לוגיקה 1

יום ראשון 03 יוני 2007
15:31

השפה הראשונה שנגדיר: תחשיב הפסוקים.

נתאר תאור לא פורמלי:

קשרים:

$\leftrightarrow$ אמ"מ, $\neg$ לא, $\rightarrow$ אם אז, $\vee$ או, $\wedge$ וגם

הביטויים בשפה ייקראו פסוקים.

יש תרגום פסוק למשפטים בעברית ולהפך.

A שמש זורחת

B חם בחוץ

השמש זורחת וגם חם בחוץ $= (A \wedge B)$

אם השמש זורחת אז חם בחוץ $= (A \rightarrow B)$

הגדרה פורמלית

האותיות בשפה: $\{(\,,\,)\,,\,\wedge\,,\,\vee\,,\,\rightarrow\,,\,\neg\,,\,\leftrightarrow\}$

וכן אותיות לטיניות (עם או בלי אינדקסים)

הגדרת תחשיב הפסוקים מתבצעת באינדוקציה:

בבסיס יהיו אותיות לטיניות עם/בלי אינדקס מספרי

האיברים בבסיס נקראים פסוקים אטומיים

הסגור מכיל 5 פעולות:

$P_\vee, P_\wedge, P_\rightarrow, P_\neg, P_\leftrightarrow$

$$P_\wedge(\alpha,\beta) = (\alpha \wedge \beta)$$
$$P_\vee(\alpha,\beta) = (\alpha \vee \beta)$$
$$P_\rightarrow(\alpha,\beta) = (\alpha \rightarrow \beta)$$
$$P_\neg(\alpha) = (\neg \alpha)$$
$$P_\leftrightarrow(\alpha,\beta) = (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

יום רביעי 06 יוני 2007
10:13

קבוצת הפסוקים היא הקבוצה המוגדרת באינדוקציה ע"י האטומים והפעולות שקבענו.

<u>דוגמאות לפסוקים</u>

A_5 , $(B_8 \land A_5)$, $(C \land D)$, $(C \leftrightarrow D)$

פסוק אטומי

האם $((A \to B) \leftrightarrow (C \land D))$ הינו פסוק?

נראה סדרת יצירה:

1. A אטום
2. B אטום
3. C אטום
4. D אטום
5. $(A \longrightarrow B)$ 1,2 ע"פ $P_\to$
6. $(C \land D)$ 3,4 ע"פ $P_\land$
7. $((A \to B) \leftrightarrow (C \land D))$ 5,6 ע"פ $P_\leftrightarrow$

משמעות

חישוב ערך האמת מתבצע בשני שלבים:

(I) שלב ראשון - ערכים לאטומים

<u>מגדירים השמה:</u>

$V: \text{קבוצת האטומים} \to \{T, F\}$

true, False

(V מתאימה לכל פסוק אטומי ערך בוליאני)

<u>תפקיד ההשמה:</u>

לעשות הקבלה של טענות במקום הפסוקים האטומיים.

<u>מטרה:</u>

להתאים ערך בוליאני לפסוקים מורכבים.

(II) שלב שני - שלב הטיפוס ("שלב הפעולות")

הערה: להרחיב את ההשמה V כך שתתאים ערך לכל הפסוקים ולא רק לפסוקים האטומיים.

נתונה השמה V.

עבור פסוק אטומי X נסמן $V(X)$ את הערך שההשמה V נותנת ל-X.

עבור פסוק α נסמן $\bar{V}(\alpha)$ את הערך שמתאים ל-α תחת ההשמה V.

בעצם הסימון $\bar{V}$ הוא הרחבה של V עבור הוספת המשמעות של פעולות והוא מאפשר על פסוקים (ולא ערכים אטומיים כמו V).

לשם כך מגדירים לכל פעולה טבלת אמת שמפרטת מה יהיה ערך הפסוק שיתקבל בהינתן ערכי האמת של הפסוקים עליהם הופעלה הפעולה.

או

α	β	$(\alpha\vee\beta)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

וגם

α	β	$(\alpha\wedge\beta)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

not

α	$(\neg\alpha)$
T	F
F	T

אם

שקול

$P_{\rightarrow}$

α	β	$(\alpha\rightarrow\beta)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$P_{\leftrightarrow}$

α	β	$\alpha\leftrightarrow\beta$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

סדר קדימויות בין הקשרים

לשם נוחות, מגדירים סדר קדימויות בין הקשרים ומשמיטים סוגריים אלא אם כן חייבים סוגריים כדי למנוע כפל משמעות או כאשר רוצים להפעיל את הקשרים בסדר שונה.

חשיבות גבוהה
1. $\neg$
2. $\vee, \wedge, \leftrightarrow$
3. $\rightarrow$

חשיבות נמוכה

למשל,

$$((\neg A)\vee(\neg B)) \downarrow \neg A\vee\neg B$$

$$(\neg(A\vee B)) \downarrow \neg(A\vee B)$$

מושגי בסיס סמנטיים:

הגדרה: פסוק α יקרא טאוטולוגיה אם לכל השמה v $\bar{v}(\alpha)=T$.

דוגמא: $(A\vee\neg A)$ הוא תמיד מקבל T.

- איך מוכיחים על פסוק שהוא טאוטולוגיה?
  - לכאורה צריך לעבור על כל ההשמות האפשריות ולבדוק שבכל אחת מהן הפסוק מקבל T.

ניתן להראות שעבור פסוק שלו מנת לחשב את ערך האמת של α תחת השמה v מספיק לדעת מהם ערכי האמת ש-v נותנת רק לאטומים המופיעים ב-α.
כמה מס' סופי של אטומים.

השיטה

משרטטים טבלה ובה בכל שורה עוברים על אפשרות לערכי אמת עבור האטומים של α ומחשבים מה יהיה ערך האמת המתקבל באותו מקרה.

דוגמא:

$$(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C)) = \alpha$$

A	B	C	$(B\to C)$	$A\to(B\to C)$	$(A\to C)$	$B\to(A\to C)$	α
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F	T

דוגמא לטאוטולוגיה:

$$(A\to B)\leftrightarrow(\neg B\to\neg A)$$

$$\neg(A\wedge B)\leftrightarrow\neg A\vee\neg B$$

$$\neg(A\vee B)\leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$$

הגדרה

פסוק α הינו סתירה אם לכל השמה V מתקיים $\bar{V}(\alpha)=F$.

ברור ש: α טאוטולוגיה $\iff$ $\neg\alpha$ סתירה

ע"מ להראות ש- α סתירה נבנה טבלה בדומה לבדיקה של טאוטולוגיה.

הגדרה

נאמר ששני פסוקים α,β הם שקולים לוגית ונסמן $\alpha\equiv\beta$ אם לכל השמה V מתקיים:
$\bar V(\alpha)=\bar V(\beta)$

למשל:
① $A\wedge B\equiv B\wedge A$
② $A\equiv \neg\neg A$
③ $(A\to B)\equiv(\neg B\to\neg A)$

איך מוכיחים?

A	B	$(A\to B)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

A	B	$(\neg B\to\neg A)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

טענה: לכל α,β מתקיים:

$\alpha\equiv\beta \iff$ הפסוק $(\alpha\leftrightarrow\beta)$ הוא טאוטולוגיה

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח $\alpha\equiv\beta$ ונראה כי $(\alpha\leftrightarrow\beta)$ הוא טאוטולוגיה
נניח בשלילה שלא. כלומר $(\alpha\leftrightarrow\beta)$ אינו טאוטולוגיה. לכן קיימת השמה V כך ש: $\bar V(\alpha\leftrightarrow\beta)=F$
לכן או: $\bar V(\alpha)=T$ וגם $\bar V(\beta)=F$
או: $\bar V(\alpha)=F$ וגם $\bar V(\beta)=T$
בסתירה לכך ש: $\bar V(\alpha)=\bar V(\beta)$ תמיד מכיוון שהם שקולים לוגית $(\alpha\equiv\beta)$.

$\Rightarrow$ עבור ההשמה הנ"ל (V) מתקיים גם: $\bar V(\alpha\leftrightarrow\beta)=F$
בסתירה להנחה ש: $(\alpha\leftrightarrow\beta)$ טאוטולוגיה.

תחשיב היחסים:

לא הכל אפשר להציג בעזרת תחשיב פסוקים, למשל:
"לכל מספר טבעי קיים מס' שגדול ממנו"

כמתים:

$\forall x\alpha$ - הטענה נכונה לכל ערך של המשתנה x.
$\exists x\alpha$ - קיים ערך עבור x שעבורו הנוסחה α נכונה.

תרגום המשפט:

$$\forall x \exists y ,\ y > x \qquad , x,y \in \mathbb{N}$$

שקילויות:

(1) $\forall x\alpha \equiv \neg\exists x\neg\alpha$ — לכל x α $\equiv$ לא קיים x שאינו מקיים α

(2) $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$ — לא לכל x מקיים α $\equiv$ קיים x שלא מקיים α

(3) $\forall x\neg\alpha \equiv \neg\exists x\alpha$ — לכל x אינו מקיים α $\equiv$ לא קיים x שמקיים α

(4) $\neg\forall x\neg\alpha \equiv \exists x\alpha$ — לא לכל x לא מקיים α $\equiv$ קיים x המקיים α