה האחרונה כשאין מגבלות נוספות הינו:

$\binom{23}{20}=\binom{20+4-1}{20}$ .

כדי למצוא את מספר הפתרונות המקיימים את המגבלות על ה- y-ים , נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

6

מספר הפתרונות המבוקש יהיה מספר הפתרונות הכולל (ללא המגבלות על ה- y-ים, כלומר $\binom{23}{20}$ )

פחות מספר הפתרונות שאינן מקיימות את המגבלות.

<u>נגדיר:</u>

$A_1$ - קבוצת הפתרונות השלמים האי שליליים של המשוואה $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20$ כאשר מתקיים התנאי: $y_1 \ge 6$

$A_2$ - קבוצת הפתרונות השלמים האי שליליים של המשוואה $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20$ כאשר מתקיים התנאי: $y_2 \ge 9$

$A_3$ - קבוצת הפתרונות השלמים האי שליליים של המשוואה $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20$ כאשר מתקיים התנאי: $y_3 \ge 6$

$A_4$ - קבוצת הפתרונות השלמים האי שליליים של המשוואה $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20$ כאשר מתקיים התנאי: $y_4 \ge 5$

לפיכך, התשובה לשאלה תהייה: $\binom{23}{20} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$

כדי להשתמש בנוסחת ההכלה וההדחה נערוך מספר חישובים:

- כדי לחשב את העוצמה של הקבוצה $A_1$ יש לחשב את מספר הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשוואה $(z_1 + 6) + z_2 + z_3 + z_4 = 20$ .

  לכן אנו מקבלים ש: $|A_1| = \binom{14+4-1}{14} = \binom{17}{14}$
- כדי לחשב את העוצמה של הקבוצה $A_2$ יש לחשב את מספר הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשוואה $z_1 + (z_2 + 9) + z_3 + z_4 = 20$ .

  לכן אנו מקבלים ש: $|A_2| = \binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{11}$
- כדי לחשב את העוצמה של הקבוצה $A_3$ יש לחשב את מספר הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשוואה $z_1 + z_2 + (z_3 + 6) + z_4 = 20$ .

  לכן אנו מקבלים ש: $|A_3| = \binom{14+4-1}{14} = \binom{17}{14}$
- באופן דומה: $|A_4| = \binom{15+4-1}{15} = \binom{18}{15}$

כעת נחשב את עוצמתן של קבוצות החיתוך:

- $A_1 \cap A_2$ - הינה קבוצת הפתרונות השלמים האי שליליים של המשוואה $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20$ כאשר מתקיים התנאים: $y_1 \ge 6$ ו- $y_2 \ge 9$ . עוצמתה של קבוצה זו הוא במספר הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשווה $(z_1 + 6) + (z_2 + 9) + z_3 + z_4 = 20$ . לכן , $|A_1 \cap A_2| = \binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5}$

7

- באופן דומה, $|A_1 \cap A_3| = \binom{8+4-1}{8} = \binom{11}{8}$
- באופן דומה, $|A_1 \cap A_4| = \binom{12}{9}$
- $|A_2 \cap A_3| = \binom{8}{5}$
- $|A_2 \cap A_4| = \binom{9}{6}$
- $|A_3 \cap A_4| = \binom{12}{9}$

כשמדובר בחיתוך של שלוש או ארבע קבוצות מתבצע תהליך דומה:

- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$
- $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 1$
- $|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \binom{6}{3}$
- $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$
- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$

כעת נציב בנוסחת ההכלה וההדחה ונקבל:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \binom{17}{14} + \binom{14}{11} + \binom{17}{14} + \binom{18}{15}$$
$$-\binom{8}{5} - \binom{11}{8} - \binom{12}{9} - \binom{8}{5} - \binom{9}{6} - \binom{12}{9} + 1 + \binom{6}{3} + 1 - 0 = 1761$$

התשובה לשאלה הינה: $\binom{23}{20} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 1771 - 1761 = 10$

### (16

המספר 100,000 בוודאי לא מקיים תכונה זאת, לכן נתעניין רק במספרים הקטנים ממנו, כלומר מספרים בני חמש ספרות לכל היותר. נייצג כל מספר כמספר בעל חמש ספרות, ע"י הוספת אפסים משמאל במידת הצורך. למשל את המספר 82 נכתוב כך: 00082 . כעת עלינו לענות על השאלה : כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$ . הפיתרון יהיה לפיכך

$$\binom{7+5-1}{7} = \binom{11}{7}$$

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ג

תאריך הגשה:
25.12.2002

# <u>מתמטיקה דיסקרטית- תרגיל מס' 5: בינום+הכלה והפרדה</u>

1) תן הוכחה קומבינטורית לשוויון: $n+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$

הדרכה: הראה ששני האגפים סופרים את מספר הסדרות באורך n המורכבות מהא"ב $\{0,1,a\}$ המכילות a יחיד.

2) מהו המקדם של $x^2$ בפיתוח של $(1+\frac{\sqrt{x}}{2})^8$ ?

3) הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i=3^n$

א. בצורה אלגברית
ב. בצורה קומבינטורית

4) הוכח את הזהויות הקומבינטוריות:

א. $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}$

ב. $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{i}=\binom{m+n}{n}$

5)

א. בכמה סידורים של הספרות 1,2,3,4,5,6,7 בשורה מופיעה תת הסדרה הרצופה 247?

ב. בכמה סידורים של הספרות 1,2,3,4,5,6,7 בשורה מופיעה תת הסדרה הרצופה 24 או מופיעה 27 או מופיעה 47?

6) בכמה סדרות באורך n עם אותיות {a,b,c,d} מופיעה האות a או האות b.

7) בכמה אופנים ניתן לבחור 40 כדורים מתוך ערמת כדורים לבנים, שחורים ואדומים אם יש לכל היותר 10 כדורים לבנים, 20 כדורים שחורים ו – 30 כדורים אדומים?

8) בכמה אפשרויות אפשר לסדר את האותיות $\{a,a,b,b,c,c,d,d\}$ כך שלא יהיה אף זוג צמוד של אותה אות?

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ג
5.1.2003

# מתמטיקה דיסקרטית – פתרון תרגיל מספר 5

### (1

נוכיח את השוויון ע"י ספירת סדרות באורך n מעל הא"ב $\{0,1,a\}$ בעלות a יחיד. נראה שתי ספירות שונות:

צד ימין: נבחר מקום לספרה a מתוך n האפשרויות, וביתר המקומות נשים 0 או 1. בספירה זו נקבל $n\cdot 2^{n-1} = \binom{n}{1}2^{n-1}$.

צד שמאל: יש $n$ סדרות שבהן יש רק אפסים ו-a אחד, $2\binom{n}{2}$ סדרות שבהן יש $n-2$ אפסים, 1 אחד ו a אחד, $3\binom{n}{3}$ סדרות שבהן יש $n-3$ אפסים, 2 אחדים ו a אחד , $k\binom{n}{k}$ סדרות שבהן $n-k$ אפסים, $k-1$ אחדים ו a אחד (בוחרים k מקומות בסדרה שלא יופיע בהם אחד, ומתוכם בוחרים מקום אחד ל a) וכן הלאה... ויש n סדרות שבהן יש 0 אפסים, n-1 אחדים ו a אחד. מכיוון שאפשרויות אלה זרות, נקבל חיבור בניהם ונגיע לערך $n+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}$.

### (2

$$(1+\tfrac{\sqrt{x}}{2})^8 = \sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}1^i\,\tfrac{\sqrt{x}}{2}^{8-i} = \sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}\tfrac{\sqrt{x}}{2}^{8-i}$$

אנו מעוניינים כאן באיבר $x^2$ המופיע בסכום זה כ $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^4$ שמקדמו הוא $\binom{8}{4}$. נקבל

$\binom{8}{4}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^4 = \binom{8}{4}\frac{x^2}{16} = \frac{70\cdot x^2}{16} = \frac{35}{8}\cdot x^2$. כלומר מקדמו של $x^2$ הוא $\frac{35}{8}$.

### (3

צ"ל כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i = 3^n$

א. מציבים $a=2\,,b=1$ בנוסחת הבינום.

ב. הוכחה קומבינטורית: שני צדדי הזהות מבטאים את מספר המחרוזות באורך n מעל הא"ב $\{0,1,2\}$. צד ימין הוא לפי הנוסחה של חליפות עם חזרות (מספר האפשרויות לבחור n עצמים מתוך קבוצה של 3 עצמים כשר יש חזרות ויש חשיבות לסדר).

1

בצד שמאל בוחרים מקומות לאפסים ועבור כל בחירה כזאת מונים את מספר האפשרויות להציב את הספרות 1 ו-2 במקומות הנותרים.

## (4

א.
שני הצדדים של הזהות סופרים את מספר האפשרויות לבחור k בני אדם מתוך קבוצה של n בנות ו- m בנים.

ב.
מקרה פרטי של הזהות מהסעיף הקודם בו $k = n$

## (5

א. נסדר את האיברים 1,247,3,5,6 בשורה. יש !5 אפשרויות לעשות זאת.

ב. נסמן A=מספר הסידורים שמופיע 24
B=מספר הסידורים שמופיע 27
C=מספר הסידורים שמופיע 47

ונחשב,

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| =$$
$$6!+6!+6!-0-5!-0+0 = 3\cdot 6!-5!$$

## (6

נחשב את המשלים, ונחסרו מסך כל האפשרויות: סדרה תהיה במשלים אם לא מופיע בה a ולא מופיע בה b. כלומר במשלים יש את כל הסדרות המורכבות מ c,d בלבד. מספר הסדרות הנ״ל הוא $2^n$. נוריד את הסדרות האלה מסך הסדרות הקיימות ונקבל $4^n - 2^n$.

## (7

מספר האפשרויות לבחור 40 כדורים בצבעים הנ״ל, ללא מגבלות הוא כמספר הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 40$, כלומר $D(3,40) = \binom{42}{2}$.

מספר האופנים לבחור 40 כדורים כך שיהיו לפחות 11 כדורים לבנים הוא $D(3,29) = \binom{31}{2}$.

מספר האופנים לבחור 40 כדורים כך שיהיו לפחות 21 כדורים שחורים הוא $D(3,19) = \binom{21}{2}$.

מספר האופנים לבחור 40 כדורים כך שיהיו לפחות 31 כדורים אדומים הוא $D(3,9) = \binom{11}{2}$.

מספר האופנים לבחור 40 כדורים כך שיהיו לפחות 11 כדורים לבנים ולפחות 21 שחורים הוא $D(3,8) = \binom{10}{2}$.

2

כל יתר האפשרויות לא תחתכנה.
נקבל מעקרון ההכלה וההוצאה, שמספר האפשרויות לבחור 40 כדורים כך שיהיו לכל היותר 10 לבנים, 20 שחורים ו30 אדומים הוא

$$\binom{42}{2}-\left[\binom{31}{2}+\binom{21}{2}+\binom{11}{2}\right]+\binom{10}{2}=176$$

## 8)

מספר האפשרויות ללא המגבלה הינו $\frac{8!}{2^4}$

נסמן ב $A_i$ את אוסף התמורות של $\{a,a,b,b,c,c,d,d\}$ שבהן $ii$ צמודים. נחשב: $|A_i|=\frac{7!}{2^3}$

(כאשר מתייחסים ל ii כאל אות אחת בסידור). באותו אופן

$$|A_i\cap A_j|=\frac{6!}{2^2}$$

$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=\frac{5!}{2}$$

$$|A_a\cap A_b\cap A_c\cap A_d|=4!$$

מעיקרון ההכלה וההוצאה נקבל שמספר האפשרויות הינו:

$$|A_a'\cap A_b'\cap A_c'\cap A_d'|=\frac{8!}{2^4}-\binom{4}{1}\frac{7!}{2^3}+\binom{4}{2}\frac{6!}{2^2}-\binom{4}{3}\frac{5!}{2}+\binom{4}{4}4!=$$

$$=\frac{8!}{2^4}-4\frac{7!}{2^3}+6\frac{6!}{2^2}-4\frac{5!}{2}+4!=864$$

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ג

תאריך הגשה:
2.1.2003

# <u>מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל מס' 6:</u>

1) מצא נוסחא רקורסיבית לבעיה הבאה: בכמה סדרות באורך n המורכבות מהספרות $\{0,1,2,3,4,5\}$ יש מספר אי זוגי של אפסים?

2) מצא נוסחא מפורשת עבור יחס הרקורסיה הליניארי הבא:

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad a_2 = 3$$

3) מצא נוסחא מפורשת עבור יחס הרקורסיה הליניארי הבא:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

$$a_0 = 5, a_1 = 12$$

4) הוכח כי לא קיים גרף פשוט עבורו כל דרגות הצמתים שונות זו מזו.

5) יהיו $a_1 < a_2 < \ldots a_{30}$ סדרת מספרים טבעיים כך ש $1 \le a_i \le 45$. הוכח שיש $i, j$ כך ש $a_i - a_j = 14$

6) יהיו $a_1 < a_2 < \ldots < a_5$ סדרת מספרים טבעיים כך ש $1 \le a_i \le 9$. הוכח שיש $i, j$ כך ש $a_i + a_j = 10$.

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ג
9.1.2003

# פתרון תרגיל מספר 6, רקורסיה, עקרון שובך היונים

1) נסמן ב $a_n$ את מספר הסדרות באורך n בעלות מספר אי זוגי של אפסים.
נקבל מיד ש $a_1 = 1$ , כי רק הסדרה (0) היא בעלת איבר אחד ומספר אי זוגי של אפסים.
כדי לקבל סדרה "טובה" (שעונה על הדרישה) באורך n יש שתי אפשרויות:

א. לקחת סדרה טובה באורך $n-1$ ולהוסיף בתחילתה את אחת הספרות {1,2,3,4,5} . מספר האפשרויות לקבל כך את $a_n$ הוא $5 \cdot a_{n-1}$ .

ב. לקחת סדרה לא טובה (עם מספר זוגי של אפסים) באורך $n-1$ ולהוסיף בתחילתה את הספרה 0. מספר הסדרות הלא טובות באורך $n-1$ הוא $6^{n-1} - a_{n-1}$ .

מכיוון שהאפשרויות א' וב' זרות נקבל ש

$$a_n = 5 \cdot a_{n-1} + 6^{n-1} - a_{n-1} = 6^{n-1} + 4 \cdot a_{n-1}$$
$$a_1 = 1$$

2) <u>נציב</u> $\alpha^n = a_n$ ונקבל $\alpha^n = 6\alpha^{n-1} - 11\alpha^{n-2} + 6\alpha^{n-3}$ .
<u>נצמצם</u> ב $\alpha^{n-3}$ ונקבל

$$\alpha^3 = 6\alpha^2 - 11\alpha + 6$$
$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6 = 0$$
$$(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3) = 0$$
$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 2 \qquad \alpha_3 = 3$$

<u>פתרון כללי</u> למשוואה $a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n + C \cdot 3^n$
<u>פתרון פרטי</u> למשוואה לפי תנאי התחלה:

$$n = 0 \qquad 1 = A + B + C$$
$$n = 1 \qquad 1 = A + 2B + 3C$$
$$n = 2 \qquad 3 = A + 4B + 9C$$

$$\to 0 = B + 2C$$
$$\to 3 = A + C$$
$$\to B = -2$$
$$\to C = 1$$
$$\to A = 2$$

$$a_n = 2 \cdot 1^n - 2 \cdot 2^n + 1 \cdot 3^n$$

$$\Rightarrow a_n = 2 - 2^{n+1} + 3^n$$

(3

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

$$a_0 = 5, a_1 = 12, n \ge 2$$

<u>נציב</u> $\alpha^n = a_n$ ונקבל $\alpha^n = 6\alpha^{n-1} - 9\alpha^{n-2}$ .

<u>נצמצם</u> ב $\alpha^{n-2}$ ונקבל

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0$$

$$(\alpha - 3)(\alpha - 3) = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 3$$

כאשר מקבלים משתנים שווים, צורת <u>הפתרון הכללי</u> הוא $a_n = A \cdot 3^n + n \cdot B \cdot 3^n$ .

<u>פתרון לפי תנאי התחלה</u>:

$$n = 0 \qquad 5 = A$$

$$n = 1 \qquad 12 = 3A + 3B$$

$$\to B = -1$$

$$a_n = 5 \cdot 3^n - n \cdot 3^n = (5 - n)3^n$$

4) יהי G גרף פשוט עם n צמתים. נגדיר פונקציה מצמתי G לטבעיים כך: $\forall v \in V, f(v) = d(v)$ .
הערכים האפשריים עבור f הם $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ .
אם מתקבל הערך "0" ב f אזי קיים צומת ב G שלא יוצאות ממנו קשתות. לכן לא יתכן צומת ב G שיוצאות ממנו $n-1$ קשתות. כלומר הערכים 0 ו $n-1$ לא יכולים להתקבל גם יחד ב f. לכן f יכולה לקבל לכל היותר $n-1$ ערכים. לכן, לפי עקרון שובך היונים, f איננה חח"ע. נובע מכך שקיימים שני צמתים $v_1, v_2$ שעבורם $f(v_1) = f(v_2)$ . כלומר – קיימים שני צמתים ב G בעלי דרגה שווה.

5) נגדיר $A = \{a_1, a_2, \ldots a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots a_{30} + 14\}$ . לפי הנתון כל איברי A שונים זה מזה לכן נקבל ש ב A יש 60 איברים. אבל $\forall i(1 \le a_i \le 45)$ לכן $\forall i(15 \le a_i + 14 \le 59)$ , כלומר כל איבר A הם בין 1 ל 59. לכן אין 60 איברים ב A, לכן, לפי עקרון שובך היונים , יש שני איברים זהים ב A. הנחנו ש $a_1, a_2, \ldots a_{30}$ שונים זה מזה, לכן בהכרח קיימים $i, j$ כך ש $a_i + 14 = a_j$ .

6) יהיו $a_1 < a_2 < \ldots < a_5$ סדרת מספרים טבעיים כך ש $1 \le a_i \le 9$. הוכח שיש $i, j$ כך ש $a_i + a_j = 10$ .

<u>**פתרון**</u>: אם קיים $i$ כך ש $a_i = 5$ אז נבחר $i = j$ ונקבל את הדרוש. אחרת נסמן $A = \{a_1, a_2, \ldots a_5, 10 - a_1, \ldots, 10 - a_5\}$ . ב A יש לכל היותר 10 איברים, שכולם בתחום 1 עד 9. ע"פ עקרון שובך היונים קיימים ב A שני איברים זהים. מכיוון שהגדרנו ש $a_1 < a_2 < \ldots < a_5$ , ולא קיים $i$ כך ש $a_i = 5$ , אזי בהכרח קיימים $i, j$ כך ש $10 - a_i = a_j$ כלומר $a_i + a_j = 10$ .

2

החוג למדעי המחשב
סמסטר א' – תשס"ג

תאריך הגשה :
10.1.2003

# מתמטיקה דיסקרטית , תרגיל מס' 7 – תורת הגרפים

1) יהי G גרף לא מכוון. נגדיר יחסים $R_1$ ו-$R_2$ על קדקודי G :

$(v, u)\in R_1 \Leftrightarrow$ לא ניתן לנתק בין u ל-v ע"י הסרת צלע.
$(v, u)\in R_2 \Leftrightarrow$ לא ניתן לנתק בין u ל-v ע"י הסרת קודקוד w שונה מ-u ו-v

עבור כל אחד מהיחסים בדוק האם הוא יחס שקילות.

2) הוכח שבמסיבה שמשתתפים בה 101 אנשים, יש לפחות בן אדם אחד שמכיר מס' זוגי של אנשים אחרים (הנחה : אם a מכיר את b אזי b מכיר את a).

3)

א) יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון וחסר מעגלים. ידוע כי הוספת כל צלע ל-E תגרום ל-G להכיל מעגל. הראה כי G הוא עץ.

ב) יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון וקשיר. ידוע כי הסרת כל צלע מ-E תהפוך את G ללא קשיר. הראה כי G הוא עץ.

4) <u>הגדרה</u> : גרף G שהנו אציקלי (חסר מעגלים) נקרא יער.

<u>תרגיל</u> : הוכח כי G יער אם ורק אם $|E|=|V|-w$, כאשר $w$ הוא מספר מרכיבי הקשירות של G.

5) הראה כי בגרף דו צדדי פשוט מתקיים $|E|\le\frac{|V|^2}{4}$ .

6) הוכח כי כל מעגל באורך אי זוגי מכיל מעגל פשוט באורך אי זוגי.

7) יהי G גרף שצמתיו $v_1, v_2, \ldots, v_n$ . ( כך ש $n\ge 3$ ) הוכח שאם לפחות 2 מתוך תת הגרפים $G\setminus\{v_1\}, G\setminus\{v_2\}, \ldots, G\setminus\{v_n\}$ הם קשירים, אז G קשיר.

8) תהי $D=\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ סדרת מספרים טבעיים כלשהם.

א. הוכח כי קיים גרף G שהסדרה D מהווה את סדרת דרגות צמתיו אם ורק אם $\sum_{i=1}^{n} d_i$ הוא זוגי.

ב. D נקראת גרפית אם קיים גרף G <u>פשוט</u> ש D מהווה את סדרת דרגות צמתיו. הראה כי הסדרות הבאות אינן גרפיות :

7,6,5,4,3,3,2
6,6,5,4,3,3,1

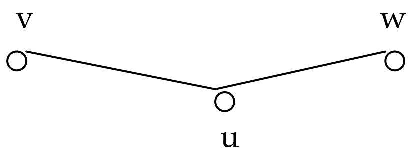
# מתמטיקה דיסקרטית – פתרון תרגיל מס' 7

1) עבור כל אחד מהיחסים נבדוק האם הוא יחס שקילות.

$R_1$ הוא יחס שקילות:

- רפלקסיבי: טריביאלי
- סימטרי: גרף G הוא גרף לא מכוון, לכן גם זה טריביאלי.
- טרנזיטיבי: אם לא ניתן לנתק בין s ל-t ע"י הסרת צלע, אזי קיימים שני מסלולים זרים מ-s ל-t ב-G. נניח כי $(v, u)\in R_1$ ו-$(u, w)\in R_1$. אזי קיימים שני מסלולים זרים בין v ל-u ושני מסלולים זרים בין u ל-w. לכן אם נסיר צלע כלשהי מ-G, יישאר לפחות מסלול בין v ל-u ולפחות מסלול אחד בין u ל-w. לכן יישאר גם מסלול מ-v ל-w. ז"א לא לנתק בין v ל-w ע"י הסרת קודקוד.

$R_2$ הוא לא יחס שקילות כי הוא לא טרנזיטיבי:




לא ניתן לנתק בין v ל-u ע"י הסרת קודקוד s שונה מ-v ו-u.
לא ניתן לנתק בין u ל-w ע"י הסרת קודקוד t שונה מ-u ו-w.
אבל ניתן לנתק בין v ל-w ע"י הסרת קודקוד u.

2) הוכח שבמסיבה שמשתתפים בה 101 אנשים, יש לפחות בן אדם אחד שמכיר מס' זוגי של אנשים אחרים (הנחה: אם a מכיר את b אזי b מכיר את a).

<u>הוכחה</u>: נבנה גרף לא מכוון אשר קדקודיו הם משתתפי המסיבה. נעביר צלע בין v ל-u אמ"ם v מכיר את u. נקבל גרף שיש בו 101 צמתים. נניח בשלילה שאין בגרף זה קודקוד בעל דרגה זוגית. אזי זהו גרף עם 101 קודקודים בעלי דרגה אי-זוגית. לכן, סכום דרגות כל הקודקודים הינו אי-זוגי בסתירה למשפט הקובע כי בכל גרף לא מכוון מתקיים: $\sum_{v\in V}\deg ree(v) = 2\cdot|E|$

(3

א.
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון וחסר מעגלים. ידוע כי הוספת כל צלע ל-E תגרום ל-G להכיל מעגל. הראה כי G הוא עץ.

<u>הוכחה</u>: עץ הוא גרף קשיר וחסר מעגלים. לכן יש להוכיח כי G הוא קשיר. נתון כי הוספת כל צלע ל-E תגרום ל-G להכיל מעגל.
יהיו $v,u \in V$. קיימת מסילה בין v ל-u כי אחרת היינו יכולים להוסיף את הצלע $(v, u)$ ל-G בלי לקבל מעגל. (ראה *)
לכן G הוא גרף קשיר. מ.ש.ל.

ב.
יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון וקשיר. ידוע כי הסרת כל צלע מ-E תהפוך את G ללא קשיר. הראה כי G הוא עץ.

הוכחה: עץ הוא גרף קשיר וחסר מעגלים. לכן יש להוכיח כי G חסר מעגלים. נתון כי הסרת כל צלע מ-E תהפוך את G ללא קשיר.
נניח בשלילה כי קיים מעגל ב-G. יהיו u ו-v קודקודים שכנים הנמצאים על מעגל זה. נסיר את הצלע (u, v) מ-G. נקבל כי עדיין קיימת מסילה בין u ל-v (ראה *). וזאת סתירה להנחה. מ.ש.ל.

(*) עובדה פשוטה: אם בגרף כלשהו G קיים מעגל שעובר דרך שני צמתים v ו-u אזי קיימות שני מסלולים זרים מ-v ל-u. (מסלולים זרים הם מסלולים שאין להם אף צלע משותפת)

4) הוכחה:

$\Leftarrow$ :

נניח כי גרף G הוא יער. נתבונן בכל מרכיב קשירות של G שנסמנו $G_i=(E_i,V_i)$. הוא קשיר וחסר מעגלים ולכן הוא עץ. ע״פ משפט מתקיים לגביו ש $|E_i|=|V_i|-1$. מכיוון שמרכיבי הקשירות של G מהווים חלוקה של G, נקבל ש

$$|E|=|E_1|+|E_2|+\ldots+|E_w|=|V_1|+|V_2|+\ldots+|V_w|\underbrace{-1-1-1\ldots-1}_{W\ \text{פעמים}}=|V|-w$$

$\Rightarrow$ :

נניח ש G גרף כך ש $|E|=|V|-w$ ונוכיח ש G יער.
באינדוקציה על $|V|$:
עבור $|V|=1$: מתקיים לפי הנחה ש $|E|=1-1=0$ ולכן ברור ש G אציקלי.
נניח שגרף עם $n$ צמתים שבו מתקיים ש $|E|=|V|-w=n-w$ הוא אציקלי, ונוכיח שגרף בעל n+1 צמתים שבו מתקיים $|E|=|V|-w=n+1-w$ הוא אציקלי.
הוכחה:
נעיר תחילה שבגרף יש צומת בעלת דרגה 0 או בעלת דרגה 1: אחרת דרגת כל צומת היא לפחות 2, אבל אז נקבל ש $|E|\geq\frac{2|V|}{2}=|V|$ בניגוד לנתון. לכן קיים צומת כנ״ל.
אם קיימת צומת בעלת דרגה 0, נסיר אותה מהגרף ונקבל גרף בעל n צמתים, $|E|$ קשתות (כי לא החסרנו בתהליך אף קשת), ו $w-1$ מרכיבי קשירות (כי הצומת שהסרנו היוותה מרכיב קשירות של צומת מבודדת). כלומר $|E|=|V|-1-(w-1)=n-w$ ולפי הנחת האינדוקציה גרף זה הוא יער. ברור לכן שהחזרת הצומת בעלת דרגה 0 לא תוסיף מעגלים לגרף, ולכן הגרף אציקלי.

אם קיימת צומת בעלת דרגה 1, נסיר אותה מהגרף ונקבל גרף שבו n צמתים, $|E|-1$ קשתות, ו w מרכיבי קשירות. לכן $|E|-1=|V|-1-w$, כלומר $|E|=n-w$ לכן לפי הנחת האינדוקציה הגרף הנו אציקלי. ברור שהוספת צומת אחת ממנה יוצאת קשת אחת לא סוגרת שום מעגל, לכן הגרף בעל n+1 הצמתים הוא אציקלי.

5) בגרף דו צדדי G מתקיים $|E|\leq|V_1|\cdot|V_2|$ ושוויון מתקיים רק עבור הגרף הדו צדדי המלא $K_{V_1,V_2}$. נשים לב ש $|V_1|\cdot|V_2|$ מקבל את ערכו המקסימאלי כאשר $|V_1|=|V_2|$ (ראה הוכחה בהמשך), כלומר כאשר $|V_1|=|V_2|=\frac{|V|}{2}$. מכאן נקבל מיידית ש

$$|E|\leq V_1\cdot V_2\leq\frac{|V|}{2}\cdot\frac{|V|}{2}=\frac{|V|^2}{4}.$$

נוכיח כי $|V_1|\cdot|V_2|$ מקבל את ערכו המקסימאלי כאשר $|V_1|=|V_2|$.

2

נתבונן במספר הטבעי $a$. נניח ש $b+c=2a$ עבור $b,c$ טבעיים כלשהם. בלי הגבלת הכלליות ניתן לומר ש קיים $i$ כך ש $b=a-i, c=a+i$. נכפול ונקבל:
$b\cdot c=(a+i)(a-i)=a^2-i^2\le a^2$ ושוויון מתקיים רק כאשר $i=0$, כלומר ש $b=c=a$.

6) יהי C מעגל אי זוגי בגרף G כלשהו. אם המעגל C הנו פשוט, אז סיימנו. אחרת יש $\delta$ חזרות, כלומר $\delta$ מתחלק לאוסף מעגלים (כל אחד מהם מהווה קטע במסלול של המעגל C המתחיל ומסתיים באותה צומת). אם כל המעגלים המוכלים ב C הם זוגיים, נקבל ש C זוגי (כי ספירת צמתיו היא ספירת כל הצמתים על המעגלים המוכלים בו) בניגוד לנתון. לכן קיים מעגל אי זוגי המוכל ב- C.

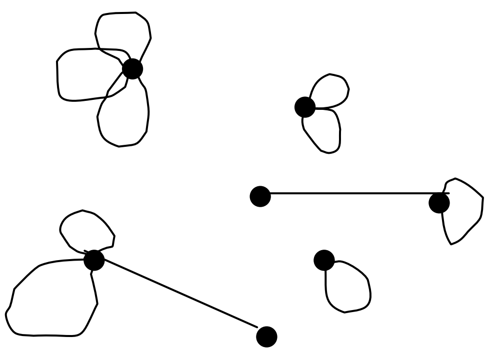
7) נניח בלי הגבלת הכלליות ש $G\setminus\{v_1\}, G\setminus\{v_2\}$ הם קשירים, ונוכיח ש G קשיר.
$G\setminus\{v_1\}$ קשיר, לכן לכל $2\le i\ne j\le n$ קיים מסלול ב G בין $v_i, v_j$. כמו כן $G\setminus\{v_2\}$ קשיר, לכן לכל $i\ne 2\ne j$ $1\le i\ne j\le n$ קיים מסלול ב G בין $v_i, v_j$. נותר להוכיח כי קיים ב G מסלול בין $v_1, v_2$. יהי $w\in V\setminus\{1,2\}$ כלשהו.
$w\in V\setminus\{1\}$ לכן לפי הנחה קיים מסלול $\delta_1$ בין $v_2, w$.
$w\in V\setminus\{2\}$ לכן לפי הנחה קיים מסלול $\delta_2$ בין $v_1, w$.
לכן המסלול $\delta_1,\delta_2$ הוא מסלול ב G בין $v_1, v_2$.

מכאן ש G קשיר

8) $\Leftarrow$: צד זה של ההוכחה הוא משפט, שהרי $\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2|E|$ וזהו מספר זוגי.

$\Rightarrow$: נניח כי $D=\{d_1,d_2,\ldots d_n\}$ היא סדרת טבעיים כך ש $\sum_{i=1}^{n} d_i$ זוגי, ונוכיח כי קיים גרף G בעל n צמתים ש D מהווה את סדרת דרגותיו. נבנה את G כך: ראשית נציב n קודקודים מבודדים $v_1,v_2,\ldots,v_n$. לכל $1\le i\le n$ נסמן $d_i=1+k_i\cdot 2$ (אם $d_i$ אי זוגי) או $d_i=k_i\cdot 2$ (אם $d_i$ זוגי). לכל $d_i$, נעביר $k_i$ לולאות מ $v_i$ לעצמו. מכיוון ש $\sum_{i=1}^{n} d_i$ הוא זוגי, אנו מקבלים שמספר ה $d_i$ האי זוגיים הוא זוגי. נחלק לזוגות את כל ה $v_i$ כך ש $d_i$ הוא אי זוגי, ובין כל זוג כזה נעביר קשת. נקבל בתהליך זה גרף G (לא בהכרח פשוט) כך ש $\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=\sum_{i=1}^{n} d_i$ כדרוש.

<u>המחשה:</u> עבור $D=\{6,4,3,1,2,1,5\}$ נקבל את הגרף:



3

ב) לגבי 7,6,5,4,3,3,2 : לא יכולה להיות צומת בגרף פשוט עם דרגה 7 , עם מספר הצמתים בגרף הוא 7. הדרגה הגבוהה ביותר האפשרית היא 6.

לגבי 6,6,5,4,3,3,1 : אם בגרף פשוט יש 7 צמתים, ושניים מהם בעלי דרגה 6, אזי לא תיתכן צומת בעלת דרגה 1 בגרף.

החוג למדעי המחשב
סמסטר א׳ – תשס״ג

תאריך הגשה:
15.1.2003

# מתמטיקה דיסקרטית , תרגיל מס׳ 8 – חזרה

1)

יהי G=(V,E) גרף לא מכוון פשוט . נגדיר $\overline{G}=(V,\overline{E})$ כך ש
$\overline{G}=\{(x,y)\mid(x,y)\notin G,\quad x\neq y\in V\}$ (כלומר, $\overline{G}$ הוא גרף בעל אותם קודקודים של G,
ומכיל את כל הצלעות שלא נמצאות על G.)

א. הוכח כי אם G אינו קשיר אז $\overline{G}$ קשיר

ב. האם יתכן גרף כך ש $G$ וגם $\overline{G}$ קשירים? (הראה דוגמא או הוכח שלא קיים כזה גרף)

2)

בכמה דרכים ניתן לחלק $2n$ כדורים לבנים ו - $n$ כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע אחר, שונה מלבן) כדלקמן (כל סעיף בנפרד):

א. ל- $3n$ תאים, כדור אחד בדיוק בכל תא

ב. ל - $3n$ תאים, כדור אחד לבן לכל היותר בכל תא

ג. ל- $n$ תאים, כדור אחד לבן לפחות בכל תא

3)

בכל אחד מהסעיפים הבאים קבע האם קיים יחס על קבוצה A כלשהי , המקיים את התכונות הרשומות. אם קיים – תן דוגמא ליחס כזה. אם לא קיים – הוכח שאין כזה יחס:

א. סימטרי ולא טרנזיטיבי

ב. סימטרי, אנטי סימטרי, לא טרנזיטיבי

ג. טרנזיטיבי, סימטרי, לא רפלקסיבי

ד. טרנזיטיבי, לא סימטרי, לא אנטיסימטרי

4)

תהי D מטריצה בינארית (שאיבריה 0 ו – 1 בלבד), בגודל $n\times m$ .

א. כמה מטריצות כאלה ישנן?

ב. כמה מטריצות יש כך שמספר ה – 1 בהן הוא זוגי?

ג. כמה מטריצות יש כך שמספר ה - 1 בכל שורה שלהן הוא זוגי?

ד. יהי $k\leq n$ קבוע כלשהו. כמה מטריצות יש עם <u>בדיוק</u> k שורות של אפסים?

5)

ברשת מחשבים בעלת 6 מחשבים , כל מחשב מחובר בצורה ישירה לפחות לאחד המחשבים האחרים ברשת. הראה שקיימים לפחות 2 מחשבים ברשת שמחוברים ישירות לאותו מספר מחשבים .

**בהצלחה בבחינות !**

# <u>מתמטיקה דיסקרטית - פתרון תרגיל מס' 8</u>

1)

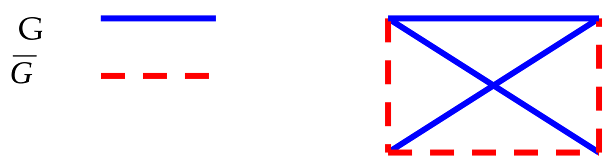
א. הוכחה: נתון ש G אינו קשיר, לכן ב – G לפחות שני מרכיבי קשירות. יהיו $x, y \in V$.

נראה שקיים מסלול מ x ל y בתוך $\overline{G}$. נתבונן בשני מקרים:

- x ו – y במרכיבי קשירות שונים ב G: אזי אין מסלול בין x ל- y ב G, לכן ברור שאין קשת בין x ל – y בתוך G, לכן קיימת בניהם קשת ב $\overline{G}$, וזהו מסלול מ – x ל – y ב - $\overline{G}$.
- אם x ו – y באותו מרכיב קשירות של G, אז נבחר z ממרכיב קשירות אחר של G (כאמור קיים כזה, כי G אינו קשיר). אזי אין מסלול בין x ל- z ב G, לכן ברור שאין קשת בין x ל – z בתוך G, לכן קיימת בניהם קשת ב $\overline{G}$, ובאופן דומה קיימת קשת בין y ל – z ב $\overline{G}$. מכאן ש $x \to z \to y$ הוא מסלול מ x ל – y ב $\overline{G}$.

$\Leftarrow$ $\overline{G}$ קשיר

ב. דוגמא לכך ש G וגם $\overline{G}$ קשירים:




2)

א. נסדר את כל הכדורים בשורה, ונחלק בסידורים הפנימיים של הכדורים הלבנים. נקבל

$$\frac{(3n)!}{(2n)!}$$

ב. נבחר תחילה 2n תאים בהם נשים כדור לבן, ואחר כך נחלק את הכדורים הצבעוניים ללא הגבלה. נקבל: $(3n)^n \cdot \binom{3n}{2n}$

ג. נשים n כדורים לבנים – אחד בכל תא (יש רק אפשרות אחת לעשות זאת). כעת נחלק את יתר הכדורים הלבנים ללא הגבלה, ואחר כך נחלק את הכדורים הצבעוניים ללא הגבלה.
נקבל $n^n \cdot \binom{2n-1}{n-1}$

3)

א. קיים יחס כזה, למשל $A=\{1,2,3\},\quad R=\{(1,2),(2,1)\}$, אזי R סימטרי כי $\forall a,b\in A(aRb\to bRa)$. R לא טרנזיטיבי כי $(2,1)\in R\ \wedge (1,2)\in R$ אבל $(1,1)\notin R$.

ב. לא קיים יחס כזה. אם R אינו טרנזיטיבי אז קיימים $a,b,c\in A$ כך ש $(a,b)\in R\wedge(b,c)\in R\wedge(a,c)\notin R$. שימו לב שהתנאי הזה דורש ש $a\neq b\wedge b\neq c$ אחרת הוא פשוט לא יתכן! בהמשך – מסימטריות R נקבל למשל ש $(b,a)\in R$, ואנטיסימטריות של R דורש אז ש a=b. סתירה, לכן לא קיים יחס המקיים את שלושת התכונות הנ"ל.

ג. קיים כזה יחס, למשל: $A=\{1,2,3\},\quad R=\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$. R סימטרי כי $\forall a,b\in A(aRb\to bRa)$. R טרנזיטיבי כי $(1,2),(2,1)\in R\to(1,1),(2,2)\in R$ (בהחלפת סדר האיברים צריכים להתקבל שני הזוגות שרשמתי). R לא רפלקסיבי כי $(3,3)\notin R$.

ד. קיים כזה יחס, למשל $A=\{1,2,3\},\quad R=\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(2,3),(1,3)\}$ אזי R לא סימטרי כי $(2,3)\in R$ אבל $(3,2)\notin R$. R לא אנטיסימטרי כי $(1,2)\in R\wedge(2,1)\in R$ וברור ש $1\neq 2$. R טרנזיטיבי כי

$$(1,2)\in R\wedge(2,1)\in R\to(1,1)\in R$$
$$(2,1)\in R\wedge(1,2)\in R\to(2,2)\in R$$
$$(1,2)\in R\wedge(2,3)\in R\to(1,3)\in R$$
$$(2,1)\in R\wedge(1,3)\in R\to(2,3)\in R$$

4)

א. כל איבר במטריצה יכול להיות 0 או 1 לכן מספר המטריצות הוא $2^{m\cdot n}$.

ב. את $m\cdot n-1$ המקומות הראשונים במטריצה נמלא כרצוננו, ונשאיר את הפינה הימנית העליונה ריקה. אחרי מילוי יתר המקומות, נעבור על המטריצה ונספור את מספר האחדים. אם יש מספר זוגי, אז נמלא את הפינה ב 0. אם יש מספר אי זוגי של אחדים אז נשים בה 1 ונקבל מספר זוגי של אחדים במטריצה. לכן נקבל שיש $2^{m\cdot n-1}$ מטריצות שמספר האחדים בהם זוגי.

ג. באותו עקרון של סעיף ב – בכל שורה יש m איברים. את m-1 הראשונים נמלא כרצוננו ואת האחרון נמלא לפי המצב. לכן לכל שורה יש $2^{m-1}$ הצגות אפשריות. במטריצה יש n שורות לכן יש $2^{n(m-1)}$ מטריצות העונות על הדרישה.

ד. נבחר תחילה את k שורות האפסים ב $\binom{n}{k}$ אפשרויות. כעת צריך לוודא שבכל אחת מהשורות שנותרו יש לפחות 1 אחד. מספר ה"דגמים" של שורה באורך m שבה יש לפחות

2

1 אחד הוא $2^m-1$ (כל האפשרויות פחות האפשרות של שורת אפסים) . כעת כל שורה שאיננה שורת אפסים "בוחרת" לעצמה את אחת מהאפשרויות שספרנו . יש $n-k$ שורות כאלה, לכן בס"ה מספר המטריצות המקיימות את הדרישה הוא $\binom{n}{k}.(2^m-1)^{n-k}$

5)

נגדיר פונקציה מרשת המחשבים ל N, כך שלכל מחשב נצמיד את מספר המחשבים המחוברים אליו ברשת. הערכים שהפונקציה מקבלת הם בין 1 ל – 5 (1 – כי כל מחשב מחובר לפחות ל – 1, ו – 5 כי מחשב לא מחובר לעצמו). נקבל שמספר הערכים בתמונת הפונקציה קטן יותר ממספר המחשבים, לכן הפונקציה איננה חח"ע, כלומר קיימים שני מחשבים המחוברים לאותו מספר מחשבים.

3

אוניברסיטת חיפה		סמסטר ב'
מדעי המחשב		להגשה עד 10/4/02

# מתמטיקה דיסקרטית – תרגיל בית מס' 1

1.(20 נק') שאלו אדם בן 103 מה הדיאטה ששומרת על בריאותו והוא ענה: " אם אני לא שותה בירה אז אני אוכל דג. בכל פעם שאני שותה בירה וגם אוכל דג אני לא אוכל גלידה. אם אני לא אוכל גלידה או לא שותה בירה אז אני לא אוכל דג." מהו האופן הפשוט ביותר לתאר את הדיאטה הנ"ל?

2.(20 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

א. $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$

ב. $(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \equiv \psi$

ג. אם $\psi$ היא טאוטולוגיה אז $(\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$

ד. אם $\psi$ היא סתירה אז $(\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$

3.(20 נק')רשמו את השלילה של הביטויים הבאים.

א. $\exists x \forall y,\ f(x) > g(y)$

ב. $\forall y \exists x,\ x^2 = y^3$

ג. $\forall x \forall y, [(y > 0) \Rightarrow (xy > 0)]$

ד. לכל איש יש ספר שכל עמודיו ריקים.

4.(20 נק') הוכיחו באינדוקציה.

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + ..... + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

5.(20 נק') הוכיחו בעזרת עקרון האינדוקציה המתמטית המלאה שכל מספר טבעי $n \geq 12$ ניתן לכתוב בצורה $n = 3x + 7y$ כאשר x,y מספרים טבעיים כלשהם.

הדרכה: בדקו בבסיס האינדוקציה את נכונות הטענה ל- n=12,13,14.

אוניברסיטת חיפה סמסטר ב'
מדעי המחשב

# מתמטיקה דיסקרטית – פתרון תרגיל בית מס' 1

1.נסמן בירה B, גלידה G, דג D .

ואז נתון: $\varphi := ((\neg B \to D) \wedge ((B \wedge D) \to \neg G) \wedge ((\neg G \vee \neg B) \to \neg D))$

כאשר מחשבים את טבלת האמת של $\varphi$ מקבלים.

| B | D | G | $\neg B \to D$ | $(B \wedge D) \to \neg G$ | $(\neg G \vee \neg B) \to \neg D)$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| ***1*** | ***0*** | ***1*** | ***1*** | ***1*** | ***1*** | ***1*** |
| ***1*** | ***0*** | ***0*** | ***1*** | ***1*** | ***1*** | ***1*** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

רק בשורות 3,4 מתקיימת $\varphi$ זה אומר $\varphi \equiv B \wedge \neg D$ . כלומר הדיאטה בעצם אומרת ***צריך לשתות בירה וגם לא לאכול דג.***

.2

א. $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \varphi$ . נכון

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$ |
|---|---|---|
| **1** | 1 | **1** |
| **1** | 0 | **1** |
| **0** | 1 | **0** |
| **0** | 0 | **0** |

ב. לא נכון. ההשמה $I(\varphi) = 1, I(\psi) = 0$ נותנת $I(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) = 1 \neq I(\psi)$

ג. $\psi$ טאטולוגיה $\Leftarrow (\varphi \vee \psi)$ , <u>ולא נכון</u> ששקול ל $\varphi$

ד. $\psi$ סתירה $\Leftarrow (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$ נכון.

.3

א. $\forall x \exists y, f(x) \leq g(y)$

ב. $\exists y \forall x, x^2 \neq y^3$

ג. $\exists x \exists y[(y > 0) \wedge (xy \leq 0)$

ד. קיים איש שבכל ספריו יש לפחות עמוד אחד לא ריק.

4.בסיס האינדוקציה: עבור n=1 מתקיים $\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$

שלב האינדוקציה: נניח כי עבור n-1 מתקיים

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+.....+\frac{2(n-1)+1}{(n-1)^2(n)^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{(n)^2}$$

נוכיח כי הטענה נכונה גם ל n

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+.....+\frac{2(n-1)+1}{(n-1)^2(n)^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{(n^2-1)(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{(n^2-1)(n^2+2n+1)}{n^2(n+1)^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{(n^4+2n^3+n^2-n^2-2n-1)}{n^2(n+1)^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{n^4+2n^3-2n-1+2n+1}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{n^4+2n^3}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2(n^2+2n)}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

5. בסיס האינדוקציה: עבור n=12 מתקיים 12=3*4 +7*0

n=13 מתקיים 13=3*2+7*1

n=14 מתקיים 14=3*0+7*2

שלב האינדוקציה: נניח עבור כל מספר טבעי $12\le k\le n-1$ הטענה מתקיימת.

נוכיח עבור n

$$n=n-3+3=3x+7y+3=3(x+1)+7y$$

אוניברסיטת חיפה
מדעי המחשב

סמסטר ב'
להגשה עד 6/5/02 שעה 13:00

# מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 2

1.הוכח או הפרך
א. $A \subseteq B \Leftarrow P(A) \subseteq P(B)$
ב. $A \in B \Leftarrow P(A) \in P(B)$
ג. $A \in B \Leftarrow P(A) \subseteq P(B)$
ד. $A \subseteq B \Leftarrow P(A) \in P(B)$

2. יהיו A,B,C הוכח או הפרך
א. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
ב. $P(A) \times P(A) = P(A^2)$
ג. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$
ד. $(A \times A) \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$
ה. $(A \times A) \cup (B \cup C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$

3. עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא.
א. $\{4\} \in \{2,3,4,5\}$
ב. $\phi \in \phi$
ג. $\phi \subseteq \phi$
ד. $\phi \subseteq \{\phi\}$
ה. $\{4\} \in \{\{4\}\}$
ו. $\{4\} \subseteq \{\{4\}\}$
ז. אם $B \supseteq A$ ו- $C \supseteq B$ אזי $C \supseteq A$
ח. אם $\overline{B} \supseteq \overline{A}$ אזי $A \supseteq B$

4. תהא A קבוצת המספרים הממשיים בלי אפס $A = R \setminus \{0\}$ . נגדיר יחס P ב- A באופן הבא:
$xy > 0 \Leftrightarrow (x, y) \in P$
א. הוכח כי P יחס שקילות.
ב. מהן מחלקות השקילות שמגדיר היחס P?

5. יהיו R,T יחסי שקילות ב-A. הוכח כי $R \cap T$ יחס שקילות ב-A.

6. יהי R יחס סימטרי וטרנזיטיבי בקבוצה A. הוכח כי אם לכל $a \in A$ קיים $b \in A$ כך שמתקיים $aRb$ אזי R יחס שקילות.

מתמטיקה דיסקרטית פתרון תרגיל בית מס' 2.

1) א. הוכחה:

$P(A)\subseteq P(B) \Rightarrow$ לכל $D\subseteq A$ מתקיים $D\subseteq B$, בפרט $A\subseteq A$

לכן $A\subseteq B$.

ב. $P(A)\in P(B) \Rightarrow P(A)\subseteq B \Leftrightarrow$ לכל $D\in P(A)$, $D\in B$

בפרט $A\in P(A)$, לכן $A\in B$.

ג. דוגמא נגדית:

$A=\{2\}$, $B=\{1,2\}$, $P(A)=\{\emptyset,\{2\}\}$, $P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

אזי $P(A)\subseteq P(B)$ אבל $A\not\subseteq B$.

ד. דוגמא נגדית: $A=\{1\}$, $B=P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}$,

$P(B)=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{1\}\},\{\emptyset,\{1\}\}\}$

אזי $P(A)\in P(B)$, אבל $A\subseteq B$ כי $1\notin B$.

2) א. הוכחה: $D\in P(A\cap B) \Leftrightarrow D\subseteq A\cap B \Leftrightarrow D\subseteq A$ וגם $D\subseteq B \Leftrightarrow D\in P(A)$ וגם $D\in P(B) \Leftrightarrow D\in P(A)\cap P(B)$

ב. הטענה אינה נכונה! נשים לב, שהאיברים של 2 צדי השוויון הם שונים. $P(A)\times P(A)$ אלה זוגות סדורות של תתי הקבוצות של $A$. $P(A^2)$ אלה אוספים של זוגות סדורים של איברים מ- $A$.

דוגמא נגדית: $A=\{4\}$, $P(A)=\{\emptyset,\{4\}\}$

$P(A)\times P(A)=\{(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{4\}),(\{4\},\emptyset),(\{4\},\{4\})\}$

$P(A^2)=P\{(4,4)\}=\{\emptyset,(4,4)\}$

ורואים ש $P(A)\times P(A)\neq P(A^2)$

2) דוגמא נגדית: $A=\{1,2\},\ B=\{3,4\},\ C=\{3\}$

$A\cup(B\setminus C)=\{1,2,4\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4\},\quad A\cup C=\{1,2,3\}$

$A\cup B\setminus A\cup C=\{4\}$

3) דוגמא נגדית $A=\{1,2\},\ B=\{2\},\ C=\{1\}$

$A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$(A\times A)\setminus(B\times C)=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$

$A\setminus B=\{1\},\quad A\setminus C=\{2\}$

$(A\setminus B)\times(A\setminus C)=\{(1,2)\}$

ורואים ש- $(A\times A)\setminus(B\times C)\neq(A\setminus B)\times(A\setminus C)$

3) דוגמא נגדית $A=\{1\},\ B=\{2\},\ C=\{3\}$

$(A\times A)\cup(B\cup C)=\{(1,1),2,3\}$

$(A\cup B)\times(A\cup C)=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\}$

3) א. לא, כי $\{4\}$ אינה איבר ב- $\{2,3,4,5\}$

ב. לא, ב $\phi$ אין איברים בכלל.

ג. נכון, כי $\phi$ היא תת-קבוצה של כל קבוצה.

ד. נכון, -"-

ה. נכון, כי $\{4\}$ איבר ב- $\{\{4\}\}$

ו. לא נכון, כי 4 אינו איבר ב- $\{\{4\}\}$.

5- נכון הוכחה: $A\subseteq B \Leftarrow$ לכל $a\in A$ מתקיים $a\in B$.

$B\subseteq C \Leftarrow$ לכל $a\in B$ מתקיים $a\in C$

לכן, לכל $a\in A \Leftarrow a\in B \Leftarrow a\in C$, ולכן $A\subseteq C$.

ח. הוכחה: תהי $X$ קבוצה כך ש $A,B\subseteq X$ (וגם $\bar{A},\bar{B}\subseteq X$ כמובן)

נניח כי $\bar{A}\subseteq\bar{B}$ ונראה כי: $B\subseteq A$

לכל $b\in B$ צריך להראות ש $b\in A$.

$b\in B \Rightarrow b\notin\bar{B} \underset{\bar{A}\subseteq\bar{B} \text{ כי}}{\Rightarrow} b\notin\bar{A} \Rightarrow b\in A \Rightarrow$

$B\subseteq A$.

(4) א) הוכחה:

P רפלקסיבי: יהי $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, אזי $x<0$ או $x>0$

אם $x>0$ אזי $x\cdot x>0$

אם $x<0$ אזי $x\cdot x>0$

בכל מקרה לכל $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $xPx$. לכן P רפלקסיבי.

P סימטרי: ~~...~~

צריך להראות לכל $(x,y)\in P$ גם $(y,x)\in P$

$(x,y)\in P \Leftrightarrow xy>0 \underset{xy=yx \text{ כי}}{\Leftrightarrow} y\cdot x>0$

$\Leftrightarrow (y,x)\in P$, לכן P סימטרי.

P טרנזיטיבי: צריך להראות אם $xPy$ וגם $yPz$ אזי $xPz$

$xPy \Leftrightarrow xy>0 \Leftrightarrow$ ל-$x,y$ יש סימן זהה $(\pm)$

$yPz \Leftrightarrow yz>0 \Leftrightarrow$ ל-$y,z$ יש סימן זהה,

$\Leftarrow$ ל-$x$ ו-$z$ אותו סימן $\Leftarrow xz>0$

$\Leftarrow xPz$, לכן P טרנזיטיבי.

P רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי לכן P יחס שקילות.

מחלקות השקילות ב-P: שים לב ש $xPy \Leftrightarrow x\cdot y>0$

$\Leftrightarrow$ ל-$x$ ול-$y$ יש אותו סימן

לכן מחלקות השקילות הן $(-\infty,0),(0,+\infty)$

ואין חיתוך ביניהן. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ; $(-\infty,0)\cap(0,+\infty)=\emptyset$

5. $R \cap T$ רפלקסיבי: צריך להראות לכל $a \in A$ $(a,a) \in R \cap T$

לכל $a \in A$ $aRa$ וגם $aTa$ (כי $R$ ו-$T$ רפלקסיביים).

לכן $(a,a) \in R \cap T$. לכן $R \cap T$ רפלקסיבי.

$R \cap T$ סימטרי: צריך להראות כי אם $(a,b) \in R \cap T$ אזי $(b,a) \in R \cap T$

יהי $a,b \in A$ כך ש $(a,b) \in R \cap T$ אזי $aRb$ וגם $aTb$. $R$ ו-$T$ סימטריים לכן $bRa$ וגם $bTa$

לכן $(b,a) \in R \cap T$.

$R \cap T$ טרנזיטיבי: צריך להראות כי אם $(a,b) \in R \cap T$ וגם $(b,c) \in R \cap T$ אזי $aR \cap Tc$.

אם $aR \cap Tb$ וגם $bR \cap Tc$, אזי $aRb$ וגם $bRc$ ולכן $aRc$ (כי $R$ טרנזיטיבי) אבל גם $aTb$ וגם $bTc$ ולכן $aTc$ (כי $T$ טרנזיטיבי)

$\Leftarrow aR \cap Tc \Leftarrow$ $R \cap T$ טרנזיטיבי.

6. $R$ סימטרי וטרנזיטיבי. נתון להוכיח שאם לכל $a \in A$ קיים $b \in A$ כך שמתקיים $aRb$ אזי $R$ רפלקסיבי.

הוכחה: יהי $a \in A$ כלשהו. עפ"י הנתון, קיים $b \in A$ כך ש $aRb$. $R$ סימטרי לכן $bRa$.

קיבלנו $aRb$ ו-$bRa$. $R$ טרנזיטיבי, לכן $aRa$.

$\Leftarrow$ $R$ רפלקסיבי.

לכן $R$ יחס שקילות.

אוניברסיטת חיפה
מדעי המחשב

סמסטר ב'
להגשה עד 12/5/02 שעה 16:00

# מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 3

1. הוכח כי $f: N\times N \to N$ המוגדרת ע"י $f(m,n)=2^m(2n+1)$ , $m,n\in N$ היא חח"ע.
2. תהי $f: X\to Y$ ו $g: Y\to Z$ הוכח כי אם f על Y ו $h=g\circ f$ חח"ע אזי g היא חח"ע.
3. נתונות שתי קבוצות A ו B , שתי פונקציות $g: B\to A, f: A\to B$ . כמו כן נתון $g\circ f : I_A$ . הוכח או הבא גוגמא נגדית לכל אחת מהטענות הבאות:
   א. $g=f^{-1}$ .
   ב. f היא חח"ע.
   ג. g היא חח"ע.
   ד. f היא על.
   ה. g היא על.
4. יהיו f,g,h הפונקציות הבאות מ Z ל Z.

$$f(x)=3x+1$$
$$g(x)=|x|$$
$$h(x)=\begin{cases}-x^2, 0\le x\\ x^2, 0>x\end{cases}$$

   א. קבע עבור כל אחת מהפונקציות הנ"ל האם היא חח"ע.
   ב. קבע עבור כל אחת מהפונקציות הנ"ל האם היא על.
   ג. חשב את הפונקציות הבאות: h(f(x)), f(h(x)) ,f(g(h(x))), h(g(x))

5. הוכח כי קבוצות עיגולים במישור שפנימיהם זרים זה לזה (כלומר זרים חוץ מהיקפם) היא בת מניה.
6. הוכח כי עוצמת הריבוע $\{(x,y)\mid 2<x<4, 8<y<10\}$ , שווה לעוצמת המעגל $\{(x,y)\mid (x+1)^2+(y+5)^2<4\}$
7. כידוע קבוצת המספרים הרציונאליים היא בת מנייה. הוכח כי קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונאליים אינה בת מניה.

## דיסקרטית - פתרון תרגיל מס' 3

① נוכיח כי $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י: $f(m,n)=2^m(2n+1)$
היא חח"ע:

נניח כי $f(m_1,n_1)=f(m_2,n_2)$ ונראה כי: $(m_1,n_1)=(m_2,n_2)$
כאשר $(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$$f(m_1,n_1)=f(m_2,n_2) \Rightarrow 2^{m_1}(2n_1+1)=2^{m_2}(2n_2+1)$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש $m_1\geq m_2$, ונחלק את המשוואה
ב $2^{m_2}$ ונקבל

$$\underbrace{2^{m_1-m_2}(2n_1+1)}_{\text{זוגי}} = \underbrace{(2n_2+1)}_{\text{אי-זוגי}}$$

זה לא יתכן ולכן $m_1=m_2$

ולכן $2n_1+1=2n_2+1$

ולכן $n_1=n_2$

כלומר $(m_1,n_1)=(m_2,n_2)$ ולכן f חח"ע. ▨

② יהיו $f:X\to Y$ , $g:Y\to Z$

נוכיח כי אם f על Y, ! $h=g\circ f$ חח"ע אז g חח"ע.

הוכחה: נתון כי $h=g\circ f$ חח"ע, ולכן לפי טענה (מהשיעור)
f חח"ע. נתון ש f היא על Y, כלומר f חח"ע ועל
Y ולכן f הפיכה, כלומר קיימת $f^{-1}$.
$h=g\circ f$ חח"ע וגם $f^{-1}$ לפי הגדרתה חח"ע, ולכן ההרכבה
$h\circ f^{-1}$ היא חח"ע ונקבל:

$$h\circ f^{-1}=(g\circ f)\circ f^{-1} \underset{\text{אסוציאטיביות}}{=} g\circ(f\circ f^{-1})=g\circ I_Y=g$$

כלומר $h\circ f^{-1}=g$ , ! $h\circ f^{-1}$ חח"ע ולכן g חח"ע.

3. ב. דוגמא נגדית: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c,d\}$

$f=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

$g=\{(a,1),(b,2),(c,3),(d,2)\}$

$f\circ g=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

ב. בשלילה

ה. <u>הוכחה</u>: נניח כי f איננה חח"ע, אזי קיימים $x_1\neq x_2\in A$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)$ ולמעט

נפעיל את g ונקבל $gf(x_1)=gf(x_2)$

לפי הנתון $gf=I_A$ ולכן $x_1=x_2$.

סתירה! לכן f חח"ע.

ג. דוגמא נגדית: אותה דוגמא כמו ב א' $g(b)=g(d)$ אבל $b\neq d$.

3. דוגמא נגדית: אותה דוגמא כמו ב א'. ל b אין מקור תחת f.

ה. <u>הוכחה</u>: צריך להראות כי לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ כך ש $g(b)=a$.

יהי $a\in A$ כלשהו.

4. א. f חח"ע. <u>הוכחה</u>: צריך להראות שאם $f(x_1)=f(x_2)$ אז $x_1=x_2$.

$$f(x_1)=f(x_2) \underset{\text{לפי הגדרת } f}{\Rightarrow} 3x_1+1=3x_2+1$$

$$\Rightarrow x_1=x_2$$

g לא חח"ע. דוגמא נגדית: עבור $x_1=1, x_2=-1$ נקבל

$$g(x_1)=g(x_2)=1$$

h חח"ע: <u>הוכחה</u>: אם $h(x_1)=h(x_2)$, קיימות שתי אפשרויות:

I אם $h(x_1)$ חיובי לפי ההגדרה של $h(x)$ ...

לכן המקור של $x_1^2, x_2^2$ הוא הפירוש השלילי לכן $x_1=x_2$

II אם $h(x_1)$ אי-חיובי שלילי אזי לפי הגדרת $h(x)$ כש-$x \geq 0$
ולכן המקור של $x_1^2, x_2^2$ הוא השורש החיובי,
ובפרט $x_1 = x_2$,

ב) $f$ לא על עבור $3 \in \mathbb{Z}$ לא קיים $x \in \mathbb{Z}$ כך ש
$3x+1=3$.

$g$ לא על עבור $-1 \in \mathbb{Z}$ לא קיים $x \in \mathbb{Z}$ כך ש
$|x|=-1$. ~~בפרט~~

$h$ לא על עבור $2 \in \mathbb{Z}$ לא קיים $x \in \mathbb{Z}$ כך ש
$x^2=2$ או $-x^2=2$.

ג)
$$h(f(x)) = \begin{cases} -(3x+1)^2 & \text{אם } 0 \leq 3x+1 \\ (3x+1)^2 & \text{אם } 0 > 3x+1 \end{cases}$$

$$f(h(x)) = \begin{cases} -3x^2+1 & \text{אם } 0 \leq x \\ 3x^2+1 & \text{אם } 0 > x \end{cases}$$

$$f(g(h(x))) = \begin{cases} 3x^2+1 & \text{אם } 0 \leq x \\ 3x^2+1 & \text{אם } 0 > x \end{cases}$$

סה"כ בפרט $f(g(h(x))) = 3x^2+1$.

$h(g(x)) = -x^2$

5) בכל ריבוע תחום בצורה מהצורה $(a,b)\times(c,d)$. בחירת מספר רציונלי בין $a$ ל-$b$ ומספר רציונלי נוסף בין $c$ ל-$d$ מניבה נקודה בפנים הריבוע שקואורדינטות רציונליות. ע"י בחירת נקודה כזאת בכל אחד מהריבועים בקבוצה נקבל העתקה חח"ע מקבוצת הריבועים ל-$Q\times Q$ ומכאן נובע שוב כי עוצמת קבוצת הריבועים היא לכל היותר $\aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = |Q\times Q|$

$f(x,y)=(x-3,y-9)$ - צורי העתקה מהריבוע - 6

$A=\{(x,y) \mid 2\le x\le 4,\ 8\le y\le 10\}$ לריבוע

$B=\{(x,y) \mid -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\}$ .

$g(x,y)=(x,y\sqrt{1-x^2})$ - צורי העתקה מהריבוע B ,

$C=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1\}$ לעיגול

$h(x,y)=(2x,2y)$ - צורי העתקה מהעיגול C

$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 4\}$ . לעיגול

$i(x,y)=(x-1,y-5)$ - צורי העתקה מהעיגול D

$E=\{(x,y) \mid (x+1)^2+(y+5)^2\le 4\}$ . לעיגול

סה"כ העתקה מהריבוע A לעיגול E .

~~$\{(x,y)|$~~

$$e(x,y)=\left(2x-7,\ 2((y-9)\sqrt{1-(x-3)^2})-5\right)$$

צורי ההרכבה של פונ' חח"ע ועל. לכן הפונקציה היא חח"ע ועל.

פתרון נוסף: עוצמת הקטע $|(2,4)|=\aleph$

עוצמת הקטע $|(8,10)|=\aleph$

לכן עוצמת הריבוע $|A|=|(2,4)\times(8,10)|=\aleph\cdot\aleph=\aleph$

* בתוך המעגל B חסום ריבוע, עוצמת הריבוע היא $\aleph$ לכן $|B|\ge\aleph$, מצד שני המעגל B חסום בתוך ריבוע לכן $\aleph\ge|B|$ .

כמסקנה $|B|=\aleph$

נקבל $|A|=|B|=\aleph$

ד

כידוע $R = I \cup Q$. נניח בשלילה כי
קבוצת האי-רציונליים $I$ היא בת מניה. לכן
הקבוצה $I \cup Q$ היא בת מניה, מכיוון ש-$Q$
היא קבוצה בת מניה. ואיחוד של קבוצות בנות מניה
היא קבוצה בת מניה. קיבלנו ש-$R$ היא קבוצה בת מניה.
סתירה! לכן $I$ איננה בת מניה

אוניברסיטת חיפה
מדעי המחשב

סמסטר ב'
להגשה עד 19/5/02 שעה 16:00

# מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 4

1. כמה פתרונות שלמים יש למערכת $x_1+x_2+x_3+x_4=70$ אם
   א. כל $x_i \geq 0$.
   ב. $15 \leq x_1$, $-5 \leq x_2$, $10 \leq x_3$, $0 \leq x_4$.
   ג. $0 \leq x_1 \leq 20$, $0 \leq x_2,x_3,x_4$.
2. יהיו $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ $B=\{a,b,c,d,e\}$
   א. כמה פונקציות שונות ישנן מ A ל B? ומ B ל A ?
   ב. כמה פונק' חח"ע ישנן מ B ל A , ומ-A ל B?
   ג. כמה פונק' על ישנן מ B ל A ? ומ A ל B ?
3. נתונה הקבוצה $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ . כמה תתי-קבוצות X יש כך שכמות המספרים האי-זוגיים ב X גדול ב 1 מכמות המספרים הזוגיים ב X ?
4. יהי A קבוצה בעלת n אברים
   א. כמה יחסים רפלקסיביים קיימים?
   ב. כמה יחסים סימטריים קיימים?
5. בבנין גרים 4 דיירים. יש לחלק ביניהם 7 בקבוקי חלב זהים. מהו מספר האפשרויות אם
   א. אין הגבלה.
   ב. כל דייר חייב לקבל לפחות בקבוק אחד.
6. ליוסי 8 סוגי מדבקות, 3 מדבקות זהות מכל סוג. אבא של יוסי מבקש שיתן 5 מדבקות מתוכן לאחותו הקטנה. בכמה אופנים יכול יוסי לעשות את המבוקש?

# מתמטיקה דיסקרטית פתרון תרגיל בית 4

① א. נחלק 70 כדורים זהים ל-4 תאים שונים ללא הגבלה:

$$\binom{73}{3}$$

ב.

$x_1 \ge 15 \rightarrow x_1 = 15 + y_1 \ , \ y_1 \ge 0$

$x_2 \ge -5 \rightarrow x_2 = -5 + y_2 \ , \ y_2 \ge 0$

$x_3 \ge 10 \rightarrow x_3 = 10 + y_3 \ , \ y_3 \ge 0$

$x_4 \ge 0 \rightarrow x_4 = y_4 \ , \ y_4 \ge 0$

נציב במשוואה המקורית ונקבל

$15 + y_1 - 5 + y_2 + 10 + y_3 + y_4 = 70$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 50$

ונפתור כמו בסעיף א. ונקבל

$$\binom{53}{3}$$

ג. נחשב את מספר הפתרונות כאשר $x_1 \ge 21$, $x_i \ge 0$ עבור $2 \le i \le 4$.

"נחלק" 21 כדורים לתא עבור $x_1$, ואת יתר 49 הכדורים נחלק ללא הגבלה. מס' האפשרויות הוא $\binom{52}{3}$.

לכן מספר האפשרויות רק ש $0 \le x_1 \le 20$ ו $0 \le x_i$ הוא המשלים לכלומר

$$\binom{73}{3} - \binom{52}{3}$$

② א. $f: A \rightarrow B$. כל איבר ב A יכול לעבור לכל איבר ב-B.

לכן יש האפשרויות $5^{10}$.

$f: B \rightarrow A$. כל איבר ב-B יכול לעבור לכל איבר ב-A.

לכן יש אפשרויות $10^5$.

ב. פונק' חח"ע מ A ל-B אין כי $|A| > |B|$

פונק' חח"ע מ B ל-A $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

ג. פונק' על מ B ל- A אין כי $|B|<|A|$. פונק' על מ A ל B:

* סה"כ הפונק' השונות מ A ל-B: $5^{10}$.

1 * שם האפשרויות לפונק' מ A לתת הקבוצה של B עם 4 איברים הוא $4^{10}$, ויש 5 תתי הקבוצות כאלה לכן $5\cdot4^{10}$.

2 * שם האפשרויות לפונק' מ A לתת הקבוצה של B עם 3 איברים הוא $3^{10}$, ומספר הקבוצות האלה הוא $\binom{5}{3}$ לכן נקבל $\binom{5}{3}3^{10}=10\cdot3^{10}$

3 * שם האפשרויות לפונק' מ A לתת הקבוצה של B עם 2 איברים הוא $2^{10}$, ומספר תתי הקבוצות האלה הוא $\binom{5}{2}$ ונקבל $\binom{5}{2}\cdot2^{10}=10\cdot2^{10}$.

4 * שם האפשרויות לפונק' מ A לתת קבוצה של B עם איבר אחד הוא 1, ויש 5 תתי הקבוצות כאלה.

כיוון ש f תהיה על 1,2,3,4 לא יכולות להתקיים, ולכן נתמקד במקרים שלהם, ונקבל לפי כלל ההכלה וההפרדה.

$$5^{10}-5\cdot4^{10}+10\cdot3^{10}-10\cdot2^{10}+5$$

הסבר: הב' כל הפונק' מ A לקבוצה בעלת 4 איברים מכילה בתוכה את כל הפונק' לתוך 3 איברים ואת כל הפונק' לתוך 2 איברים ואת כל הפונק' שתוך איבר אחד.

③

$$\underbrace{\binom{5}{0}\binom{5}{1}}_{\substack{0\text{ זוגי}\\1\text{ אי-זוגי}}}+\underbrace{\binom{5}{1}\binom{5}{2}}_{\substack{1\text{ זוגי}\\2\text{ אי-זוגי}}}+\underbrace{\binom{5}{2}\binom{5}{3}}_{\substack{2\text{ זוגי}\\3\text{ אי-זוגי}}}+\underbrace{\binom{5}{3}\binom{5}{4}}_{\substack{3\text{ זוגי}\\1\text{ אי-זוגי}}}+\underbrace{\binom{5}{4}\binom{5}{5}}_{\substack{4\text{ זוגי}\\5\text{ אי-זוגי}}}$$

4) א. מספר האיברים ב $A\times A$ עבור $|A|=n$ הוא $n^2$. כל יחס על $A$ הוא תת קבוצה של $A\times A$. כל יחס רפלקסיבי מכיל את כל האיברים מהסוג $(a,a)$ ל- $a\in A$, ועבור כל איבר אחר של $A\times A$ יש שתי אפשרויות: נמצא ביחס או לא נמצא ביחס. מספר האיברים הזה הוא $n^2-n$ לכן מספר היחסים הרפלקסיביים הוא

$$2^{n^2-n}$$

ב. כל זוג איברים $(a,b)$ ו $(b,a)$ מופיעים או לא מופיעים - באותו יחס, ועבור כל איבר $(a,a)$ הוא יכול להופיע או לא להופיע בכל יחס. מספר הזוגות $(b,a)$ $(a,b)$ הוא $\frac{n^2-n}{2}$ $(a\neq b)$, ומספר האיברים $(a,a)$ הוא $n$. לכן מספר היחסים הסימטריים הוא

$$2^{\frac{n^2-n}{2}}\cdot 2^{n}=2^{\frac{n^2-n+2n}{2}}=2^{\frac{n+n^2}{2}}$$

5) א. חלוקת 7 הכפפות בין 10 תאים זרים $\binom{10}{7}$

ב. ניתן לשים זוג בכפפות ואת ה 3 הנותרות נחלק ללא הגבלה. $\binom{6}{3}$.

6) פירוקים שונים של 5 לפי הסוגים:

* $2+3$ יש $8\cdot 7$ אפשרויות.
* $1+1+3$ יש $8\cdot\binom{7}{2}$ אפשרויות
* $1+2+2$ יש $8\cdot\binom{7}{2}$ אפשרויות
* $1+1+1+2$ יש $8\cdot\binom{7}{3}$ אפשרויות
* $1+1+1+1+1$ יש $\binom{8}{5}$ אפשרויות

האפשרויות זרות לכן מספר האופנים יהיה הסכום ביניהם. לכן

$$8\cdot 7+8\binom{7}{2}+8\binom{7}{2}+8\binom{7}{3}+\binom{8}{5}$$

אוניברסיטת חיפה
מדעי המחשב

סמסטר ב'
להגשה עד 4/6/02 שעה 16:00

# מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 5

1. חשב את הסכומים הבאים

א. $\sum_{k=0}^{n} 3^k k \binom{n}{k}$

ב. $\left(\sum_{i=0}^{n} (-2)^i \binom{n}{i}\right)\left(\sum_{i=0}^{k} (-5)^i \binom{k}{i}\right)$

2. הוכח כי $$\sum_{\substack{k=0 \\ k\text{זוגי}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

א. הוכחה אלגברית
ב. הוכחה קומבינטורית

3. הוכח כי $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$ ע"י שיקולים קומבינטורים.

4. מהו המקדם של $x^2$ בפיתוח של $(1+\frac{\sqrt{x}}{2})^8$?

5. הוכח ש $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ מספר שלם חיובי לכל $n \geq 0$.

א. בדרך אלגברית
ב. בדרך קומבינטורית

6. כמה פונקציות על קימות מקבוצה |B|=n  על קבוצה בת |A|=r איברים.(הפונקציות לאו דווקא של).

7. כמה מספרים מתוך {1...1000} אינם מתחלקים ב 2,3,5,7.

8. כמה סידורים שונים יש לאותיות a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p כך שכל אות מופיעה לכל היותר פעם אחת.

א. כאשר אף סידור אינו מכיל את המילים bad,deaf,ape?
ב. כאשר בנוסף ל –א ,הסידור אינו מכיל את המילה leading?

9. בכמה דרכים שונות אפשר לסדר 4 ישראלים, 3 רוסים ו-5 סינים כך שאף לאום לא יעמוד כבלוק רציף?

# מתמטיקה דיסקרטית - פתרון תרגיל מס 5

1 א.

$$(x+a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i a^{n-i}$$

נגזור את המשוואה פעם אחת לפי $x$ ונקבל

$$n(x+a)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot i\, x^{i-1} a^{n-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot i\, x^{i-1} a^{n-i} + \underbrace{\binom{n}{0} \cdot 0 \cdot x^{-1} a^{n}}_{0=}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i\, x^{i-1} a^{n-i}$$

נציב $a=1$ , $x=3$ ונקבל

$$n(3+1)^{n-1} = n\,4^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i\, 3^{i-1}$$

נכפיל את שני צדי המשוואה ב 3 ונקבל

$$3n \cdot 4^{n-1} = 3 \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot i \cdot 3^{i-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i\, 3^{i}$$

לכן הסכום הוא $3n \cdot 4^{n-1}$

ב.

$$(-1)^n = (1+(-2))^n = \sum_{i=0}^{n} (-2)^i \binom{n}{i}$$

$$(-4)^k = (1+(-5))^k = \sum_{i=0}^{k} (-5)^i \binom{k}{i}$$

ונקבל $(-1)^n (-4)^k$

2. א. נציב בבינום $a=-1$ , $x=1$ . נקבל

$$0=0^n=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

קיבלנו כי:

$$0=\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ אי-זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}$$

לכן

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ אי-זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$$

ב. אגף שמאל סופר כמה תתי-קבוצות בגודל זוגי יש לקבוצה בגודל $n$. מצד שני ניתן לספור בסה"כ זאת באופן הבא: עקרון הכפל. לכל אחד מ-$n$ איברי הקבוצה, פרט לאחרון, שתי אפשרויות להשתייך לקבוצה או לא, ואילו לאיבר האחרון אפשרות אחת בלבד: אם עד לאיבר זה נבחרו כבר מספר זוגי של איברים אסור לו להשתייך לקבוצה ואם נבחרו מספר אי-זוגי של איברים הוא חייב להשתייך לקבוצה וקיבלנו כי התשובה היא $2^{n-1}$ שבאגף ימין של השוויון.

3. בכמה דרכים ניתן לבחור מתוך $n$ אנשים ועדה עם יו"ר?
מצד אחד, לכל $k\geq 1$ יש $\binom{n}{k}$ ועדות בגודל $k$ ומכל אחת מהן ניתן לבחור יו"ר ב-$k$ אופנים ומכאן $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$

מצד שני, ניתן לבחור ראשית את היו"ר מבין $n$ האנשים ואז להשלים את הוועדה ע"י תת קבוצה של $n-1$ הנותרים וקיבלנו $n\cdot 2^{n-1}$.

$$\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^8=\sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}1^i\,\frac{\sqrt{x}}{2}^{8-i}=\sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{8-i}$$ .4

אנו מעוניינים כאן כאשר $x^2$ המופיע בסכום זה כי $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^4$ שמקדמו הוא $\binom{8}{4}$. נקבל

$$\binom{8}{4}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^4=\binom{8}{4}\frac{x^2}{16}=\frac{70x^2}{16}=\frac{35}{8}x^2$$

לכן מקדמו של $x^2$ הוא $\frac{35}{8}$.

5 א. $$\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)\cancel{n!}}{2^n\cdot \cancel{n!}}$$

לכן נשאר להראות כי $\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{2^n}$ מספר שלם חיובי לכל $n\geq 0$.

באינדוקציה: בסיס האינדוקציה עבור $n=1$ נקבל $\frac{2}{2}=1$ מספר שלם חיובי.

(עבור המקרה ש $n=0$ נקבל כי $\frac{(2\cdot 0)!}{2^0\cdot 0!}=1$ מספר שלם חיובי).

צעד האינדוקציה: נניח כי עבור $n$ מתקיים

$$\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n}$$

מספר שלם חיובי

נראה עבור $n+1$

$$\frac{(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)\cdots(n+2)}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{2(n+1)(2n+1)2n(2n-1)\cdots(n+2)}{2^{n+1}}=\underbrace{\frac{2(2n+1)}{2}}\cdot\underbrace{\frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)}{2^n}}$$

מספר שלם חיובי כי $2n+1$ מספר שלם חיובי    מספר שלם חיובי לפי הנחת האינדוקציה.

נקבל שמכפלה של שני מספרים שלמים חיוביים – הוא מספר שלם חיובי.

# המשך של פתרון לתרגיל 5

(א) בדרך אלגברית

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots 4\cdot3\cdot2\cdot1}{2^n n!}$$

$$= \frac{2n(2n-1)2(n-1)(2n-3)2(n-2)(2n-5)\cdots 2\cdot2\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1}{2^n n!}$$

$$= \frac{\cancel{2^n}\,\cancel{n!}\,(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot1}{\cancel{2^n}\,\cancel{n!}} =$$

$$= (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot1$$

וזהו מספר שלם חיובי לכל $n\geq1$. עבור $n=0$

נקבל $\frac{(2\cdot0)!}{2^0\cdot0!}=1$ .

(ב) בדרך קומבינטורית:

נראה שמספר הדרכים לחלק קבוצה בת $2n$ איברים ל-$n$ זוגות הוא $1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$ .

נבחר את הזוג הראשון ב- $\frac{2n(2n-1)}{2}=n(2n-1)$ אפשרויות.

השני ב- $\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}=(n-1)(2n-3)$ -״-

השלישי ב- $\frac{(2n-4)(2n-5)}{2}=(n-2)(2n-5)$ -״-

וכו'

לפי עקרון הכפל לקבלת $n$ זוגות

$$n(2n-1)(n-1)(2n-3)(n-2)(2n-5)\cdots 2\cdot3\cdot1\cdot1$$

נחלק במספר התמורות של $n$ איברים - $n!$ ונקבל

$$\frac{n(2n-1)(n-1)(2n-3)(n-2)(2n-5)\cdots 2\cdot3\cdot1\cdot1}{n}$$

$$= 1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$$

(6) סה״כ הפונק׳ השונות מ- $B$ ל $A$ $r^n$.

לכל $1 \le i \le r$ תהי $A_i$ קבוצת הפונקציות

ש $a_i$ אינו בתמונה שלהן. אז:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{r} A_i'\right| = |U| - \sum_{i=1}^{r} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le r} |A_i \cap A_j| - \dots =$$

$$= r^n - r(r-1)^n + \binom{r}{2}(r-2)^n - \dots = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n$$

(7) $A_1$ - קבוצת המספרים בין 1 ל- 1000 שמתחלקים ב-2.

$A_2$ - -//- 3

$A_3$ - -//- 5

$A_4$ -//- 7

$|A_1| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500$ $\quad |A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$ $\quad |A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$

$|A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$ $\quad |A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{2 \cdot 3} \right\rfloor = 166$ $\quad |A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{2 \cdot 5} \right\rfloor = 100$

$|A_1 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{2 \cdot 7} \right\rfloor = 71$ $\quad |A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5} \right\rfloor = 66$ $\quad |A_2 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 7} \right\rfloor = 47$

$|A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{5 \cdot 7} \right\rfloor = 28$ $\quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor = 33$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor = 23$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{2\cdot5\cdot7} \right\rfloor = 14 \qquad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{3\cdot5\cdot7} \right\rfloor = 9$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{2\cdot3\cdot5\cdot7} \right\rfloor = 4$$

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'| = 1000 - 500 - 333 - 200 - 142 + 166 + 100 + 71$$
$$+ 66 + 47 + 28 - 33 - 23 - 14 - 9 + 4$$

$$= \underline{\underline{228}}$$

(8) פתרון לשאלה: כמה תמורות שונות יש לאותיות
$a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p$.

סה"כ תמורות - $16!$

$A_1$ - מספר התמורות המכילות את המלה bad - $14!$.

$A_2$ - //- def - $13!$.

$A_3$ - //- ape - $14!$.

$A_4$ - //- leading - $10!$

א. $|A_1 \cap A_2| = 0 \quad |A_1 \cap A_3| = 0 \quad |A_2 \cap A_3| = 0$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3'| = \underline{\underline{16! - 14! - 13! - 14!}}$$

ב. $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 0 \quad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0 \quad |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 0$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0 \quad |A_1 \cap A_4| = 0 \quad |A_2 \cap A_4| = 0 \quad |A_3 \cap A_4| = 0$

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'| = 16! - 14! - 13! - 14! - 10!$$

9. סה"כ האפשרויות לסידור $12!$

$A_1$ - מספר האפשרויות ש-4 הישראלים יושבים בשורה יחד $9! \cdot 4!$

$A_2$ - // ש-3 הרוסים -//- $10! \cdot 3!$

$A_3$ - -//- ש-5 סינים -//- $8! \cdot 5!$

$|A_1 \cap A_2| = 7! \cdot 4! \cdot 3!$ $\quad$ $|A_1 \cap A_3| = 5! \cdot 4! \cdot 5!$

$|A_2 \cap A_3| = 6! \cdot 3! \cdot 5!$ $\quad$ $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 3!$

לכן

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3'| = 12! - 9! \cdot 4! - 10! \cdot 3! - 8! \cdot 5! + 7! \cdot 4! \cdot 3!$$

$$+ 5! \cdot 4! \cdot 5! + 6! \cdot 3! \cdot 5! - 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 3!$$

אוניברסיטת חיפה
מדעי המחשב

סמסטר ב'
להגשה עד 13/6/02 שעה 16:00

# מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 6

1. קודקודיו של המחומש ABCDE הן נקודות סריג במישור (כלומר נקודות בעלות שיעורים שלמים. הוכח כי קיימים לפחות שני קודקודים שנקודת האמצע שלהם היא נקודת סריג.
2. הוכח כי לכל n טבעי אפשר למצוא תת-קבוצה בת n איברים של {1,2,3…,2n} שאינם מתחלקים זה בזה. רמז:כל מספר טבעי חיובי t אפשר להציג באופן יחיד כמכפלה של מספר אי-זוגי במספר שהוא חזקה של 2, כלומר קיימים $k,r\in N$ כך ש $t=2^k(2r+1)$.
3. מצא ביטוי מפורש עבור האיבר ה- n-י של סדרת פיבונצ'י.
4. נסמן ב- $a_n$ את מספר הסדרות באורך n של הסימנים a,b,1,2,3,4 שאין בהן שתי ספרות (1/2/3/4 ) רצופות (אבל ייתכנו שתי אותיות רצופות). מצא יחס רקורסיה עבור $a_n$.
5. מצא יחס רקורסיה לחישוב מספר האפשרויות לפזר n עצמים שונים ל- k ארגזים שווים, כאשר בכל ארגז יש לפחות עצם אחד.

מתמטיקה דיסקרטית - פתרון תרגיל מס' 6.

1. נסווג את חמש הנקודות $A,B,C,D,E$ לפי הזוגיות של הרכיבים: (זוגי, זוגי), (זוגי, אי-זוגי), (אי-זוגי, זוגי), (אי-זוגי, אי-זוגי).
לפי עקרון שובך היונים קיימות שתי נקודות השייכות לאותו הסוג. נניח $A,B$. שני סכומי הרכיבים של נקודות אלה הם זוגיים ולכן נקודת האמצע היא נקודת סריג.

2. נתבונן בקבוצה $A = \{n+1, \ldots, 2n\}$
בקבוצה זו יש $n$ איברים.
טענה: איברי $A$ אינם מחלקים זה את זה.
הוכחה: אם מחלקים את $2n$ ב-$n$ נקבל $2$, לכן אם נחלק את $2n$ בשאר איברי $A$ נקבל תוצאה בין $1$ ל-$2$. לכן כל איברי $A$ אינם מחלקים את $2n$. באותו אופן אם נחלק את $2n-1$ ב-$n$ נקבל $2-\frac{1}{n} < 2$, ולכן כל שאר איברי $A$ שקטנים מ $2n-1$ אינם מחלקים את $2n-1$, וכו'.
לכן איברי $A$ אינם מתחלקים זה בזה.

3. $a_0 = a_1 = 1$ $\qquad$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

נציב $a_n = x^n$ $\qquad$ $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$

$x^2 - x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$a_n = A_1 \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n + A_2 \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n$$

$n=0$ , $A_1 + A_2 = 1$

$n=1$ , $A_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + A_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$

נקבל $A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , $B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ולכן: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right)$

4. $a_0 = 1$ , $a_1 = 6$

$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$

5. נסמן ב $P(n,k)$ את מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים ל- k ארגזים שונים כאשר בכל ארגז להיות לפחות עצם אחד. יחס הרקורסיה הוא $P(n,k) = kP(n-1,k) + P(n-1,k-1)$

כאשר, עבור $n<k$ $P(n,k)=0$ ו $P(n,1)=1, P(n,n)=n!$

הסבר: נסתכל על העצם ה n-י. ישנו 2 אפשרויות: או שהוא בארגז לבד, או שלא. אם הוא בארגז נפרד נשים אותו בארגז נפרד (בדרך יחידה) ואת שאר n-1 העצמים ב k-1 ארגזים ב $P(n-1,k-1)$ אופנים. אם הוא לא בארגז

נסדר, ואז נשבץ את שאר n-1 העצמים ב-n [illegible]

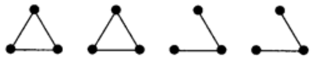
ב- $P(n-1,k)$ אפשרויות, ונוסיף אותו לאחד האיברים

ב- k אופנים שונים.

אוניברסיטת חיפה
מדעי המחשב

סמסטר ב'
להגשה עד 19/6/02 שעה 16:00

# מתמטיקה דיסקרטית –תרגיל בית מס' 7

1. הראו כי אם גרף מכיל שביל בין שני צמתים u,v אז הוא מכיל מסלול בין u ל v.
2. הוכח כי כל גרף עם n צמתים ו- k קשתות מכיל לפחות n-k רכיבי קשירות.
3. הוכח כי אם כל שני צמתים בגרף חסר לולאות G מחוברים ע"י מסלול יחיד, אז G הוא עץ.
4. הוכח כי כל עץ עם בדיוק שני צמתים מדרגה אחת הוא מסלול.
5. יהי G גרף עם צמתים v1,..,v4 כך שהגרפים G-v1,…G-v4 הם הגרפים הבאים: ציין מהו G.

6. נניח כי דרגת כל צומת של גרף הי :אורך זוגי ( רמז הסתכל על מסלול מקסימלי).
7. נניח כי n>=3 V( G) = {v1,v2,..,vn} אם לפחות שניים מהתת-גרפים G-v1…G-vn קשרים אז G קשיר.

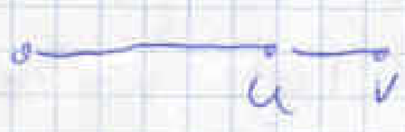
# פתרון תרגיל מס' 7

1. בשאלה נניח כי גרף $G$ מכיל שביל בין שני צמתים $u,v$ אך הוא לא מכיל מסלול בין $u$ ו-$v$.
אזי $u$ ו-$v$ נמצאים בשני רכיבי הקשירות שונים ב-$G$. ~~אבל~~ מכיון שאין קשת בין רכיב הקשירות של $u$ ורכיב הקשירות של $v$ אין גם שביל בין $u$ ל-$v$ בסתירה להנחה. לכן יש מסלול בין $u$ ו-$v$.

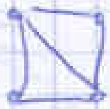
2. באינדוקציה על מספר הקשתות.
בסיס האינדוקציה: $k=0$. במקרה שבגרף עם $n$ קדקודים ואפס צלעות יש $n$ רכיבי קשירות.
שלב האינדוקציה: נניח נכונות לגרפים עם $k \ge 1$ צלעות, ונוכיח לגרף עם $k+1$ צלעות.
יהי $G$ גרף כזה ותהי $e$ צלע כלשהי ב-$G$.
לפי הנחת האינדוקציה בגרף $G \setminus \{e\}$ יש לפחות $n-k$ רכיבי קשירות. נוסיף כעת חזרה את הצלע $e$, ייתכנו שני מקרים:
א. אם הצלע $e$ מחברת שני קדקודים השייכים לאותו רכיב הקשירות בגרף $G \setminus \{e\}$ הרי גם ב-$G$ יש $n-k$ רכיבי קשירות.
ב. אם $e$ מחברת שני הקדקודים השייכים לשני רכיבי הקשירות שונים בגרף $G \setminus \{e\}$ אז ב-$G$ יש רכיב הקשירות אחד ~~פחות~~ פחות מאשר ב-$G \setminus \{e\}$ לכומר יש ב-$G$ $n-k-1$ רכיבי קשירות.
בכל מקרה הראנו שב-$G$ יש לפחות $n-k-1$ רכיבי הקשירות.

3. נניח כי $G$ אינו עץ. אזי ב-$G$ יש מעגל.
יהיו $a$-ו-ט שני קודקודים במעגל זה. אזי בין
$a$ ו- ט ישנם שני מסלולים לאורך המעגל
בסתירה להנחה שכל שני צמתים מחוברים ע"י מסלול
יחיד. לכן $G$ היא עץ.

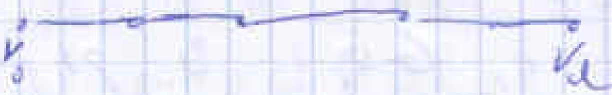
4. באינדוקציה על מספר הקשתות:
בסיס האינדוקציה עבור $n=2$  ברור.
שלב האינדוקציה: נניח עבור $n \geq 2$ מתקיים, ונוכיח
עבור $n+1 \geq 2$.
אזי ב-$T$ ישנם שני קודקודים מדרגה אחת.
נמצא את אחד הקודקודים האלו $V$, ויהי $u$ השכן
של $V$ ב-$T$. הגרף $T \setminus \{v\}$ הוא עץ עם
שני קודקודים מדרגה אחת - שהרי הוא עלה לכן
$T$ נשאר קשיר. ודרגתו של $u$ עכשיו היא 1 -
אחרת דרגתו של $u$ ב-$T$ היא לפחות 3 -
ואז נקבל כי ב-$T$ יש לפחות 3 קודקודים
מדרגה 1. כל שאר הקודקודים ב- $T \setminus \{v\}$
נשארו באותה דרגה. לכן לפי הנחת האינדוקציה
נקבל כי $T \setminus \{v\}$ הוא מסלול. ב-$T \setminus \{v\}$
יש שני קודקודים בדיוק מדרגה אחת ש-$u$
הוא אחד מהקצוות של המסלול.
נחבר את $v$ ונקבל מסלול



5 $K_4$ פחות קשת



6. נתבונן על מסלול מקסימלי ב- $G$.
(מסלול מקסימלי - אי אפשר להגדיל אותו ע"י הוספת קשת).

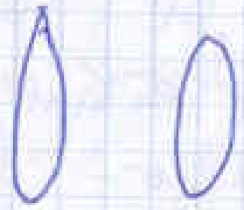



מכיוון שדרגת כל קודקוד היא לפחות 3 אז מ $v_0$ יוצאים לפחות עוד שני הקשתות, אך מכיוון ש $v_0, \ldots, v_k$ זה מסלול מקסימלי הקשתות פוגעות בקודקודים בתוך המסלול (אחרת היה אפשר להגדיל את המסלול בסתירה למקסימליות).

שתי אפשרויות: א. אחת הקשתות פוגעת בקודקוד במרחק אי-זוגי $v'$ ואז נקבל $v_0, v', \ldots, v_0$ מעגל באורך זוגי.


ב. שתי הקשתות פוגעות בקודקודים $v', v''$ במרחק זוגי מ $v_0$. אזי $v_0, v'', \ldots, v', v_0$ מעגל באורך זוגי כי המרחק בין $v'$ ל $v''$ הוא זוגי.

7. בשלילה נניח כי $G$ אינו קשיר. אזי ל-$G$ יש
לפחות 2 מרכיבי קשירות



$V_1$ $V_2$

יהיו $i$ ו-$j$ כך ש $G-v_i$, $G-v_j$ קשירים
מכיוון ש $G-v_i$ קשיר ויש לנו 2 מרכיבי קשירות
לפחות $v_i$ נמצא במרכיב קשירות אחד, וכל היתר
נמצאים במרכיב הקשירות השני.
באותו אופן $G-v_j$ קשיר אזי $v_j$ נמצא במרכיב
קשירות אחד, וכל היתר נמצאים במרכיב קשירות השני
קיבלנו כי ב-$G$ יש שני רכיבי קשירות שבכל
אחד מהם יש קודקוד אחד בלבד. בסתירה לנתון
ש $n \geq 3$.